

Abdullayev Ş.S., Əkpərova H.A., Haxıyev S.S.

CƏBRDƏN ÇALIŞMALAR

(DƏRS VƏSAİTİ)

I HİSSƏ

*ADPU-nun Elmi Şurasının
31 oktyabr 2023-cü il iclasının qərarına
əsasən çap edilir (pr2)*

BAKİ-2023

Elmi redaktor: dos. Luğman Şəfaqət oğlu Əbdülkərimli
ADPU-nun Cəbr və həndəsə
kafedrasının dosenti, f.-r.e.n.

Rəyçilər: dos. Sədi Andam oğlu Bayramov.
BDU-nun “Cəbr və həndəsə” kafedrasının
professoru, r.ü.e.d.

prof. Azadxan Səfərxan oğlu Adıgözəlov ADPU-
nun Riyaziyyat və onun tədrisi texnologiyası
kafedrasının professoru, p.e.d.

prof. Rəhim Mikayıl oğlu Rzayev
ADPU-nun “Riyazi analiz” kafedrasının
professoru, f.-r.e.d.

Abdullayev Ş.S., Əkpərova H.A., Haxıyev S.S.
ADPU-nəşriyyatı. Bakı-2023. 384 s.

Dərs vəsaiti universitetlərin “Riyaziyyat və informatika müəllimliyi”, “Riyaziyyat müəllimliyi” və “İnformatika müəllimliyi” ixtisaslarının bakalavr pilləsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Giriş

“Cəbr” fənni universitetlərin riyaziyyat və fizika fakültələrində uyğun proqram əsasında tədris olunur. Cəbr kursu gələcək riyaziyyat müəllimlərinin yetişməsində böyük rol oynayır, belə ki, məktəb riyaziyyat kursunun mənimsənilməsində əsas vəzifəni daşıyır. Lakin bu fənnə aid Azərbaycan dilində bu vaxta qədər tam şəkildə məsələ və misallar kitabı yazılmamışdır. Ona görə belə bir dərs vəsaitinin yazılması tələbi Cəbr və həndəsə kafedrasında qərara alınmışdır.

Müəlliflər kitabı yazarkən cəbrə aid proqrama uyğun olmaqla rus və azərbaycan dillərində yazılmış dərslik və dərs vəsaitlərindən də istifadə etmişlər.

Kitab “Cəbr” proqramına uyğun olaraq, müəlliflərin uzun illər Pedaqoji Universitetin riyaziyyat və fizika fakültələrində oxuduqları mühazirələr və apardıqları praktik məşğələlər zamanı əldə etdiyi pedaqoji təcrübələrinə əsaslanaraq yazılmışdır. Vəsaiti yazarkən müəlliflər nəzərə almışlar ki, ali təhsilin mühüm məsələsi tələbələrin biliklərə sərbəst yiyələnməyə cəlb edilməsindən ibarətdir. Tələbələri öyrətmək sistemindən, onların, özlərinin öyrənməsi sisteminə keçmək zəruridir. Kitabda hər bir fəslin əvvəlində zəruri nəzəri materiallar qısa şərh olunur və tipik məsələ, misallar həlli

verilir, hər bir paraqrafın sonunda sərbəst iş üçün məsələ və misallar təklif olunmuşdur. Bizim nöqteyi nəzərimizcə belə struktur, tələbələrin sərbəst işləməsini aktivləşdirir, nəzəri materialları mənimsəməsinə imkan verir. Vəsaitə aşağıdakılar daxildir: I fəsil çoxluq və münasibətlər, II fəsil cəbrlər, qrup, halqa, meydan, III fəsil kompleks ədədlər meydanı, IV fəsil xətti fəzalar, V fəsil matrislər və determinantlar, VI fəsil isə xətti tənliklər sistemi bəhsindən ibarətdir.

Müəlliflər BDU-nun “Cəbr və həndəsə” kafedrasının dosenti f.-r.e.n S.A.Bayramova, həmçinin prof R.M.Rzayev və prof. A.S.Adıgözəlova vəsaitin yaxşılaşması üçün verdikləri qiymətli fikirlərinə, məsləhətlərinə və rəyə görə dərin minnətdarlığını bildirirlər.

Kitabın müzakirəsində fəal iştirak etdiklərinə görə ADPU-nun riyaziyyat-informatika fakültəsinin Cəbr və həndəsə kafedrasının kollektivinə, xüsusən də kafedranın müdiri riyaziyyat üzrə f.r.e.n., dosent Z.Q. Sadıxova, kitabın redaktoru dosent L.Ş.Əbdülkərimliyə, vəsaitin yazılmasındakı əməyinə görə isə Ş.Ş.Süleymanovaya dərin təşəkkürümüzü bildiririk.

İ F Ə S İ L

ÇOXLUQLAR VƏ MÜNASİBƏTLƏR

§1. Çoxluqlar

Çoxluq dedikdə müəyyən əşyaların bir tam halında baxılan ixtiyari yığımı başa düşülür. Çoxluğun təşkil olunduğu əşyalar çoxluğun elementləri adlanır. x əşyasının A çoxluğunun elementi olması $x \in A$ kimi işarə olunur.

Çoxluqu aşağıdakı qaydalarla vermək olar:

1. Çoxluğun bütün elementlərinin göstərilməsi ilə;
2. Çoxluğun bütün elementlərinə aid olan xarakterik xüsusiyyətin göstərilməsi ilə. Bu halda çoxluq $\{x | M(x)\}$ kimi işarə olunur, $M(x)$ x – elementinə aid olan xassədir.

Eyni elementlərdən təşkil olunmuş çoxluqlar bərabər çoxluqlar adlanır.

A çoxluğunun hər bir elementi B çoxluğunun da elementi olarsa, A çoxluğu B çoxluğunun altçoxluğu adlanır və $A \subset B$ kimi işarə olunur.

Əgər $A \subset B \wedge A \neq B$ isə, onda A B çoxluğunun məxsusi alt çoxluğu adlanır. Heç bir elementi olmayan çoxluq boş çoxluq adlanır və $\emptyset$ kimi işarə olunur. Boş çoxluq yeganədir və ixtiyari çoxluğun alt çoxluğudur. $A \subset B$ və

$B \subset A$ olması $A = B$ münasibəti ilə ekvivalentdir. Bu xassədən iki çoxluğun bərabərliyinin isbat olunmasında istifadə olunur.

A çoxluğunun bütün altçoxluqları çoxluğu $P(A)$ kimi işarə olunur. Baxılan prosesdə bütün çoxluqların daxil olduğu çoxluq universal çoxluq adlanır və U kimi işarə olunur, məsələn, elementar hesabda universal çoxluq olaraq Z çoxluğunu, həndəsədə verilmiş fəzanın nöqtələri çoxluğunu götürmək olar.

U çoxluğunda aşağıdakı kimi cəbri əməllər təyin olunur:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ çoxluğu A və B çoxluqlarının birləşməsi adlanır.

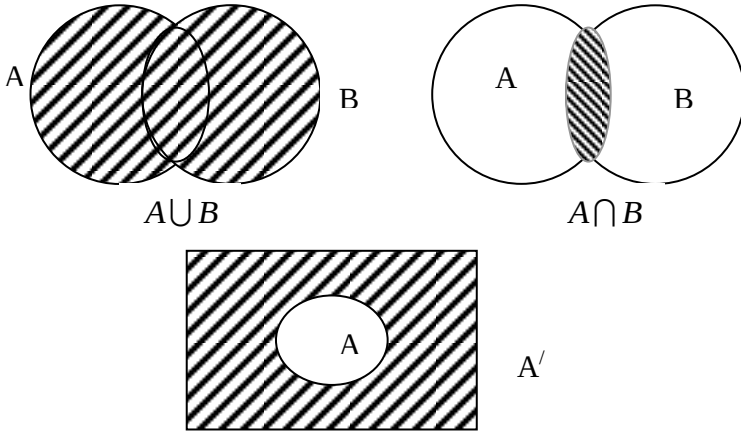
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ çoxluğu A və B çoxluqlarının kəsişməsi adlanır.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ çoxluğu A ilə B çoxluğunun fərqi adlanır. $A \subset U$ olduqda $U \setminus A$ fərqi A çoxluğunu U çoxluğuna tamamlayan çoxluq adlanır və A' kimi işarə olunur.

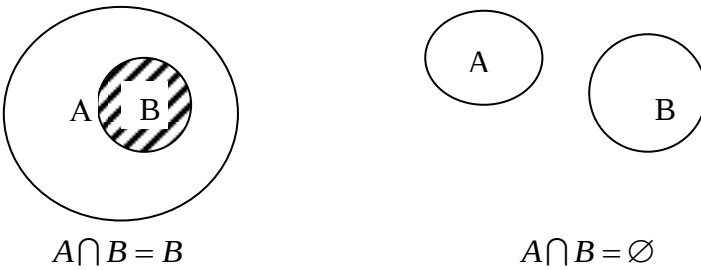
$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ çoxluğu A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi adlanır.

Çoxluqlar üzərindəki əməlləri və xassələrini əyani təsəvvür etməkdən ötrü Eyler-Venn diaqramlarından istifadə

olunur. Bu zaman universal çoxluq hər hansı düzbucaqlının nöqtələri çoxluğu ilə, altçoxluqlar isə bu düzbucaqlının daxilində qapalı xətlə əhatə olunmuş müstəvi hissələri ilə təsvir olunurlar. Onda, $A \cup B, A \cap B, A' = U \setminus A$ çoxluqları aşağıdakı kimi ştrixlənmiş hissələrlə təsvir olunurlar:



Misal 1. $A \cap B = B$ və $A \cap B = \emptyset$ bərabərliklərinin Eyler-Venn diaqramları vasitəsilə təsviri aşağıdakı kimi olar.



Misal 2. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ olduğunu isbat etməli .

Həlli. Fərz edək ki, $\forall x \in A \setminus (B \setminus C)$. Onda $x \in A \wedge x \notin B \setminus C$. Buradan alınır ki, $x \notin B$. Onda $x \in A \setminus B$ olur və $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ alınır. Beləliklə,

$$A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C) \quad (1)$$

Tərsinə $\forall y \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ olsun. Onda aşağıdakı hallar ola bilər

$$1) y \in A \setminus B$$

$$y \in A \setminus B \Leftrightarrow y \in A, y \notin B \Rightarrow y \in A \wedge \forall C, y \notin B \setminus C \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in A \setminus (B \setminus C)$$

$$2) y \in A \cap C$$

$$y \in A \cap C \Leftrightarrow y \in A \wedge y \in C \Rightarrow y \in A \wedge \forall B, y \notin B \setminus C \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in A \setminus (B \setminus C).$$

Hər iki halda alınır ki,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subset A \setminus (B \setminus C) \quad (2)$$

(1) və (2)-dən alınır ki, $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Misal 3. $A = \{x \in N \mid |2x - 1| \leq 4\}$ və $B = \{x \in Z \mid |3x + 1| < 7\}$

olduqda $A \cup B$ çoxluğunu tapmalı.

Həlli: $A = \{x \in N \mid |2x - 1| \leq 4\} = \{1, 2\}$

$$B = \{x \in Z \mid |3x + 1| < 7\} = \{-2, -1, 0, 1\}.$$

Onda $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Misal 4. $A = \{x \in R \mid 4 \sin^2 x \leq 1\}$ çoxluğunun tamamlayıcısını tapmalı.

Həlli: Əvvəlcə A çoxluğunu müəyyən edək.

$$4 \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left\{ x \in R \mid x \in \left[\frac{5\pi}{6} + \pi k, \frac{7\pi}{6} + \pi k \right], k \in Z \right\}. \text{Onda}$$

$$A' = \left\{ x \in R \mid x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k \right), k \in Z \right\}$$

1. $A = \{\{a, b\}, \{k, c, n\}, \{o, n, r, j\}\}$ olduqda aşağıdakılardan hansı doğrudur.

a) $\{k, c, n\} \in A$

c) $\{o, n\} \in A$

b) $a \in A$

d) $\{a, b\} \in A$

2. $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ doğrudurmu? Cavabı əsaslandırın.

3. Aşağıdakı münasibətlərin doğru olduğunu göstərin.

a) $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} \neq \{\{a, b, c\}\}$

b) $\{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$

4. A çoxluğunun bütün altçoxluqlarını göstərin.

a) $A = \{a\}$ b) $A = \{a, b\}$ c) $A = \{a, b, c\}$

5. $A = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$ və $B = \{2, 5\}$ isə, $A=B$ olduğunu isbat edin.

6. İsbat edin ki, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

7. X çoxluğunun hər bir elementi Y çoxluğuna daxil olduqda

a) $Y \subset X$, b) $X \subset Y$, c) $X = Y$

hallarından hansı doğrudur?

8. Çoxluqlar arasında daxil olma münasibəti üçün aşağıdakı xassələri isbat edin:

a) $A \subset A$ (refleksivlik).

b) əgər $A \subset B$ və $B \subset C$ isə, onda $A \subset C$ (tranzitivlik).

c) $A \subset B$ və $B \subset A$ isə, onda $A = B$ (antisimmetriklik)

d) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

e) $A \setminus B \subset A$.

9. İsbat edin ki, heç bir elementi olmayan çoxluq (boş çoxluq) yeganədir.

10. Verilmiş çoxluqlar cütlərinin hansı münasibətdə olduqlarını aydınlaşdırın:

a) $A = \{m, n, p\}$, $B = \{k, n, m\}$ c) $A = \{m, n, p\}$, $B = \{p, m, n\}$

b) $A = \{m, n, p\}$, $B = \{n, m, p, k\}$ d) $A = \{m, n, p\}$, $B = \{k, \ell\}$

11. Elə A, B və C çoxluqları varmı ki,

$A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$ olsun?

12. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, 4\}$, $C = \{4, 2, c\}$, $D = \{a, b, 3\}$, $E = \{1, b\}$ çoxluqları verilmişdir. $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset B$ olduqda a, b, c, d elementlərini tapın.

13. Aşağıdakı münasibətlərin hansı doğrudur:

- a) $\{m, n\} \subset \{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$
- b) $\{m, n\} \in \{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$
- c) $\{m, k\} \subset \{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$
- d) $\{m, k\} \in \{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$

14. İxtiyari A , B , C çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlərdən hansı doğrudur.

- a) Əgər $A \not\subset B$ və $B \not\subset C$ isə, onda $A \not\subset C$,
- b) Əgər $A \subset B$, $A \neq B$ və $B \subset C$, $B \neq C$ isə, onda $C \not\subset A$,
- c) Əgər $A \subset B$, $A \neq B$ və $B \in C$ isə, onda $A \notin C$.

15. $\{x \in \mathbb{Z} \mid (\exists y \in \mathbb{Z}^+ : x = 2y) \wedge (\exists y \in \mathbb{N} : x = 3y)\}$

çoxluğunu sadə şəkildə yazın.

16. Dairənin tərifinə əsasən dairə nöqtələrini ifadə edən çoxluğu göstərin.

17. Düzbucaqlının xarakterik xüsusiyyətinə əsasən düzbucaqlılar çoxluğunu göstərin

18. $A \cap B = C$, $x \in C$ olduqda aşağıdakı hallardan hansı doğru deyil.

a) $x \in A$, b) $x \in B$, c) $x \notin A$, d) $x \notin B$

19. Universal U çoxluğunun ixtiyari A, B, C altçoxluqları üçün aşağıdakı bərabərliklərin doğru olduğunu göstərin.

a) $A \cup B = B \cup A$

a') $A \cap B = B \cap A$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

b') $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

d') $(A \cap B)' = A' \cup B'$

e) $A \cup A = A$

e') $A \cap A = A$

f) $A \cup U = U$

f') $A \cap \emptyset = \emptyset$

g) $A \cup \emptyset = A$

g') $A \cap U = A$

20. İfadələri sadələşdirin:

a) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cup B \cup C)$

b) $A \cup (A' \cap B)$

c) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)$

21. İxtiyari A, B, C çoxluqları üçün $A \cup B = A \cup C$ olmasından $B = C$ alınır mı? Misal qurun.

22. Aşağıdakı bərabərliklərin doğruluğunu isbat edin.

a) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

$$b) (A' \cup B) \cap A = A \cap B$$

$$c) A \setminus B = A \cap B'$$

$$d) A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$e) A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

$$f) A \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

$$g) (A \setminus B)' = A' \cup B$$

$$h) (A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$$

$$i) (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

$$j) (A')' = A$$

$$k) A \cup A' = U$$

$$l) A \cap A' = \emptyset$$

23. Eyler -Venn diaqramları vasitəsilə $A \setminus B, B \setminus A, A', A \cap B'$ çoxluqlarını təsvir edin.

24. İsbat edin ki, ixtiyarı çoxluq

a) özünün bütün altçoxluqlarının,

b) özünün bütün sonlu altçoxluqlarının,

c) özünün bütün birelementli altçoxluqlarının

birləşməsidir.

25. A, B, C çoxluqları cüt-cüt kəsişirlər. Aşağıdakı çoxluqlar üçün Eyler- Venn diaqramlarını göstərin.

a) $A \cup B$, b) $A \cup B \cup C$, c) $(A \cup B) \cup (A \cap C)$.

26. Aşağıdakı bərabərliklərin doğruluğunu isbat edin və Eyer-Venn diaqramları vasitəsilə təsvir edin.

a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$

f) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

g) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$, xüsusi halda

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

27. $\{4,5,6\} \cup X = \{4,5,6,7,8\}$ bərabərliyini ödəyən neçə X çoxluğu var.

28. $\{4,5,6,7\} \cap X = \{4,5,6\}$, $\{4,5,6,7\} \cup X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ sistemini ödəyən X çoxluğunu tapın.

29. $A \cup B$ birləşməsini tapın.

a) $A = \{a, 1, \{1, b\}, c\}$, $B = \{\{a, 1\}, c\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-2, 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in (-3, 5]\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 3)\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-3, 5]\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [3, 7]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (2, 5)\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \in [3, 7]\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \in [2, 5]\}$

$$\text{f) } A = \{x \in R \mid |2x+3| \leq 5\}, \quad B = \{x \in R \mid |x-1| \leq 3\}$$

$$\text{g) } A = \{x \in R \mid |x^2 - 8x + 12| = -(x^2 - 8x + 12)\},$$

$$B = \{x \in R \mid x^2 - 10x + 21 < 0\}$$

$$\text{h) } A = \{x \in R \mid |x+3| < 2x+3\}, \quad B = \{x \in R \mid |x+3| \geq 2x+3\}$$

$$\text{i) } A = \{x \in N \mid \sqrt{(2x-4)^2} = 4-2x\},$$

$$B = \{x \in N \mid \sqrt{(2x-4)^2} = 2x-4\}$$

$$\text{j) } A = \{x \in N \mid |2x-1| \leq 4\}, \quad B = \{x \in N \mid |3x+1| < 7\},$$

$$\text{k) } A = \{x \in N \mid |2x-1| \leq 4\}, \quad B = \{x \in Z \mid |3x+1| < 7\},$$

$$\text{m) } A = \{x \in R \mid 2 \sin x + \sin \frac{3\pi}{2} = 0\},$$

$$B = \{x \in R \mid \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin x = 0\},$$

$$\text{n) } A = \{x \in R \mid \sin x + 2 \sin \pi = 0\},$$

$$B = \{x \in R \mid \cos x - 2 \cos \frac{31\pi}{2} = 0\},$$

$$\text{l) } A = \{x \in R \mid (x^2 - 9)\sqrt{2-x-x^2} = 0\}, \quad B = \left\{x \in R \mid \frac{x-2}{x-1} < 0\right\}$$

$$\text{o) } A = \{x \in R \mid \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1\},$$

$$B = \{x \in R \mid \sin(2x+1) - \sin(2x-1) = 0\}$$

p) $A = \left\{x \in R \mid (x^2 - 4)\sqrt{3 + 2x - x^2} \leq 0\right\}$, $B = \left\{x \in R \mid \frac{x+3}{x} \leq 0\right\}$

30. $A \cap B$ çoxluğunu tapın.

a) $A = \{x \in R \mid x^2 \leq 4\}$, $B = \{x \in R \mid |x| > 1\}$

b) $A = \{x \in N \mid \exists y \in Z, x = 2y\}$, $B = \{x \in N \mid x < 10\}$

c) $A = \{7, 3, \{1, a\}, 6, \{8\}\}$, $B = \{\{7, 3\}, \{1, a\}, \{6\}, 8\}$

d) $A = \{x \in R \mid x \in [3, 7]\}$, $B = \{x \in R \mid x \in (2, 4]\}$

e) $A = \left\{x \in R \mid |x^2 - 8x + 12| = -(x^2 - 8x + 12)\right\}$,

$B = \left\{x \in R \mid |x^2 - 10x + 21| = 10x - x^2 - 21\right\}$

f) $A = \{x \in R \mid |2x + 1| \leq 5\}$, $B = \{x \in R \mid |x - 2| < 4\}$

g) $A = \{x \in N \mid |2x - 1| \leq 4\}$, $B = \{x \in N \mid |3x + 1| < 7\}$

h) $A = \left\{x \in R \mid (x+1)(x^3 - 8) \leq 0\right\}$, $B = \left\{x \in R \mid \frac{x-1}{x+2} < 0\right\}$

i) $A = \left\{x \in Z \mid (x-1)(x^3 + 27) \leq 0\right\}$, $B = \left\{x \in Z \mid \frac{x+1}{x-3} < 0\right\}$

j) $A = \left\{x \in Z \mid \frac{(x-4)(x+3)}{(x+2)^2(x-2)} \geq 0\right\}$, $B = \{x \in Z \mid x^2 - 2x - 15 < 0\}$

k) $A = \left\{x \in R \mid \frac{x+2}{(x+1)^2} \leq 0\right\}$, $B = \{x \in R \mid |x| \leq 3\}$

l) $A = \{x \in R \mid \sqrt{2} \sin x - 1 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid \sin x - \cos x = 0\}$

$$\text{m) } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2^{|x+2|} \leq 8\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3^{|x+1|} < 27\}$$

$$\text{n) } A = \{x \in \mathbb{N} \mid \log_{0,1}(x+5) \geq -1\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-2} \geq \frac{1}{8}\right\}$$

$$\text{o) } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2x+3) + \cos(2x-3) = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(4x+5) - \cos(4x-5) = 0\}$$

$$\text{p) } A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \sin x \cos x = \sqrt{3}\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0\}$$

31. Aşağıdakı çoxluqları tapın:

$$\text{a) } (\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-3, 2]\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 3]\}) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-2, -1]\}$$

$$\text{b) } (\{x \in \mathbb{Z} \mid x \in (0, 4]\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in (-3, 2)\}) \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in (-1, 4)\}$$

$$\text{c) } \{a, \{b\}, c\} \cup (\{1, 2, b, \{c\}\} \cap \{\{1, 2\}, b, \{a, c\}\})$$

$$\text{d) } (\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 2]\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 1]\}) \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 3)\}$$

32. İsbat etməli.

$$\text{a) } P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$\text{b) } P\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right) = \bigcap_{i \in M} P(A_i)$$

$$\text{c) } P(A \cup B) = \{A_i \cup B_i \mid A_i \in P(A), B_i \in P(B)\}$$

$$\text{d) } P\left(\bigcup_{i \in M} A_i\right) = \left\{ \bigcup_{i \in M} B_i \mid B_i \in P(A_i) \right\}$$

M - hər hansı natural ədədlər çoxluğu.

33. $B \subset A \subset C$ olduqda $A \cap X = B$ tənliklər sistemini həll
 $A \cup X = C$

etin.

34. Z çoxluğunun

$$A = \{x \in Z^+ \mid \exists y \in Z : x = 2y\},$$

$$B = \{x \in Z^+ \mid \exists y \in Z : x = 2y + 1\},$$

$$C = \{x \in Z \mid \exists y \in Z : x = 2y\}$$

altçoxluqlarına nəzərən $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus C$ çoxluqlarını müəyyən edin.

35. Hansı şərt daxilində $A \cap X = \emptyset$ sisteminin həlli var.
 $B \cap X' = \emptyset$

36. $A \setminus B$ çoxluğunun elementlərini tapın.

a) $A = \{k, l, f, t, u\}$, $B = \{k, l, m, n, o, p\}$

b) $A = \{6, 3, 2, 5, 13\}$, $B = \{13, 3, 2, 5, 6\}$

c) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $B = \{10, 20, 30\}$

d) $A = \{a, \{b, c\}, c\}$, $B = \{a, b, c\}$.

37. $A \setminus B$ fərqi tapın.

a) $A = \{x \in Z \mid x \in (2, 5)\}$, $B = \{x \in Z \mid x \in [3, 7]\}$

b) $A = \{x \in R \mid x \in (2, 5)\}$, $B = \{x \in R \mid x \in [3, 7]\}$

c) $A = \{x \in N \mid x \in (-1, 4)\}$, $B = \{x \in N \mid x \in [3, 5]\}$

d) $A = \{x \in Z^+ \mid (x-1)(x-8) \leq 0\}$, $B = \{x \in Z^+ \mid |x-4| < 2\}$

$$\text{e) } A = \left\{ x \in R \mid \frac{x-3}{(x+2)^3 x} \geq 0 \right\}, \quad B = \{x \in R \mid x^2 - 3x - 4 > 0\},$$

$$\text{f) } A = \{x \in R \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}, \quad B = \left\{ x \in R \mid \frac{x-2}{x^3} \leq 0 \right\},$$

$$\text{g) } A = \{x \in N \mid \exists y \in Z, x = 2y\}, \quad B = \{x \in N \mid x < 10\}$$

$$\text{h) } A = \left\{ x \in R \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0 \right\}, \quad B = \{x \in R^+ \mid x^2 \leq 4\}, \quad .$$

$$\text{i) } A = \{x \in R \mid 2 \sin x - 1 = 0\}, \quad B = \{x \in R \mid 2 \cos x + \sqrt{3} = 0\}$$

$$\text{j) } A = \{x \in R \mid 2 \cos x - \sqrt{3} = 0\}, \quad B = \{x \in R \mid 2 \sin x = 1\}$$

$$\text{k) } A = \{x \in R \mid \operatorname{tg} x = 1\}, \quad B = \{x \in R \mid 2 \sin x + \sqrt{2} = 0\}$$

$$\text{l) } A = \{x \in R \mid 2 \sin x + \sqrt{2} = 0\}, \quad B = \{x \in R \mid \operatorname{tg} x = 1\}$$

$$\text{m) } A = \left\{ x \in R \mid 4^{\sin x \cos x} = \sqrt{2}^{\sqrt{3}} \right\}, \quad B = \{x \in R \mid 2^{\cos 2x} = \sqrt{2}\}$$

$$\text{n) } A = \{x \in R \mid \sin^2 x - \cos^2 x = 0\}$$

$$B = \{x \in R \mid \cos(2x+1) - \cos(2x-1) = 0\}$$

$$\text{o) } A = \left\{ x \in R \mid \left| x^2 - 5x + 6 \right| = -(x^2 - 5x + 6) \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R \mid \frac{2x-5}{x} \geq 0 \right\}$$

$$\text{p) } A = \{x \in R \mid \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1\}$$

$$B = \{x \in R \mid \sin(2x+1) - \sin(2x-1) = 0\}$$

$$r) A = \left\{ x \in R \mid 1 - 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0 \right\}$$

$$B = \{x \in R \mid 3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0\}.$$

38. $B \subset A$, $A \cap C = \emptyset$ olduqda $A \setminus X = B$ sistemini həll
 $X \setminus A = C$

edin.

39. İsbat edin ki, $|A| = n$ olduqda $|P(A)| = 2^n$ olur.

40. $A = \{\{1,3\}, \{3\}, 1\}$ olduqda $|P(A)|$ -ni tapın.

41. Sonlu X çoxluğunun ixtiyari A, B, C altçoxluqları üçün

$$a) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$b) |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

olduğunu isbat edin.

42. Z çoxluğunun.

$$A = \{x \in Z \mid \exists y \in Z : x = 2y\},$$

$$B = \{x \in Z \mid \exists y \in Z : x = 2y - 1\},$$

$$C = \{x \in Z \mid x < 10\}$$

altçoxluqlarına nəzərən $A', (A \cup B)', C', A \setminus C', C \setminus (A \cup B)$

çoxluqlarını tapın.

43. İsbat edin ki,

$$a) A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B ; \quad c) A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$b) A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \emptyset ; \quad d) A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subset C$$

44. A çoxluğunun $R \setminus A$ tamamlayıcısını tapın.

a) $A = \{x \in R \mid 4\sin^2 x \leq 1\}$

b) $A = \{x \in R \mid \sin^2 x - \cos^2 x = 1\}.$

c) $A = \left\{x \in R \mid \left(\frac{25}{16}\right)^{1+\sin x \cos x} \geq \frac{4}{5}\right\}$

45. İsbat edin.

a) $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset C$

b) $A \subset B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \subset C$

c) $A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset B' \cup C$

d) $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \cap B' \subset C$

e) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

f) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$

g) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$

h) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$

i) $A \subset B \Rightarrow (A \setminus C) \subset (B \setminus C)$

j) $A \subset B \Rightarrow (C \setminus B) \subset (C \setminus A)$

k) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

l) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

m) $A = B' \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = U$

n) $C \subset A \Leftrightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

46. $A \div B$ simmetrik fərqi tapın:

- a) $A = \{a, \{a\}, \{b\}, c\}, B = \{a, b, c\}$
- b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x+2} \leq 0\right\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\},$
- c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\} B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 11x - 28 - x^2 \geq 0\}$
- d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \log_4(x-2) \leq 1\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq 3^{\log_3 2}\}$
- e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_3(5x-1) > 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{0.5}(4x-7) < \log_{0.5}(x+2)\}$
- f) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5^{\frac{1}{2}x} \geq \sqrt[4]{25}\right\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{4x-8} < 81^{2-x}\}$
- g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 7^{x^2+3x} < 7^4\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3^{4x^2} < 3^{25}\}$
- h) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x - \cos x = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \sin x + 1 = 0\}$
- i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \geq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_4(x-2) \leq 1\}$

47. Isbat edin.

- a) $A \div B = B \div A$
- b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$
- c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$
- d) $A \div (A \div B) = B$
- e) $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$
- f) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$
- g) $A \div \emptyset = A$
- h) $A \div A = \emptyset$

$$i) A \div U = A'$$

$$j) A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$$

48. İsbat edin.

$$a) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \div (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \dots \cup (A_n \div B_n)$$

$$b) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \div (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \dots \cup (A_n \div B_n)$$

49. İsbat edin.

$$a) A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

$$b) A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \div B$$

$$c) A \div B = C \Leftrightarrow B \div C = A \Leftrightarrow C \div A = B$$

50. Eylər –Venn diaqramları vasitəsilə

a) $A \div B$ simmetrik fərqi qurun.

b) Simmetrik fərq əməlinin assosiativ olduğunu göstərin.

§ 2. Münasibətlər

Boş olmayan $A_1, \dots, A_n$ çoxluqlarının düz (dekart) hasili

$A_1 \times \dots \times A_n$ kimi işarə olunur və

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i \}$$

çoxluğuna deyilir.

$A_1 = \dots = A_n = A$ olduqda $A \times \dots \times A$ düz hasili A^n

kimi işarə olunur və A çoxluğunun n -qat düz hasili və A -nın n -

ci dərəcədə qüvvəti adlanır. $A \times B$ çoxluğunun ixtiyari ρ altçoxluğu A və B çoxluqlarının elementləri arasında binar münasibət adlanır. $A=B$ olarsa ρ binar münasibəti A çoxluğunda binar münasibət adlanır. A^n çoxluğunun ixtiyari altçoxluğu A çoxluğunda n - yerli münasibət adlanır.

$\langle x, y \rangle \in \rho$ olması $x\rho y$ kimi də işarə olunur.

$Dom\rho = \{x \mid \exists y, \langle x, y \rangle \in \rho\}$ çoxluğuna ρ binar münasibətinin təyin oblastı, $Im\rho = \{y \mid \exists x, \langle x, y \rangle \in \rho\}$, çoxluğuna ρ -nün qiymətlər oblastı deyilir.

İki binar münasibətin bərabərliyi, birləşməsi, kəsişməsi, fərqi, simmetrik fərqi çoxluqlar üçün olduğu kimi təyin olunur. $\rho \subset A \times B$ olduqda, ρ binar münasibətinin tamamlayıcısı $\rho' = (A \times B) \setminus \rho$ çoxluğuna deyilir.

$$\rho^\cup = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \rho\}$$

çoxluğu ρ binar münasibətinin inversiyası adlanır.

ρ və σ binar münasibətlərinin kompozisiyası $\sigma \circ \rho$ kimi işarə olunur və

$$\sigma \circ \rho = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z, \langle x, z \rangle \in \rho \wedge \langle z, y \rangle \in \sigma\}$$

çoxluğuna deyilir.

Sonlu çoxluqlarda verilmiş binar münasibəti istiqamətlənmiş qrafla təsvir etmək olar. $A \neq \emptyset$, $\rho \subset A \times A$ olsun. A -

çoxluğunun elementləri müstəvi üzərində nöqtələrlə təsvir olunur. Bu nöqtələr qrafın təpə nöqtələri adlanır. ρ -dan olan hər bir $\langle a, b \rangle$, $a \neq b$ nizamlanmış cütünə a – dan b –yə doğru istiqamətlənmiş xətt (til) uyğun tutulur. ρ -dan olan $\langle a, a \rangle$ cütünə isə a – nöqtəsində saat əqrəbinin əksinə istiqamətlənmiş ilgək qarşı qoyulur. Alınmış həndəsi fiqur ρ münasibətinin istiqamətlənmiş qrafı adlanır. İstənilən istiqamətlənmiş qraf özünün təpə nöqtələri çoxluğunda yeganə binar münasibəti təyin edir.

Tərif. $f \subset A \times B$ binar münasibətinə nəzərən $Domf = A$, $Jmf \subset B \vee Jmf = B$ və $\forall x, y, z \in A, \langle x, y \rangle \in f$ və $\langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$ olarsa, onda f funksional münasibət (funksiya) adlanır.

Başqa sözlə, $\forall x \in Domf, \exists! y \in Jmf, \langle x, y \rangle \in f$ olarsa, f binar münasibəti funksiya adlanır, y elementi $y = f(x)$ kimi işarə edilir. (həmçinin $x \xrightarrow{f} y$, ya da $f : x \rightarrow y$ kimi işarələməsindən istifadə olunur.) Burada y –ə x – in f nəticəsindəki obrazı, x –ə y – in proobrazı deyilir.

İki binar münasibətin bərabərliyindən alınır ki, iki f və g funksiyaları onda və yalnız onda bərabər olar ki, $Domf = Domg$ və $\forall x \in Domf, f(x) = g(x)$ olsun.

Əgər f -funksiya, $f \subset A \times B$ və $Domf = A, Imf \subset B$ isə onda f A -nın B -də inikası adlanır və $f : A \rightarrow B$ (və ya $A \xrightarrow{f} B$) kimi işarə olunur. $Domf = A, Imf = B$ olarsa f A -nın B -yə inikası adlanır.

Əgər $\forall x_1, x_2 \in Domf, f(x_1) = f(x_2)$ olmasından $x_1 = x_2$ alınarsa, f inyektiv funksiya adlanır. Əgər $\forall y \in Imf, \exists x \in Domf, y = f(x)$ olsun, onda f suryektiv funksiya adlanır.

İnyektiv və suryektiv funksiya biyektiv funksiya (və ya qarşılıqlı birqiymətli inikas) adlanır.

Təyin oblastı nizamlanmış n -liklərdən ibarət olan f -funksiyası n -dəyişənindən asılı funksiya adlanır və $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kimi işarə olunur.

$A \neq \emptyset$ çoxluğunun öz-özünə inyektiv inkasına A çoxluğunun əvəzləməsi deyilir. Sonlu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ çoxluğunun $\varnothing$ əvəzləməsi

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \dots & \varphi(a_n) \end{pmatrix}$$

kimi işarə olunur.

$$\begin{pmatrix} \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \dots & \varphi(a_n) \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ əvəzləməsi } \varphi \text{ əvəzləməsinin}$$

tərsi adlanır və φ^{-1} kimi işarə olunur.

Misal. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ çoxluğunda $7x = 9q + r$,
 $r \neq 0$ olduqda $\varphi(x) = r$ kimi verilən φ inikası

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ əvəzləməsini təyin edir.}$$

$$i_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ A çoxluğunun vahid əvəzləməsi}$$

adlanır. $\varphi^k = i_A$ şərtini ödəyən ən kiçik k natural ədədi φ əvəzləməsinin tərtibi adlanır.

Əgər φ əvəzləməsi $k_1, k_2, \dots, k_n$ uzunluqlu asılı olmayan dövrlərə ayrılıbmışsa, onda φ əvəzləməsinin tərtibi $[k_1, k_2, \dots, k_n]$ ədədinə bərabərdir.

Tutaq ki, ρ A çoxluğunda binar münasibətdir. Əgər

1) $\forall x \in A, x < x, x > x \in \rho$ isə, ρ A -da reflektiv

münasibət,

2) $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin \rho$ isə ρ A -da antirefleksiv

münasibət

3) $\forall x, y \in A, \langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ isə,

ρ A -da simmetrik münasibət,

4) $\forall x, y \in A, \langle x, y \rangle \in \rho \wedge \langle y, x \rangle \in \rho \Rightarrow x = y$ isə,

ρ A -da antisimmetrik münasibət,

5) $\forall x, y, z \in A, \langle x, y \rangle \in \rho \wedge \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$,

isə ρ A -da tranzitiv münasibət,

6) $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$ isə, onda ρ

A -da əlaqəli münasibət;

7) A çoxluğunda təyin olunmuş ρ binar münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitiv olduqda, ρ A -da ekvivalentlik münasibəti;

8) A çoxluğunda təyin olunmuş binar münasibət tranzitiv və antisimmetrik olduqda nizamilik münasibəti adlanır.

A çoxluğunda təyin olunmuş nizamilik münasibəti refleksiv olduqda ciddi olmayan nizamilik münasibəti, antirefleksiv olduqda ciddi nizamilik münasibəti adlanır.

9) A -çoxluğunda təyin olunmuş nizamilik münasibəti əlaqəli olarsa, xətti münasibət adlanır.

a A -nın hər hansı qeyd olunmuş elementi, ρ A -da ekvivalentlik münasibəti olduqda $\{x \in A \mid \langle a, x \rangle \in \rho\}$ çoxluğu ρ ekvivalentlik münasibətinə nəzərən ekvivalentlik sinfi adlanır və $[a]_\rho$ kimi işarə olunur. $b \in A, b \notin [a]_\rho$ olduqda $[b]_\rho = \{x \in A \mid \langle b, x \rangle \in \rho\}$ və s. ekvivalentlik siniflərini qurmaq olar. ρ ekvivalentlik münasibəti olduğu üçün qurmadan aydındır ki, ixtiyari iki ekvivalentlik sinfi kəsişmir, əgər kəsişirsə üst-üstə düşür. A çoxluğunun ρ ekvivalentlik münasibətinə nəzərən bütün ekvivalentlik sinifləri çoxluğu A -nın ρ -ya nəzərən faktor-çoxluğu adlanır və A/ρ kimi işarə olunur.

Misal1. $m > 0, m \in \mathbb{Z}$ olduqda $\rho_m = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}, x - y : m\}$ münasibəti m moduluna nəzərən müqayisə münasibəti adlanır. Bu münasibət $\mathbb{Z}$ çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. $\mathbb{Z}$ çoxluğunu m moduluna nəzərən müqayisə münasibətinə görə m sinifə ayırmaq olar:

$$[0] = \{mq\}, [1] = \{mq + 1\}, \dots, [m-1] = \{mq + (m-1)\}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} / \rho_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\} \text{ faktor çoxluqdur.}$$

Misal 2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ olduğunu isbat etməli.

$$\begin{aligned} \forall \langle x, y \rangle (A \cup B) \times C &\Rightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tərsinə, } \forall \langle z, t \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C) &\Rightarrow \langle z, t \rangle \in A \times C \vee \\ \vee \langle z, t \rangle \in B \times C &\Rightarrow (z \in A \vee z \in B) \wedge t \in C \Rightarrow z \in A \cup B \wedge t \in C \\ &\Rightarrow \langle z, t \rangle \in (A \cup B) \times C \Rightarrow (A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C. \\ \text{Beləliklə, } (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

Misal 3. $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid 2|x| + 3|y| = 6 \}$ binar

münasibətinin təyin oblastını və qiymətlər oblastını tapmalı.

$$2|x| + 3|y| = 6 \Rightarrow 3|y| = 6 - 2|x| \Rightarrow 6 - 2|x| \geq 0 \Rightarrow x \in [-3, 3]$$

$$2|x| + 3|y| = 6 \Rightarrow 2|x| = 6 - 3|y| \Rightarrow 6 - 3|y| \geq 0 \Rightarrow y \in [-2, 2]$$

$$\text{Beləliklə, } Dom\rho = [-3, 3], \quad Im\rho = [-2, 2]$$

Misal4. $s = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle \}$,

$$\rho = \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 10 \rangle, \langle 5, 13 \rangle, \langle 6, 2 \rangle \} \quad \text{olduqda}$$

$s \circ \rho$ kompozisiyasını tapmalı.

$$\langle 2, 4 \rangle \in \rho \quad \text{və} \quad \langle 4, 7 \rangle \in s \Rightarrow \langle 2, 7 \rangle \in s \circ \rho$$

$\langle 3, 7 \rangle \in \rho$, lakin s binar münasibətində 1-ci elementi 7 olan nizamlanmış cüt olmadığına görə $\langle 3, 7 \rangle$ cütü nəzərə alınmır.

Bu qayda ilə $\langle 4, 10 \rangle$ və $\langle 5, 13 \rangle$ cütləri də nəzərə alınmır.

$$\langle 6, 2 \rangle \in \rho \quad \text{və} \quad \langle 2, 3 \rangle \in s \Rightarrow \langle 6, 3 \rangle \in s \circ \rho$$

Beləliklə, $s \circ \rho = \{ \langle 2, 7 \rangle, \langle 6, 3 \rangle \}$

51. Hansı A, B çoxluqları üçün $A \times B \neq B \times A$ olur.

52. Elə A, B, C çoxluqları tapın ki, $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ olsun.

53. $[a, b], [c, d]$ həqiqi oxun parçaları olduqda aşağıdakı çoxluqların həndəsi interperetasiyasını tapın.

- a) $[a, b] \times [c, d]$, b) $[a, b]^2$
c) $[a, b]^3$ d) R^n

54. İsbat etməli

- a) $(A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$
b) $B \neq \emptyset$ olduqda $Dom(A \times B) = A$
c) $A \neq \emptyset$ olduqda $Jm(A \times B) = B$

55. İsbat etməli ki, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset, D \neq \emptyset$ olduqda aşağıdakılar doğrudur:

- a) $A \subset B \wedge C \subset D \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$
b) $A \subset B \wedge C \subset D \Leftrightarrow A \times C = (A \times D) \cap (B \times C)$
c) $A = B \wedge C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

56. İsbat etməli.

- a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$$d) \bigcap_{k \in K} A_k \times \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{\langle k, t \rangle \in K \times T} (A_k \times B_t) \quad (k, t - \text{natural ədədlərdir}).$$

57. İsbat etməli $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, hansı A, B, C, D çoxluqları üçün bu münasibət bərabərliyə çevrilir.

58. İsbat etməli.

$$a) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$b) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$c) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$$

$$d) (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

$$e) A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

$$f) \bigcup_{k \in K} A_k \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{\langle k, t \rangle \in K \times T} (A_k \times B_t).$$

59. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, (A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ olduqda $A=B=C=D$ olduğunu isbat edin.

60. $M = \{7, 20, 80, 100, 45, 38\}$, $K = \{1, 19, 5, 40, 13, 70\}$ olduqda birinci koordinatı M-ə, ikinci koordinatı K-ya daxil olan elə bütün nizamlanmış cütlər çoxluğunu qurun ki, hər cütün birinci koordinatı ikinci koordinatdan kiçik olsun. Onda M və K-nın hansı elementlərinin göstərilən cütlərə daxil olmadığını göstərin.

61. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$ çoxluqları verildikdə aşağıdakı çoxluqlardan hansı $X \times Y$ çoxluğunun alt çoxluğudur:

- a) $\{\langle 1, a \rangle; \langle 2, b \rangle; \langle 3, c \rangle\}$
b) $\{\langle 1, a \rangle; \langle 1, b \rangle; \langle 2, a \rangle; \langle b, 2 \rangle\}$.
c) $\{\langle 2, b \rangle; \langle 3, a \rangle; \langle 4, a \rangle; \langle 3, b \rangle\}$
d) $\{\langle 1, a \rangle; \langle 1, b \rangle; \langle 1, c \rangle; \langle 2, a \rangle; \langle 2, b \rangle\}$.

62. $A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$,

$B = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$ olduqda $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, çoxluqlarının elementlərini göstərin.

63. $A \times B$ düz hasilini tapın:

- a) $A = \left\{ x \in N \mid \frac{x-3}{x-1} \leq 0 \right\}, B = \{x \in N \mid |x-4| \leq 1\}$
b) $A = \{x \in N \mid |2x-3| < 5\}, B = \{x \in N \mid |3x-5| \leq 2\}$
c) $A = \{x \in Z \mid x \in [2, 5]\} \setminus \{x \in Z \mid x \in (3, 7)\}$
 $B = \{x \in N \mid x \in (-1, 4)\} \setminus \{x \in N \mid x \in [3, 5]\}$
d) $A = \{1, a, \{2, b\}, c\} \cap \{1, \{a, 2\}, b, c\}$
 $B = \{x \in Z \mid x \in [3, 7]\} \cap \{x \in Z \mid x \in [2, 4]\}$
e) $A = \{x \in Z \mid |2x-1| \leq 4\}, B = \{x \in Z \mid |3x+1| < 7\}$

64. a) $A = \{2, 4, 6\}, B = \{0, 1\}$,

b) $A=B=\{-1, 0, 1\}$

c) $A = \{x \in N \mid 3 \leq x \leq 7\}, B = \{y \in N \mid 4 \leq y \leq 9\}$

d) $A = \{x \in N \mid 3 \leq x \leq 7\}, B = \{y \in R \mid 4 \leq y \leq 9\}$

e) $A = \{x \in N | x = 3\}, B = \{y \in R | 3 \leq y \leq 6\}$

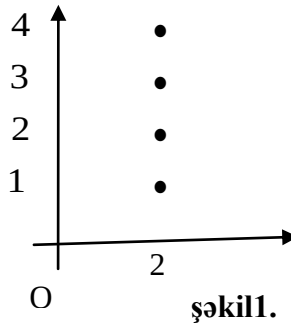
f) $A = \{x \in R | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{y \in N | y = 3\}$

g) $A = \{x \in N | x \leq 3\}, B = \{y \in R | 3 \leq y \leq 6\}$

h) $A = \{x \in R | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{y \in N | y \leq 3\}$

olduqda $A \times B$ düz hasilinin elementlərini koordinat müstəvisində təsvir edin.

65. $X \times Y$ düz hasilinin bütün elementləri koordinat müstəvisində şəkil1-dəki kimi təsvir edildikdə X və Y çoxluqlarını müəyyən edin.



66. a) $N \times N$; b) $Z \times Z$; c) $R \times R$ çoxluqlarının koordinat müstəvisində necə təsvir olunduğunu izah edin.

67. $\rho = \{(x, y) \in R \times R | y = x\}$ və $\sigma = \{(x, y) \in R \times R | y \geq x\}$ binar münasibətlərini qrafik şəkildə göstərin.

68. $\rho = \{(x, y) \in R \times R | 1 \leq x \leq 2\}$ və $\sigma = \{(x, y) \in R \times R | 2 \leq x \leq 3\}$ binar münasibətlərinin birləşməsini və kəsişməsini həndəsi olaraq təsvir edin.

69. Aşağıdakı binar münasibətlərin təyin oblastını, qiymətlər oblastını tapın və qrafiklərini qurun.

- a) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x^2 + 4y^2 = 1 \}$
- b) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x^2 = y^2 \}$
- c) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid |x| + 2|y| = 1 \}$
- d) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x^2 + y^2 < 1 \} \quad \forall x > 0$
- e) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid y \geq 0, y \leq x \wedge x + y = 1 \}$
- f) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid 2|x| + 3|y| = 6 \}$
- g) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x > 0 \wedge xy \geq 1 \wedge 3x + 4y \leq 12 \}$
- h) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid y = x^2 \wedge 2x + y = 3 \}$
- i) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid 3|x| + 2|y| = 6 \}$
- j) $\{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x \geq 0 \wedge x^2 + 4y^2 \leq 4 \}.$

70. İsbat edin ki, ixtiyari ρ, σ, s binar münasibətləri üçün aşağıdakılar doğrudur.

- a) $Dom\rho = \emptyset \Leftrightarrow \rho = \emptyset \Leftrightarrow Im\rho = \emptyset$
- b) $Dom\rho = Im\rho^\cup, Im\rho = Dom\rho^\cup$
- c) $\rho \cup \rho = \rho \cap \rho = \rho$
- d) $(\rho^\cup)^\cup = \rho$
- e) $(\rho^\cup)^1 = (\rho')^\cup$
- f) $\rho \circ (\sigma \circ s) = (\rho \circ \sigma) \circ s$

$$g) (\rho \circ \sigma)^\cup = \sigma^\cup \circ \rho^\cup$$

$$h) (\rho \cup \sigma)^\cup = \rho^\cup \cup \sigma^\cup$$

$$i) (\rho \cap \sigma)^\cup = \rho^\cup \cap \sigma^\cup$$

$$j) \rho \circ \delta \neq \delta \circ \rho$$

71. İsbat edin ki, ixtiyari binar münasibətlər üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur.

$$a) \left(\bigcup_{k \in K} \rho_k \right)^\cup = \bigcup_{k \in K} \rho_k^\cup, \quad b) \left(\bigcap_{k \in K} \rho_k \right)^\cup = \bigcap_{k \in K} \rho_k^\cup$$

72. İsbat edin ki, ixtiyari binar münasibətlər üçün aşağıdakı təkliflər doğrudur.

$$a) \left(\bigcup_{k \in K} \rho_k \right) \circ \sigma = \bigcup_{k \in K} (\rho_k \circ \sigma)$$

$$b) \sigma \circ \left(\bigcup_{k \in K} \rho_k \right) = \bigcup_{k \in K} (\sigma \circ \rho_k)$$

$$c) \sigma \circ \left(\bigcap_{k \in K} \rho_k \right) = \bigcap_{k \in K} (\sigma \circ \rho_k)$$

$$d) \left(\bigcap_{k \in K} \rho_k \right) \circ \sigma = \bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \sigma)$$

73. İxtiyari ρ_1, ρ_2, σ binar münasibətləri üçün $\rho_1 \subset \rho_2$ olduqda

$$a) \sigma \circ \rho_1 \subset \sigma \circ \rho_2; \quad b) \rho_1 \circ \sigma \subset \rho_2 \circ \sigma; \quad c) \rho_1^\cup \subset \rho_2^\cup$$

münasibətlərinin doğru olduğunu göstərin.

74. $A = \{6,7,8,9\}$ çoxluğunda verilmiş $\rho = \{\langle 7,8 \rangle, \langle 7,9 \rangle, \langle 7,7 \rangle, \langle 8,9 \rangle, \langle 9,9 \rangle\}$

münasibəti üçün aşağıdakılardan hansı doğrudur:

- a) ρ kiçiklik münasibətidir,
- b) ρ kiçik deyil münasibətidir,
- c) ρ böyük deyil münasibətidir

75. $X = \{2,4,6,8,10\}$ çoxluğunda “ $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid x \mid y \text{ və } x \neq y \}$ ” binar münasibəti verildikdə.

bölünür, $x \neq y$ }” binar münasibəti verildikdə.

a) ρ -ya daxil olan bütün cütləri göstərin

b) $\rho^\cup$ münasibətini göstərin.

c) ρ -nın qrafını qurun.

76. $X = \{1,2,3\}$ və $Y = \{4,5,6\}$ çoxluqlarının elementləri

arasında $\rho = \{\langle 2,5 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle\}$ münasibəti verildikdə

a) ρ^{-1} tamamlayıcı

b) $\rho^\cup$ inversiya

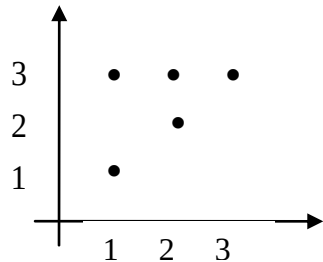
münasibətlərini tapın.

77. $X = \{0,1,2,3\}$

çoxluğunda verilmiş ρ

binar münasibəti şəkil 2-dəki

kimi təsvir olunduqda



$\rho^\cup$ münasibətinin qrafını qurun.

Şəkil 2.

78. Münasibətlərin $\rho \circ \sigma$ kompozisiyasını (hasilini) tapın.

a) $\sigma = \{\langle 2,3 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,7 \rangle\},$

$\rho = \{\langle 2,4 \rangle, \langle 3,7 \rangle, \langle 4,10 \rangle, \langle 5,13 \rangle, \langle 7,9 \rangle\}.$

b) $\sigma = \{\langle 1,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,7 \rangle, \langle 5,8 \rangle, \langle 0,1 \rangle\},$

$\rho = \{\langle 1,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 7,1 \rangle, \langle 8,6 \rangle, \langle 2,5 \rangle\}.$

c) $\sigma = \{\langle 4,2 \rangle, \langle 5,4 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,7 \rangle\},$

$\rho = \{\langle 3,3 \rangle, \langle 5,6 \rangle, \langle 6,7 \rangle, \langle 7,11 \rangle\}.$

d) $\sigma = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,5 \rangle\},$

$\rho = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 5,3 \rangle\}.$

79. Tutaq ki, s və σ , N çoxluğunda binar münasibətlərdir.

Aşağıdakı hallarda $s \circ \sigma, \sigma \circ s, s^2, \sigma^2$ -ni tapın.

a) $s = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}, \sigma = \{\langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,5 \rangle\}.$

b) $s = \{\langle 2,3 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,8 \rangle\}, \sigma = \{\langle 2,4 \rangle, \langle 3,7 \rangle, \langle 8,5 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}.$

80. $(\rho^\cup \circ \rho) \cap (\rho \circ \rho^\cup)$ -ni tapın.

a) $\rho = \{\langle a,1 \rangle, \langle 1,b \rangle, \langle a,b \rangle\}$

b) $\rho = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle\}$

$(\rho^\cup \circ \rho) \circ (\rho \circ \rho^\cup)$ -ni tapın.

c) $\rho = \{\langle a,1 \rangle, \langle 1,b \rangle, \langle a,b \rangle\}$

d) $\rho = \{ \langle 2,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle \}$

81. Aşağıdakı münasibətlərdən hansı $A = \{1,2,3,4\}$ çoxluğunun $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ çoxluğunda inikasıdır:

a) $\{ \langle 4,a \rangle, \langle 3,e \rangle, \langle 1,a \rangle, \langle 2,a \rangle \}$

b) $\{ \langle 1,e \rangle, \langle 2,e \rangle, \langle 3,e \rangle, \langle 4,e \rangle \}$

c) $\{ \langle 1,a \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 3,c \rangle \}$

d) $\{ \langle 1,a \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 1,c \rangle, \langle 3,d \rangle \}$

82. A və B uyğun olaraq m və n elementli çoxluqlar olduqda:

a) A və B -nin elementləri arasında neçə binar münasibət var?

b) Təyin oblastı A olan, qiymətlər oblastı B -yə daxil olan neçə funksiya var?

c) Təyin oblastı A olan, qiymətlər oblastı B -yə daxil olan neçə qarşılıqlı birqiymətli inikas var?

d) m və n -nin hansı qiymətlərində A ilə B arasında qarşılıqlı birqiymətli inikas var?

83. f funksiyası üçün hansı şərt daxilində $f^\cup$ funksiya olar.

84. φ A -nın B -yə inyektiv inikası olduqda aşağıdakı təklifləri isbat edin:

a) φ^{-1} B -nin A -ya inyektiv inikasıdır.

b) $\varphi^{-1} \circ \varphi = i_B$

c) $\varphi \circ \varphi^{-1} = i_A$

85. İsbat edin ki, ixtiyari f funksiyası və ixtiyari A, B çoxluqları üçün aşağıdakılar doğrudur.

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \bigcup_{i \in J} f(A_i)$

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

d) $f\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in J} f(A_i)$

e) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

f) əgər f iniyektiv inikas olarsa $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$

86. $A = \{0, 5, -7, 13\}$ və $B = \{a, k, p\}$ çoxluqları arasında aşağıdakı münasibətlər verilmişdir. Bu münasibətlərdən hansı funksional münasibətdir. Funksional münasibətin təyin oblastını və qiymətlər oblastını tapın.

$$\rho = \{\langle 0, k \rangle, \langle 5, a \rangle, \langle -7, p \rangle, \langle 13, k \rangle\}$$

$$\sigma = \{\langle 5, p \rangle, \langle -7, k \rangle, \langle 5, a \rangle, \langle 13, p \rangle\}$$

$$s = \{\langle 0, a \rangle, \langle 5, a \rangle, \langle -7, k \rangle, \langle 13, k \rangle\}$$

$$h = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, k \rangle, \langle 0, p \rangle\}$$

87. $A = \{a \mid a \in N \mid 1 \leq a \leq 20\}$ və $B = \{3, 5\}$ çoxluqları arasında aşağıdakı kimi f münasibəti təyin edilmişdir: “Əgər

a sadə ədəddirsə, ona 5 ($5 \in B$) ədədi uyğundur, mürəkkəb ədəddirsə, ona 3 ($3 \in B$) ədədi uyğundur". f münasibəti A və B arasında funksional münasibətidirmi?

88. Aşağıdakı münasibətlərin hansı funksiyaadır, funksiya olduqda tərsini tapın.

a) $f = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

b) $f = \{ \langle x, x^2 + 2x + 1 \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$

c) $f = \{ \langle x^2, x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$

d) $f = \left\{ \langle x^{\frac{1}{3}}, x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

e) $f = \{ \langle x, x^3 \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$.

f) $f = \{ \langle x, 2x - 1 \rangle \mid 0 \leq x \leq 3 \}$

g) $f = \{ \langle x, 3x - 7 \rangle \mid 2 \leq x \leq 5 \}$

h) $f = \left\{ \langle x, \frac{1}{3}x - 2 \rangle \mid 3 \leq x \leq 6 \right\}$

i) $f = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y| \}$

j) $f = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x \}$

89. $\mathbb{R}$ çoxluğunda $g \circ f$ kompozisiyasını qurun.

$$\text{a) } f(x) = 1 + x^2, g(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{c) } f(x) = 3x^2 + 1, g(x) = \frac{x-1}{3},$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x}{x+2}, g(x) = x-1, \quad \text{d) } f(x) = \frac{x^2-1}{x}, g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

90. $g(f(x))$ və $f(g(x))$ kompozisiyasını tapın.

$$\text{a) } f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1, g: R^+ \rightarrow R^+, g(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ olduqda}$$

$$\text{b) } f, g: R \rightarrow R, f(x) = \frac{x}{x+2}, g(x) = x^3 - 1 \text{ olduqda}$$

91-98. Əvəzləmələri vurun:

$$\text{91. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{92. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 8 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{93. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 2 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 8 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{94. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^4.$$

$$\text{95. } \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}$$

$$\text{96. } \begin{pmatrix} 12345 \\ 31452 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12345 \\ 23514 \end{pmatrix}$$

$$\text{97. } \begin{pmatrix} 123456 \\ 532641 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123456 \\ 614235 \end{pmatrix}$$

$$\text{98. } \begin{pmatrix} 1234567 \\ 6421357 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7531246 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1274653 \\ 7631254 \end{pmatrix}$$

99-105. Əvəzləmələri asılı olmayan dövrlərin hasilinə ayırın və tərtibini tapın.

99. $\begin{pmatrix} 123456 \\ 651423 \end{pmatrix}$

100. $\begin{pmatrix} 12345678 \\ 81365742 \end{pmatrix}$

101. $\begin{pmatrix} 12345678 \\ 53287164 \end{pmatrix}$

102. $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 7516324 \end{pmatrix}$

102. $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 586213947 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} 12345678 \\ 23416785 \end{pmatrix}$

105. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

106. $\varphi = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 357642198 \end{pmatrix}$ olduqda φ^{-4} -ü tapmalı.

107. $\varphi = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3514276 \end{pmatrix}$ olduqda φ^{-20} -ni tapmalı.

108. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ olduqda

$f^2, fg, gf, g^2, f^{-121}$ -ni tapın.

109. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ olduqda f^{247} əvəzləməsinin tərsini

tapın.

110. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ hasilinin tərsini

tapın.

111. Aşağıdakı hallarda $fu = g$ və $hf = g$ tənliklərini həll edin.

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

112. $fxg = h$ tənliyini təyin edin, burada

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
 $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

113-114. Tənliyi həll edin.

113. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

114. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 & 14 & 5 \end{pmatrix}$

115. φ , A çoxluğunun əvəzləməsi olduqda φ^{-1} -in də A çoxluğunun əvəzləməsi olduğunu göstərin.

116. $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ çoxluğunun neçə əvəzləməsi var?

117. $\{1, 2, 3\}$ çoxluğunun bütün əvəzləmələri üçün kompozisiya əməlinə nəzərən cədvəl qurun, belə ki,

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \quad \varphi_6 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$$

118. İsbat edin ki, ρ və σ binar münasibətləri refleksiv

olduqda $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, $\rho^\cup$, $\rho \circ \sigma$ münasibətləri də refleksivdir.

119. İsbat edin ki, əgər ρ və σ binar münasibətləri antirefleksivdirsə, onda $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, $\rho^\cup$ münasibətləri də antirefleksivdir, $\rho \circ \sigma$ kompozisiyası isə antirefleksiv olmaya da bilər.

120. İsbat edin ki, ρ və σ binar münasibətləri simmetrik isə, $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, $\rho^\cup$, $\rho \circ \rho^\cup$ münasibətləri də simmetrikdir.

121. İsbat edin ki, ρ və σ binar münasibətlərinin kompozisiyası onda və yalnız onda simmetrik olar ki, $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ olsun.

122. İsbat edin ki, ρ və σ binar münasibətləri antisimmetrik isə, onda $\rho \cap \sigma, \rho^\cup$ münasibətləri də antisimmetrikdir.

123. İsbat edin ki, A çoxluğunda verilmiş antisimmetrik ρ və σ münasibətlərinin $\rho \cup \sigma$ birləşməsi onda və yalnız onda antisimmetrik olar ki, $\rho \cap \sigma^\cup \subset i_A$ olsun.

124. Aşağıdakı şərtləri ödəyən binar münasibətlərə misallar göstərin:

- a) refleksiv, simmetrik olsun, tranzitiv olmasın;
- b) refleksiv, antisimmetrik olsun, tranzitiv olmasın;
- c) refleksiv, tranzitiv olsun, simmetrik olmasın;
- d) antisimmetrik, tranzitiv olsun, refleksiv olmasın;
- e) simmetrik, tranzitiv olsun, refleksiv olmasın;

125. $N \times N$ çoxluğunda aşağıdakı qayda ilə təyin olunmuş ρ və σ münasibətlərinin ekvivalentlik münasibəti olduğunu göstərin.

- a) $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in \rho \Leftrightarrow a + d = b + c$
- b) $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in \sigma \Leftrightarrow [(a \cdot d = b \cdot c) \wedge b \neq 0, d \neq 0]$

126. Aşağıdakı münasibətlərdən hər biri refleksivlik, antirefleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xassələrindən hansına malikdir.

a) müstəvinin bütün düz xətləri çoxluğunda paralellik münasibəti,

b) müstəvinin bütün düz xətləri çoxluğunda perpendikulyarlıq münasibəti,

c) R çoxluğunda bərabərlik münasibəti,

d) R çoxluğunda kiçiklik münasibəti,

e) R çoxluğunda kiçik bərabərlik münasibəti,

f) universal çoxluğun altçoxluqları çoxluğunda daxil olma münasibəti

127. $s = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, d \rangle \}$ münasibətinin tranzitiv olması üçün ona hansı cütləri əlavə etmək lazımdır?

128. $s = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, c \rangle \}$ münasibətinin ciddi nizamilik münasibəti olması üçün ondan hansı cütü atmaq lazımdır.

129. $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ çoxluğunda verilmiş aşağıdakı binar münasibətlərin refleksivlik, antirefleksiv, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xassələrindən hansına malik olduğunu göstərin:

a) $\rho = \{ \langle 2, 2 \rangle \}$

b) $\rho = \{\langle 1, 2 \rangle\}$

c) $\rho = \{\langle x, y \rangle \mid x = y, x \in X\}$

d) $\rho = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \rho, x, y \in X, x \neq y\}$

e) $x\rho y \Leftrightarrow (x, y) = 1$

130. N çoxluğunda aşağıdakı münasibətlərdən hər biri refleksivlik, antirefleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xassələrindən hansına malikdir.

a) $x\rho y \Leftrightarrow \exists n \in N, y < nx$.

b) $x\rho y \Leftrightarrow x < y$

c) $x\rho y \Leftrightarrow |y - x| = 12$

d) $x\rho y \Leftrightarrow (x - y) : n, n \in N,$

e) $x\rho y \Leftrightarrow x = 5y$

f) $x\rho y \Leftrightarrow xy = 30$

g) $x\rho y \Leftrightarrow y = 3x - 2$

131. $\{2^n \mid n \in N\}$ çoxluğunda bölünmə münasibətinin xassələrini göstərin.

132. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ çoxluğunda verilmiş $s = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ münasibəti refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xassələrindən hansına malikdir?

133. N çoxluğunda bölünmə münasibətinin nizamilik münasibəti olub olmadığını müəyyən edin.

134. Müstəvi üzərindəki bütün düz xətt parçaları çoxluğunda verilmiş

- a) «uzundur»
- b) «2 dəfə kiçikdir»
- c) «3sm kiçikdir»

münasibətlərinin hansı nizamilik münasibətidir.

135. Aşağıdakı halların hansında $X = \{a, b, c, d, e, f, k, m\}$ çoxluğu cüt-cüt kəsişməyən A,B,C çoxluqlarına ayrılır:

- a) $A = \{a, b, c\}, B = \{f, k\}, C = \{d, e, m\}$
- b) $A = \{a\}, B = \{b, c, d\}, C = \{k, m\}$
- c) $A = \{k, m, c\}, B = \{b, a, c, e\}, C = \{e, f, d\}$

136. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ çoxluğunda

$$\rho = \left\{ \begin{array}{l} \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \\ \langle 6, 6 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 5, 6 \rangle \end{array} \right\}$$

ekvivalentlik münasibəti verildikdə X çoxluğunun siniflərə ayrılışını tapın.

137. Aşağıdakı münasibətlərdən hansı $B = \{2, 4, 6, 8\}$ çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir.

a) $\{ \langle 2,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 8,8 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 8,4 \rangle, \}$.

b) $\{ \langle 2,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 8,8 \rangle, \langle 6,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,6 \rangle, \langle 6,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,6 \rangle \}$

c) $\{ \langle 6,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,6 \rangle, \langle 6,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 8,8 \rangle \}$.

138. $K = \{1,2,3,4,7\}$ çoxluğu $\{2,4\}, \{1,3\}, \{7\}$ ekvivalentlik siniflərinə ayrılmışdır. Bu ayrılışla təyin olunan və ekvivalentlik münasibəti təşkil edən cütlər çoxluğunu müəyyən edin.

139. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ çoxluğu üçün aşağıdakılardan hansı A -çoxluğunun siniflərə ayrılışıdır ?

a) $A = \{1,2,3\} \cup \{1,4,5,6,7\} \cup \{8,9,10\}$

b) $A = \{1,2,3\} \cup \{4,5,7\} \cup \{6,8,9\}$

c) $A = \{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4,5\} \cup \{6,7,8,9,10\}$

140. Aşağıdakı hansı Q çoxluğunda suryektiv inikasdır?

a) $y = 7x$

b) $y = x^2$

c) $y = \frac{2}{1-x^2}$

II FƏSİL

CƏBRLƏR. QRUP. HALQA. MEYDAN

§3. Cəbri əməllər. Qrup və xassələri. Altqrup.

Tutaq ki, X boş olmayan çoxluq və $X \times X$, X çoxluğunun dekart hasilidir.

Tərif. İstənilən $\varphi: X \times X \rightarrow X$ inikasına X çoxluğunda binar cəbri əməl deyilir.

Bu isə o deməkdir ki, $\forall \langle a, b \rangle \in X \times X$ üçün elə yeganə $c \in X$ var ki, $\varphi(\langle a, b \rangle) = c$.

Bu tərifə ekvivalent tərif aşağıdakı kimidir:

Tərif. Əgər ixtiyari təbiətli X çoxluğunun ixtiyari a, b elemntlərinin nizamlanmış hər bir $\langle a, b \rangle$ cütünə müəyyən φ qaydası (qanunu) ilə həmin çoxluğun yeganə c elementi qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, X çoxluğunda binar cəbri əməl verilmişdir. Bu c elementinə verilmiş φ binar cəbri əmələ nəzərən a və b elementlərinin kompozisiyası deyilir.

Tərif . $G \neq \emptyset$, $\langle G, * \rangle$ cəbri onda və yalnız onda qrup adlanır ki, aşağıdakı aksiomlar doğru olsun:

- I. $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c)$ - assosiativlik;
- II. $\exists e \in G, \forall a \in G \quad a * e = a$ - sağ neytral elementinin varlığı;

III. $\forall a \in G, \exists a' \in G \ a * a' = e$ - sağ simmetrik elementin varlığı.

Qrupda təyin olunmuş əməl kommutativdirsə qrupa kommutativ qrup və ya Abel qrupu deyilir.

Tərif. $G = \langle G; *, ' \rangle$ qrupunun boş olmayan $A \subset G$ altçoxluğu G - dəki əmələ nəzərən özü də qrup olarsa, onda $\mathcal{A} = \langle A; *, ' \rangle$ - ya G - nin alt qrupu deyilir.

Teorem. $\emptyset \neq A \subset G$ altçoxluğu onda və yalnız onda G qrupunun altqrupu olar ki, aşağıdakı iki şərt ödənilsin:

$$1) \forall (a, b \in A), \ a * b \in A;$$

$$2) \forall (a \in A), \ a' \in A.$$

1), 2) şərtləri $\forall a, b \in A, \ a * b' \in A$ şərti ilə ekvivalentdir.

141. İsbat edin ki, Q -çoxluğunda $a * b = \frac{a \cdot b}{2}$ qaydası

ilə yerinə yetirilən əməl binar cəbri əməldir, kommutativdir, assosiativdir. $\langle Q; * \rangle$ cəbrinin neytral elementi hansı şəkildədir? $a = 12$ elementinə simmetrik elementi tapın.

142. R^+ çoxluğunda aşağıdakı kimi təyin olunmuş binar əməllərdən hansı kommutativ, assosiativdir?

$$a \circ b = \sqrt{ab}, \quad a \circ b = \frac{a+b}{2}, \quad a \circ b = \sqrt[3]{ab}, \quad a \circ b = (a+b)^2,$$

$$a \circ b = \max\{a, b\}$$

Misal. $R \setminus \{0\}$ çoxluğunda $a * b = 3ab$ binar əməli təyin olunmuşdur. $\langle R \setminus \{0\}; * \rangle$ cəbrinin qrup olduğunu göstərin. $*$ - əməlinə nəzərən neytral elementi tapın, sıfırdan fərqli elementə simmetrik elementin varlığını göstərin və şəklini təyin edin.

Həlli: Göstərilən $*$ əməli sıfırdan fərqli həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunub və kommutativdir. Bu əməlin assosiativliyini yoxlayaq:

$$(a * b) * c = 3ab * c = 9abc;$$

$$a * (b * c) = a * 3bc = 3(a \cdot 3bc) = 9abc,$$

yəni, $(a * b) * c = a * (b * c)$. $*$ - əməlinə nəzərən neytral

elementi tapaq: $a * x = a$, yəni $3ax = a$, $x = \frac{1}{3}$, yəni $x = \frac{1}{3}$, $*$

- əməlinə nəzərən neytral elementdir. Sıfırdan fərqli elementə simmetrik elementi təyin edək. Bunun üçün $a \neq 0$ olduqda

$$a * y = \frac{1}{3} \text{ tənliyini həll edək. } 3ay = \frac{1}{3} \text{ və ya } y = \frac{1}{9a} \text{ alırıq.}$$

Deməli $\langle R \setminus \{0\}; * \rangle$ cəbri qrupdur.

143. $a \circ b = a^2 - b^2$ qaydası ilə yerinə yetirilən əməl nə üçün N – çoxluğunda binar əməl deyil və Z – çoxluğunda binar əməldir? Z – də bu əməlin kommutativ, assosiativ olub olmadığını göstərin.

144. R – çoxluğunun aşağıdakı altçoxluqlarında adi toplama, çıxma, vurma və bölmə əməllərindən hansılar cəbri əməldir? Cəbri əməllərdən hansılar kommutativ, assosiativdir?

- a) N , b) $4N = \{4n \mid n \in N\}$, c) Z , d) $4Z = \{4n \mid n \in Z\}$,
 e) Q , f) R , g) $R \setminus \{0\}$, h) $R^+ \{x \in R \mid x > 0\}$.

145. Natural ədədlər çoxluğunda $*$ - əməli aşağıdakı bərabərliklərlə verilmişdir:

- a) $a * b = a^b$ b) $a * b = a^2 b^2$ c) $a * b = (a + b) + 1$
 d) $a * b = a$. Əməllərin kommutativ, assosiativ olub-olmadığını, onlara nəzərən neytral elementinin varlığının göstərin, hansı əməllər üçün simmetrik element vardır?

146. Həqiqi elementli $n \geq 2$ tərtibli matrislər çoxluğunda toplama, çıxma, vurma, bölmə cəbri əməldirmi və bu əməllərdən hansılar kommutativ, assosiativdir?

147. Sistemlərdən hansılar yarımqrupdur? Hansılar monoiddir?

- a) $\langle N; +, >$; b) $\langle Z; -, >$;
 c) $\langle N; *, >$, burada $a * b = a$; d) $\langle Q; -, >$;

e) $\langle Q; + \rangle$; f) $\langle Z; + \rangle$;

g) $\langle nZ; \cdot \rangle$ $n \in N$ ($n > 1$);

h) $\langle R; * \rangle$, burada $a * b = a^2 + b^2$;

i) $\langle R^+; * \rangle$, burada $a * b = \frac{a}{b}$;

j) $\langle N; * \rangle$, burada $a * b = (a + b) + 1$

148. $\{a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in Q\}$ çoxluğunun vurma əməlinə nəzərən yarımqrup əmələ gətirib-gətirmədiyini göstərin.

149. $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Z, \} \cdot \rangle$ cəbrinin yarımqrup əmələ gətirib - gətirmədiyini göstərin.

150. Tutaq ki, G müstəvinin bütün vektorları çoxluğudur. Göstərin ki, $\langle G; + \rangle$ cəbri qrupdur.

151. İsbat edin ki, 1-in n -ci (n – natural ədəddir) dərəcədən kompleks kökləri çoxluğu vurma əməlinə nəzərən qrup əmələ gətirir.

152. Toplama əməlinə nəzərən qrup əmələ gətirirmi:

a) bütün həqiqi ədədlər çoxluğu;

b) bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğu;

c) bütün mənfi həqiqi ədədlər çoxluğu;

d) bütün rəasional ədədlər çoxluğu;

e) bütün tam ədədlər çoxluğu;

f) bütün müsbət tam ədədlər çoxluğu;

- g) bütün cüt tam ədədlər çoxluğu;
- h) bütün tək tam ədədlər çoxluğu;
- i) 5-in misilləri olan bütün tam ədədlər çoxluğu;
- j) bütün kompleks ədədlər çoxluğu;
- k) $\left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in Q, n \in Z^+ \right\}$ çoxluğu;

153. Aşağıdakı çoxluqlar vurmaya nəzərən qrup əmələ gətirirmi:

- a) bütün həqiqi ədədlər çoxluğu;
- b) sıfırdan fərqli bütün həqiqi ədədlər çoxluğu;
- c) R^+ bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğu;
- d) bütün mənfi həqiqi ədədlər çoxluğu;
- e) Q^+ bütün müsbət rəşional ədədlər çoxluğu;
- f) bütün müsbət tam ədədlər çoxluğu;
- g) sıfırdan fərqli bütün kompleks ədədlər çoxluğu;

154. Üçölçülü E_3 Evklid fəzasında əməllərdən hansı cəbri əməldir?

- a) vektorların ədədə vurulması əməli;
- b) vektorların skalyar hasil əməli;
- c) vektorların vektorial hasili əməli;

155. İsbət edin ki, qrupun ixtiyari elementinin kvadratı vahid elementinə bərabərdirsə, onda qrup Abel qrupdur.

156. İsbat edin ki, multiplikativ qrupda:

a) $ax = b$ bərabərliyi $x = a^{-1}b$ bərabərliyi ilə; $xa = b$ bərabərliyi $x = ba^{-1}$ bərabərliyi ilə eynigüclüdür.

b) $ac = bc \Rightarrow a = b$ və $ca = cb \Rightarrow a = b$; ($c \neq 0$)

c) $(a^{-1})^{-1} = a$

d) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow ab = ba$;

e) $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$

157. Göstərin ki, additiv G qrupunda $\forall k, l \in \mathbb{Z}$ üçün və

$\forall a \in G$

a) $ka + la = (k + l)a$

b) $k(la) = l(ka)$

158. İsbat edin ki, ikitərtibli istənilən $G = \langle \{a, b\}; \cdot \rangle$

qrupu Abel qrupudur.

159. Tənliklərin hər birindən $x - i$ tapın.

a) $abx = c$

b) $axb = c$

c) $xab = c$

160. Üç dərəcəli $\langle S_3; \cdot \rangle$ qrupunda 1) $\varphi_4 x = \varphi_2$ və

2) $x\varphi_4 = \varphi_2$ tənliklərini həll edin, burada

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

161. Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar göstərilən əmələ nəzərən qrup əmələ gətirir:

- a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ çoxluğu toplamaya nəzərən;
- b) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ çoxluğu toplamaya nəzərən;
- c) $\{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ çoxluğu vurmaya nəzərən;
- d) $\left\{ \frac{a + b\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + 3b^2 \neq 0 \right\}$ çoxluğu vurmaya

nəzərən;

162. Müsbət həqiqi ədədlər çoxluğunun vurmaya nəzərən qrupu, bütün həqiqi ədədlər çoxluğunun toplamaya nəzərən qrupunun altqrupudurmu, deyilsə nə üçün?

163. Aşağıdakı çoxluqlardan hansılar qrup əmələ gətirir:

- a) Verilmiş ixtiyarı xətti bircins tənliklər sisteminin həllər çoxluğu toplamaya nəzərən;
- b) n – ölçülü hesabi vektor çoxluğu toplamaya nəzərən;
- c) bir dəyişəndən asılı n – dərəcəli çoxhədlilər çoxluğu vurmaya nəzərən;

d) bir dəyişəndən asılı dərəcəsi n – dən yüksək olmayan həqiqi əmsallı çoxhədlilər çoxluğu toplamaya nəzərən;

e) determinantı 1-ə bərabər olan n – tərtibli matrislər çoxluğu matrislərin vurulması, əməlinə nəzərən;

f) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$ şəklində matrislər çoxluğu matrislərin toplanmasına nəzərən;

164. Göstərin ki, $\left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q, a^2 - 2b^2 \neq 0 \right\}$

matrislər çoxluğu matrislərin vurulması əməlinə nəzərən Abel qrupu əmələ gətirir.

Misal 1. $\mathcal{H} = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$, $+$ $>$ cəbri həqiqi ədədlərin $< R; + >$ additiv qrupunun altqrupu olub - olmadığını təyin edin.

Həlli: *I üsul.* Tərifə tətbiq edək: Baxılan $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ çoxluğu R - in altçoxluğudur. Ədədlərin toplanması assosiativdir, sıfır $0 + 0\sqrt{3}$ şəklində göstərilir. $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in Q$ şəklində ədədlər üçün əks ədəd $(-a) + (-b)\sqrt{3}$, $-a, -b \in Q$ şəklindədir. Buna görə baxdığımız cəbr qrupdur.

II üsul. Altqrup olma kriteriyasını tətbiq edək: $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ $\langle R, + \rangle$ additiv qrupunun altçoxludursa və ixtiyarı $k, l \in H$ üçün $k + (-l) \in H$ ödənilirsə, onda $\mathcal{H}$ - altqrupdur. Doğrudan da $\forall a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3} \in H$
 $(a + b\sqrt{3}) + (-c - d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$.
Rasional ədədlər çoxluğu çıxmaya nəzərən qapalıdır, onda $(a - c) \in Q$ və $(b - d) \in Q$. Buna görə alınan fərq H -in elementi şəklindədir və $\mathcal{H}$ cəbri $\langle R, + \rangle$ qrupunun altqrupudur.

165. 152 məsələsində qruplardan hansılar digərlərinin altqrupudur?

166. 153 məsələsində qruplardan hansılar digərlərinin altqrupudur?

167. İsbat edin ki, aşağıdakı çoxluqlar $C^* = \langle C \setminus \{0\}; \cdot \rangle$ qrupunun multiplikativ altqruplarıdır:

- 1) sıfırdan fərqli həqiqi ədədlər çoxluğu;
- 2) müsbət həqiqi ədədlər çoxluğu;
- 3) müsbət rasional ədədlər çoxluğu;

168. Göstərin ki, $\langle \{c + di \mid c, d \in 2Z\}, + \rangle$ cəbri $\langle \{a + bi \mid a, b \in Z\}, + \rangle$ qrupunun altqrupudur.

169. Göstərin ki, $Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Z\}$ çoxluğu additiv qrupdur və $5Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in 5Z\}$ çoxluğu onun altqrupudur.

170. Göstərin ki, iki tərtibli matrislərlərin $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$ çoxluğu additiv qrupdur və $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in Z \right\}$ çoxluğu onun altqrupudur.

§4. Halqa. Meydan

Tərif. Toplama və vurma binar cəbri əməllərin təyin olunduğu $\mathcal{H} = \langle H; +, \bullet \rangle$ cəbrində aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda ona *halqa* deyilir.

1. $\langle H; + \rangle$ - kommutativ qrup olsun;

2. $\langle H; \bullet \rangle$ - yarımqrup olsun

3. Vurmanın toplamaya nəzərən distributivliyi doğru olsun, yəni $\forall a, b, c \in H, \quad a(b + c) = ab + ac$ - sol distributivlik, $(b + c)a = ba + ca$ - sağ distributivlik ödənsin.

$\forall a, b \in H$ üçün $ab = ba$ olarsa $\mathcal{H}$ halqasına kommutativ halqa deyilir.

Tərif. Halqanın vahidi varsa belə halqaya vahidli halqa deyilir.

Tərif. $\mathcal{H}$ halqasında hər biri sıfırdan fərqli elə a və b elementləri varsa ki, $a \cdot b = 0$ olsun, onda a - ya sıfırın sol böləni, b - yə sıfırın sağ böləni deyilir.

Tərif. Vahidli kommutativ halqada sıfırın bölənləri yoxdursa, ona tamliq oblastı deyilir.

Tərif. Vahidli $\mathcal{H}$ halqasında $a \in H$ olduqda $\exists b \in H$ varsa ki, $ab = ba = e$ olsun, onda a elementinə tərsi olan element deyilir, b a -nın tərsi adlanır və $b = a^{-1}$ kimi işarə olunur.

Tərif. $\mathcal{H}$ halqasının boş olmayan A alt çoxluğu $\mathcal{H}$ - da təyin olunmuş əməllərə nəzərən halqa olarsa, onda $\langle A, +, \cdot \rangle$ - ya $\mathcal{H}$ - in althalqası deyilir və $\mathcal{A} \prec \mathcal{H}$ kimi işarə olunur.

Teorem. $\emptyset \neq A \subset H$ altçoxluğunun $\mathcal{H}$ - da althalqa olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı iki şərtin ödənməsidir:

1. $\forall a, b \in A, \quad a - b \in A;$
2. $\forall a, b \in A, \quad a \cdot b \in A.$

Tərif. İkidən az elementi olmayan $1_H \neq 0_H$ və sıfırdan fərqli hər bir elementinin tərsi olan vahidli kommutativ halqaya *meydan* deyilir.

Misal. $Z[\sqrt{8}] = \{a + b\sqrt{8} \mid a, b \in Z\}$ vahidli halqada tərsi olan elementləri tapın.

Həlli. Əgər $a + b\sqrt{8}$ tərsi olan elementdirsə, onda elə $c + d\sqrt{8}$ elementi olmalıdır ki:

$$(a + b\sqrt{8})(c + d\sqrt{8}) = 1 \quad (1)$$

olsun.

Mötərizələri açıb, alırıq:

$$ac + 8bd = 1$$

$$ad + bc = 0$$

Lakin, onda

$$(a - b\sqrt{8})(c - d\sqrt{8}) = (ac + 8bd) - (ad + bc)\sqrt{8} = 1, \quad (2)$$

(1) və (2) bərabərliklərini vurub, alırıq ki:

$$(a^2 - 8b^2)(c^2 - 8d^2) = 1.$$

Deməli, $a^2 - 8b^2$ vahidin tam bölənidir və buna görə $a^2 - 8b^2 = \pm 1$. Bu tənliyin dörd həlli belədir:

$$a = 3, b = 1; \quad a = 3, b = -1; \quad a = -3, b = 1; \quad a = -3, b = -1.$$

Deməli, $\pm(3 + \sqrt{8})$, $\pm(3 - \sqrt{8})$, $Z[\sqrt{8}]$ halqasında tərsi olan elementlərdir. Həmçinin n - nin ixtiyari natual qiymətlərində $(3 + \sqrt{8})^n$ və $(3 - \sqrt{8})^n$ ədədləri də $Z[\sqrt{8}]$ halqasında tərsi olandır. Çünki,

$$(3 + \sqrt{8})^n (3 - \sqrt{8})^n = (9 - 8)^n = 1.$$

Misal 2. $M = \{(a + b\sqrt[3]{2}) \mid a, b \in Q\}$ çoxluğunun toplama və vurma əməllərinə nəzərən halqa (meydan) əmələ gətirib gətirmədiyini göstərin.

Həlli. $\forall \alpha, \beta \in M$ olduqda $\alpha + \beta$ və $\alpha\beta$ ədədlərinin M çoxluğuna daxil olub olmadığını yoxlayaq.

Tutaq ki, $\alpha = a_1 + b_1\sqrt[3]{2}$, $\beta = a_2 + b_2\sqrt[3]{2}$. Onda

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) + (a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2}.$$

$a_1 + a_2$ və $b_1 + b_2$ ədədləri rəasional ədədlər olduğuna görə $\alpha + \beta \in M$.

$\alpha\beta$ hasilini tapaq:

$$\alpha\beta = (a_1 + b_1\sqrt[3]{2})(a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt[3]{2} + b_1b_2\sqrt[3]{4}$$

Buradan görünür ki, $b_1b_2 \neq 0$ olarsa, $\alpha\beta$ hasilini M -ə

daxil deyil. Deməli M çoxluğunda vurma əməli binar cəbri əməl deyil, buna görə M çoxluğu halqa deyil, o cümlədən meydan da deyil.

171. Adi toplama və vurma əməlinə nəzərən aşağıdakı çoxluqların hansılarının halqa əmələ gətirib - gətirmədiyini göstərin:

1. Z ; 2. Q ; 3. R ; 4. C ;

5. Verilmiş natural n – ədədinin misilləri olan $nZ = \{nk \mid k \in Z\}$ tam ədədlər çoxluğu;

6. Tək tam ədədlər çoxluğu;

7. Bütün cüt ədədlər çoxluğu;

8. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

9. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$;

10. $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

11. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

12. $\{a + bi \mid a, b \in 3\mathbb{Z}\}$;

13. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

14. $\left\{\frac{a + bi\sqrt{3}}{2}\right\}$; burada a və b cütlüyü eyni olan tam

ədədlərdir.

15. $\{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

Bu halqalardan hansılar vahidlidir? Vahidli halqalarda tərsi olan bütün elementlər çoxluğunu tapın.

172. Toplama və vurma əməllərinə nəzərən aşağıdakı çoxluqların hər birinin halqa olduğunu göstərin: Bu halqalardan hansılar kommutativdir? Hansılar vahidlidir? Sıfırın bölənləri olan halqalarda sıfırın bölənlərini tapın.

16. $M_n^n(\mathbb{Z})$

17. $M_n^n(\mathbb{R})$

18. $M_n^n(\mathbb{C})$

19. $M_n^n(\mathbb{Q})$

20. $\left\{\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

21. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

22. $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

23. $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

$$24. \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 3Z \right\}$$

$$25. \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q \right\}$$

$$26. \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$$

$$27. \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q \right\}$$

$$173. Z[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\} \text{ halqasında}$$

$$a) (1 + 2\sqrt{3})x = -4 + 3\sqrt{3};$$

$$b) (-4 + 3\sqrt{3})x = 1 + 2\sqrt{3};$$

$$c) (3 + 2\sqrt{3})x = 2 - 3\sqrt{3};$$

tənliklərinin hansı həll oluna biləndir?

174. Göstərin ki, a -elementi $\mathcal{A}$ halqasının sıfırdan fərqli elementidirsə və sıfırın böləni deyilsə onda $ax = ay \Rightarrow x = y$

175. İsbat edin ki, meydanda sıfırın bölənləri yoxdur.

176. İsbat edin ki, elementləri hər hansı meydandan olan n -tərtibli kvadrat matrislər halqasında sıfırın bölənləri yalnız cırılşan matrislər ola bilər.

177. İsbat edin ki: 1) $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ çoxluğu n -moduluna nəzərən toplama və vurma əməllərinə nəzərən vahidli halqadır;

2) n -mürəkkəb ədəddirsə Z_n çoxluğu sıfırın bölənləri olan halqadır.

3) $\bar{a} \in Z_n$ elementi onda və yalnız onda tərsi olandır ki, $(a, n) = 1$ olsun.

178. Z_{11} , Z_{14} , Z_{15} halqalarının tərsi olan bütün elementlərini tapın.

179. Z_{11} , Z_{14} , Z_{15} halqalarının bütün althalqalarını tapın.

180. İsbat edin ki, $\mathcal{K}$ halqasının tərsi olan bütün elementlərinin altçoxlğu vurma əməlinə nəzərən kommutativ qrup əmələ gətirir.

181. İsbat edin ki, halqada ixtiyarı a , b və c elementləri üçün:

1) $a + b = a$ -dırsa, $b = 0$

2) $a + b = 0$ -dırsa, $b = -a$

3) $-(-a) = a$

4) $0 \cdot a = a \cdot 0$

5) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

6) $(-a)(-b) = a \cdot b$

7) $(a - b) \cdot c = ac - bc$

182. Tutaq ki, a , b ixtiyarı meydanın elementləridir və $ab = 0$.

İsbat edin ki, ya $a = 0$, ya $b = 0$

183. $Z[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$, $+, \cdot$ halqasında tərsi olan bütün elementləri tapın.

184. $Z[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in Z\}$ çoxluğunun halqa əmələ gətirib-gətirmədiyini göstərin.

185. $Q[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in Q\}$ çoxluğunun meydan əmələ gətirib-gətirmədiyini göstərin.

186. $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ şəklində ədədlərin K - çoxluğunun $a, b, c \in Z$ olduqda halqa əmələ gətirdiyini, meydan əmələ gətirmədiyini, $a, b, c \in Q$ olduqda meydan əmələ gətirdiyini göstərin.

187. Bütün tam $a + bi$ Qaus ədədləri çoxluğu meydandır mı? Əsaslandırın.

188. $Z[i]$ tam Qaus ədədləri halqasında 1) $1 + 55i$ ədədi $1 + 4i$ ədədinə; 2) $19 + 2i$ ədədi $2 + i$ ədədinə; 3) $23 + 2i$ ədədi $2 + 3i$ ədədinə bölünür mü?

189. $Z[\sqrt{3}]$ halqasında 1) $33 - 7\sqrt{3}$ ədədi $3 - \sqrt{3}$ ədədinə; 2) $14 - 2\sqrt{3}$ ədədi $11 + \sqrt{3}$ ədədinə bölünür mü?

190. Göstərin ki, n – elementdən ibarət sonlu $\mathcal{K}$ -halqasında ixtiyarı $a \in K$ elementi üçün $na = 0$.

191. Baxılan çoxluqların uyğun halqanın althalqası olmasını göstərin.

1) $n > 1$ -nin misilləri çoxluğu nZ , Z -halqasının;

2) $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$ çoxluğu, $\langle \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot \rangle$ halqasının;

3) $\{a + bi \mid a, b \in 5\mathbb{Z}\}$ çoxluğu, $\langle \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot \rangle$ halqasının;

4) $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ çoxluğu, $\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot \rangle$ halqasının;

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ çoxluğu,

$\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot \rangle$ halqasının;

6) Yüksək əmsali cüt ədəd olan tam əmsallı çoxhədliləri çoxluğunun $\mathbb{Z}[x]$ halqasının;

192. İsbat edin ki, kommutativ $\mathcal{K}$ -halqasının ixtiyarı x, y elementləri və ixtiyarı tam müsbət m və n ədədləri üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; b) $(x^m)^n = x^{mn}$; c) $(xy)^n = x^n \cdot y^n$

193. İsbat edin ki, $\mathcal{K}$ -halqasının ixtiyarı iki althalqalarının kəsişməsi $\mathcal{K}$ -halqasının althalqasıdır.

194. Tutaq ki, $a, b, c \in \mathcal{P}$ meydanının ixtiyari elementləridir.

İsbat edin ki, $ab = ac$ bərabərliyindən $b = c$ bərabərliyi onda və yalnız onda çıxır ki, $a \neq 0$ olsun.

195. İsbat edin ki, ixtiyari $\mathcal{P}$ meydanında aşağıdakı xassələr doğrudur: $\forall a, b, c, d \in \mathcal{P}$

$$1) b \neq 0 \vee d \neq 0, \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc;$$

$$2) b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$3) b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$4) b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0 \vee -\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$$

$$5) \frac{a}{b} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$6) b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0 \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$7) b \neq 0, c \neq 0 \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

196. Göstərin ki, $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in Q\}$ çoxluğu toplama və qurma əməllərinə nəzərən meydan əmələ gətirir.

197. Q - rasiyal ədədlər çoxluğu olduqda,

$Q(\sqrt{p}) = \langle Q(\sqrt{p}), +, -, \cdot, 1 \rangle$ meydanında

$(a + b\sqrt{p})x = c + d\sqrt{p}$ tənliyini həll edin, burada p sadə ədəddir.

198-202 tənliklərini həll edin.

198. $(2 + 3\sqrt{2})x = -28 - 7\sqrt{2}$

199. $(1 + 5\sqrt{2})x = -13 + 33\sqrt{2}$

200. $(4 + 5\sqrt{3})x = 34 + 13\sqrt{3}$

201. $(5 + 2\sqrt{3})x = 26 + 13\sqrt{3}$

202. $(3 - 2\sqrt{3})x = -21 + 10\sqrt{3}$

§ 5. Dövrü qruplar. Qrupun elementinin tərtibi

Tutaq ki, $G = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ - multiplikativ qrupdur, e onun vahid elementi və $a \in G$.

Tərif. Qrupun a elementinin tərtibi sıfırdan fərqli ən kiçik natural n ədədinə deyilir ki, $a^n = e$ olsun. Əgər sıfırdan fərqli ixtiyari natural m ədədi üçün $a^m \neq e$ olarsa, onda a - ya sonsuz tərtibli element deyilir.

a elementinin tərtibi $O(a)$ kimi işarə olunur.

203. Tutaq ki, a n -tərtibli elementdir: $a^n = e$. Göstərin ki, 1) bütün $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ elementləri müxtəlifdir; 2) ixtiyari tam m üçün a^m elementi $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ elementlərindən biri ilə üst - üstə düşür.

204. Tutaq ki, n multiplikativ qrupun a elementinin tərtibidir: $a^n = e$. $a^m = e$ (m tam ədəddir) bərabərliyi onda və yalnız ödənilir ki, m ədədi n - ə bölünsün.

205. Tutaq ki, a multiplikativ qrupun n tərtibli elementidir. $a^r = a^k$ bərabərliyi burada, r və k - tam ədədlərdir, onda və yalnız onda ödənilir ki, $r - k$ ədədi n ədədinə bölünsün.

Tərif. a elementi n tərtibli elementdirsə və G qrupunda $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ elementlərindən başqa elementlər yoxdursa, onda G qrupuna a elementi ilə doğrulan dövrü qrup deyilir, a elementinə isə bu qrupun doğuranı deyilir.

Doğuranı a elementi olan dövrü qrup $\{a\}$ və ya $\langle a \rangle$ kimi işarə olunur.

206. İsbat edin ki, Z_n qrupunda bütün altqruplar

$$\left\{ e, a^d, a^{2d}, \dots, a^{\left(\frac{n}{d}-1\right)d} \right\} \text{ şəklindədir, burada, } d, n - \text{in}$$

böləni və a Z_n qrupunun doğuranıdır.

207. Tutaq ki, a , G qrupunun p tərtibli elementidir:

$a^p = e$. Göstərin ki, tam m ədədi üçün ya $a^m = e$, ya da a^m - in tərtibi p - ə bərabərdir.

208. Göstərin ki, əgər G qrupunun g elementinin tərtibi n - ə bərabədirsə, $g^n = e$, onda g^k elementinin tərtibi $\frac{n}{(n,k)}$ - ya bərabərdir. Burada (n,k) n və k - nın ən böyük ortaq bölənidir.

209. İsbat edin ki, doğuranı g olan n tərtibli dövrü qrupda, g^k onda və yalnız onda doğuran ola bilər ki, k, n ilə qarşılıqlı sadə $((k, n) = 1)$ olsun

210. Göstərin ki, dövrü qrupun istənilən altqrupu dövrü qrupdur.

211. Göstərin ki, sonsuz dövrü qrupun bütün altqrupları $\langle \dots, a^{-2m}, a^{-m}, e, a^m, a^{2m}, \dots \rangle$ şəklindədir, burada a -

doğuran, a^m isə altqrupa daxil olan ən kiçik müsbət üstlü qüvvətdir.

212. İsbat edin ki, a) G qrupunun ixtiyari a, b elementləri üçün ab və ba elementlərinin tərtibləri eynidir; b) Əgər $ab = ba$ - dirsə, onda ab elementinin tərtibi a və b elementlərinin tərtiblərinin hasilinin bölənidir.

Misal 11. S_6 simmetrik qrupun $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

əvəzləməsinin tərtibini tapın. Bu əvəzləmə S_6 qrupunun hansı dövrü altqrupunu doğurur.

Həlli: Əvəzləməni asılı olmayan dövrlərə ayıraq və dövrlərinin uzunluqlarının ƏKOB - nu tapaq. $a = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$. Birinci $(1\ 2\ 3\ 4)$ dövrün uzunluğu $n_1 = 4$, ikinci $(5\ 6)$ dövrün uzunluğu $n_2 = 2$, $[n_1, n_2] = 4$. Deməli, a - in tərtibi $O(a) = 4$.

İndi a elementinin S_6 simmetrik qrupunda doğurduğu dövrü altqrupu tapaq. Alırıq:

$$a^0 = e, \quad a^1 = a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)(5)(6)$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \\ = (1 \ 4 \ 3 \ 2)(5 \ 6)$$

$$a^4 = a^2 \cdot a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = e.$$

Beləliklə $(a^2)^{-1} = a^2, (a^3)^{-1} = a$

a elementi ilə doğrulan altqrup aşağıdakı şəkildə olur:

$$\{a\} = \{e = a^0, a, a^2, a^3\}$$

213. S_5 simmetrik qrupunun $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

elementinin tərtibini tapın və S_5 qrupunun hansı dövrü altqrupunu doğurduğunu göstərin.

214. S_6 simmetrik qrupunun $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

elementinin tərtibi nəyə bərabərdir və S_6 qrupunun hansı dövrü altqrupunu doğurur?

215. S_4 qrupunun $a = (1 \ 3 \ 2 \ 4)$ və $b = (2 \ 3 \ 1 \ 4)$

elementləri ilə doğrulan dövrü altqruplarını qurun və sonra bu altqrupların $\{a\} \cap \{b\}$ kəsişməsini tapın. Bu kəsişmə S_4 - də Abel qrupudurmu?

216. 1) 5; 2) 18 tərtibli $\{a\}$ dövrü qruplarının doğuranlarının sayını və bütün doğuranlarını tapın.

217. 12 tərtibli dövrü qrupda aşağıdakıları tapın:

a) bütün doğuranları;

b) onun bütün elementlərinin tərtibini.

§ 6. Qrupların, halqaların və meydanların homomorfizmi və izomorfizmi

$G = \langle G; \cdot \rangle$ qrupunun $G' = \langle G'; \circ \rangle$ qrupuna φ homomorfizmi G çoxluğunun G' çoxluğunda elə $\varphi: G \rightarrow G'$ inikasına deyilir ki, bu inikas G qrupundakı əməlin nəticəsini dəyişməsin, yəni

$$\forall a, b \in G \quad \varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad (1)$$

olsun.

Qrupların φ homomorfizmi $\varphi: G \simeq G'$ kimi işarə olunur.

G qrupunun G' -qrupunda φ homomorfizmində φ inikası üzərinə inikasdırsa, belə homomorfizmə üzərinə *homomorfizm*, yaxud *epimorfizm* deyilir.

G qrupunun G' qrupunda φ homomorfizmində φ inikası inyektiv inikasdırsa, onda φ -yə G - nin G' - də *monomorfizmi* və ya G' - ə daxil edilməsi deyilir.

Tərif. $G = \langle G; \cdot \rangle$ qrupunun $G' = \langle G'; \circ \rangle$ φ - qrupuna *izomorfizmi* G çoxluğunun G' çoxluğuna üzərinə elə biyektiv φ inikasına deyilir ki, bu inikas G qrupundakı əməlin nəticəsini dəyişməsin, yəni

$$\forall a, b \in G \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

bərabərliyi doğru olsun.

G və G' qrupları arasında izomorfizm varsa, belə qruplara izomorf qruplar deyilir və $G \cong G'$ kimi işarə olunur.

218. Göstərin ki, φ G qrupunun G' qrupuna homomorfizmidirsə, onda φ G qrupunun e vahidini G' qrupunun e' vahidinə keçirir.

219. Göstərin ki, əgər $\varphi: G \rightarrow G'$ homomorfizdirsə, onda G qrupunun ixtiyari $a \in G$ elementi üçün $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ yəni φ homomorfizmi G - nin ixtiyari a elementinin tərsini obrazının tərsinə keçirir.

220. İsbat edin ki, n – tərtilbli hər bir dövrü qrup 1-in n – ci dərəcədən kökləri çoxluğunun multiplikativ G_n qrupuna izomorfdur.

221. Göstərin ki, G_1, G_2, G_3 qruplarına nəzərən $\varphi_1 : G_1 \rightarrow G_2$ və $\varphi_2 : G_2 \rightarrow G_3$ homomorfizmlədirsə $\varphi_2 \cdot \varphi_1 : G_1 \rightarrow G_3$ homomorfizmdir.

222. Göstərin ki, $\langle 2Z; + \rangle$ qrupu və $\langle 5Z; + \rangle$ qrupa izomorfdur.

223. İsbat edin ki, vurmaya nəzərən müsbət həqiqi ədədlərin multiplikativ qrupu toplamaya nəzərən həqiqi ədədlərin additiv qrupuna izomorfdur.

224. Göstərin ki, $\varphi : G \rightarrow G'$ inikası G qrupunun vahid e – elementini G' qrupunun e' – vahidinə çevirmirsə, onda bu inikas homomorf deyil, yaxud tərsinə $\varphi : G \rightarrow G'$ qrupunun G' qrupuna homomorf inikasıdırsa onda $\varphi(e) = e'$ - dir.

225. Tutaq ki, G qrupu G' qrupu üzərinə homomorf inikas olunur və $\forall a, b \in G \quad \varphi(a) = \varphi(b)$ - dir. Göstərin ki, $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a^{-1}b) = e'$.

226. İsbat edin ki, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ $g f = e$ bərabərliyinin ödənilməyi ixtiyarı inikaslarırsa, onda f inyektiv, g suryektivdir.

227. İsbat edin ki;

- 1) $f : X \rightarrow Y$ inikasının onda və yalnız onda tərsi olar ki, bu inikas qarşılıqlı birqiymətli (biyektiv) olsun;
- 2) $f : X \rightarrow Y$ inikasının biyektivliyindən f^{-1} tərs inikasın biyektivliyi çıxır;
- 3) Əgər $f : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$ biyektiv inikaslarırsa, onda onların $h f$ kompozisiyası biyektivdir və $(h f)^{-1} = f^{-1} h^{-1}$.

228. Göstərin ki, G_1, G_2, G_3 qruplarına nəzərən $\varphi_1 : G_1 \rightarrow G_2$ və $\varphi_2 : G_2 \rightarrow G_3$ izomorfizmlədirsə, onda onların $\varphi_2 \cdot \varphi_1 : G_1 \rightarrow G_3$ kompozisiyası izomorfizmdir.

229. İsbat edin ki, G qrupunun $\varphi(G)$ obrazı qrupdur. G qrupunun vahidinin obrazı $\varphi(e)$ obrazının vahididir və G qrupunun qarşılıqlı tərs elementlərinə obrazın qarşılıqlı tərs elementləri uyğundur. (yəni $aa^{-1} = e$ isə, $\varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(e)$ olur.)

230. a) Göstərin ki, $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ tam ədədlərin additiv qrupu, $\langle 2\mathbb{Z}; + \rangle$ cüt ədədlərin additiv qrupudursa, onda $\varphi: k \rightarrow 2k (k \in \mathbb{Z})$ inikası birincinin ikinciyə izomorfizmdir.

b) Göstərin ki, $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ qrupu $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ qrupuna izomorfdur.

231. Tutaq ki, φ bir qrupun digər qrupa homomorfizmidir. İsbət edin ki,

- 1) Əgər $\varphi(x) = e$ və $\varphi(y) = e$ -dirsə, onda $\varphi(xy) = e$;
- 2) Əgər $\varphi(xy) = e$ -dirsə, onda $\varphi(yx) = e$.

232. Tutaq ki, $\langle G, \cdot \rangle$ qrupu verilmişdir və g onun qeyd olunmuş elementidir. Əgər $x \in G$ qrupunun ixtiyarı elementidirsə, onda $g^{-1}xg$ bu qrupun elementidir. İsbət edin ki, $\varphi: G \rightarrow G$ inikası $\varphi: x \rightarrow g^{-1}xg$ və $(\varphi(x) = g^{-1}xg)$ düsturu ilə təyin olunduqda, φ qrupun özü - özünə izomorfizmidir.

233. S_n -n-tərtibli əvəzləmələr qrupu olsun. S_n ilə $\langle \{1, -1\}, \cdot \rangle$ multiplikativ qrupu arasında $\tau \in S_n$ olduqda $\varphi: \tau \rightarrow \text{sgn } \tau$ ($\text{sgn } \tau$ τ -nün işarəsidir.) inikasının homomorfizm olduğunu göstərin.

234. Tutaq ki, C modulu vahidə bərabər olan kompleks ədədlərin multiplikativ qrupudur. Göstərin ki, həqiqi ədədlərin additiv qrupunun $\varphi: R \rightarrow C$; $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ inikası nüvəsi Z olan homomorfizmdir.

235. $Q(\sqrt{3})$ və $Q(i)$ meydanların izomorf olub-olmadığını göstərin.

236. $Q(\sqrt{5})$ və $Q(-\sqrt{5})$ meydanların izomorf olduğunu göstərin.

237. İsbat edin ki, $Q(a + b\sqrt{3})$ və $Q(a - b\sqrt{3})$ meydanları izomorfdur, burada $a, b \in Q$.

238. $Q(\sqrt{3})$ və $Q(\sqrt{5})$ meydanlarının izomorf olub-olmadığını göstərin.

239. İsbat edin ki, $Q(\sqrt{3} + i\sqrt{5})$ və $Q(\sqrt{3} - i\sqrt{5})$ meydanları izomorfdur.

240. $Q(z)$ və $Q(\bar{z})$, $z \in C$ meydanlarının izomorf olub-olmadığını göstərin.

241. İsbat edin ki, $Q(\sqrt{2})$ və $Q(\sqrt{3})$ meydanlarının additiv qrupları izomorfdur.

Bütün homomorfizmləri tapın:

242. n – tərtibli dövrü $\{a\}$ qrupunun özündə:

243. 6 tərtibli dövrü $\{a\}$ qrupunun 18 tərtibli dövrü $\{b\}$ qrupunda:

244. 18 tərtibli dövrü $\{a\}$ qrupunun 6 tərtibli dövrü $\{b\}$ qrupunda:

245. 12 tərtibli dövrü $\{a\}$ qrupunun 15 tərtibli dövrü $\{b\}$ qrupunda:

246. 5 tərtibli dövrü $\{a\}$ qrupunun 25 tərtibli dövrü $\{b\}$ qrupuna:

247. Dörd elementli $G_1 = \{1, -1, i, -i\}$ və $G_2 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ çoxluqlarında vurma əməli uyğun olaraq aşağıdakı cədvəl 2 və cədvəl 3 ilə verilmişdir. Bu çoxluqların qrup əmələ gətirdiyini və onların öz aralarında izomorf olduqlarını göstərin.

cədvəl 2

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	1	1	-1

cədvəl 3

$\times$	b_0	b_1	b_2	b_3
b_0	b_0	b_1	b_2	b_3
b_1	b_1	b_2	b_3	b_0
b_2	b_2	b_2	b_0	b_1
b_3	b_3	b_0	b_1	b_2

Qrupların izomorf olduğunu göstərin:

248. $\left\langle \left\{ a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in Q, a^2 + 2b^2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$ qrupunun

$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q, a^2 + 2b^2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$ qrupuna;

249. $\left\langle \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q, a^2 - 5b^2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$ qrupunun

$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q, a^2 - 5b^2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$ qrupuna;

250. C_n , 1-in n -ci dərəcədən köklərinin multiplikativ qrupudur. 1) C_2 qrupunun C_4 qrupuna; 2) C_6 qrupunun C_3 qrupuna neçə homomorfizmi var?

251. Tutaq ki, $G = \{g\}$, g -elementi ilə doğrulan dövrü qrup, H g^n -elementi ilə doğrulan altqrupdur: $H = \{g^n\}$. Göstərin ki, G qrupunu H qrupuna homomorf inikas etdirmək olar.

252. İsbat edin ki, eyni tərtibli bütün sonlu dövrü qruplar öz aralarında izomorfdurlar.

253. Göstərin ki, hər bir sonsuz dövrü qrup Z tam ədədlərinin additiv qrupuna izomorfdur.

254. Sıfırdan fərqli kompleks ədədlərin multiplikativ $C = \left\langle \{a + bi \in C \setminus \{0\}, a, b \in R', a^2 + b^2 \neq 0\}, \cdot \right\rangle$ qrupu ilə iki

tərtibli matrislərin $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$

multiplikativ qrupunun izomorf olduğunu göstərin.

255. Göstərin ki, ixtiyari G qrupu öz $G|H$ faktor - qrupuna homomorf inikas olunur, burada $\mathcal{H} G$ - nin normal bölənidir.

256. Additiv Z qrupunu $Z|H_3$ faktor - qrupuna homomorf inikas etdirin, burada $H_3 = (3) = \{x \mid x = 3k, k \in Z\}$. $G|H_3$ faktor - qrupunun

işarəsini dəyişən $A_3 = \left\{ e = g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \right.$

$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left. \right\}$ qrupuna izomorf olduğunu göstərin.

§ 7. Yanaşı siniflər. Normal bölənlər. Faktor qruplar.

Tutaq ki, $G = \langle G; \cdot, {}^{-1} \rangle$ multiplikativ qrup, $\mathcal{H}$ - onun altqrupu, $a \in G$ -dir.

Tərif. $aH = \{ah \mid h \in H\}$ çoxluğuna G qrupunun $\mathcal{H}$ altqrupuna nəzərən *sol yanaşı sinifi*, $Ha = \{ha \mid h \in H\}$

çoxluğuna G qrupunun $\mathcal{H}$ altqrupuna nəzərən a elementi ilə yaradılan *sağ yanaşı sinifi* deyilir, a yanaşı sinfin nümayəndəsi adlanır.

H – altqrupunun özü yanaşı sinifdir (sol və sağ), çünki, $H = He = eH$, burada e , G -qrupunun vahididir.

Yanaşı siniflərin xassələri:

Xassə1. İstənilən yanaşı sinif özünün ixtiyarı elementi vasitəsi ilə yaradıla bilər. Yəni, $b \in aH$ isə, onda $bH = aH$

Xassə 2. İxtiyarı iki sol(sağ) yanaşı siniflər ya üst-üstə düşür, ya da onların heç bir ortaq elementi yoxdur.

Xassə 3. $\mathcal{H}$ altqrupu ilə üst-üstə düşməyən aH (və ya Ha) yanaşı sinfi altqrup deyil.

Xassə 4. Əgər H G qrupunun m tərtibli altqrupudursa, onda $aH (Ha)$ yanaşı sinifi m elementdən ibarətdir.

257. Tutaq ki, a G multiplikativ qrupunun elementidir və $\mathcal{H}$ G qrupunun altqrupudur. Göstərin ki,

$$1) aG = G \text{ və } Ga = G;$$

$$2) HG = GH = G$$

$$3) GG = G$$

258. Göstərin ki, əgər G n tərtibli sonlu qrupdursa, onda onun ixtiyarı a elementi üçün $a^n = e$ bərabərliyi doğrudur.

259. Tutaq ki, $\mathcal{H}$ G qrupunun altqrupudur. İsbat edin ki,

$$1) aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b \in aH;$$

2) $\varphi: H \rightarrow aH$ inikası qarşılıqlı-birqiymətlidir.

Teorem. G qrupunun ixtiyarı $\mathcal{H}$ altqrupuna görə sol(sağ) yanaşı siniflər çoxluğu G qrupunun siniflərə ayrılışını əmələ gətirir.

Teorem (Laqranj). n – tərtibli sonlu qrupun tərtibi onun ixtiyarı altqrupunun tərtibinə bölünür.

G qrupunun sol(sağ) yanaşı siniflərə ayrılışındakı siniflərin sayı olan k -ədədinə G qrupunda $\mathcal{H}$ altqrupunun indeksi deyilir və $k = \frac{n}{m}$ kimi işarə olunur.

Nəticə 1. Əgər G n – tərtibli sonlu qrupdursa və $g \in G$ -dirsə, onda g elementinin tərtibi n ədədini bölür.

Nəticə 2. Tərtibi sadə olan ixtiyarı sonlu qrup dövrüdür.

Tərif. $\mathcal{H}$ G qrupunun altqrupu olduqda G -nin $\mathcal{H}$ -a nəzərən sol yanaşı siniflər çoxluğu sağ yanaşı siniflər çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə onda $\mathcal{H}$ G qrupunun *normal böləni* adlanır.

Tərif. G qrupunun $\mathcal{H}$ normal böləni üzrə yanaşı siniflər çoxluğunda siniflərin hasili və sinfin tərsi əməli təyin olunur. $G/\mathcal{H} = \langle G/H, \cdot, ^{-1} \rangle$ cəbri G qrupunun $\mathcal{H}$ altqrupuna nəzərən *faktor-qrup* adlanır.

Misal 1. Additiv Z qrupunda $A = (4) = \{x / x = 4k, k \in Z\}$ altqrupunun Z qrupunun normal bölən olmasını göstərin. A altqrupunun indeksi nəyə bərabərdir? Z/A faktor - qrupunu qurun. Bu qrup dövrüdürmü? Əgər dövrüdürsə onu doğuran element necə olar? $2+A, 3+A$ siniflərinin cəmini və Z/A faktor-qrupunda $3+A$ elementinə əks elementi tapın.

Həlli: Z additiv qrupu kommutativdir, buna görə onun ixtiyari altqrupu, o cümlədən verilmiş dövrü $A = \{x / x = 4k, k \in Z\}$ altqrup Z qrupunda normal böləndir. Z qrupunu $A = \{x / x = 4k, k \in Z\}$ altqrupuna nəzərən cüt-cüt kəsişməyən siniflərə ayıraq. Birinci yanaşı sinif olaraq A -nın özünü götürək.

$$\bar{0} = A = (4) = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} = 0 + A.$$

Bu yanaşı sinif 4 - ün misillərindən ibarətdir. İkinci yanaşı sinif birinciyə daxil olmayan hər hansı tam ədədlə, məsələn, 1 -in köməkliyi ilə, yəni 1 -i A -nın elementləri ilə toplamaqla alınır: $1 + A = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$. Bu sinifə

görüldüyü kimi 4-ə böldükdə qalıqda 1 verən tam ədədlər daxildir. $\bar{1} = 1 + A = \{x / x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}\}$. İkinci və üçüncü siniflər bütün elə tam ədədlərdən düzəlir ki, onları 4 - ə böldükdə qalıq uyğun olaraq 2 və 3 verir.

$$\bar{2} = 2 + A = \{x / x = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{3} = 3 + A = \{x / x = 3 + 4k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Qurduğumuz siniflər verilmiş $\mathbb{Z}$ çoxluğunun bütün elementlərini əhatə edir, yəni

$$A \cup (1 + A) \cup (2 + A) \cup (3 + A) = \mathbb{Z}.$$

Qurulan siniflərin ortaq elementləri yoxdur, yəni cüt-cüt kəsişmirlər. Deməli onlar $\mathbb{Z}$ qrupunun ayrılışını təşkil edir, yəni $\mathbb{Z}$ qrupunun $A = (4) = \{x / x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ normal böləni üzrə ayrılışdır. $\mathbb{Z}/A = \{A, 1 + A, 2 + A, 3 + A\}$ dörd tərkibli faktor-qrupdur. Bu qrup dövrü qrupdur.

Bu additiv faktor-qrupda toplama siniflərin toplanması qaydasına görə aparılır. Məsələn,

$$(2 + A) + (3 + A) = (2 + 3) + A = 5 + A = \\ = \{x = 5 + 4k = 1 + (4 + 4k) = 1 + 4(1 + k) = 1 + 4t, t \in \mathbb{Z}\} = 1 + A.$$

$$(3 + A) + A = (3 + A) + (0 + A) = (3 + 0) + A = 3 + A.$$

Eyni qayda ilə $A + (3 + A) = 3 + A$, buna görə A

elementi $\mathbb{Z}/A$ qrupunda sıfır elementdir.

$$(3 + A) + (1 + A) = (3 + 1) + A = 4 + A = \\ = \{x / x = 4 + 4k = 4(1 + k) = 4r, r \in \mathbb{Z}\} = A,$$

$1+A$ elementi $3+A$ elementi üçün əks elementdir. $\mathcal{A}$ altqrupun indeksi $k = 4$ - ə bərabərdir.

Misal 2. $S_3 = \langle S_3; \cdot \rangle$ simmetrik qrupun bütün altqruplarını və 2 - tərtibli altqruplarının hər hansı birinə nəzərən sol və sağ yanaşı sinifləri tapın.

Həlli: $S_3 = \langle S_3; \cdot \rangle$ qrupu sonludur (Keli cədvəlinə görə kommutativ deyil), tərtibi 6 - ya bərabərdir. Laqranj teoreminə görə onun bir, iki, üç və altı tərtibli altqrupları ola bilər. Bir tərtibli vahid altqrupdur, altı tərtibli qrupun özüdür. Ayrı - ayrı elementlərlə doğrulan dövrü qrupları tapaq. Cədvəl 1 - dən görünür ki, $a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = a_1$, yəni a_2, a_3, a_4 iki tərtibli elementlərdir və a_2, a_3 ; a_2, a_4 və a_3, a_4 cütləri müxtəlifdirlər. Buna görə də $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}$ iki tərtibli altqruplardır. Analoji olaraq tapırıq ki, $a_5^2 = a_6$, $a_5^3 = 1$, $a_6^2 = a_5$, $a_6^3 = a_1$, $a_5 a_6 = a_1$ - dir, yəni a_5 və a_6 üç tərtibli qarşılıqlı sadə elementlərdir. Onlar eyni bir $\{a_1, a_5, a_6\}$ dövrü qrupunu doğurur. Digər üç tərtibli altqruplar yoxdur. Eyni qayda ilə müəyyən edirik ki, iki tərtibli bütün

altqrupları yalnız $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}$ şəklində dövrü altqruplardır. Beləliklə, alırıq ki, $\langle S_n, \cdot \rangle$ - in dörd məxsusi altqrupu var.

İndi iki tərtibli altqrupların birinə nəzərən məsələn $\mathcal{H} = \langle \{a_1, a_3\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$ altqrupuna görə sol və sağ yanaşı sinifləri tapaq.

$H = \{a_1, a_3\}$ altçoxlüğundan kənarda olan a_2 və a_4 - ü soldan və sağdan H - çoxluğuna vuraq. Kəli cədvəlindən istifadə edərək tapırıq.

$$a_2 H = a_2 \{a_1, a_3\} = \{a_2, a_2 a_3\} = \{a_2, a_5\}$$

$$a_4 H = \{a_4, a_4 a_3\} = \{a_4, a_6\}$$

Analoji olaraq sağ yanaşı siniflər qurulur:

$$H a_2 = \{a_1, a_3\} a_2 = \{a_2, a_3 a_2\} = \{a_2, a_6\}$$

$$H a_4 = \{a_1, a_3\} a_4 = \{a_4, a_3 a_4\} = \{a_4, a_5\}$$

İki ayrılış alınır - sol və sağ:

$$S_3 = \{a_1, a_3\} \cup \{a_2, a_5\} \cup \{a_4, a_6\}$$

$$S_3 = \{a_1, a_3\} \cup \{a_2, a_6\} \cup \{a_4, a_5\}$$

Bu ayrılışlar müxtəlifdir, onda $\mathcal{H} = \langle \{a_1, a_3\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$ altqrupu normal bölən deyil.

Tərif. G qrupunda heç olmazsa bir dənə g elementi varsa ki, $b = g^{-1}ag$ olsun, onda G qrupunun a və b elementlərinə bu qrupda qoşma elementlər deyilir.

260. Tutaq ki, A G qrupunun $\mathcal{H}$ altqrupu üzrə sol yanaşı sinifdir. Göstərin ki, $B = \{g^{-1} \mid g \in A\}$ G qrupunun $\mathcal{H}$ altqrupu üzrə sağ yanaşı sinifdir.

261. İxtiyarı G qrupunun vahiq altqrupuna nəzərən və G -nin özünə nəzərən ayrılışlarını göstərin.

262-267 məsələlərində yanaşı sinifləri tapın:

262. Tam ədədlərin additiv qrupunun verilmiş natural m – ədədinin misilləri ədədlərinin $m\mathbb{Z}$ altqrupuna nəzərən;

263. Həqiqi ədədlərin additiv qrupunun tam ədədlərin altqrupuna nəzərən;

264. Kompleks ədədlərin additiv qrupunun tam a və b ədədlərinin $a + bi$ Qaus ədədlərinin $\mathcal{H}$ altqrupuna nəzərən;

265. 18 tərtibli $\langle a \rangle$ dövrü qrupun $\langle a^3 \rangle$ altqrupuna nəzərən;

266. 16 tərtibli dövrü $\langle a \rangle$ qrupun $\langle a^3 \rangle$ altqrupuna nəzərən;

267. Sonsuz dövrü $\langle a \rangle$ qrupun $\langle a^3 \rangle$ altqrupuna nəzərən;

268. İsbat edin ki, G qrupunun $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ altqruplarının $A \cap B$ kəsişməsi G - nin altqrupudur.

269. Göstərin ki, $\mathcal{H}$ altqrupunun normal bölən olması üçün zəruri və kafi şərt H özünün hər bir a elementi ilə birlikdə onun qoşma $b = g^{-1}ag$ elementini də öz daxilində saxlamalıdır.

270. Göstərin ki, $\forall g \in G$ elementi üçün $gH = Hg$ bərabərliyi $gHg^{-1} = H$ ilə eynigüclüdür.

271. Göstərin ki, G n - tərtibli qrup, $\mathcal{H}$ onun $2n$ - tərtibli altqrupudursa, onda $\mathcal{H}$ G -nin normal bölənidir, burada $\forall n \in \mathbb{Z}$.

272. Göstərin ki, G qrupunun ixtiyari iki $\mathcal{H}_1$ və $\mathcal{H}_2$ normal bölənlərinin kəsişməsi G qrupunda normal böləndir.

273. Tutaq ki, $\mathcal{H}$ G qrupunun normal bölənidir. İsbat edin ki, ixtiyari $a, b \in G$ üçün

$$1) aH \cdot bH = (ab)H$$

$$2) H \cdot aH = aH \cdot H = aH$$

$$3) aH \cdot a^{-1}H = a^{-1}H \cdot aH = H.$$

274. İsbat edin ki, Abel qrupunun hər bir altqrupu onun normal bölənidir.

275. Üç dərəcəli S_3 simmetrik qrupunda bütün normal bölənlərini tapın.

276. İsbat edin ki, G qrupu kommutativ qrupdursa, onda onun ixtiyari altqrupu kommutativdir.

277. $A = (7) = \{x / x = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$ altqrupuna nəzərən $\mathbb{Z}/A$ faktor-qrupu qurun. $(3 + A) + (5 + A)$ cəmini tapın.

278. Verilir $A = (3) = \{x / x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = (2) = \{x / x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ altqrupları. $\mathbb{Z}/_{A \cap B}$ faktor-qrupunu qurun və onun üçün toplama cədvəlini qurun, $(H = A \cap B)$ elementinə əks elementi tapın.

279. İsbat edin ki, indeksi 2 olan hər bir altqrup normaldır.

280. İsbat edin ki, sonlu G qrupunun ixtiyari $G/\mathcal{H}$ faktor-qrupunun tərtibi G qrupunun tərtibinin bölənidir.

281-286 nömrəli misallarda verilənlərə görə $G/\mathcal{H}$ faktor-qrupları tapın:

281. 5-in misilləri tam ədədlərin additiv qrupunun 25-in misilləri ədədlərin additiv altqrupa nəzərən;

282. 6-nın misilləri tam ədədlərin additiv qrupunun 18-in misilləri ədədlərin additiv altqrupa nəzərən;

283. Tam ədədlərin additiv qrupunun verilmiş natural m ədədinin misillərinin altqrupuna nəzərən;

284. 7-nin misilləri tam ədədlərin additiv qrupunun 21 - in misilləri ədədlərinin altqrupuna görə.

285. 2-nin misilləri tam ədədlərin additiv qrupunun 26 - nın misilləri tam ədədlərin altqrupuna görə.

286. 6-nın misilləri tam ədədlərin additiv qrupunun 24 - ün misilləri tam ədədlərin altqrupuna görə.

287. İsbat edin ki, G Abel qrupunun hər bir G/H faktor - qrupu Abel qrupdur.

288. İsbat edin ki, G dövrü qrupun hər bir G/H faktor - qrupu dövrüdür.

289. Göstərin ki, ixtiyari homomorfizmin nüvəsi normal böləndir.

290. İsbat edin ki, n tərtibli cırlaşmayan bütün matrislərin G qrupunda unimodulyar (determinantı 1 - ə bərabər olan) matrislərin H altqrupu normal böləndir və G/H faktor - qrupu tapın.

III FƏSİL

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR MEYDANI

§8. Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri, trigonometrik şəkli.

Kompleks ədədlər üzərində əməllər.

$z = a + bi = (a, b)$, $a, b \in R$, həqiqi ədədlər $i^2 + 1 = 0$, şəklində olan hər bir ifadə adi və ya cəbri şəkildə verilmiş kompleks ədəd adlanır. Burada $a = \operatorname{Re} z$ həqiqi hissə, bi xəyali hissə, $b = \operatorname{Im} z$ - xəyali hissənin əmsalı adlanırlar. Kompleks ədədlər üçün aşağıdakı doğrudur:

1. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2))$
2. $(a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$
3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z \neq (0, 0)$ olduqda $z^{-1} = (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$

$C = \langle C = \{(a, b) = a + bi \mid a, b \in R\}, +, \cdot \rangle$ cəbri meydan təşkil edir. Bu meydanda

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + (\operatorname{sign} b)i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \quad (1)$$

şəklində olur.

$\bar{z} = a - bi$ kompleks ədədi

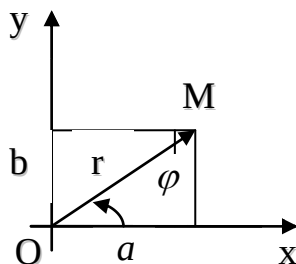
$z = a + bi$ ədədinin qoşması

adlanır. $R \times R$ koordinat

sistemində $M(a, b)$ nöqtəsi

$z = (a, b) = a + bi$ kompleks

ədədinin həndəsi təsviridir.



$\vec{OM}$ vektorunun uzunluğu z ədədinin modulu və $\vec{OM}$ vektorunun meyl bucağı isə argumenti adlanırlar və uyğun

olaraq $r = |z|$ və $\varphi = \arg z$ kimi işarə olunurlar, (r, φ) ,

$z = (a, b)$ kompleks ədədinin polyar koordinatlarıdır və

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \varphi$ və $b = r \sin \varphi$ olduğunu nəzərə

alıb $z = (a, b)$ kompleks ədədinin

$$z = (a, b) = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrik şəklini alırıq. $\varphi = \arg z$ tapmaq üçün

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

və ya $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ bərabərliklərindən istifadə edilir. $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$

-dan istifadə etdikdə $z = a + bi$ ədədi hansı rübdə olduğunu

nəzərə almaq lazım gəlir. Kompleks ədədin triqonometrik şəklindən istifadə edərək.

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|, \quad \arg \left(\prod_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \arg z_k$$

$$z \neq 0 \text{ olduqda } |z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \arg z^{-1} = -\arg z.$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{olduqda} \quad |z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z \quad \text{kimi}$$

bərabərliklərdən istifadə edərək

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (2)$$

Muavr düsturu alınır.

$$n \geq 2 \text{ olduqda}$$

$$u_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

düsturu kompleks ədədin n -ci ($n \geq 2$) dərəcədən kökləri

düsturudur. Həndəsi olaraq hər bir u_k mərkəzi koordinat

başlanğıcında yerləşən, radiusu $\sqrt[n]{r}$ -ə bərabər olan çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının təpə nöqtələrində yerləşən kompleks ədəddir. Xüsusi halda $z=1$ olduqda

$$\alpha_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

vahidin n -ci $n \geq 2$ dərəcədən kökləri adlanır. Onların içərisində elə ε kökləri vardır ki, onları $s = 0, 1, \dots, n-1$ qüvvətlərinə yüksəltdikdə bu qüvvətlər vahidin bütün köklərinin qiymətlərini alırlar, yəni $\varepsilon^s = \alpha_k$ olur. Belə köklər vahidin n – ci dərəcədən ibtidai kökü adlanır və onları tapmaq üçün aşağıdakı hökmdən istifadə edirlər. Vahidin α_k kökü onda və yalnız onda ibtidai kök olur ki, $(k, n) = 1$ olsun. Vahidin n -ci ($n \geq 2$) dərəcədən kökləri çoxluğu vurmaya nəzərən qrup təşkil edir.

$$\alpha x^n + \beta = 0 \quad (\alpha \neq 0, \beta \in C) \quad (4)$$

şəklində tənliklər ikihədli tənliklər adlanır və $x = \sqrt[n]{-\frac{\beta}{\alpha}}$

radikalı ilə (4) tənliyinin bütün n -dənə həlli tapılır.

Misallar

1) $|z| Jm z + Re(2-i) + iJmz = 17 + 3i$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$z = x + iy, \quad x, y \in R$$

qəbul etsək, bu tənliyi $(\sqrt{x^2 + y^2})y + 2 + iy = 17 + 3i$ şəklində yazıb

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 17 \\ y = 3 \end{cases}$$

sistemini alırıq. Buradan $z = \pm 4 + 3i$ alınır.

2) $(1 - 3i)x^2 - x - 1 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(1 - 3i)}}{2(1 - 3i)} = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 12i}}{2(1 - 3i)}$$

alınır. (1)-dən istifadə edərək

$$x = \frac{1 \pm (3 - 2i)}{2(1 - 3i)}$$

alırıq və buradan

$$x_1 = \frac{1 - 3 + 2i}{2(1 - 3i)} = \frac{-1 + i}{1 - 3i} = \frac{(-1 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{-2 \pm i}{5}.$$

$$x_1 = \frac{1 + 3 - 2i}{2(1 - 3i)} = \frac{2 - i}{1 - 3i} = \frac{1 + i}{2}$$

olur.

3) Üçqat bucağın əsas triqonometrik funksiyalarını birqat bucağın triqonometrik funksiyaları ilə ifadə edin.

Həlli:

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$ ifadəsi üçün bir tərəfdən Muavr düsturundan, digər tərəfdən Nyuton binomundan istifadə edərək alırıq

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$$

Kompleks ədədlərin bərabərliyindən alınır ki,

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi; \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi,$$

onda

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} = \frac{3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi},$$

burada surət və məxrəci $\cos^3 \varphi$ -yə bölərək

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

kimi tapırıq.

4) $(-\sqrt{3} + i)z^5 + i = 1$ ikihədli tənliyini həll edin.

Həlli:

$$z^5 = \frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}, \quad z = \sqrt[5]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$$

Kökalatı ifadəni triqonometrik şəklə gətirək.

$$z_1 = 1 - i, \quad r_1 = |z_1| = \sqrt{2},$$

$$\varphi_1 = \arg \operatorname{tg}(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + i,$$

$$r_2 = |z_2| = 2$$

$$\varphi_2 = \arg \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z^5 = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \right) + \right. \\ \left. + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

(3)-əsasən alırıq ki,

$$z = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \left(\cos \frac{\frac{11\pi}{12} + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\frac{11\pi}{12} + 2\pi k}{5} \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \left(\cos \frac{11 + 24k}{60} \pi + i \sin \frac{11 + 24k}{60} \pi \right)$$

və $k=0,1,2,3,4$. qiymətlərində verilmiş tənliyin bütün 5 dənə kökü hesablanır.

5) vahidin dördüncü dərəcədən bütün ibtidai köklərini tapın.

Həlli:

$$\alpha_k = \sqrt[4]{1} = \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4} = \cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2}$$

$k=0,1,2,3$, $n=4$ ilə $k=1$ və $k=3$ qarşılıqlı sadə olduqları üçün

$$\alpha_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \quad \text{və} \quad \alpha_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i \quad \text{vahidin}$$

dördüncü dərəcədən ibtidai kökləridirlər.

291. Ədədləri kompleks müstəvidə göstərin:

$$1; i; -1; -i; 1+i; -1-i; 2+i; 3,5+2i; -3-2i; 3-i.$$

Verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədləri üzərində əsas hesabi əməllərinin nəticəsini, onların simmetrik elementlərini və göstərilən n -in dərəcələrini cəbri şəkildə tapın:

$$\mathbf{292.} \quad z_1 = 3-i, \quad z_2 = 2+3i, \quad n = 2; 3; 4.$$

$$\mathbf{293.} \quad z_1 = -\frac{1}{2} + 2i, \quad z_2 = -1+i, \quad n = 3; 4; 5.$$

$$\mathbf{294.} \quad z_1 = -2+i, \quad z_2 = 1-2i, \quad n = 4; 5; 6.$$

295. n tam olduqda i^n -i hesablayın:

Əməlləri yerinə yetirin:

$$\mathbf{296.} \quad (3-i)^3 - (1-2i)^2. \quad \mathbf{297.} \quad \frac{(2+i)^2 - (1-3i)(2+3i)}{1+2i}.$$

$$\mathbf{298.} \quad \frac{(2-3i)^3 + (1+2i)^2(5-i)}{(4-3i)^2 + 10i(1-5i)}. \quad \mathbf{299.} \quad \frac{(2-2i)^5}{(1-i)^3} + 2i.$$

$$\mathbf{300.} \quad (1+2i)^5 - (1-2i)^5. \quad \mathbf{301.} \quad (2+i)^7 + (2-i)^7.$$

$$\mathbf{302.} \quad \frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}. \quad \mathbf{303.} \quad \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}.$$

$$304. \frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}.$$

$$305. \frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4} + (1+i)(3-i).$$

$$306. \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \quad (n > 2 - tam \text{ ədəddir})$$

$$307. \frac{(1+i)^n}{2(1-i)^{n-3}}, \quad (n > 3 - tam \text{ ədəddir})$$

Məchulları həqiqi hesab edərək tənlikləri həll edin:

$$308. (2-3i)x - (4-5i)y = 4-3i$$

$$309. (7+2i)x + (2+3i)y = 6-8i$$

$$310. (3+i)x + (2-4i)y - (1-2i)z = 1+5i$$

$$311. (7-2i)x + (5+4i)y + (3+i)z = -3+2i$$

$$312. \begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i \end{cases}$$

$\bar{z}$ ədədinin z -kompleks ədədinin qoşması olduğunu bilərək, tənlikləri həll edin:

$$313. (1-i)\bar{z} - 3iz = 2-i$$

$$314. z\bar{z} - 2z = 5,5+i$$

$$315. z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 1+3i$$

$$316. z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) + 2(z - \bar{z}) = 7$$

$$317. 2z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) = 6i$$

$$318. 4z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 13$$

Tənliklər sistemini həll edin:

$$319. \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{cases}$$

$$320. \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i \end{cases}$$

$$321. \begin{cases} (2+i)x - (3+i)y = i \\ (3+i)x + (2-i)y = i \end{cases}$$

$$322. \begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y = 7 \\ (3-i)x + (4-2i)y = 2-14i \end{cases}$$

323. Kökləri hesablayın:

$$a) \sqrt{2i}, \quad b) \sqrt{-i}, \quad c) \sqrt{4+3i}, \quad d) \sqrt{3-4i},$$

$$e) \sqrt{7-24i}, \quad f) \sqrt{-8-6i}, \quad g) \sqrt{-15+8i}, \quad h) \sqrt{-11+60i},$$

$$i) \sqrt[4]{-1}, \quad j) \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad k) \sqrt[4]{7-24i},$$

Tənlikləri həll edin:

$$324. (1-i)x^2 - (3-2i)x + 5 = 0$$

$$325. 10x^2 + 3x - i = 0$$

$$326. x^2 - (3+7i)x - 10 + 11i = 0$$

$$327. (3+i)x^2 + (1-i)x - 6i = 0$$

$$328. x^2 - (2+2i)x + 15 - 6i = 0$$

$$329. x^3 + 1 = 0$$

330. $x^4 + 1 = 0$

331. $x^4 + 5x^2 + 9 = 0$

332. $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 9 = 0$

333. $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$

334. $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$

335. $|x| + (1+i)x = 4 + 7i$

336. $(3+i)x - |(2+i)x| = 5i$

337. Göstərin ki, $\langle \{a+bi / \forall a, b \in \mathbb{Z}\}; +, \cdot \rangle$ cəbri tamlıq oblastıdır. Bu tamlıq oblastı tam Qaus ədədlər halqası adlanır.

338. Göstərin ki, $\langle \{a+bi / \forall a, b \in \mathbb{Q}\}; +, \cdot \rangle$ cəbri meydandır və $\mathbb{C}$ kompleks ədədlər meydanının alt meydanıdır.

339. Ədədləri triqonometrik şəkildə göstərin:

a) 1, b) -1 , c) i , d) $-i$, e) $1+i$, f) $-1+i$,
g) $1-i\sqrt{3}$, h) $-\sqrt{3}-i$, i) $2+\sqrt{3}+i$, j) $2-\sqrt{3}-i$.

340. Kompleks ədədləri triqonometrik şəkildə göstərin:

a) $-\cos \varphi + i \sin \varphi$, b) $-\cos \varphi - i \sin \varphi$,
c) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$, d) $1 - \cos \varphi + i \sin \varphi$,
e) $-\sin \varphi - i(1 + \cos \varphi)$, f) $-\sin \varphi + i(1 + \cos \varphi)$.

341. Triqonometrik şəkildə yazılmış kompleks ədədləri cəbri şəkildə yazın:

$$\begin{aligned}
 a) & 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), & b) & 3\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}), \\
 c) & 5(\cos \pi + i \sin \pi), & d) & \frac{4}{\sqrt{2}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}), \\
 e) & 4(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}).
 \end{aligned}$$

342. Əməlləri triqonometrik şəkildə yerinə yertirin:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{\sqrt{3}+i}, & b) & \frac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{\cos \varphi - i \sin \varphi}, \\
 c) & \frac{(-\cos \varphi + i \sin \varphi)(\sqrt{3}-i)}{2+\sqrt{3}+i}, \\
 d) & \frac{(2-\sqrt{3}-i)(1-\cos \varphi + i \sin \varphi)}{i(-1+i)},
 \end{aligned}$$

343. Verilənlərə görə z kompleks ədədlərini cəbri şəkildə göstərin:

$$\begin{aligned}
 a) & |z|=2, & \cos \varphi &= -\frac{3}{5}, & \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi; \\
 b) & |z|=3, & \sin \varphi &= -\frac{8}{17}, & \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\
 c) & |z|=37, & \sin \varphi &= -\frac{12}{37}, & \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi; \\
 d) & |z|=17, & \cos \varphi &= \frac{15}{17}, & \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi, & \text{burada} \\
 & & \varphi &= \arg z.
 \end{aligned}$$

344. $\varphi_1 = \arg z_1$ və $\varphi_2 = \arg z_2$ olduğunu bilərək $z_1 z_2$ hasilini cəbri şəkildə göstərin:

$$a) |z_1|=1, |z_2|=2, \cos \varphi_1 = \frac{3}{5}, \quad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{9}{41}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \pi;$$

$$b) |z_1|=4, |z_2|=3, \quad \sin \varphi_1 = \frac{2}{3},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{4}, \quad 0 < \varphi_1, \varphi_2 < \frac{\pi}{2};$$

$$c) |z_1|=13, |z_2|=5, \quad \sin \varphi_1 = -\frac{3}{5}, \quad \pi < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{12}{13}, \quad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2};$$

$$d) |z_1|=37, |z_2|=17, \quad \sin \varphi_1 = \frac{8}{17},$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{12}{37}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi_1, \varphi_2 < \pi.$$

345. Verilmiş z kompleks ədədindən modulu n dəfə və arqumentindən φ qədər böyük olan kompleks ədədlərini həndəsi təsvir edin.

$$a) z = 1 + i\sqrt{3}, \quad n = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$b) z = -\sqrt{3} + i, \quad n = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$c) z = -1 - i, \quad n = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$d) z = 1 - i, \quad n = \frac{1}{3}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

346. İxtiyari z_1 və z_2 kompleks ədədləri üçün

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

bərabərliyinin doğru olduğunu göstərin və həndəsi mənasını müəyyən edin.

347. Aşağıdakı şərtləri ödəyən z kompleks ədədlərini həndəsi təsvir edin.

$$a) |z| = 1, \quad b) |z| \leq r, \quad r \in R^+, \quad c) |z - z_0| < r, \quad r \in R^+,$$

$$d) |z - 1 - i| < 2, \quad e) \arg z = \frac{\pi}{6}, \quad f) \arg z = \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$g) \arg(z - z_0) \leq \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad h) \arg(z - 2 + i) \leq \frac{\pi}{3}.$$

348. Aşağıdakı sistemləri ödəyən z kompleks ədədlər çoxluqlarını təsvir edin.

$$a) \begin{cases} |z-1| \leq 2 \\ |z+1| \leq 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} |z-1+i| > 1 \\ |z-1+i| < 3 \end{cases} \quad c) \begin{cases} |z-1+2i| \leq 2 \\ \arg(z+1) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} |z+2-3i| \leq 2 \\ 0 < \arg(z-1+i) \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad e) \begin{cases} 1 < |z| < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg(z+3+3i) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2 \leq |z-2-3i| \leq 3 \\ 0 \leq \arg(z+1-3i) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

349. t – ixtiyari həqiqi ədəd olduqda $z = \frac{1+it}{1-it}$ ədədləri

çoxluğunu təyin edin: həndəsi mənasını müəyyən edin.

350. $a \neq b$ və φ -nin ixtiyari qiymətlərində

$$\frac{z-a}{z-b} = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ tənliyini ödəyən bütün } z \text{ kompleks}$$

ədədlər çoxluğunun həndəsi yerini təyin edin.

351. $a > c > 0$ - verilmiş həqiqi ədədlər olduqda

$$|z+c| + |z-c| = 2a \text{ tənliyini ödəyən bütün } z \text{ kompleks}$$

ədədlər çoxluğunun həndəsi yerini təyin edin.

352. $0 < a < c$ - verilmiş həqiqi ədədlər və $\|z+c| - |z-c|\| = 2a$

tənliyini ödəyən bütün z kompleks ədədlər çoxluğunun həndəsi yerini təyin edin.

353. $p > 0$ olduqda $\left| z - \frac{p}{2} \right| = \left| \operatorname{Re} z + \frac{p}{2} \right|$ tənliyini ödəyən

bütün z kompleks ədədlər çoxluğunun həndəsi yerini təyin edin.

354. $a \neq b$ və λ -verilmiş mənfi olmayan həqiqi ədəd olduqda

$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \lambda$ tənliyini ödəyən bütün z kompleks ədədləri

çoxluğunun həndəsi yerini təyin edin.

355. Üçbucağın təpələri saat əqrəbinin əksi istiqamətində

götürülmüş z_1, z_2 və z_3 nöqtələrində yerləşirlər. Bu təpə

nöqtələrində yerləşən daxili bucaqları uyğun olaraq α, β və

γ ilə işarə edərək

$$\alpha = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \beta = \arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \quad \gamma = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3},$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ifadələrinin doğru olduqlarını göstərin.

356. Yuxarıdakı məsələdən istifadə edərək üçbucağın təpələrinin

$$a) z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 5 + 3i, \quad z_3 = (7 - 2\sqrt{3}) + 3i,$$

$$b) z_1 = -3 + i, \quad z_2 = 1 + 3i, \quad z_3 = -\sqrt{3} + i(10 - 3\sqrt{3});$$

nöqtələrində yerləşdiklərini bilərək onun daxili bucaqlarını və tərəflərinin uzunluqlarını tapın.

357. Muavr düsturundan istifadə edərək hesablayın:

$$a) (1-i)^{15}, \quad b) (\sqrt{3}+i)^{24}, \quad c) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^{32}, \quad d) \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right)^{24},$$

$$e) \left(\frac{1+ictg\alpha}{1-ictg\alpha} \right)^5, \quad f) \left(\frac{1-itg\alpha}{1+itg\alpha} \right)^7, \quad g) \frac{(1-i\sqrt{3})^8}{(1+i\sqrt{3})^4} + (1+i)^2(\sqrt{3}-i)^3,$$

$$h) \frac{(1-i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{18}} + \frac{(-1+i\sqrt{3})^{13}}{(1+i)^{22}}.$$

358. n -tam olduqda isbat edin:

$$a) (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

$$b) (\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right),$$

$$c) \left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha} \right)^n = \frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha}.$$

359. Əgər $z + z^{-1} = 2 \cos \varphi$ isə, onda $n \in \mathbb{Z}^+$ üçün

$$z^n + z^{-n} = 2 \cos n\varphi \text{ olduğunu isbat edin.}$$

360. Hesablayın: $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

361. $\beta = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ olduqda $(1 + \beta)^n$ ifadəsini

sadələşdirin.

362. İfadələri $\cos x$ və $\sin x$ vasitəsilə ifadə edin.

a) $\sin 3x$, b) $\cos 3x$, c) $\cos 5x$, d) $\sin 5x$.

363. a) $\operatorname{tg} 3x$, b) $\operatorname{tg} 5x$, c) $\operatorname{tg} 7x$ ifadələrini $\operatorname{tg} x$ vasitəsilə ifadə edin.

364. a) $\sin^3 x$, b) $\sin^4 x$, c) $\cos^5 x$, d) $\cos^6 x$

ifadələrini x -in misli bucaqlarının triqonometrik funksiyalarının bir dərəcəli çoxhədlişi şəklində göstərin.

365. a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$

cəmlərini hesablayın.

366. a) $1 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right),$

b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right),$

c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right),$

d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$

olduqlarını isbat edin.

367. Kompleks ədədlərin triqonometrik şəklindən istifadə

edərək

$$a) \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

$$b) \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

cəmlərini hesablayın.

368. $n \in \mathbb{Z}^+$ olduqda isbat edin:

$$a) \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} + \cdots + \cos \frac{2n-1}{2} \alpha = \frac{\sin n\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$b) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} + \cdots + \sin \frac{2n-1}{2} \alpha = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

369. İsbat edin:

$$a) \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2},$$

$$b) \sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{5\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} + \sin \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{22},$$

$$c) \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2},$$

$$d) \sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{11} + \sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{8\pi}{11} + \sin \frac{10\pi}{11} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{22},$$

$$e) \cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2},$$

$$f) \sin \frac{\pi}{13} + \sin \frac{3\pi}{13} + \sin \frac{5\pi}{13} + \sin \frac{7\pi}{13} + \sin \frac{9\pi}{13} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{26}.$$

370. $n \in \mathbb{Z}^+$ olduqda isbat edin:

$$a) \cos \frac{2\pi}{2k+1} + \cos \frac{4\pi}{2k+1} + \cdots + \cos \frac{2k\pi}{2k+1} = -\frac{1}{2},$$

$$b) \sin \frac{2\pi}{2k+1} + \sin \frac{4\pi}{2k+1} + \cdots + \sin \frac{2k\pi}{2k+1} = -\frac{\pi}{2(2k+1)}.$$

$$371. a) S = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx,$$

$$b) T = \sin x + 2\sin 2x + \cdots + n\sin nx$$

cəmlərini hesablayın.

372. Köklərin qiymətlərini hesablayın:

$$a) \sqrt[3]{i}, \quad b) \sqrt[4]{-4}, \quad c) \sqrt[3]{2+2i}, \quad d) \sqrt[6]{-27}.$$

373. Hesablayın:

$$a) \sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}, \quad b) \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}, \quad c) \sqrt[8]{\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}}, \quad d) \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}},$$

$$e) \sqrt[7]{1 + \frac{\sqrt{3}-i}{2}}, \quad f) \sqrt[10]{\frac{(3\sqrt{3}+4) - i(4\sqrt{3}-3)}{3-4i}},$$

$$g) \sqrt[8]{\frac{1+7i}{(4-3\sqrt{3}) + i(4\sqrt{3}+3)}}.$$

374. İkihədli tənlikləri həll edin:

$$a) z^3 + i = 0, \quad b) z^3 + 2 + 2i = 0, \quad c) 2z^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0,$$

$$d) z^6 + i = 0, \quad e) z^6 - 1 = 0, \quad f) 2z^7 - 2 = \sqrt{3} + i.$$

375. Vahidin n -ci dərəcədən köklərini hesablayın.

$$a) n = 2, \quad b) n = 3, \quad c) n = 6, \quad d) n = 8, \quad e) n = 12.$$

376. Vahidin n -ci dərəcədən ibtidai köklərini tapın.

$$a) n = 2, \quad b) n = 3, \quad c) n = 6, \quad d) n = 8, \quad e) n = 12.$$

377. Vahidin n -ci dərəcədən köklərinin

a) cəmini, b) hasilini tapın.

378. Vahidin 24-cü dərəcədən köklərinin

$$a) 5, \quad b) 8, \quad c) 12$$

göstəricilərinə aid olanlarını göstərin.

Tərif: Əgər ε vahidin δ dərəcəsindən ibtidai kökü isə, $(\varepsilon^\delta = 1, \varepsilon = \sqrt[n]{1})$, onda deyirlər ki, ε ədədi $\delta(\delta \leq n)$ göstəricisinə aiddir.

379. Vahidin n -ci dərəcədən bütün köklərinin hansı göstəricilərə aid olduqlarını tapın.

$$a) n = 12, \quad b) n = 16$$

380-383 misallarda tənlikləri həll edin.

$$\mathbf{380.} (x+2)^n - (x-2)^n = 0, \quad \mathbf{381.} (x+5i)^n - (x-5i)^n = 0,$$

$$\mathbf{382.} (x+3i)^n + i(x-3i)^n = 0, \quad \mathbf{383.} (x+4i)^n - i(x-4i)^n = 0.$$

- 384.** İsbat edin ki, vahidin m -ci dərəcədən kökünün vahidin n -ci dərəcədən kökünə hasili vahidin mn -ci dərəcədən köküdür.
- 385.** İsbat edin ki, m və n ədədləri qarşılıqlı sadədirlərsə, onda $z^m = 1$ və $z^n = 1$ şərtlərini ödəyən yalnız bir kompleks ədəd vardır.
- 386.** İsbat edin ki, m və n ədədləri qarşılıqlı sadədirlərsə, onda mn dərəcədən vahidin bütün kökləri vahidin m -ci dərəcədən kökləri ilə n -ci dərəcədən köklərinin hasili kimi alınrlar.
- 387.** İsbat edin ki, m və n ədədləri qarşılıqlı sadədirlərsə, onda vahidin m -ci dərəcədən ibtidai kökünün n -ci dərəcədən ibtidai kökünə hasili vahidin mn -ci dərəcədən ibtidai köküdür və tərsinə.
- 388.** Vahidin n -ci dərəcədən bütün köklərinin vurmaya nəzərən *abel* qrupu təşkil etdiyini isbat edin.
- 389.** Vahidin istənilən n -ci ($n \geq 2$) dərəcədən bütün köklərinin vurmaya nəzərən *abel* qrupu təşkil etdiyini isbat edin.
- 390.** Vahidin n -ci dərəcədən və m -ci dərəcədən bütün kökləri qrup təşkil edirmi? Səbəbini izah edin.

IV FƏSİL

XƏTTİ FƏZALAR

§ 9. n – ölçülü hesabi vektorlar fəzası

Tutaq ki, $\mathcal{P}$ – ixtiyarı qeyd olunmuş meydan, n – qeyd olunmuş natural ədəddir. $\mathcal{P} = \langle P, +, -, \cdot, 1 \rangle$ P -nin elementlərini skalyarlar, P -ni skalyarlar çoxluğu, $\mathcal{P}$ -ni skalyarlar meydanı adlandıraraq. P -nin n – sayda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ elementlərinin nizamlanmış sistemi $\mathcal{P}$ meydanı üzərində n – ölçülü hesabi vektor adlanır və

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ (və ya } a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{) kimi işarə olunur. } \mathcal{P}$$

meydanı üzərində n – ölçülü hesabi vektorlar çoxluğu P^n kimi işarə olunur. P^n çoxluğunda bərabərlik münasibətini, vektorların toplanması əməlini (daxili əməl) və vektorun skalyara vurulması əməlini (xarici əməl) təyin edək.

Tərif. $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ olarsa $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ və $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vektorlarına bərabər vektorlar deyilir.

Tərif. $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ vektoruna $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ və $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vektorlarının cəmi deyilir, yəni

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

Tərif. $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$ vektoruna λ -skalyarının $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektoruna hasili deyilir, yəni $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$.

λ -skalyarına vurulma əməli ω_λ kimi işarə olunur, yəni

$$\omega_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Tərif. Toplama binar cəbri əməlinin və ω_λ unar əməlinin təyin olunduğu P^n çoxluğuna, yəni $\mathcal{P}^n = \langle P^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in P\} \rangle$ cəbrinə $\mathcal{P}$ meydanı üzərində n -ölçülü hesabı vektorlar fəzası deyilir.

Teorem. $\mathcal{P}^n$ vektorlar fəzasının baş əməlləri aşağıdakı xassələrə malikdir: $\forall a, b, c \in P^n, \forall \alpha, \beta \in P$

1. $(a + b) = b + a$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. $\exists \theta \in P^n, \forall a \in P^n, \theta + a = a + \theta$;
4. $\forall a \in P^n, \exists (-a) \in P^n, a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$;
6. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$;
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $1 \cdot a = a$.

Tərif. $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$ vektoruna $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlarının xətti kombinasiyası və $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalyarlarına xətti kombinasiyanın əmsalları deyilir.

Bu halda deyirlər ki, b vektoru $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorları vasitəsilə xətti ifadə olunur.

Tərif. Əgər xətti kombinasiyanın $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olarsa, xətti kombinasiya trivial olmayan xətti kombinasiya adlanır, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ əmsallarının hamısı sıfıra bərabər olarsa trivial xətti kombinasiya adlanır

Tərif. $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorları üçün heç olmazsa biri sıfırdan fərqli elə $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ skalyarları varsa ki, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = \theta$ olsun, onda $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sisteminə xətti asılı vektorlar sistemi deyilir.

Tərif. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = \theta$ bərabərliyi yalnız və yalnız $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_m = 0$ olduqda ödənərsə, onda

$a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sisteminə xətti asılı olmayan vektorlar sistemi deyilir.

Teorem. $a_1 \neq \theta$ olduqda, $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sistemi onda və yalnız onda xətti asılıdır ki, $a_2, \dots, a_m$ vektorlarından heç olmazsa biri özündən əvvəlki vektorunların xətti kombinasiyası olsun.

Tərif. Aşağıdakı çevirmələrə vektorların sonlu sisteminin elementar çevirmələri deyilir:

(α) sistemin hər hansı vektorunun sıfırdan fərqli skalyara vurulması;

(β) sistemin vektorlarından birinin üzərinə sistemin digər vektorunun skalyara vurulmuşunun əlavə olunması (çıxılması);

(γ) sıfır vektorun sistemdən çıxarılması və ya daxil edilməsi;

(α) və (β) çevirmələri qeyri-məxsusi, (γ) çevirməsi məxsusi çevirmə adlanır

Tərif. Verilmiş

$$(S) \quad a_1, a_2, \dots, a_m$$

$$(T) \quad b_1, b_2, \dots, b_m$$

sistemlərindən ixtiyari birinin hər bir sıfırdan fərqli vektoru digər sistemin vektorları ilə xətti ifadə olunarsa, onda bu iki sistemə ekvivalent sistemlər deyilir.

Tərif. $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlarının $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$ şəklində bütün xətti kombinasiyalarının çoxluğuna bu sistemin xətti örtüyü (bürüyəni) deyilir və $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ kimi işarə olunur.

$$L(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in P\}$$

Teorem. Vektorların iki sistemi onda və yalnız onda ekvivalent olar ki, onların xətti örtükləri (bürüyənləri) üst - üstə düşsünlər.

Tərif. Sonlu vektorlar sisteminin bazisi bu sistemin boş olmayan elə xətti asılı olmayan altsisteminə deyilir ki, sistemin ixtiyari vektoru bu altsistemin vektorları ilə xətti ifadə olunsun.

Bu tərif aşağıdakı təriflə eynigüclüdür:

Tərif. Sonlu vektorlar sisteminə ekvivalent olan xətti asılı olmayan altsisteminə bu sistemin bazisi deyilir.

Teorem. Heç olmazsa sıfırdan fərqli bir vektoru özündə saxlayan vektorların sonlu sisteminin bazisi var. Vektorların verilmiş sonlu sisteminin ixtiyarı iki bazisi eyni sayda vektorlardan ibarətdir.

Tərif. Sonlu $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sisteminin rəngi bu sistemin hər hansı bir bazisindəki vektorların sayına deyilir.

Sonlu $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sisteminin rəngi r - dirsə, onda bu sistemin k sayda vektorlarından ibarət altsistemi $k > r$ olduqda xətti asılıdır.

Təklif. Vektorların ixtiyarı sonlu alt sisteminin rəngi bütün sistemin rəngindən böyük deyil.

391. Vektorların toplanması və ədədə vurulması əməllərindən istifadə edərək verilmiş a, b, c vektorları üçün d vektorunun koordinatlarını tapın.

1) $a = (-2, 1, 0, 3), b = (0, 2, 1, -3), d = 2a - b;$

2) $a = (0, 2, 1, -1, 3), b = (1, -1, 2, 0, 3), c = (2, 1, 0, 3, 5),$
 $d = a + 2b - 3c;$

3) $a = (3, 1, 0, 2, 0), b = (-1, 1, 2, 0, 1), c = (2, 1, 0, 5, 3),$
 $d = 3a + b + 2c;$

392. b vektorunun a_1, a_2, a_3 vektorlarının xətti kombinasiyası olub - olmadığını göstərin.

1) $a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (2, 1, -1), a_3 = (-2, 3, 5), b = (1, 3, 6)$

2) $a_1 = (-2, 0, 1), a_2 = (1, -1, 0), a_3 = (0, 1, 2), b = (2, 3, 5)$

3) $a_1 = (1, 0, 2), a_2 = (-2, 0, 3), a_3 = (1, 0, -1), b = (0, 2, 1)$

393. Hesabi a_1, a_2, a_3 vektorlarının $2a_1 + 3a_2 - 5a_3$ xətti kombinasiyasını tapın:

a) $a_1 = (-1, 2, -1, 2), a_2 = (2, 5, 3, 4), a_3 = (2, 0, 0, 1)$

$$\text{b) } a_1 = (4, 3, 2, 1), a_2 = (2, 1, 3, 4), a_3 = (-1, -2, 3, -4)$$

$$\text{c) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } a_1 = 2 - x + 2x^2 + 4x^3, a_2 = -1 + x^2 - x^3,$$

$$a_3 = 1 + 2x + 4x^2 + x^3$$

394. $3a_1 + 2a_2 - 4a_3 - 5x = a_4$ vektor tənliyini həll

edin:

$$\text{a) } a_1 = (1, 2, -3, -1), a_2 = (-1, 3, 0, 1),$$

$$a_3 = (3, -2, 1, 4), a_4 = (-1, 0, 2, -17)$$

$$\text{b) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

395. Tənlikləri həll edin:

$$2(a_1 - 4x) + 3(2a_2 + a_3 - 2x) = 3(a_2 - 5x)$$

$$\text{a) } a_1 = (1, 2), a_2 = (3, -4), a_3 = (-1, 5)$$

$$\text{b) } a_1 = 2 + 3i; a_2 = 2 - 5i; a_3 = 1 + 2i;$$

$$\text{c) } a_1 = -2 + i; a_2 = 4 + 3i; a_3 = -1 + 5i;$$

§10. Vektorlar sisteminin xətti asılılığı və xətti asılı olmaması

396. Vektorlar sisteminin xətti asılılığını araşdırın.

- 1) $a_1 = (1,3,2)$, $a_2 = (3,7,4)$, $a_3 = (7,8,1)$
- 2) $a_1 = (3,2,3)$, $a_2 = (1,1,-2)$, $a_3 = (2,1,5)$
- 3) $a_1 = (0,1,2)$, $a_2 = (1,3,-1)$, $a_3 = (2,0,5)$

397. Vektorların xətti asılılıq anlayışından istifadə edərək göstərin ki, vektorlar sisteminin elementar çevirmələri, vektorların xətti asılı sistemini xətti asılı sistemə, xətti asılı olmayan sistemini xətti asılı olmayan sistemə çevirir.

398. İsbat edin ki, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları içərisində sıfır vektor və iki bərabər vektor varsa bu sistem xətti asılıdır.

399. Göstərin ki, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları sisteminin bir hissəsi xətti asılıdırsa, bu sistem xətti asılıdır.

400. Göstərin ki, xətti asılı olmayan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları sisteminin ixtiyari hissəsi də xətti asılı deyil.

401. Göstərin ki, xətti asılı olan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları sisteminə hər hansı vektorlar əlavə edildikdə, alınan yeni sistem də xətti asılı olar.

402. İsbat edin ki, R^n hesabi vektorlar fəzasının $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ və $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ vektorları sistemlərinin vektorları arasında

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - \lambda_2 a_1 \\ &\dots\dots\dots \\ b_m &= a_m - \lambda_m a_1 \end{aligned}$$

münasibətləri doğrudursa, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ sistemi onda və yalnız onda xətti asılıdır ki, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ sistemi xətti asılı olsun, burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m \in R$

403. Göstərin ki, a, b, c vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə, $a + b, b + c, c + a$ sistemi də xətti asılı deyil.

404. Göstərin ki, əgər $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları xətti asılı deyilsə, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, b$ vektorları xətti asılıdırsa, onda b vektoru $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vektorları vasitəsilə xətti ifadə olunur və ayrılış yeganədir.

405. Vektorlar sisteminin a) xətti asılı olub - olmadığını göstərin. Əgər xətti asılılıq varsa hansı şəkildədir? b) a_5 vektorunu a_1, a_2, a_4 vektorlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olarmı?

$$a_1 = (1, 2, 1, 3), \quad a_2 = (1, 1, 3, 2), \quad a_3 = (0, -1, 2, -1), \quad a_4 = (2, 1, 4, 4),$$

$$a_5 = (-1, 0, 19, -7)$$

Həlli: Verilmiş sistemin vektorları arasında

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 = \theta \quad (1)$$

(1) münasibətini koordinatlarla ifadə edib, aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 + 19\lambda_5 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 - 7\lambda_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Vektorlar arasındakı bütün xətti asılılıqları tapmaqdan ötrü, (2) sisteminin sıfırdan fərqli bütün

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

həllərini tapmaq lazımdır. (2) sistemini Qauss üsulu ilə həll edib, sistemin

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3 + 5\lambda_5 \\ \lambda_2 &= -\lambda_3 - 16\lambda_5 \\ \lambda_4 &= 6\lambda_5 \end{aligned} \quad (3)$$

ümumi həllini tapırıq, burda λ_3, λ_5 sərbəst dəyişənlərdir. Buradan görünür ki, verilmiş vektorlar arasında sonsuz sayda xətti asılılıqlar vardır. Məsələnin ikinci sualına cavab vermək üçün a_1, a_2, a_4, a_5 sisteminin vektorları arasında

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 = 0 \quad (4)$$

şəklində xətti asılılığın mümkünliyünü müəyyən etmək lazımdır. Əgər belə asılılıq varsa, onda

$$a_5 = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_5}\right)a_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_5}\right)a_2 + \left(-\frac{\lambda_4}{\lambda_5}\right)a_4 \quad (5)$$

olmalıdır, yəni a_5 vektoru a_1, a_2, a_4 vektorlarının xətti kombinasiyasıdır. (4) tənliyi (1) tənliyindən $\lambda_3 = 0$ olduqda alınır. Beləliklə, biz bilməliyik ki, $\lambda_3 = 0, \lambda_5 \neq 0$ olduqda (2) sisteminin həlli varmı? (2) sisteminin (3) ümumi həllinə baxsaq və orada $x_3 = 0$ götürsək, tapırıq:

$$\lambda_1 = 5\lambda_5, \lambda_2 = -16\lambda_5, \lambda_4 = 6\lambda_5$$

Burada λ_5 - in ixtiyari qiymətini, məsələn, $\lambda_5 = 1$ götürsək, onda $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -16, \lambda_4 = 6$ tapırıq. Beləliklə,

$5a_1 - 16a_2 + 6a_4 + a_5 = 0$ şəklində xətti asılılıq alırıq.

Buradan

$$a_5 = -5a_1 + 16a_2 - 6a_4$$

yəni a_5 vektoru a_1, a_2, a_4 vektorlarının xətti kombinasiyasıdır.

406. Göstərin ki, $a_1 = (0, 1, 0, 0), a_2 = (-1, 2, 1, 0), a_3 = (-3, 4, 3, 1)$ vektorlar sisteminin birinci vektoru, qalan vektorlarla xətti ifadə oluna bilməz.

Xətti asılılığın sadə xasələrindən istifadə edərək, **407-411** məsələlərində vektorlar sisteminin hansılarının xətti asılı olduğunu göstərin.

$$\mathbf{407.} \ a_1 = (-1, 2, -3), \ a_2 = (2, -4, 7)$$

$$\mathbf{408.} \ a_1 = (2, 1, 3, 0), \ a_2 = (-2, -1, -5, 4)$$

$$\mathbf{409.} \ a_1 = (1, -1, 4), \ a_2 = (2, 3, -1), \ a_3 = (-3, -7, 6)$$

$$\mathbf{410.} \ a_1 = 2 + i, \ a_2 = -6 - 3i$$

$$\mathbf{411} \ a_1 = (1, -1, 3, 2), \ a_2 = (2, -3, 1, 5), \ a_3 = (4, -5, 7, 9), \ a_4 = (1, 1, 1, 2)$$

412-420 məsələlərində vektorlar sisteminin xətti asılı olub-olmadığını göstərin və xətti asılı olduqda vektorlardan birini qalan vektorlarla xətti ifadə edin:

$$\mathbf{412.} \ a_1 = (2, 1, 3), \ a_2 = (1, 1, 2), \ a_3 = (-1, -2, -3)$$

$$\mathbf{413.} \ a_1 = (1, 5, -1), \ a_2 = (1, 3, -1), \ a_3 = (2, -1, 8)$$

$$\mathbf{414.} \ a_1 = (1, 2, 2), \ a_2 = (1, -4, -12), \ a_3 = (2, -9, 5)$$

$$\mathbf{415.} \ a_1 = (1, 1, -1, 2), \ a_2 = (-2, 0, 1, -1), \ a_3 = (1, 3, -2, 5)$$

$$\mathbf{416.} \ a_1 = (1, 2, 0, -1), \ a_2 = (2, 3, -1, 4), \ a_3 = (-2, -1, 3, -16)$$

$$\mathbf{417.} \ a_1 = (-5, 11, 13, -11), \ a_2 = (-1, 2, 3, 0), \\ a_3 = (1, -1, -1, 1), \ a_4 = (0, 1, 1, -2)$$

$$\mathbf{418.} \ a_1 = (1, 1, 2, 4), \ a_2 = (0, 1, 1, 8), \\ a_3 = (1, -3, -6, -1), \ a_4 = (3, 1, 5, 8)$$

$$419. \quad a_1 = (0, 3, 2, 0), \quad a_2 = (1, 1, -5, 0), \\ a_3 = (2, 0, 3, -1), \quad a_4 = (4, 4, 5, 5)$$

$$420. \quad a_1 = (-1, 0, 2, 3), \quad a_2 = (0, 1, 3, 4), \quad a_3 = (-2, 3, 13, 18)$$

λ - nın hansı qiymətlərində vektorlar sistemi xətti asılı olmaz?

$$421. \quad a_1 = (1, -2, \lambda), \quad a_2 = (2, 1, 5), \quad a_3 = (1, -7, 4)$$

$$422. \quad a_1 = (1, 2, 1), \quad a_2 = (3, 1, 4), \quad a_3 = (\lambda, 9, 1)$$

423-429 məsələlərində vektorlar sisteminin elementar çevirmələrindən istifadə edərək, vektorlar sisteminin xətti asılı olub-olmadığını göstərin:

$$423. \quad a_1 = (-1, 2, -3), \quad a_2 = (2, 1, -4), \quad a_3 = (1, 3, -7)$$

$$424. \quad a_1 = (1, 3, -1), \quad a_2 = (-2, 1, 4), \quad a_3 = (-3, 5, 7)$$

$$425. \quad a_1 = (1, 1, 4), \quad a_2 = (-1, 2, 3), \quad a_3 = (-3, 3, 5)$$

$$426. \quad a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, 1, 0), \quad a_3 = (-1, 4, -3)$$

$$427. \quad a_1 = (2, -1, 3, -4), \quad a_2 = (3, -2, 4, -3), \quad a_3 = (1, -1, 1, 1)$$

$$428. \quad a_1 = (2, 1, 1, 2), \quad a_2 = (1, -1, 1, -1), \quad a_3 = (0, 1, 2, -1)$$

$$429. \quad a_1 = (1, 4, -1, 2), \quad a_2 = (0, 4, 0, 2), \quad a_3 = (3, 3, 0, 4), \quad a_4 = (-2, 2, 2, 1)$$

430. Əgər $a_1, a_2, \dots, a_n$ sisteminin hər bir vektoru $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdırsa, onda

deyirlər ki, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sistemi $b_1, b_2, \dots, b_m$ sistemi ilə xətti ifadə olunur. Bu anlayışın tranzitivliyini isbat edin.

431. İsbat edin ki, vektorlar sistemlərinin ekvivalentliyi münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitivdir.

432. İsbat edin ki, iki xətti asılı olmayan ekvivalent sistemlərdəki vektorların sayı eynidir.

§11. Sonlu vektorlar sisteminin bazisi və rəngi.

433-440 məsələlərində hesabi vektorlar fəzada $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlar sisteminin bazis əmələ gətirdiyini göstərin və bu bazisdə x vektorunun koordinatlarını tapın:

433. $a_1 = (-1, 6), a_2 = (3, 2), x = (-1, 1)$

434. $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (2, 1, 4), a_3 = (-1, 2, 5), x = (-4, 2, 0)$

435. $a_1 = (2, 2, -1), a_2 = (0, 4, 8), a_3 = (-1, -1, 3), a_4 = (1, 1, 2)$

436. $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (2, -1, 1), x = (11, 3, 1)$

437. $a_1 = (1, 2, -3), a_2 = (3, -1, -2), a_3 = (2, -3, -5),$
 $x = (-5, 4, -5)$

438. $a_1 = (1, 1, 3), a_2 = (2, -1, 1), a_3 = (1, 2, -2),$
 $x = (9, -4, -8)$

439 $a_1 = (1, -3, 1, -3), a_2 = (1, 0, 1, 0), a_3 = (1, -1, 1, -2),$
 $a_4 = (0, -2, 5, 2), x = (3, -3, 8, 3)$

440. $a_1 = (1,2,1,3), a_2 = (1,1,2,2), a_3 = (1,1,1,3),$
 $a_4 = (1,0,1,0), x = (7,-1,10,-3)$

441. n -ölçülü xətti fəzanın hər hansı bazisində vektorların koordinatları məlum olarsa, m -vektordan ibarət vektorlar sisteminin xətti asılı olmadığını necə təyin etmək olar?

442. Göstərin ki, vektorlar sisteminin elementar çevirmələri bu sistemin rəqını dəyişmir.

443. İsbət edin ki, əgər $a_1, a_2, \dots, a_n$ sistemi $b_1, b_2, \dots, b_n$ sistemi ilə xətti ifadə olunursa, onda $b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n$ sisteminin rəqı $b_1, b_2, \dots, b_n$ sisteminin rəqına bərabərdir.

444. İsbət edin ki, ekvivalent vektorlar sistemlərinin rəqları bərabərdir. Tərs hökm doğrudurmu? Rəqları bərabər olan iki sistem ekvivalentdirmi?

445-450 məsələlərində vektorlar sisteminin xətti asılı olub - olmadığını göstərin, xətti asılı olduqda hər hansı maksimal xətti asılı olmayan altsistemi ayırın və qalan vektorları ayrılan altsistem ilə xətti ifadə edin.

445. $a_1 = (1,2,-3), a_2 = (-2,1,4), a_3 = (0,5,-2)$

446. $a_1 = (-1,0,2), a_2 = (1,2,-1), a_3 = (2,2,1)$

447. $a_1 = (1,0,1), a_2 = (1,2,-3), a_3 = (3,2,-1)$

448. $a_1 = (1, -1, 2, 0), a_2 = (-2, 1, -3, 1), a_3 = (-5, 2, -7, 3)$

449. $a_1 = (1, 1, 0, 2), a_2 = (1, -1, 2, -3), a_3 = (4, 2, 2, 3)$

450. $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 3, 1, -3), a_3 = (1, 0, 1, 0),$
 $a_4 = (3, 4, 3, 4)$

451-452 məsələlərində hər hansı bazisdə a_1, a_2, a_3, b vektorları verilmişdir. λ –nın hansı qiymətlərində b vektoru a_1, a_2, a_3 vasitəsilə xətti ifadə olunur?

451. $a_1 = (1, 2, -1), a_2 = (-2, 1, 3), a_3 = (0, 1, -1), b = (1, \lambda, 2)$

452. $a_1 = (1, -2, 3), a_2 = (0, -1, \lambda), a_3 = (1, 0, 1), b = (3, -1, 2)$

453-461 məsələlərində vektorlar sisteminin elementar çevirmələrindən istifadə edərək vektorlar sisteminin hər hansı bazisini, rəqini tapın və bazisə daxil olmayan bütün vektorları bazis vasitəsilə xətti ifadə edin:

453. $a_1 = (1, 1, -1, 3)$

$a_2 = (2, -1, 0, 3)$

$a_3 = (1, -2, 1, 0)$

$a_4 = (3, -3, 1, 3)$

sisteminin hər hansı bazisini, rəqini tapın və bazisə daxil olmayan bütün vektorları bazis vasitəsilə xətti ifadə edin.

Həlli: Vektorların koordinatlarını matrisin sətirləri şəklində yazmaq və alınan matrisi pilləli şəkə gətirək. Matrisin

sağında vektorları yazaq və matrisin sətirlərinin çevirmələrini aparaq:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ a_4 - 3a_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 + 2a_1 - a_2 \\ a_4 - 3a_1 - 2(a_3 - a_1) \end{matrix}$$

Pilləli şəkildə matrisin sıfır olmayan sətirlərinə a_1, a_2 vektorları uyğundur. Buna görə də a_1, a_2 vektorları xətti asılı deyil, bazis təşkil edir. $\text{rang}=2$ pilləli şəkildə matrisin sıfır sətirlərinə $a_4 - a_1 - 2a_3 = 0$ və $a_3 + a_1 - a_2 = 0$ bərabərlikləri uyğundur. Bu bərabərliklərdən a_3 və a_4 vektorlarının a_1, a_2 vektorları ilə xətti ifadələrini tapırıq:
 $a_3 = -a_1 + a_2$, $a_4 = -a_1 + 2a_2$.

454. $a_1 = (3, 4, -5), a_2 = (8, 7, -2), a_3 = (2, -1, 8)$

455. $a_1 = (1, 2, 2), a_2 = (2, 3, -1), a_3 = (1, 1, -3)$

$$456. a_1 = (1,1,1), a_2 = (3,4,3), a_3 = (1,2,1)$$

$$457. a_1 = (1,3,-1,2), a_2 = (1,2,-3,-4), a_3 = (-1,0,7,16)$$

$$458. a_1 = (1,-1,2,-1), a_2 = (2,-1,1,-1), a_3 = (1,-2,5,-2)$$

$$459. a_1 = (1,1,3,2), a_2 = (1,0,1,0), a_3 = (4,3,10,6)$$

$$460. a_1 = (1,1,2,3), a_2 = (1,-1,2,-4), a_3 = (1,0,1,0), \\ a_4 = (2,-3,5,-1)$$

$$461. a_1 = (1,1,3,1), a_2 = (2,-1,1,3), a_3 = (-1,4,8,0), \\ a_4 = (1,1,5,-1)$$

462-467 məsələlərində vektorlar sisteminin bütün mümkün bazislərini tapın.

$$462. a_1 = (1,-2,3) \\ a_2 = (2,1,5) \\ a_3 = (-1,7,-4)$$

$$463. a_1 = (-1,1,-1,1) \\ a_2 = (-3,0,-2,1) \\ a_3 = (3,-2,1,1) \\ a_4 = (6,-4,2,2)$$

$$464. a_1 = (1,0,-1,0) \\ a_2 = (5,-1,2,-2) \\ a_3 = (3,-1,0,-2) \\ a_4 = (2,-1,-2,-2)$$

$$465. a_1 = (1,-1,1,-1,1) \\ a_2 = (1,-1,-1,1,1) \\ a_3 = (1,1,-1,-1,1) \\ a_4 = (1,-3,-1,1,1)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (1, -1, 1, 4) \\
 a_2 &= (2, 3, -6, -3) \\
 a_3 &= (1, 2, -4, 0) \\
 a_4 &= (5, 2, 1, 1)
 \end{aligned}$$

466.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (2, 3, 5, -3, -2) \\
 a_2 &= (1, 1, -2, 2, -1) \\
 a_3 &= (5, 6, -1, 3, -5)
 \end{aligned}$$

467.

468. Tutaq ki, (α, β) və (γ, δ) , R^2 fəzasının vektorlarıdır. Göstərin ki, bu vektorlar onda və yalnız onda xətti asılıdır ki, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ olsun.

469. Tutaq ki, $a_1, \dots, a_m$ və $b_1, \dots, b_m$ xətti asılı olmayan vektorların iki sistemidir. İsbat edin ki, əgər $a_1, a_2, \dots, a_m \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ olarsa, onda $b_1, b_2, \dots, b_m \in L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ olar.

470. Hansı halda vektorlar sistemi yeganə bazisə malikdir?

471. Tutaq ki, $a_1, a_2, \dots, a_m$ xətti asılı olmayan vektorlar sistemidir. İsbat edin ki, onda və yalnız onda $b \in L(a_1, \dots, a_m)$ olar ki, $a_1, \dots, a_m, b$ vektorlar sistemi xətti asılı olsun.

472. İsbat edin ki, onda və yalnız onda $b \in L(a_1, \dots, a_m)$ olar ki, $a_1, \dots, a_m$ vektorlar sisteminin ranqı $a_1, \dots, a_m, b$ vektorlar sisteminin ranqına bərabər olsun.

473-477 məsələlərində R^m fəzasının $a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $a_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \dots$,

$a_k = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ vektorları verilir. $L = L(a_1, a_2, \dots, a_m)$

xətti bürüyənin elementlərinin ümumi şəklini yazın.

$$473. a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (-1, 2, 3)$$

$$474. a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (-2, 1, 1), a_3 = (1, -1, 1)$$

$$475. a_1 = (1, 3, 1), a_2 = (2, 0, 1), a_3 = (1, 4, 0)$$

$$476. a_1 = (2, -1, 3, 1), a_2 = (1, -2, 0, 0), a_3 = (0, 1, 4, 2)$$

$$477. a_1 = (1, 0, -1, 3), a_2 = (2, 1, 0, 1), a_3 = (-2, 1, 3, 4)$$

Misal 1. $a_1 = (1, -2, 5)$, $a_2 = (3, -1, 4)$, $a_3 = (2, 1, -1)$

vektorlarının $L(a_1, a_2, a_3)$ xətti bürüyən $\mathcal{V}$ fəzasının altfəzasıdır. $x = (1, 3, -2) \in V$. Bu vektor L altfəzasına daxildirmi?

Həlli: Tutaq ki, $x \in L$ - dir. Onda bu vektor a_1, a_2, a_3 vektorlarının xətti kombinasiyasıdır:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

Vektor bərabərliyi matris formada yazaq.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sistemin genişlənmiş matrisini yazaq və onu pilləli şəkə gətirək.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -11 & -11 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

əsas matris ilə genişlənmiş matrisin rəngləri üst - üstə düşür.

X vektorunu a_1, a_2, a_3 vektorlarının xətti kombinasiyası

şəklində göstərmək olmaz. $x \notin L(a_1, a_2, a_3)$.

478-486 məsələlərində x vektorunun verilmiş altfəzaya daxil olub olmadığını göstərin.

478. $L(a_1, a_2)$ $a_1 = (2,1), a_2 = (-1,4), x = (-5,2)$

479. $L(a_1, a_2)$ $a_1 = (1,3), a_2 = (2,4), x = (8,18)$

480. $L(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (-1,0,1), a_2 = (2,0,1),$

$a_3 = (3,0,-2) x = (1,2,6)$

481. $L(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (1,-1,0), a_2 = (0,1,2),$

$a_3 = (-2,0,1) x = (2,3,5)$

482. $L(a_1, a_2)$ $a_1 = (1,-2,3,1), a_2 = (0,1,4,-1),$

$x = (2,-7,-6,5)$

483. $L(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (-1,1,2,3), a_2 = (1,0,2,-3),$

$a_3 = (-5,1,4,7) x = (-8,3,16,8)$

484. $L(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (-2,3,0,5), a_2 = (-1,1,2,-3),$

$a_3 = (3,1-4,0) x = (-2,8,-2,1)$

$$485. L(a_1, a_2, a_3) \quad a_1 = (1, 3, 2, 1), a_2 = (1, -1, 3, 2), \\ a_3 = (2, -1, -1, 3), a_4 = (3, -2, -1, -1) \quad x = (1, 3, 0, 2)$$

$$486. L(a_1, a_2, a_3) \quad a_1 = (-1, 2, -4), a_2 = (2, 1, 9), \\ a_3 = (3, -1, 5) \quad x = (1, 3, 1)$$

$$R \text{ meydanı üzərində 2-tərtibli həqiqi} \quad a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

vektorunun $L(a_1, a_2, a_3)$ xətti bürüyəninə daxil olub-olmadığını göstərin.

$$487. a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$488. a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$489. a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},$$

§12. Vektorlar fəzası - Xətti fəza

Tutaq ki, V ixtiyarı təbiətli çoxluq, $\mathcal{P}$ isə skalyarlar meydanıdır.

Tərif. Üzərində toplama əməli və V - nin elementlərinin P - dən olan skalyara vurma əməli təyin

olunmuş V çoxluğunda aşağıdakı şərtlər (aksiomlar) ödənilərsə, onda V -yə $\mathcal{P}$ meydanı üzərində vektorlar fəzası və ya xətti fəza deyilir: $\forall a, b, c \in V, \forall \alpha, \beta \in P$

1. $a + b = b + a$ (toplamanın kommutativliyi);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ assosiativlik;
3. $\exists \theta \in V, \forall a \in V \quad \theta + a = a + \theta = a$ (neytral elementin varlığı);
4. $\forall a \in V, \exists (-a) \in V \quad a + (-a) = (-a) + a = \theta$ (simmetrik elementin varlığı);
5. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ skalyara vurmanın assosiativliyi;
6. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ distributivlik;
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $1 \cdot a = a, 1 \in P$

Vektorlar fəzasının sadə xassələri

Teorem. Tutaq ki, V $\mathcal{P}$ meydanı üzərində vektorlar fəzasıdır, $a, b \in V$ və $\alpha, \beta \in P$. Onda

- 1) $\forall (a, b \in V) \quad a + b = a$ isə, onda $b = \theta$;
- 2) $0 \cdot a = \theta, 0 \in P$;
- 3) $\alpha \cdot \theta = \theta$;
- 4) $a + b = \theta$ isə, onda $b = (-1)a = -a$;
- 5) $\alpha \cdot a = \alpha \cdot b$ və $\alpha \neq 0$ isə, onda $a = b$;

6) $\alpha \cdot a = \theta$ isə, onda $\alpha = 0$ və ya $a = \theta$;

7) $\alpha \cdot a = \beta \cdot a$ və $a \neq \theta$ isə, onda $\alpha = \beta$.

İxtiyari xətti fəzalar üçün hesabi vektor fəzada vektorlar sisteminin xətti asılılığı və xətti asılı olmazlığı və onlar haqqında xassələr və teoremlərin isbatı; vektorların ekvivalent sistemləri haqqında teoremlər, onların isbatları öz gücündə qalır.

Misal 1. Həqiqi ədədlər meydanı üzərində $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ şəklində matrislər çoxluğunun matrislərin toplanması və matrislərin ədədə vurulmasına nəzərən alt vektor fəza əmələ gətirib - gətirmədiyini göstərin.

Həlli. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ şəklindəki matrislər çoxluğu toplamaya nəzərən kommutativ qrup əmələ gətirir və matrislərin ədədə vurulması vektorun ədədə vurulmasına verilən bütün tələbləri - yəni 5-8 şərtlərini ödəyir, deməli $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in R \right\}$ şəklindəki matrislər çoxluğu vektorlar fəzası olur; bu vektorlar fəzası həqiqi ədədlər meydanı üzərində 2×2 ölçülü bütün matrislər fəzasının altfəzasıdır.

Altəza olma kriteriyasını tətbiq edək: Vektorların toplanması və vektorun ədədə vurulmasına nəzərən fəzanın

altçoxlğunun qapalılığını yoxlayaq, kriteriya ödənilir, çünki bir elementi sıfıra bərabər olan matrislərin cəmi həmin şəkildə matrisdir, matrisləri ədədə vurduqda sıfır element dəyişməyərək qalır.

Deməli, verilən matrislər çoxluğu həqiqi ədədlər meydanı üzərində alt vektor fəza əmələ gətirir.

491-498 məsələlərində çoxluqların hər biri R meydanı üzərində toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edirmi?

490. a) R çoxluğu; b) C çoxluğu; c) Q çoxluğu

491. R^n fəzasının tam koordinatlı vektorları çoxluğu;

492. Müstəvinin koordinat başlanğıcından çıxan, sonları $y = kx + b$, $b \neq 0$ düz xətti üzərində olan bütün vektorları çoxluğu;

493. Müstəvinin OX və ya OY oxu üzərində yerləşən vektorları çoxluğu.

494. R^n -in koordinatları $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ şərtini ödəyən n -ölçülü vektorları çoxluğu;

495. R^n -in koordinatları $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ şərtini ödəyən n -ölçülü vektorlar çoxluğu;

496. Əmsalları həqiqi ədədlər olan dərəcələri $\leq n$ olan çoxhədlilər çoxluğu.

497. Dərəcəsi n -ə bərabər olan həqiqi əmsallı bütün çoxhədlilər çoxluğu;

498. R^n fəzasının $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorlarının xətti kombinasiyası çoxluğu.

499. $\langle R^{n \times n}, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\}, \cdot \rangle$ çoxluğu;

500. R meydanı üzərində aşağıdakı matrislər çoxluğu matrislərin adi toplanması əməlinə və matrisin həqiqi ədədə vurulması əməlinə nəzərən xətti fəza təşkil edirmi?

1) bütün matrislər çoxluğu

2) $m \neq n$ olduqda $R^{m \times n}$ çoxluğu

3) $C^{2 \times 2}$ - kompleks elementli ikitərtibli bütün matrislər çoxluğu

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ çoxluğu

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ çoxluğu

6) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ çoxluğu

7) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ çoxluğu

501. Nə üçün elementləri R meydanından olan cırlaşmayan n tərtibli matrislər çoxluğu matrislərin toplanması və matrislərin ədədə vurulması əməllərinə nəzərən həqiqi xətti fəza deyil?

§13. Vektor fəzanın bazisi, ölçüsü və xassələri.

Tutaq ki, $\mathcal{V}$, $\mathcal{P}$ meydanı üzərində vektor fəzadır. Əgər $\mathcal{V}$ fəzasında vektorların elə sonlu $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ çoxluğu varsa ki, $V = L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ olsun, onda deyirlər ki, $\mathcal{V}$ sonlu $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ çoxluğu ilə doğrulur və bu çoxluğa $\mathcal{V}$ fəzasını doğuran çoxluq (və ya sistem) deyilir.

Tərif. Doğuranların xətti asılı olmayan nizamlanmış sistemində fəzanın bazisi deyilir.

Teorem. Sıfırdan fərqli sonlu ölçülü ixtiyarı vektor fəzasının bazisi var. Əgər $a_1, a_2, \dots, a_m$ (1) vektorlar sistemi $\mathcal{V}$ vektor fəzasını doğурсa, (1) sisteminin bazisi $\mathcal{V}$ fəzasının bazisidir.

Teorem. Sıfırdan fərqli sonlu ölçülü $\mathcal{V}$ vektor fəzasının ixtiyarı iki bazisinə daxil olan vektorların sayı bərabərdir.

Nəticə. Əgər $\mathcal{V}$ vektor fəzasının bazisi n -vektordan ibarətdirsə, onda $\mathcal{V}$ fəzasını doğuran n -vektordan ibarət ixtiyarı sistem bu fəzanın bazisidir.

Nəticə. Əgər $\mathcal{V}$ vektor fəzasının bazisi n -vektordan ibarətdirsə, onda $k > n$ olduqda $\mathcal{V}$ fəzasının k -vektordan ibarət ixtiyarı sistemi xətti asılıdır.

Teorem. Sonlu ölçülü $\mathcal{V}$ vektorlar fəzasının bazis təşkil etməyən ixtiyarı xətti asılı olmayan vektorlar sistemini bu fəzanın bazisinə qədər tamamlamaq olar.

Tərif. Əgər $\mathcal{V}$ fəzasında n -sayda xətti asılı olmayan vektor varsa və ixtiyarı $n+1$ sayda vektor xətti asılıdırsa, $\mathcal{V}$ fəzasına n -ölçülü fəza, n -ə isə bu fəzanın ölçüsü deyilir və $\dim \mathcal{V}$ kimi işarə olunur.

Xəssə1. $\mathcal{V}$ sonlu ölçülü fəza və $\dim \mathcal{V} = n$ -dirsə, onda $k > n$ olduqda $\mathcal{V}$ fəzasının k -vektordan ibarət ixtiyarı sistemi xətti asılıdır.

Xəssə2. Əgər $\dim \mathcal{V} = n$ və $\mathcal{V}$ fəzasının $b_1, b_2, \dots, b_m$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə, onda $m \leq n$ -dir.

Xəssə3. Əgər sonlu ölçülü $\mathcal{V}$ -vektorlar fəzası $\mathcal{L}_1$ və $\mathcal{L}_2$ altfəzalarının düz cəmidirsə, onda $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2$

Misal 1. $\mathcal{P}$ -meydanı üzərində $\mathcal{V}$ xətti fəzasının $a_1 = (-1, 0, 2, 5)$, $a_2 = (3, 5, 1, 5)$, $a_3 = (0, 1, -3, -4)$, $a_4 = (2, -1, -1, -6)$ vektorlar sistemi verilmişdir.

1. $\mathcal{V}$ fəzasının bazisini və ölçüsünü tapın.

2. Bazisə daxil olmayan vektorları bazis üzrə ayırın.

Həlli. Fəzanın ölçüsü a_1, a_2, a_3, a_4 vektorlar sisteminin xətti asılı olmayan vektorlarının maksimal sayı (bazisdəki vektorlar sayı) ilə üst-üstə düşür və buna görə bu vektorların koordinatlarından düzəldilmiş matrisin rənginə bərabərdir.

Vektorların koordinatlarını matrisin sətirləri şəklində yazaq və matrisi pilləli şəkllə gətirək və rəngini tapaq. Matrisdən sağda vektorları yazaq və aparılan çevirmələri qeyd edək.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 20 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 + 3a_1 \\ a_3 \\ a_4 + 2a_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 20 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 + 3a_1 \\ a_3 \\ a_4 + 2a_1 + a_3 \end{matrix}$$

Pilləli şəkildə matrisin sıfırdan fərqli sətirləri a_1, a_2, a_3 vektorlarına uyğundur. Buna görə a_1, a_2, a_3 vektorları $\mathcal{V}$ fəzasının bazisini əmələ gətirir. Deməli, $\dim \mathcal{V} = 3$. Bazisə daxil olmayan a_4 vektorunun a_1, a_2, a_3 bazis vektorları üzrə

ayrılışını tapaq. Pilləli şəkildə matrisin sıfır sətirinə $a_4 + a_3 + 2a_1 = 0$ bərabərliyi uyğundur. Buradan $a_4 = -a_3 - 2a_1$.

502. $a_1 = 3e_1 - 2e_2 + e_3$, $a_2 = 5e_2 - 2e_1$, $a_3 = e_3 + 2e_2 + 3e_1$ olduqda vahid e_1, e_2, e_3 bazisində a_1, a_2, a_3 vektorlarının koordinatlarını göstərin.

503-508 məsələlərində $\mathcal{V}$ fəzasının $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorları $\mathcal{V}$ fəzasının bazisini əmələ gətirir və bu bazisdə x vektorunun koordinatlarını tapın.

503. $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, 3)$, $x = (6, -7)$

504. $a_1 = (5, 2)$, $a_2 = (3, 1)$, $x = (1, -1)$

505. $e_1 = (1, 4, -3)$, $e_2 = (2, -3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1)$, $x = (0, 13, -2)$

506. $e_1 = (1, -8, -3)$, $e_2 = (2, 0, -1)$, $e_3 = (2, 4, -1)$, $x = (10, -4, -10)$

507. $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, -7, 2)$, $e_3 = (1, 5, -2)$, $x = (3, 23, -3)$

508. $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (2, -1, 1)$, $e_3 = (1, -3, 2)$, $x = (0, 5, 13)$

509. Tutaq ki, $\mathcal{P}$ -ədədi meydandır, $\alpha, \beta, \gamma \in P$ skalyarları hansı şərti ödəməlidir ki, $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$, $(1, \gamma, \gamma^2)$ vektorları P^3 fəzasının bazisi olsun.

510. λ skalyarı hansı şərti ödəməlidir ki, $(\lambda, 1, 0)$, $(1, \lambda, 1)$, $(0, 1, \lambda)$ vektorları Q^3 fəzasının bazisi olsun.

511. Tutaq ki, $\mathcal{V}$ n -ölçülü vektor fəzadır. İsbat edin ki, $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemi onda və yalnız onda $\mathcal{V}$ fəzasının bazisidir ki, $\mathcal{V} = L(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun.

512. Tutaq ki, $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ $\mathcal{V} = \mathcal{F}^n$ vektor fəzasının bazisidir. Göstərin ki, $\mathcal{V}$ fəzasının $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemi onda və yalnız onda bu fəzanın bazisidir ki, $e_1, e_2, \dots, e_n \in L(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun.

Misal 2. Dörd ölçülü vektor fəzasının xətti asılı olmayan $a_1 = (1, 2, -3, -4), a_2 = (-1, 3, -1, 2)$ vektorlar sistemini bu fəzanın bazisinə qədər tamamlayın.

Verilmiş vektorlardan matris düzəldək, onu pilləli şəkllə gətirək və onu $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ iki sətirlə tamamlayaq ki, o, aşağıdakı şəkildə olsun.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1 = (1, 2, -3, -4), a_2 = (-1, 3, -1, 2), a_3 = (0, 0, 1, 0), a_4 = (0, 0, 0, 1)$ vektorları xətti asılı deyil və dörd ölçülü fəzanın bazisini təşkil edir.

Misal. $1, x, x^2$ bazisində vektorların hər birinin koordinatlarını tapın.

513. a) $x^2 + 3x + 2$; b) $3x + 4$; c) $(x + 2)(x - 3)$

514. a) $2x^2 - x + 4$; b) $(x + 1)(x + 2)$; c) $5x + 8$

515. a) $3x^2 - 7$; b) $4x^2 - 3x + 1$; c) $2x - 3$

$1, x, x^2, x^3$ bazisində vektorların koordinatlarını tapın.

516. a) $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; b) $7x + 4$; c) $(x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

517. a) $5x^3 + x^2 - 3x - 2$; b) $2x^2 - 5$; c) $(x + 2)(x^2 - 3)$

518-524 məsələlərində hər-hansı bazisdə koordinatları ilə verilmiş vektorlar sistemini fəzanın bazisinə qədər tamamlayın:

518. $a_1 = (1, 0, 2)$, $a_2 = (-1, 3, 5)$

519. $a_1 = (2, 1, 3)$, $a_2 = (0, 1, 1)$

520. $a_1 = (2, 1, -1, 2)$, $a_2 = (3, -2, 0, 1)$

521. $a_1 = (3, -1, 4, 0)$, $a_2 = (1, 2, 3, 5)$

522. $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (2, 6, 0, 4)$

523. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -4, 3, 0)$, $a_3 = (2, 1, 0, 5)$

524. $a_1 = (-1, 0, 0, 5)$, $a_2 = (4, 1, 5, -3)$, $a_3 = (3, 1, 5, 2)$

§14. Vektorlar fəzasının xətti altfəzası. Xətti altfəzaların verilməsi üsulları. Altəfəzalar üzərində əməllər və xassələri.

Tərif. $\mathcal{V} = \langle V, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in P\} \rangle$ vektorlar fəzası boş olmayan U -vektorlar çoxluğu V çoxluğunun fəzasının altçoxluğudursa və aşağıdakı iki şərt ödənilərsə, yəni

$$1. \forall a, b \in U \Rightarrow a + b \in U;$$

$$2. \forall a \in U \text{ və } \forall \lambda \in P \Rightarrow \lambda a \in U$$

onda U V - vektor fəzasının altfəzası adlanır.

Təklif. U altçoxluğu onda və yalnız onda V -nin altfəzasıdır ki, özünün ixtiyarı iki $a, b \in U$ vektorları ilə birlikdə onların ixtiyarı $\alpha a + \beta b$ xətti kombinasiyalarını da özündə saxlasın, yəni

$$\forall a, b \in U \text{ və } \forall \alpha, \beta \in P \Rightarrow \alpha a + \beta b \in U;$$

Xətti altfəzaya nəzərən aşağıdakı iki məsələyə baxılır;

1) Xətti bircins tənliklər sistemi ilə verilmiş altfəzanı təyin edən bazisin tapılması; Bu məsələnin həlli bircins sistemin fundamental həllər sisteminin tapılmasına gətirilir.

2) Vektorlar sisteminə görülmüş xətti altfəzanı verən xətti bircins tənliklər sisteminin tapılması; Bu məsələnin həlli Kroneker-Kapelli teoreminə əsaslanır.

Tutaq ki, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m \mathcal{V}$ fəzasının altfəzalarıdır.

Tərif. $U_1, U_2, \dots, U_m$ altfəzalarının cəmi elə

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_m$ vektorlar çoxluğuna deyilir ki, U -dən olan hər bir a -vektoru

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_m. (a_1 \in U_1, a_2 \in U_2, \dots, a_m \in U_m) \quad (1)$$

şəklində göstərilə bilsin.

Tərif. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_m$ cəmindən olan ixtiyarı a -vektoru üçün

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_m. \quad a_1 \in U_1, a_2 \in U_2, \dots, a_m \in U_m$$

yeganədirsə, onda U cəminə $U_1, U_2, \dots, U_m$ altfəzalarının düz cəmi deyilir və $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ kimi işarə olunur.

Altəzaların kəsişməsi. $\mathcal{V}$ fəzasının $\mathcal{U}_1$ və $\mathcal{U}_2$ altfəzalarında eyni zamanda yerləşən bütün vektorların çoxluğuna $\mathcal{U}_1$ və $\mathcal{U}_2$ altfəzaların kəsişməsi deyilir və $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ kimi işarə olunur.

Teorem. $\mathcal{V}$ -vektorlar fəzasının iki $\mathcal{U}_1$ və $\mathcal{U}_2$ altfəzalarının cəmi onda və yalnız onda düz cəmdir ki, $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ olsun.

525-535. Məsələlərində $\mathcal{U}$ xətti altfəzası $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sisteminə gərilmişdir.. Altəzanın bazisini və ölçüsünü tapın.

525. $a_1 = (-1, 2, 1), \quad a_2 = (4, 1, 5), \quad a_3 = (2, -3, -1)$

$$526. a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (0, -1, 3), a_3 = (2, 1, 4)$$

$$527. a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (1, -3, 4), a_3 = (0, 2, -1)$$

$$528. a_1 = (1, 0, 4, -1), a_2 = (1, -1, 3, 2), a_3 = (0, 1, 2, 3)$$

$$529. a_1 = (1, 2, 0, 1), a_2 = (1, 0, 1, 2), a_3 = (-1, 1, 2, 1),$$

$$a_4 = (1, 1, 3, 3)$$

$$530. a_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$531. a_1 = (1, 0, 3), a_2 = (1, 1, -2), a_3 = (3, 1, 4)$$

$$532. a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (3, 4, 1)$$

$$533. a_1 = (1, 0, 1, 2),$$

$$a_2 = (2, -1, -2, -2), a_3 = (1, 2, 0, -1), a_4 = (4, 1, -1, -1)$$

$$534. a_1 = (1, 1, -2, 1, 2),$$

$$a_2 = (1, 1, -1, 3, -2), a_3 = (-1, 2, 3, 4, -3), a_4 = (-1, -1, 3, 1, -6)$$

$$535. a_1 = (1, -2, 3, -1, -1),$$

$$a_2 = (2, -1, 1, 0, -2), a_3 = (1, -1, -1, -1, 1), a_4 = (1, 3, -10, 1, 3),$$

$$a_5 = (-1, 5, -15, 1, 7).$$

536-538 məsələlərində n -ölçülü vektorlar fəzasında verilmiş vektorlar çoxluğu xətti altfəza əmələ gətirirmi, gətirirsə ölçüsünü tapın.

536. U bütün koordinatları öz aralarında bərabər olan vektorlar çoxluğu.

537. U müstəvinin verilmiş düz xəttə paralel olan vektorlar çoxluğu.

538. U üç ölçülü fəzanın verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər çoxluğu.

539. U -cüt nömrəli koordinatları sıfıra bərabər olan vektorlar çoxluğu.

540. $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ çoxluğu

541-546 məsələlərində n -tərtibli bütün kvadrat matrislər fəzasında n -tərtibli kvadrat matrislərin verilmiş çoxluğu xətti altfəzadırmı, xətti altfəzadırsa onun ölçüsün tapın.

541. U birinci sətri sıfır sətir olan matrislər çoxluğu.

542. U diaqonal matrislər çoxluğu.

543. U yuxarı üçbucaq matrislər çoxluğu.

544. U simmetrik matrislər çoxluğu

545. U cırlaşan matrislər çoxluğu

546. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ çoxluğu.

1) Xətti bircins tənliklər sistemi ilə verilmiş altfəzanı təyin edən bazisin tapılması;

Misal 1. Xətti bircins tənliklər sistemi ilə verilmiş L altfəzasını verən xətti asılı olmayan vektorlar sistemini (bazisini) tapın.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_1 - 12x_2 - 7x_3 = 0$$

Həlli. Altfəzanı vektorların xətti örtüyü kimi vermək üçün fundamental həllər sistemini, xətti bircins tənliklər sisteminin həllər fəzasının bazisini tapmaq lazımdır. Bunun üçün sistemi Qaus üsulu ilə həll edib, onun ümumi həllini tapaq.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 9 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -12 & -7 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -10 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Bu halda ümumi həll: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$,
 $7x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$ və buradan $x_1 = 12x_2 + 7x_3$, $x_4 = 7x_2 + 5x_3$
 alınır. Əsas dəyişənlər x_1 , x_4 , sərbəst dəyişənlər olaraq x_2 , x_3

dəyişənləri qəbul edib, sistemin fundamental həllər sistemini tapaq. Fundamental həllər sistemi iki həldən ibarətdir və aşağıdakı şəkildədir:

x_1	x_2	x_3	x_4
12	1	0	7
7	0	1	5

$a_1 = (12, 1, 0, 7)$, $a_2 = (7, 0, 1, 5)$ - $\mathcal{L}$ altfəzasının bazisidir.

Verilmiş sistemin ixtiyarı (x_1, x_2, x_3, x_4) həllini aşağıdakı xətti kombinasiya şəklində göstərmək olar. $c_1(12, 1, 0, 7) + c_2(7, 0, 1, 5)$ (burada $c_1 = x_2$, $c_2 = x_3$). Beləliklə tələb olunan altfəza $L((12, 1, 0, 7), (7, 0, 1, 5))$ xətti örtüyü olur.

547-553 məsələlərində bircins xətti tənliklər sistemi ilə verilmiş $\mathcal{L}$ altfəzasını verən xətti asılı olmayan vektorlar sistemini (bazisi) tapın.

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{547. } & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ & x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{548. } & x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ \text{549. } & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ & 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ \text{550. } & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\
 &3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\
 551. \quad &4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\
 552. \quad &x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\
 &x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 553. \quad &x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\
 &x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0
 \end{aligned}$$

2. Vektorlar sisteminə gərilmiş xətti altfəzanı verən xətti bircins tənliklər sisteminin tapılması;

Misal 2. Kroneker-Kapelli teoremindən istifadə edərək $a_1 = (1, -1, 1, 1, 2)$, $a_2 = (2, 1, -1, -1, 1)$, $a_3 = (3, 3, -3, -3, 0)$, $a_4 = (4, 5, -5, -5, -1)$ vektorları sistemi ilə verilmiş altfəzanı verən xətti bircins tənliklər sistemini tapın.

Həlli. Altfəzada yerləşən $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vektorunu götürək və onu verilmiş vektorlar üzrə ayrılışını yazaq.

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$$

Vektor bərabərliyi koordinatlarla yazaq.

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \lambda_1 (1, -1, 1, 1, 2) + \lambda_2 (2, 1, -1, -1, 1) + \\
 &+ \lambda_3 (3, 3, -3, -3, 0) + \lambda_4 (4, 5, -5, -5, -1)
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4$$

$$x_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_4$$

$$x_3 = \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4$$

$$x_4 = \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4$$

$$x_5 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \quad + \lambda_4$$

Sistemin genişlənmiş matrisinin düzəldək və onu Qaus üsulundan istifadə edərək pilləli şəkə gətirək.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x_1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & x_2 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & x_3 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & x_4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & x_5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x_1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 + x_2 - x_1 \end{array} \right)$$

Sistemin həlli olmalıdır, çünki x -vektoru altfəzada yerləşir. Kroneker-Kapelli teoreminə görə əsas matrisin və genişlənmiş matrisinin rəqləri bərabər olmalıdır. Bu, aşağıdakı şərtlər ödənildikdə mümkündür:

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

Alınan xətti bircins tənliklər sistemi altfəzanı təyin edən sistemdir.

554-564 məsələlərində verilmiş vektorlar sisteminə görə Kroneker- Kapelli teoremi əsasında xətti altfəzanı verən xətti bircins tənliklər sistemini qurun.

554. $a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (3, 1, 4), a_3 = (1, 3, 0)$

555. $a_1 = (1, 2, -1), a_2 = (1, 0, 1), a_3 = (2, 1, 1)$

556. $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (-2, -3, -3)$

557. $a_1 = (1, 1, -1, 1), a_2 = (1, 2, 2, -3)$

558. $a_1 = (1, -2, 0, 1), a_2 = (1, 1, 1, 0)$

559. $a_1 = (1, 2, 1, -2), a_2 = (2, 3, 1, 0), a_3 = (1, 3, 2, -6)$

560. $a_1 = (1, -1, -2, -1), a_2 = (2, -3, 2, 1), a_3 = (1, -2, 4, 2)$

561. $a_1 = (1, 2, 0, 3), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (-1, 1, -1, 1),$
 $a_4 = (1, -2, 0, -5)$

562. $a_1 = (1, 1, -3, -3), a_2 = (1, -1, -1, 1),$
 $a_3 = (-1, 1, 1, -1), a_4 = (1, -1, -1, 1)$

563. $a_1 = (-1, 1, 2, 2), a_2 = (1, 1, -1, 1),$
 $a_3 = (1, 7, 2, 10), a_4 = (-1, -3, 0, -4)$

564. $a_1 = (1, -2, 0, 1, 4), a_2 = (1, 2, 3, -1, 3),$
 $a_3 = (0, 4, 3, 0, 0)$

565. Göstərin ki,

1) Xətti altfəzaların cəmi və kəsişməsi altfəzadır;

2) Xətti altfəzaların cəminin ölçüsü ölçülərinin cəmi ilə onların kəsişməsinin ölçüsü fərqiə bərabərdir.

Misal3.

$$\mathcal{L}_1 \quad a_1 = (1, -1, 2), \quad a_2 = (2, 1, 3), \quad a_3 = (0, 3, -1)$$

vektorlarına $\mathcal{L}_2$ $b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (2, 4, -1),$ $b_3 = (-1, 1, -4)$ vektorlarına gərilmiş altfəza $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ altfəzaların bazisini və ölçüsünü tapmaq.

$$\mathcal{L}_2 \quad b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (2, 4, -1),$$

$b_3 = (-1, 1, -4)$ vektorlarına gərilmiş altfəzadır. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,$

$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ altfəzaların bazisini və ölçüsünü tapmaq.

Həlli. Vektorların hər bir sisteminin rəngini tapmaq:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rang } \mathcal{L}_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{rang } \mathcal{L}_2 = 2$$

a_1, a_2 vektorları xətti asılı deyil və $\mathcal{L}_1$ fəzasının bazisidir.

Buna görə də $\dim \mathcal{L}_1 = 2$. b_1, b_2 xətti asılı deyil, $\mathcal{L}_2$ fəzasının

bazisidir və $\dim \mathcal{L}_2 = 2$. Xətti altfəzaların cəminin ölçüsünü

tapmaq üçün vektorların hər bir sistemindən xətti asılı olmayan

iki vektor götürək və bu vektorları özündə saxlayan $\mathcal{L}_1$ və $\mathcal{L}_2$

altfəzalarının $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ cəminin ölçüsünü tapmaq.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang} r = 3$$

Deməli a_1, a_2, b_1 vektorları sistemi xətti asılı deyil, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ cəminin bazisini əmələ gətirir və $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3$. İki altfəzasının kəsişməsinin ölçüsü $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$ düsturu ilə hesablanı bilər.

$\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 1$.

İndi iki altfəzanın kəsişməsinin bazisini tapaq. Fərz edək ki, hər hansı z -vektoru birinci $\mathcal{L}_1$ fəzasında yerləşir. Onda aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$z = x_1 a_1 + x_2 a_2$$

Bu vektor ikinci altfəzada da yerləşir. Deməli, $z = y_1 b_1 + y_2 b_2$. Buradan sağ tərəfləri bərabərləşdirib alırıq:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = y_1 b_1 + y_2 b_2 \quad (1)$$

əmsalların elə qiymətlərini tapaq ki, (1) vektor bərabərliyi doğru bərabərliyə çevirsin. Bunun üçün tənliyi matris şəklində yazaq və alınan xətti bircins tənliklər sistemini həll edək.

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

və ya

$$x_1 + 2x_2 - y_1 - 2y_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - y_1 - 4y_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - y_1 + y_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - y_1 - 2y_2 = 0$$

$$-x_2 + y_1 + 5y_2 = 0$$

$$y_1 + 9y_2 = 0$$

y_2 -ni sərbəst məchul qəbul etmək olar. Buradan, sistemin

$y_1 = -9y_2$, $x_1 = y_2$, $x_2 = -4y_2$ ümumi həlli tapılır. Bu

qiymətləri (1) bərabərliyində yerinə yazsaq

$z = y_2(a_1 - 4a_2) = y_2(b_2 - 9b_1)$ alırıq. $y_2 = 1$ qəbul edək.

Onda $z = y_2(a_1 - 4a_2) = (-7, -5, -10)$, yəni $(-7, -5, -10)$

vektoru $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ altfəzasının bazisidir.

Misal4. $L_1 = L(a_1 = (1, 1, 0, 1), a_2 = (1, 2, 1, 0), a_3 = (0, 1, 1, -1))$

və $L_2 = L(b_1 = (0, 1, -1, 2), b_2 = (1, 2, -3, 1), b_3 = (1, 1, -2, -1))$

altfəzaları verilir. $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ cəminin, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ kəsişməsinin bazisini və ölçüsünü tapın.

Həlli: Vektorların koordinatlarını matrisin sətirləri şəklində yazaq və alınan matrisi pilləli şəkllə gətirək. Matrisdən sağda vektorlar göstərilir və matrisin aparılan çevirmələri qeyd olunur.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_2 + a_1 \\ b_1 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_2 - a_1 \\ b_1 - a_3 \\ b_2 - a_2 - 2b_1 + 2a_3 \\ b_3 - a_1 - b_1 + a_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_2 + a_1 \\ b_1 - a_3 \\ b_2 - a_2 - 2b_1 + 2a_3 \\ b_3 - b_2 + b_1 - a_1 + a_2 - a_3 \end{matrix}$$

Pilləli şəkildə matrisin sıfır sətir olmayan sətirlərinə a_1, a_2, b_1, b_2 vektorları uyğundur. Buna görə, a_1, a_2, b_1, b_2 vektorları $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ altfəzasının bazisini təşkil edir. Deməli, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ altfəzasının ölçüsü $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 4$ -ə bərabərdir.

Pilləli matrisin sıfır sətirlərinə $a_3 + a_1 - a_2 = 0$
 $b_3 + b_1 - b_2 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$ bərabərlikləri uyğundur. $\mathcal{L}_1$
fəzasının vektorlarını bərabərliyin sağ tərəfinə keçirək:
 $b_3 + b_1 - b_2 = a_1 + a_3 - a_2$
 $c_1 = b_1 - b_2 - b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = (0,0,0,0)$

Beləliklə, alırıq ki, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$.

Əgər altfəzaların $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ kəsişməsi $\mathcal{V}$ fəzasının yalnız sıfır vektorunu özündə saxlayırsa, onda $\mathcal{L}_1$ və $\mathcal{L}_2$ altfəzalarının cəmi düz cəmdir.

566-573 məsələlərində verilmiş vektorlar sistemi ilə doğrulan φ_1 və φ_2 xətti alt fəzanın ölçüsünü və bazisini tapın:

566. $\varphi_1 : a_1 = (1,1,1), a_2 = (1,2,1),$

$\varphi_2 : b_1 = (2,0,-1), b_2 = (0,1,3),$

567. $\varphi_1 : a_1 = (1,1,-1), a_2 = (2,-1,1),$

$\varphi_2 : b_1 = (1,0,2), b_2 = (1,3,-1),$

568. $\varphi_1 : a_1 = (1,0,1,-2), a_2 = (-1,1,0,1),$

$\varphi_2 : b_1 = (1,2,1,0), b_2 = (-1,-2,0,-2),$

569. $\varphi_1 : a_1 = (1,0,1,2), a_2 = (1,3,-2,1),$

$\varphi_2 : b_1 = (-1,1,-1,-1), b_2 = (2,0,-1,0),$

570. $\varphi_1 : a_1 = (1,2,0,1), a_2 = (1,1,1,0), a_3 = (3,5,1,2),$

$$\varphi_2 : b_1 = (1,0,1,0), b_2 = (1,4,-1,2)$$

$$571. \varphi_1 : a_1 = (1,1,1), a_2 = (1,0,-1), a_3 = (3, 2, 1)$$

$$\varphi_2 : b_1 = (-1,1,0), b_2 = (1, 2,1), b_3 = (-1,4, 1)$$

$$572. \varphi_1 : a_1 = (1,1,-1), a_2 = (-1,2,1), a_3 = (1,4,-1)$$

$$\varphi_2 : b_1 = (1,-1, 1), b_2 = (1,0,1), b_3 = (-1, 2-1)$$

$$573. \varphi_1 : a_1 = (1,0,1), a_2 = (1,-1,2), a_3 = (-1,-1,0)$$

$$\varphi_2 : b_1 = (0,1,1), b_2 = (1,2,-1), b_3 = (1, 1,-2)$$

574-576 məsələlərində göstərin ki,

$L(a_1, a_2, \dots, a_m) = L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ -dir, burada $a_i, b_i \in R$.

$$574. a_1 = (3,-4, 2), a_2 = (2,3,-1),$$

$$b_1 = (0,-17,7), b_2 = (11,-9, 5)$$

$$575. a_1 = (1,-1, 0), a_2 = (-2,3,1),$$

$$b_1 = (-1,2,1), b_2 = (-3,-1, -4)$$

$$576. a_1 = (1,-2,0), a_2 = (0,3,1), a_3 = (3, 0, -2)$$

$$b_1 = (5,1,-3), b_2 = (1, -1,-1), b_3 = (2,1, -1)$$

§15. Xətti çoxobrazlı.

Tutaq ki, V $\mathcal{F}$ -meydanı üzərində vektor fəza, $\mathcal{L}$ onun $x_1, x_2, \dots, x_k$ (1) vektorlarına görülmüş xətti altfəzasıdır, a_0, V - fəzasından olan hər hansı qeyd olunmuş vektordur.

Tərif. $y = x + a_0$, $x \in L$ şəklində bütün vektorların H çoxluğuna xətti çoxobrazlı deyilir və $H = L + a_0$ kimi işarə olunur. $\mathcal{L}$ altfəzası H xətti çoxobrazlısının istiqamətverici altfəzası, a_0 sürüşmə vektoru adlanır.

Misal 1. H xətti çoxobrazlısı

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & -6 \end{array}$$

tənliklər sistemi ilə verilir. Elə $\mathcal{L}$ xətti altfəzasını və a_0 sürüşmə vektorunu tapın ki, $H = L + a_0$ olsun.

Həlli. Tənlilər sisteminin əmsallarından və sərbəst hədlərindən genişlənmiş matrisi düzəldək və onu Qaus üsulundan istifadə edərək çevirək.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

tənliklər sisteminə qayıdaq

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = & 4 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 & = & -5 \end{array}$$

x_3, x_4 məchullarını sərbəst dəyişənlər qəbul etsək, alarıq

Buradan,

$$\begin{array}{l} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 + 5 \end{array}$$

Bircins sistemin fundamental həllər sistemini ayıraq:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	1	0
1	1	0	1

$a_1 = (1, 2, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$ fundamental həll sistemidir.

$a_0 = (-1, 5, 0, 0)$ bircins olmayan sistemin hər hansı həllidir.

Xətti asılı olmayan a_1, a_2 vektorları $\mathcal{L}$ altfəzasının bazisini

əmələ gətirir. İxtiyari $x \in L$ vektorunu

$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$; $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ şəklində göstərmək olar.

$H = L + a_0$ (a_0 vektoru sürüşmə vektorudur.)

577-582 məsələlərində H xətti çoxobrazlısı xətti

tənliklər sistemi ilə verilir. L altfəzasını və elə a_0 sürüşmə

vektorunu tapın ki, $H = L + a_0$ olsun.

577.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

578.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$579. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$580. \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -4 \\ 2x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$581. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$$

$$582. \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ -x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$$

Misal 2. $H = L(a_1) + a_0$ xətti çoxobrazlısını xətti tənliklər sistemi şəklində göstərin, burada $a_1 = (1, -1, 2, 1)$, $a_0 = (0, 1, 2, 1)$.

Həlli. H -xətti çoxobrazlısı $\lambda a_1 + a_0$ şəklində vektorlar çoxobrazlısıdır. Yəni koordinatlarla

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sərbəst hədlər sütununu ayırıb tənliklər sistemini λ dəyişəninə nəzərən yazaq.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 2 \\ x_4 - 1 \end{pmatrix}$$

sistemin həlli üçün Qaus üsulundan istifadə edək;

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ -1 & x_2 - 1 \\ 2 & x_3 - 2 \\ 1 & x_4 - 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & -2x_1 + x_3 - 2 \\ 0 & -x_1 + x_4 - 1 \end{array} \right)$$

Sistemin əsas matrisinin rəngi genişlənmiş matrisinin rənginə bərabər olduqda sistemin həlli var(Kroneker-Kapelli teoremi).

Deməli,

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 - 1 = 0 & x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_3 - 2 = 0 & \text{və ya} \quad -2x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_4 - 1 = 0 & -x_1 + x_4 = 1 \end{array}$$

H xətti çoxobrazlısı bircins olmayan xətti tənliklər sistemi şəklində yazıldı.

583-589 məsələlərində L xətti altfəzasının bazisi və a_0 sürüşmə vektoru verilir. $H = L + a_0$ xətti çoxobrazlısını xətti tənliklər sistemi şəklində göstərin.

583. $H = \lambda a + a_0, \lambda \in R$

burada, $a = (1, -1, 2), a_0 = (1, 0, 3)$

584. $H = \lambda a + a_0, \lambda \in R$

burada, $a = (1, 1, 1, 2), a_0 = (1, -2, 0, -1)$

585. $H = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + a_0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$

burada, $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (-2, 1, 1)$, $a_0 = (1, 3, -4)$

586. $H = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + a_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

burada, $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_0 = (1, 2, -1)$.

587. $H = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + a_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

burada, $a_1 = (1, 1, -1, 2)$, $a_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $a_0 = (0, 1, -2, 3)$

588. $H = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + a_0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$

burada

$a_1 = (1, -1, -1, -1)$, $a_2 = (2, 1, 0, 2)$, $a_3 = (0, -1, -1, 1)$, $a_0 = (2, 0, 1, 2)$

589. $H = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + a_0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ burada,

$a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2, -2)$, $a_3 = (1, 3, 0, 4)$, $a_0 = (1, 2, -1, 0)$

590. Tutaq ki, L_1, L_2 V xətti fəzasının alt fəzalarıdır və

$H_1 = x_1 + L_1$, $H_2 = x_2 + L_2$. Göstərin ki, H_1 və H_2 xətti

çoxobrazlıları onda və yalnız onda üst-üstə düşür ki, L_1, L_2

altfəzaları üst-üstə düşsün və $x_1 - x_2 \in L_1$ olsun.

591. İsbat edin ki, V xətti fəzasının $H_1 = a_1 + tb_1$ və

$H_2 = a_2 + tb_2$ xətti çoxobrazlıları onda və yalnız onda kəsişir

və üst-üstə düşmür ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) b_1 və b_2 vektorlar sistemi xətti asılı olmasın;

2) $a_2 - a_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ olsun, yəni $a_2 - a_1, b_1, b_2$ vektorlar sistemi xətti asılı olsun.

Misal 3. V_5 fəzasında H_1 və H_2 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini tapın:

Burada
$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 1, 1, 3, -3), b_1 = (2, 3, 1, 1, -1) \\ a_2 &= (1, 1, 2, 1, 2), b_2 = (1, 2, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

Həlli: İki $H_1 = x_1 + L_1$ və $H_2 = x_2 + L_2$ xətti çoxobrazlıları onda və yalnız onda üst-üstə düşür ki, $L_1 = L_2$ və $x_2 - x_1 \in L_1$ olsun.

Tutaq ki, H_1 və H_2 düz xətləri üst-üstə düşmür və a nöqtəsində kəsişir. Onda $L_1 \neq L_2$ və b_1, b_2 vektorlar sistemi xətti asılı deyil. Yəni 1) şərti ödənilir. Bundan başqa $a \in H_1$ və $a \in H_2$ dir və $a = a_1 + \lambda_1 b_1 = a_2 + \lambda_2 b_2$, yəni $a_2 - a_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ -dir, sıfırdan fərqli ixtiyarı λ_1, λ_2 üçün.

Deməli, düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün $a_2 - a_1$ vektorunu b_1, b_2 vektorları ilə xətti ifadə etmək lazımdır.

Baxdığımız məsələdə b_1, b_2 vektorları xətti asılı deyil. $a_2 - a_1, b_1, b_2$ sistemin xətti asılı - olub olmadığını yoxlayaq.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisin rəngi ikiyə bərabərdir. Deməli düz xətlər kəsişir, üst-üstə düşmür. $a_2 - a_1 = (-1, 0, 1, -2, 5)$ vektorunu b_1, b_2 vektorları

ilə ifadə edib, elə λ_1, λ_2 tapaq ki, $a_2 - a_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Bu tənliyi həll edib, $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$ tapırıq. Buradan çıxır ki, düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi

$$a = a_1 + \lambda_1 b_1 = (2, 1, 1, 3, -3) - 2(2, 3, 1, 1, -1) = (-2, -5, -1, 1, -1)$$

$$a = a_2 + \lambda_2 b_2 = (1, 1, 2, 1, 2) - 3(1, 2, 1, 0, 1) = (-2, -5, -1, 1, -1)$$

$$\mathbf{592-602} \text{ məsələlərində } H_1 = a_1 + tb_1 \text{ və } H_2 = a_2 + tb_2$$

çoxobrazlılarının kəsişib - kəsişmədiyini göstərin, kəsişirsə, kəsişmə nöqtələrini tapın:

$$\mathbf{592.} \quad a_1 = (2, 1, 1), b_1 = (2, 3, 1) \\ a_2 = (1, 1, 2), b_2 = (1, 2, 1)$$

$$\mathbf{593.} \quad a_1 = (1, -1, 0, 2), b_1 = (1, -1, 0, 2) \\ a_2 = (2, 1, 0, 3), b_2 = (1, 2, 0, 1)$$

$$\mathbf{594.} \quad a_1 = (1, 2, -1, 1), b_1 = (1, 2, 4, -2) \\ a_2 = (1, 1, -6, 4), b_2 = (1, 1, -1, 1)$$

$$\mathbf{595.} \quad a_1 = (1, 1, 0, -2), b_1 = (1, -3, -1, 3) \\ a_2 = (2, 0, -1, 3), b_2 = (-1, 5, 1, -1)$$

$$\mathbf{596.} \quad a_1 = (-1, -2, 1, 3), b_1 = (2, 3, 1, 4) \\ a_2 = (1, 0, 2, 4), b_2 = (-1, 2, 0, 1)$$

$$\mathbf{597.} \quad a_1 = (2, -4, -4, 1, -7), b_1 = (-1, 2, 0, 1, 4) \\ a_2 = (2, 0, -1, 1, 2), b_2 = (1, 2, 3, -1, 5)$$

$$598. \quad a_1 = (-2, 1, 1), \quad b_1 = (1, -1, 1) \\ a_2 = (3, 0, 4), \quad b_2 = (2, 0, 1)$$

$$599. \quad a_1 = (2, 0, 1), \quad b_1 = (2, -1, 3) \\ a_2 = (5, -2, 8), \quad b_2 = (1, 0, -1)$$

$$600. \quad a_1 = (0, 1, 1, -1), \quad b_1 = (1, 2, 1, -1) \\ a_2 = (1, 1, 2, 0), \quad b_2 = (1, 3, 1, -2)$$

$$601. \quad a_1 = (1, 1, -1, 0), \quad b_1 = (1, 2, 0, -1) \\ a_2 = (-1, 7, -3, -8), \quad b_2 = (2, -1, 1, 3)$$

$$602. \quad a_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad b_1 = (1, -1, 2, -3, 4) \\ a_2 = (8, 9, 0, -10, -9), \quad b_2 = (1, 2, -1, -1, 0)$$

§ 16. Matrislər üzərində əməllər

$P^{m \times n}$ kimi işarə olunur.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisinin i -ci sətəri ilə, A_i ; $A_i = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}]$; $i = 1, 2, \dots, m$

k -ci sütunu A^k ilə $A^k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix}$ $k = 1, 2, \dots, n$ işarə olunur.

Tərif. Elementləri $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) düsturu ilə hesablanan $C = \|\gamma_{ij}\|$ matrisinə $A = \|\alpha_{ij}\|$ və

$B = \|\beta_{ij}\|$ matrislərinin cəmi deyildir və $C = A + B$ kimi işarə olunur.

Tərif. λ skalyarının $A = \|\alpha_{ij}\|$ matrisinə hasili λA kimi işarə olunur və $\|\lambda \alpha_{ij}\|$ matrisinə deyilir: $\lambda A = \|\lambda \alpha_{ij}\|$

$(-1)A$ matrisi üçün $A + (-1)A = 0$ bərabərliyi ödənilir.

$(-1)A, -A$ kimi işarə olunur.

Aşağıdakı xassələrin doğruluğunu yoxlayın.

$\forall A, B, C \in P^{m \times n}, \forall \alpha, \beta \in P$ olduqda

1. $A + B = B + A$ kommutativlik
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ assosiativlik
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Matrislərin $A - B$ fərqi $A - B = A + (-B)$ kimi təyin edilir.

Matrislərin vurulması. Tutaq ki, $A \in P^{m \times n}, B \in P^{n \times q}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nq} \end{pmatrix}$$

A_i sətirinin B^k sütununa hasili belə təyin olunur:

$$A_i B^k = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}] \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}$$

A matrisinin B matrisinə hasili ik –ci elementi $A_i B^k$ -ya bərabər olan $m \times p$ ölçülü matrisə deyilir, yəni

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & \dots & A_1 B^q \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & \dots & A_2 B^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m B^1 & A_m B^2 & \dots & A_m B^q \end{bmatrix}$$

Deməli A matrisini B matrisinə yalnız o halda vurmaq olar ki, A -nin sütunları sayı B -nin sətirləri sayına bərabər olsun. Əgər matrislərin AB hasili varsa BA hasili olmaya da bilər. Əgər A və B eyni tərtibli kvadrat matrislədirsə, onda AB və BA hasilləri var, lakin ümumiyyətlə $AB \neq BA$

Aşağıdakı xassələrin (doğruluğunu göstərin.

1. $(AB)C = A(BC)$ Əgər AB və BC hasilləri varsa,
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ Əgər AB hasili varsa,
3. $(A+B)C = AC + BC$ Əgər $A+B$ cəmi və AC hasili varsa,
4. $C(A+B) = CA + CB$ Əgər $A+B$ cəmi və CA hasili varsa,

603. A və B sıfırdan fərqli olduqda, $AB = 0$ ola bilərmi? Bilərsə, misal göstərin:

604. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrisini $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ matrislərinin hansı ilə toplamaq olar?

605. Xətti kombinasiyaları hesablayın:

1) $2A + 3B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2) $(1+2i)A + (1-2i)B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & -2i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$

3) $(1+2i)A + (1+2i)B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$

4) $3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

606. $4A - 3X = E$ şərtini ödəyən X matrisini tapın,

burada $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

607. Matrisləri toplayın və çıxın:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

608. A və B matrislərinin ölçüləri necə olmalıdır ki, AB və BA hasilləri olsun.

609. A, B və C matrislərinin ölçüləri necə olmalıdır ki, $(AB)C$ hasili olsun?

610. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi ilə yerini dəyişə bilən bütün matrisləri

tapın.

611. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ matrisləri verilir. 1) AB ; 2) BA ; 3) AC ;

4) CA ; 5) BC ; 6) CB ; 7) DA ; 8) AD ; 9) ABC ;

10) CAB ; 11) BCA hasillər varmı?

612. Aşağıdakı hallarda A və B matrislərinin AB hasili necə dəyişər?

- 1) A matrisinin i -ci və k -cı sətirlərinin yerlərini dəyişdikdə?
- 2) A matrisinin i -ci sətirinə k -cı sətirin λ ədədinə vurulmuşunu əlavə etdikdə?
- 3) B matrisinin i -ci və k -cı sütunlarının yerini dəyişdikdə?
- 4) A matrisinin i -ci sütununa k -cı sütunun λ ədədinə vurulmuşunu əlavə etdikdə?

613. A matrisini hansı matrisə vurmaq lazımdır ki, nəticədə:

- 1) A matrisinin birinci sütunu;
- 2) A matrisinin birinci sətri alınsın?

614. Verilir $A = A_{m \times n} = \|\alpha_{ij}\|$ $m > 1, n > 1$ matrisi 1) sütunu A matrisinə; 2) A matrisini sütuna; 3) sətri A matrisinə; 4) A matrisini sətrə; 5) sətri sütuna; 6) sütunu sətrə vurmaq olarmı? Vurmaq mümkün olduqda vuruqların və hasillərin ölçüləri necə olmalıdır.

615. Tutaq ki, $A = A_{m \times n}$ matris, E_m və E_n uyğun olaraq m və n tərtibli vahid matrisdir. İsbat edin ki, $E_m A = A$, $A E_n = A$

616. Əgər ixtiyari i, j üçün $a_{ij} = a_{ji}$ olarsa, kvadrat A matrisinə simmetrik matris, ixtiyari i, j üçün $a_{ij} = -a_{ji}$ olarsa, kvadrat A matrisinə çəp simmetrik matris deyilir. İsbat edin ki, ixtiyari kvadrat A matrisini yeganə üsulla $A = B + C$ şəklində göstərmək olar, burada B - simmetrik matris, C çəp simmetrik matrisdir.

617. $A_{7 \times 10} B_{m \times n} = C_{7 \times 4}$ olduqda m və n - i tapın.

618. $A_{m \times 5} B_{n \times 8} = C_{6 \times k}$ olduqda m , n və k - nı tapın.

619. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ bərabərliyinin doğru olub - olmadığını yoxlayın, burada,

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

620-630. Hasilləri hesablayın.

$$620. (2, 8, 18) \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 621. \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, -5, 3)$$

$$622. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$623. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 624. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$625. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 626. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$627. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$628. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$629. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$630. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

631-634. İfadələri hesablayın.

$$631. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$$

$$632. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$633. \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}^n$$

$$634. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

635. Qüvvətə yüksəldin.

1) A^3 ; 2) A^n , burada $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

636. A, B, C matrislərinin hasilini tapın.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

637. A, B, C, D matrislərinin hasilini tapın.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

638 - 641 misallarında $AB-BA$ fərqlərini hesablayın:

638. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$639. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$640. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$641. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tutaq ki, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ əmsalları $\mathcal{P}$ meydanından olan hər hansı çoxhədli və A n - tərtibli kvadrat matrisdir. $f(x)$ çoxhədlisində x - in yerinə A kvadrat matrisini qoyduqda alınan

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$$

ifadəsinə A matrisindən asılı çoxhədli deyilir. Əgər $f(A)$ sıfır matris, yəni $f(A) = 0$ olarsa, A matrisinə $f(x)$ çoxhədlisinin kökü deyilir.

642. Göstərin ki, əgər $f(x), g(x)$ və $h(x)$ X - dən asılı ixtiyari çoxhədlilərdirsə, onda

$$f(A)g(A) = g(A)f(A),$$

$$[f(A) \pm g(A)]h(A) = f(A)h(A) \pm g(A)h(A),$$

$$[f(A)g(A)]h(A) = f(A)[g(A)h(A)].$$

Misal. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 6x + 2$ olduqda, $f(A)$

- nı tapın.

Həlli: Matrisdən asılı çoxhəddlinin tərifinə görə

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deməli, $f(A) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Misal. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ matrisinin $f(x) = x^2 - 9x + 14$

çoxhədlisinin kökü olub- olmadığını göstərin.

Həlli: Verilmiş çoxhəddlidə x - in yerinə A matrisini qoyub, alırıq:

$$f(A) = A^2 - 9A + 14E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 - 9 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} +$$

$$+ 14 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deməli, A matrisi $f(x)$ -in köküdür.

643 - 647 məsələlərində A və $f(x)$ üçün $f(A)$ - ni tapın.

$$\mathbf{643.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$\mathbf{644.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

$$\mathbf{645.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

$$\mathbf{646.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + x + 2.$$

$$\mathbf{647.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

648. Göstərin ki, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 7x + 12$

çoxhədlinin köküdür.

649. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ və $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ matrislərindən

hansı $f(x) = x^2 + x - 20$ çoxhədlinin köküdür.

Matrisin transponirəsi

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisində bütün sətirləri uyğun nömrəli sütunlarla əvəz etdikdə, alınan matrisə A matrisinin **transponirəsi** deyilir və A^T kimi işarə olunur.

650. Tutaq ki, $A = A_{m \times n}$ -dir. A^T - matrisinin ölçüsü necə olar?

651. Əgər $A^T = A^{-1}$ olarsa, elementləri həqiqi ədədlər olan n tərtibli kvadrat A matrisinə ortoqonal matris deyilir, burada A^T , A matrisinin transponirəsidir. Göstərin ki, $|A| = \pm 1$.

652. İsbat edin ki, transponirələmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$

4. $(AB)^T = B^T A^T$ (əgər AB hasili varsa)

5. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ (əgər ABC hasili varsa)

653. Hansı halda $A = A_{m \times n}$ matrisi üçün $A^T + A$ var?

654. $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin elementləri hansı şərtləri

ödəməlidir ki, $A + A^T = O$ olsun, burada O n - tərtibli sıfır matrisdir.

655. Verilmiş matrislərin transponirəsini tapın.

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

656. Xətti kombinasiyaları tapın.

1) $5A - 3B^T$; 2) $4B^T + 3A$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

657. Verilir: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

matrisləri, $(AB)^T$ matrisini tapın.

658. B matrisini tapın: burada

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

659. A matrisini tapın: burada

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

660. 1) $(A^T B^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) $(A^T B^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ olduqda BA matrisini tapın.

661. $A, B^T A$ verildikdə $(AB)^T$ - ni tapın:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix};$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

662. Verilmiş matrislər üçün $(AB)^T$ - ni tapın:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

663. Aşağıdakı matrislər üçün $(BA)^T$ - ni tapın:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

664. Aşağıdakı əməllərdən hansılarını $A = A_{2 \times 2}$ və $B = B_{2 \times 3}$ matrisləri ilə aparmaq olar? Aparmaq mümkün olub - olmadığını əsaslandırın:

- 1) $A + B$; 2) $A^T + B$; 3) $A + B^T$; 4) $A \cdot B$; 5) $B \cdot A$; 6) $A^T \cdot B$;
7) $A \cdot B^T$; 8) $A^T \cdot B^T$; 9) $B^T \cdot A^T$.

665. İfadəni hesablayın:

$H = C + (AB)^T$, burada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

666. İfadəni hesablayın:

$H = (ABC)^T + 3E$, burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \ 1 \ 3)$$

667. İfadəni hesablayın: $H = C + (BA)^T$, burada

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

§17. Determinantlar

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}$ meydanı üzərində matrisdir, $A \in \mathcal{P}^{n \times n}$.

Tərif. Kvadrat matrisin hər sətirindən və hər sütunundan yalnız və yalnız bir element götürməklə n elementin hasilindən ibarət n -sayda mümkün hasillərin(hədlərin) cəbri cəminə bu matrisin *determinantı* deyilir. Həddin indeksləri cüt əvəzləmə əmələ gətirərsə, həddin işarəsi müsbət, əgər onun indeksləri tək

əvəzləmə əmələ gətirirsə həddin işarəsi mənfi işarə götürülür, başqa sözlə, həddin işarəsi $(-1)^t$ ədədinin işarəsinə bərabərdir. Burada t -həddin vuruqlarının birinci indeksləri təbii sıra ilə düzüldükdə ikinci indekslərin əmələ gətirdiyi permutasiyadakı inversiyaların sayıdır.

n -tərtibli determinant simvolik olaraq aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

Burada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $1, 2, \dots, n$ ədədlərinin ixtiyari permutasiyasıdır. Əgər $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutasiyası cüt olarsa $(-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$ vuruğu $+1$ -ə, əgər tək permutasiya olarsa -1 -ə bərabərdir. Matrisin yuxarı sol küncündən aşağı sağ küncünə gedən diaqonala onun *baş diaqonalı* deyilir. Yəni, determinantda a_{11} -dən a_{nn} -ə gedən diaqonala baş diaqonal deyilir.

Determinantın əsas xassələri.

Determinantın praktik hesablanması işini asanlaşdıran əsas xassələrini qeyd edək:

Xassə 1. Kvadrat matrisin bütün sətirlərini onun eyni nömrəli sütunları ilə əvəz etdikdə matrisin determinantının qiyməti dəyişməz.

Xassə 2. Matrisin iki sətrinin (sütunun) yerlərini dəyişsək onun determinantı işarəsini dəyişər.

Xassə 3. İki sətri (sütunu) eyni olan matrisin determinantı sıfıra bərabərdir.

Xassə 4. Əgər matrisin hər hansı sətrinin (sütunun) bütün elementlərini m -ədədinə vursaq, onda matrisin determinantı m -ədədinə vurulur.

Xassə 5. İki sətri (sütunu) müənasib olan matrisin determinantı sıfıra bərabərdir.

Xassə 6. Əgər kvadrat A matrisinin i -ci sətrinin hər bir elementi m toplananın cəmi şəklində olarsa, onda A matrisinin determinantı m -determinantın cəminə bərabərdir. Bu determinantların hər birində i -ci sətirdən başqa yerdə qalan sətirələr verilmiş determinantın uyğun sətirələri ilə eynidir. Birinci determinantın i -ci sətrinin elementləri birinci toplananlardan, ikinci determinantın determinantın i -ci sətrinin elementləri ikinci toplananlardan və s. m -ci determinantın i -ci sətrinin elementləri m -ci toplananlardan ibarətdir.

Xassə 7. Əgər determinantın bir sətri (sütunu) üzərində başqa sətrin (sütunun) ixtiyari ədədə vurulmuşunu əlavə etsək determinant dəyişməz.

Xəssə 8. Əgər determinantın bir sətri (sütunu) digər sətrlərin (sütunların) xətti kombinasiyasıdırsa, onda determinant sıfıra bərabərdir.

2 və 3 - tərtibli determinantlar.

Tərif. $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

cəbri cəminə $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ kvadrat matrisinin *üç tərtibli determinantı* deyilir və

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

şəklində işarə olunur.

$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ cəbri cəminə $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin iki

tərtibli determinantı deyilir. və

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ şəklində işarə olunur.}$$

668-678. Determinantları hesablayın:

$$668. \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$669. \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$670. \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$671. \begin{vmatrix} n^2 & nm \\ nm & m^2 \end{vmatrix}$$

$$672. \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix}$$

$$673. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$674. \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$675. \begin{vmatrix} a+bi & a \\ -2bi & -a \end{vmatrix}$$

$$676. \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$677. \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$$

$$678. \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

679-681. Tənlikləri həll edin.

$$679. \begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$680. \begin{vmatrix} x & x-3 \\ 6 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$681. \begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

682. İsbat edin ki, a, b, c həqiqi ədədlər olduqda

$$\begin{vmatrix} b-x & a \\ a & c-x \end{vmatrix} = 0 \text{ tənliyinin kökləri həqiqidir.}$$

683-690. 3 - tərtibli determinantları hesablayın.

$$683. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$684. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 13 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$685. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$686. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$687. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

$$688. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$689. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$690. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix}$$

691-698. Determinantın xassələrindən istifadə edərək determinantları hesablayın:

$$691. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$692. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 25 \end{vmatrix}$$

$$693. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$694. \begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$695. \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$696. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$697. \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

$$698. \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Məsələlərdə determinantları açmadan, yalnız xassələrindən istifadə edərək tənlikləri həll edin.

$$699. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & x & 14 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$700. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$701. \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$702. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & x+2 & 3 \\ -2 & -2 & 7+x \end{vmatrix} = 0$$

$$703. \begin{vmatrix} x-3 & 2 & x+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$704. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -x+3 \\ x-2 & 1 & 1 \\ x+3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$705. \begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$706. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+x \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$707. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6-x^2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & x^2-9 & 5 \\ 4 & 3 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$708. \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & x & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = 0$$

$$709. \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 + x + 1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} + x + n - 1 \end{vmatrix} = 0$$

§18. Permutasiyalar, əvəzləmələr

Permutasiyalardakı inversiyaların sayını tapın.

710. 2,3,9,8,7,5,6,4,1

711. 3,5,2,4,6,1

712. 8,3,5,4,2,7,6,1

713. 1,9,3,6,5,2,4,7,8

714. 1,2,7,8,5,6,4,3,9,10

715. 1,3,5,7,....., 2n-1,2,4,6,...,2n

716. 2,4,6,.....,2n,1,3,5,7,.....,2n-1

717. 1,2,....,n ədədlərindən düzəldilən və inversiyaların sayı ən böyük olan permutasiyanı yazın, bu permutasiyadakı inversiyaların sayını tapın, onun cütlüyünü təyin edin.

718. 1,2,.....,n ədədlərinin hər hansı permutasiyasına (1,2) transpozisiyası aparılırsa inversiyaların sayı necə dəyişir?

719. Permutasiyada $n-1$ - ci yerdə duran 1 - ədədi neçə permutasiya əmələ gətirər?

720. k və ℓ - i elə seçin ki, permutasiya

1) 7,4,3,k, ℓ ,8,5,2 tək olsun

2) k,3,4,7, ℓ ,2,6,5 cüt olsun

3) 1,3,5,k,9,2, ℓ ,6,8 cüt olsun

4) 7,5,k,6,1,2, ℓ , 9,8 tək olsun

721-725 məsələlərində əvəzləmənin cütlüyünü tapın.

$$721. \begin{pmatrix} 123456789 \\ 135792468 \end{pmatrix} \quad 722. \begin{pmatrix} 123456789 \\ 258147369 \end{pmatrix} \quad 723. \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81365742 \end{pmatrix}$$

$$724. \begin{pmatrix} 123456789 \\ 196325478 \end{pmatrix} \quad 725. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 3 & 8 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

726. Göstərin ki, p ədədi $1, 2, \dots, n$ ədədlərindən düzəldilmiş $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ permutasiyasındakı inversiyaların sayıdırsa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin dekrementinin cütlüyü p ədədinin cütlüyü ilə eynidir.

Əvəzləmələri asılı olmayan dövrlərin hasilinə ayırın və dekrement vasitəsilə cütlüyünü təyin edin.

$$727. \begin{pmatrix} 123456 \\ 341265 \end{pmatrix} \quad 728. \begin{pmatrix} 123456 \\ 546312 \end{pmatrix} \quad 729. \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2153476 \end{pmatrix}$$

$$730. \begin{pmatrix} 1234 \dots 2n-1 & 2n \\ 2143 \dots 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$$

$$731. \begin{pmatrix} 1234 \dots 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3456 \dots 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$732. \begin{pmatrix} 123456 \dots 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 321654 \dots 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$$

$$733. \begin{pmatrix} 123456 \dots 3n-2 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 231564 \dots & 3n & 3n-1 & 3n \\ & & & 3n-2 \end{pmatrix}$$

§19. Kvadrat matrisin determinantı və xassələri

Aşağıdakı hasillərdən hansılar uyğun tərtibli determinantın həddidir və determinanta hansı işarə ilə daxildir?

$$734. a_{24}a_{15}a_{42}a_{31}a_{53}a_{66} \quad 735. a_{12}a_{34}a_{53}a_{66}a_{21}a_{45}$$

$$736. a_{22}a_{21}a_{34}a_{43}a_{35} \quad 737. a_{13}a_{24}a_{35} \dots a_{n-1,1}a_{n2}$$

$$738. a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \dots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}.$$

739. i və k - nın hansı qiymətlərində $a_{47}a_{63}a_{i2}a_{55}a_{7k}a_{14}a_{31}$ hasili yeddi tərtibli determinanta müsbət işarə ilə daxil olar?

740. i və k - nın hansı qiymətlərində $a_{6i}a_{83}a_{4k}a_{72}a_{54}a_{35}a_{26}a_{18}$ hasili səkkiz tərtibli determinanta mənfi işarə ilə daxil olar?

741. a) $a_{11} = 0$, qalan bütün elementlər sıfırdan fərqli olduqda;

b) $a_{ij} = 0$, qalan bütün elementlər sıfırdan fərqli olduqda;

c) $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{kk} = 0$, ($k < n$) qalan bütün elementlər sıfırdan fərqli olduqda n - tərtibli determinantda neçə hədd sıfırdan fərqli olar?

742. n - tərtibli determinanta hansı işarə ilə daxildir:

1) baş diaqonal elementlərinin hasili;

2) sağ diaqonal elementlərinin hasili;

Ümumi şəkildə yazılmış üç tərtibli determinantın aşağıdakı xassələrini isbat edin:

743. Matrisi transponirə etdikdə onun determinantı dəyişməz.

744. Determinantın iki sətrinin (sütunun) yerlərini dəyişdikdə, determinant işarəsini dəyişər.

745. Əgər hər hansı sətrin (sütunun) bütün elementləri sıfıra bərabərdirsə, onda determinant sıfıra bərabərdir.

746. Əgər determinantın iki sətri (sütunu) bərabər olarsa, onda determinant sıfıra bərabərdir.

747. Əgər determinantın iki sətri (sütunu) müənasızdırsa, onda determinant sıfıra bərabərdir.

748. Determinantı hər hansı ədədə vurmaq onun hər hansı sətrini və ya sütununu həmin ədədə vurmaq deməkdir.

749. Əgər bir sətrin (sütunun) üzərinə digər sətrin (sütunun) λ skalyarına vurulmuşu əlavə olunarsa, onda determinant dəyişməz.

750. Determinantın i - ci sətirdə (sütununda) duran hər bir element iki toplanandan ibarətdirsə, onda bu determinant iki determinantın cəminə bərabərdir. Bu determinantlardan birinci determinantda i - ci sətirdə (i - ci sütunda) 1 - ci toplananlar, ikinci determinantda ikinci toplananlar durur, qalan sətirlərdəki(sütunlarındakı) elementlər, verilən determinantda olduğu kimidir.

751. Determinantın bir sətiri digər sətirlərin xətti kombinasiyası olarsa, determinat sıfıra bərabər olar.

752. Determinantın hər hansı bir sətirinin (sütununun) üzərinə digər sətirlərin (sütunların) xətti kombinasiyası əlavə olunarsa, determinant dəyişməz.

753. Determinantın hər hansı sətiri (sütunu) ortaq vuruğa malik olarsa, onda bu ortaq vuruğu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

754. n - tərtibli Δ determinatı necə dəyişər.

- 1) Onun hər bir elementini -1 - ə vurduqda;
- 2) Onun hər bir elementini qoşma ədədlərlə əvəz etdikdə;
- 3) Onun sətirlərini tərs qaydada yazdıqda;
- 4) 2 - ci sətirdən başlayaraq hər bir sətirə özündən əvvəlkinə əlavə etdikdə;
- 5) hər bir sətirdən sonrakı sətirləri çıxdıqda, axırıncı sətirdən əvvəlki birinci sətiri çıxdıqda;

755. n - tərtibli A matrisində düz n element 1 - ə, qalan bütün elementlər sıfıra bərabərdir. A matrisinin determinantı nəyə bərabər ola bilər?

756. A matrisində cüt nömrəli sətirlərin cəmi, tək nömrəli sətirlərin cəminə bərabər olduğunu bilərək, $\det A$ - nı hesablayın.

757. Göstərin ki, istənilən həqiqi A matrisi üçün $\det AA^T \geq 0$ ödənilir.

758. n - tərtibli A və B matrisləri üçün $\det(AB)^{-1}$ - in ifadəsini tapın.

759. Göstərin ki, tək tərtibli çəp simmetrik matrisin determinantı 0 - a bərabərdir.

760. $\det(AB)$ - ni tapın:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

761. n - tərtibli Δ -determinantın birinci sətirinin bütün elementləri eyni olub və $m \neq 0$ - ə bərabədirsə, determinantın bütün elementlərinin cəbri tamamlayıcılarının cəmini tapın.

762 - 768 məsələlərində λ məchulundan asılı $|A - \lambda E| = 0$ tənliyini həll edin, burada E n - tərtibli vahid matrisdir.

$$762. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$763. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$764. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$765. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$766. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$767. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$768. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

769 - 772 məsələlərində tənlikləri həll edin.

$$769. \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$$770. \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x-5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$771. \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 2 \\ 0 & 5-x & 3 \\ 0 & 0 & 6-x \end{vmatrix} = 0$$

$$772. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2+x & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -15 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

773. Tutaq ki, $A \in \mathcal{P}$ meydanı üzərində n - tərtibli kvadrat matrisdir. Determinantın xassələrindən istifadə edərək isbat edin ki, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Aşağıdakı məsələlərdə $\det(\lambda A)$ - nı hesablayın.

774. $\lambda = 4, \det A_{3 \times 3} = 2$

775. $\lambda = -2, \det A_{3 \times 3} = 4$

776. $\lambda = \sqrt[3]{2}, \det A_{3 \times 3} = 6$

777. $\lambda = \sqrt[3]{3}, \det A_{3 \times 3} = 5$

778. $\lambda = \sqrt[4]{3}, \det A_{4 \times 4} = 7$

779. $\lambda = \sqrt[4]{5}, \det A_{4 \times 4} = 4$

780. $\lambda = 4, \det A_{5 \times 5} = 3$

781. $\lambda = \sqrt[6]{4}, \det A_{6 \times 6} = 5$

782. 689, 848 və 954 ədədləri 53 - ə bölünür.

Determinantı hesablamadan

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantının nə üçün 53 - ə bölündüyünü əsaslandırın.

783. 1457, 1786, 2021 və 4371 ədədləri 47 - yə

bölünür. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ determinantı hesablamadan onun 47 - yə

bölündüyünü göstərin.

784. 23010, 23069, 44898, 14691 və 15989 ədədləri 59 - a bölündüyünü bilərək 5 tərtibli elə determinant düzəldin ki, onu hesablamadan 59-a bölündüyünü göstərin və əsaslandırın.

785. Elementləri $a_{ij} = \min(i, j)$ şərti ilə verilmiş n - tərtibli determinantı hesablayın:

786. Elementləri $a_{ij} = \max(i, j)$ şərti ilə verilmiş n - tərtibli determinantı hesablayın.

787. Elementləri $a_{ij} = |i - j|$ şərti ilə verilmiş n - tərtibli determinantı hesablayın.

§20. Determinantların hesablanması üsulları

Verilmiş determinantın hesablanmasını sadələşdirmək üçün determinantın xassələrini tətbiq etmək lazım gəlir. Determinantın qiymətini hesablamaq üçün müxtəlif üsullar vardır. Üsulun seçilməsi determinantın şəkli və tərtibi n – dən asılıdır. Yaxşı seçilmiş üsul hesablamaları kifayət qədər azaltmağa imkan verir. Burada determinantların hesablanmasında istifadə olunan bəzi üsullara baxılır.

1. Determinantın üçbucaq şəklinə gətirilməsi üsulu.

Bu üsul determinantın elə çevirməsindən ibarətdir ki, diaqonallardan birinin bir tərəfində duran bütün elementlər

sıfıra bərabər olsun. Əgər sol diaqonaldan bir tərəfdə duran elementlər sıfıra bərabər olan determinant alınarsa, belə determinant diaqonal elementlərinin hasilinə bərabərdir. Əgər sağ diaqonaldan bir tərəfdə duran bütün elementlər sıfıra bərabər olan determinant alınarsa belə determinant sağ diaqonal elementlərinin $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ işarəsi ilə hasilinə bərabərdir.

Misal. $n+1$ tərtibli determinantı hesablayın

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Həlli: 1-ci sətiri (-1) - ə vurub, 2-ci, 3-cü, ..., n -ci sətir üzərinə əlavə edək: Onda

$$D = b_1 b_2 \dots b_n$$

Determinantları üçbucaq şəklinə gətirməklə hesablayın.

788. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

789. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

790. $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$791. \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$792. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$793. \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

$$794. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$795. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$796. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$797. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$798. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$799. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$800. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$801. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$802. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$803. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$804. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 4 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 6 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2n \end{vmatrix}$$

$$805. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$806. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1 & 0 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1-3 & 0 & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1-3-5 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$807. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

2. Rekurrent münasibətin xüsusi halı.

Verilən n tərtibli D_n determinantı bəzi hallarda çevirmələrdən və sətir və ya sütuna görə ayrılışından sonra, onunla eyni quruluşa malik aşağı tərtibli determinantlarla ifadə oluna bilər. Alınan bərabərlik rekurrent münasibət adlanır.

Tutaq ki, rekurrent münasibət

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2 \quad (1)$$

şəklindədir, burada p, q n - dən asılı olmayan sabitlərdir.

$q = 0$ olduqda D_n həndəsi silsilənin həddi kimi hesablanır: $D_n = p^{n-1}D_1$; burada D_1 D_n determinantının yuxarı sol küncündə duran elementə bərabər olan bir tərtibli determinantdır.

D_n - ni hesablamaq üçün düstur çıxaraq. Bunun üçün $x^2 - px - q = 0$ tənliyinə baxaq. Bu tənliyin köklərini r_1 və r_2 ilə işarə edək. Burada iki hal ola bilər. a) $r_1 \neq r_2$, b) $r_1 = r_2 = r$. $r_1 \neq r_2$ olduqda Viyet düsturlarına görə $p = r_1 + r_2$, $q = -r_1r_2$. Onda (1) bərabərliyini belə yazmaq olar:

$$D_n - r_2 D_{n-1} = r_1 (D_{n-1} - r_2 D_{n-2}) \quad (2)$$

$$D_n - r_1 D_{n-1} = r_2 (D_{n-1} - r_1 D_{n-2}) \quad (3)$$

(2) bərabərliyindən görünür ki, $U_n = D_n - r_2 D_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) ifadəsinə vuruğu r_1 olan həndəsi silsilənin həddi kimi, (3) bərabərliyindən görünür ki, $V_n = D_n - r_1 D_{n-1}$ ifadəsinə vuruğu r_2 olan həndəsi silsilənin həddi kimi baxmaq olar. Onda alırıq ki,

$$U_n = U_2 r_1^{n-2}, \quad V_n = V_2 r_2^{n-2}.$$

Yaxud

$$D_n - r_2 D_{n-1} = (D_2 - r_2 D_1) r_1^{n-2} \quad (4)$$

$$D_n - r_1 D_{n-1} = (D_2 - r_1 D_1) r_2^{n-1} \quad (5)$$

(4) bərabərliyini r_1 - ə, (5) bərabərliyini r_2 - yə vurub
və hədbəhəd toplayıb alarıq:

$$D_n(r_1 - r_2) = (D_2 - r_2 D_1)r_1^{n-1} - (D_2 - r_1 D_1)r_2^{n-1}$$

Buradan

$$D_n = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1}$$

burada

$$c_1 = \frac{D_2 - r_2 D_1}{r_1 - r_2}, \quad c_2 = -\frac{D_2 - r_1 D_1}{r_1 - r_2}.$$

$n=1$ və $n=2$ olduqda c_1 və c_2 əmsalları

$$c_1 + c_2 = D_1$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = D_2$$

xətti tənliklər sistemindən tapılır.

$r_1 = r_2 = r$ olduqda

$$D_n - r D_{n-1} = r(D_{n-1} - r D_{n-2})$$

olur və $U_n = D_n - r D_{n-1}$ vuruğu r olan həndəsi silsilənin
həddidir. Deməli,

$$D_n - r D_{n-1} = (D_2 - r D_1) r^{n-2}.$$

Burada n ədədini $n-1$ ilə əvəz etsək

$$D_{n-1} - r D_{n-2} = (D_2 - r D_1) r^{n-3}$$

alarıq. Bu qayda ilə davam etsək alarıq;

$$D_n = r^n [(n-1)c_1 + c_2]$$

Belə ki, $c_1 = \frac{D_2 - r_2 D_1}{r^2}, \quad c_2 = \frac{D_1}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$

Misal. n tərtibli determinanti hesablayın:

$$D_n = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Həlli: Determinantı birinci sətərə nəzərən ayırıb, alırıq:

$$D_n = 8D_{n-1} - 15D_{n-2}$$

Bu rekurrent münasibətə uyğun $x^2 - 8x + 15 = 0$ kvadrat tənliyinin kökləri

$$r_1 = 5, \quad r_2 = 3, \quad r_1 \neq r_2.$$

Deməli,

$$D_n = c_1 5^{n-1} + c_2 3^{n-1}$$

Burada $n=1$ və $n=2$ qəbul edib, alırıq:

$$D_1 = 8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 49, \quad c_1 + c_2 = 8, \quad 5c_1 + 3c_2 = 49$$

buradan $c_2 = -\frac{9}{2}, \quad c_1 = \frac{25}{2}, \quad D_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 3^{n+1}).$

Rekurrent münasibətlər üsulundan istifadə edərək determinantları hesablayın.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{808.} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \mathbf{809.} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} & \mathbf{810.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{811.} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix} & & \mathbf{812.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\mathbf{813.} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

§21. Minorlar və cəbri tamamlayıcılar.

Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P meydanı üzərində matrisdir. $A \in P^{n \times n}$. A matrisində nömrələri $i_1, i_2, \dots, i_k$ olan k müxtəlif sətir və nömrələri $j_1, j_2, \dots, j_k$ olan k müxtəlif sütun götürək ($1 \leq k \leq n$). Bu sətirlər və sütunların kəsişməsində duran elementlər k tərtibli matris əmələ gətirir. Bu matrisin determinantına A matrisinin $i_1, i_2, \dots, i_k$ sətirlərində və $j_1, j_2, \dots, j_k$ sütunlarında yerləşən k tərtibli minoru deyilir və M ilə işarə olunur. A matrisinin seçilmiş sətirlər və sütunlarında yerləşməyən bütün elementləri $n - k$ tərtibli matris əmələ gətirir. $n - k$ tərtibli bu matrisin determinantına M minorunun tamamlayıcı minoru deyilir və M' kimi işarə olunur. M' tamamlayıcı minorun

$$(-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_k)+(j_1+j_2+\dots+j_k)}$$

ədədə vurulmuşuna M minorunun cəbri tamamlayıcısı deyilir. Burada $i_1, i_2, \dots, i_k$ və $j_1, j_2, \dots, j_k$ uyğun olaraq M minoruna daxil olan sətir və sütunların nömrələridir.

Tərif. Kvadrat A matrisinin i - ci sətirini və k - cı sütununu sildikdə alınan matrisin determinantına a_{ik}

elementinin minoru deyilir və M_{ik} kimi işarə olunur.
 $(-1)^{i+k} M_{ik}$ hasilinə a_{ik} elementinin cəbri tamamlayıcısı deyilir
və A_{ik} ilə işarə olunur.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Determinantların hesablanmasını asanlaşdıran (tərtibi azaldan) aşağıdakı lemmaları qeyd edək.

Lemma 1. n - tərtibli A matrisinin axıncı sətirində (sütununda) a_{nn} elementindən başqa bütün elementlər sıfıra bərabədirsə, onda A - nın determinantı $a_{nn}A_{nn}$ hasilinə bərabərdir.

Lemma 2. A matrisinin hər hansı sətirində (sütununda) bir elementdən başqa yerdə qalan bütün elementlər sıfıra bərabədirsə, onda $|A|$ determinantı həmin elementlə onun cəbri tamamlayıcısı hasilinə bərabərdir.

Teorem. n - tərtibli $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin determinantı onun hər hansı sətir (sütun) elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəminə bərabərdir, yəni

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} \quad (2)$$

Teorem. Kvadrat n - tərtibli $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin bir sətir (sütun) elementlərinin başqa sətir (sütun) elementlərinin uyğun cəbr tamamlayıcılarına hasilləri cəmi sıfıra bərabərdir, yəni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k) \quad (3)$$

$$a_{1k}A_{l1} + a_{2k}A_{l2} + \dots + a_{nk}A_{ln} = 0 \quad (k \neq l) \quad (4)$$

Tutaq ki, P kommutativ halqa və ya meydandır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P üzərində matrisdir.

Teorem (Laplas). Tutaq ki, n - tərtibli A matrisində k ($1 \leq k \leq n-1$) sayda ixtiyari sətir ayrılıb. Onda A matrisinin $|A|$ determinantı bu sətirlərin elementlərindən düzəldilmiş bütün k tərtibli minorlarla onların uyğun cəbri tamamlayıcıları hasillərinin cəminə bərabərdir.

Fərz edək ki, $|A|$ determinantında k sayda sətir (sütun) ayrılıbmışdır. Bu sətir (sütun) elementlərindən düzəldilmiş bütün k tərtibli minorları $M_1, M_2, \dots, M_t$ ilə onların uyğun cəbri tamamlayıcılarını isə $A_1, A_2, \dots, A_t$ ilə işarə edək. Onda

$$|A| = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t \quad (5)$$

Qeyd edək ki, ayrılmış k sayda sətirlərdən cəmi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sayda k tərtibli M_i minorları düzəltmək olar.

Misal 1. Verilmiş

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

matrisində 1 - ci və 3 - cü sətirləri və 2 - ci və 4 - cü sütunları seçib,

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

minorunun tamamlayıcı M' minorunu və M^* cəbri tamamlayıcısını tapın.

Həlli. Tərifə əsasən alırıq.

$$M' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

və

$$M'' = (-1)^{(1+3)+(2+4)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Misal 2. Verilir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

matrisi a) birinci və üçüncü sətri və ikinci və dördüncü sütunu;
b) birinci və ikinci sətri, üçüncü və dördüncü sütunu seçib, M minorunu tapın:

Həlli. a) $M = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -31;$

b) $M = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$

Misal 3. Determinantı üçüncü sətri
($a = 4, b = 1, c = 3, d = 2$) və ikinci sütun
($m = 1, n = 2, b = 1, k = 4$) elementlərinə nəzərən ayırın,
elementlərin verilmiş qiymətlərində hər iki üsulla onu
hesablayın, nəticələri müqayisə edin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 & 0 \\ 6 & n & 4 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & k & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Həlli. Determinantı üçüncü sətir elementlərinə nəzərən ayıraq:

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ n & 4 & 1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} + b$$

$$\times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 6 & n & 1 \\ -2 & k & 1 \end{vmatrix} + d(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 6 & n & 4 \\ -2 & k & 3 \end{vmatrix}$$

Burada $a = 4$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 2$ və $m = 1$, $n = 2$,

$b = 1$, $k = 4$ qiymətlərini yerinə yazsaq alırıq:

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 3 - (-7) + 3 \cdot (-10) - 2(-8) = 12 + 7 - 30 + 16 = 5$$

İndi determinantı ikinci sütun elementlərinə nəzərən ayıraq: və burada $m = 1$, $n = 2$, $k = 4$ və $a = 4$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 2$ qiymətlərini yerinə yazıb, alırıq:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = m(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ a & c & d \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ n(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & c & d \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + b(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + k(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ a & c & d \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 32 - 22 + 7 - 12 = 5$$

Göründüyü kimi, hər iki üsulla alınan nəticələr eynidir.

814. Verilmiş matrisin

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

a) birinci və üçüncü sətirlərini, ikinci və dördüncü sütunlarını seçib

b) ikinci və dördüncü sətirlərini, birinci və üçüncü sütunlarını seçib, M minorunu düzəldin və qiymətini tapın.

$$\mathbf{815.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisində elementləri ikinci, dördüncü sətirlərdə, birinci, üçüncü sütunlarda yerləşən M minorunun tamamlayıcı minorunu tapın.

$$816. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

matrisində $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}$, minorunun cəbri tamamlayıcısını tapın.

$$817. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 8 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ matrisində}$$

a) $M = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ minorunun; b) 7 elementinin;

c) -6 elementinin cəbri tamamlayıcısını tapın.

818. a) Determinantı ikinci sətir elementlərinə nəzərən ayırmaqla hesablayın.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

b) Determinantı 3 - cü sütun elementlərinə nəzərən ayırmaqla hesablayın.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a & 5 \\ 1 & 1 & b & 2 \\ 2 & 1 & c & 2 \\ 1 & 1 & d & 4 \end{vmatrix}$$

c) λ parametrlinin hansı qiymətində $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & \lambda \end{vmatrix}$ determinantı

0-a bərabərdir.

d) λ parametrlinin hansı qiymətində $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

determinantı sıfırdan fərqlidir?

819-825 məsələlərində determinantları əlverişli sətir (sütun) elementlərinə nəzərən ayırmaq yolu ilə hesablayın.

819. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **820.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ **821.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

822. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **823.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **824.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$825. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Misal 3. Determinantı Laplas teoreminin tətbiqi ilə hesablayın.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Həlli: Determinantın birinci iki sətirini götürək və bu sətir elementlərindən bütün mümkün iki tərtibli minorları düzəldək:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

İndi də bu minorların uyğun cəbri tamamlayıcılarını yazaq:

$$A_1 = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad A_2 = (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_4 = (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A_5 = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_6 = (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Beləliklə, Laplas teoreminə görə

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 - 9 \cdot (-18) + 0 + 0 - (-2) \cdot (-3) + \\ + (-3) \cdot (6) = 54 + 162 - 6 - 18 = 192$$

olar.

Bu nəticəyə determinantı adi üsulla hesablamaqla da gəlmək olar.

Misal 4. Determinantı Laplas teoreminin köməkliyi ilə hesablayın.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Həlli: Verilən determinantın ikinci və dördüncü sətirlərini götürək. Laplas teoremindən istifadə edək. Burada

ikinci və dördüncü sətirlərdə duran on minordan yalnız üçü sıfırdan fərqlidir. Bunlar

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

minorlarıdır.

Bu sətirlərə nəzərən ayıraraq, tapırıq.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-18) - 2 \cdot 37 + 7 \cdot (-4) = -156 \end{aligned}$$

826-834 məsələlərində Laplas teoremindən istifadə edərək determinantları hesablayın:

Laplas teoremi n - tərtibli determinantın hesablanmasını aşağı tərtibli determinantların hesablanmasına gətirməyə imkan verir. Bu teoremdən o zaman istifadə etmək əlverişlidir ki, determinantda sıfıra bərabər olan minorlar olsun.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{826.} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \\ -9 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{827.} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$828. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$829. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ -5 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$830. \begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 & -6 \\ 3 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$831. \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$832. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$833. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$834. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

***n* tərтіbli determinantın iki tərтіbli determinatlardan istifadə etməklə hesablanması üsulu:**

Bu üsul *n* tərтіbli determinantı elementləri iki tərтіbli minorlar olan $(n-1)$ tərтіbli determinantlarla ifadə edən düsturların ardıcıl tətbiqindən ibarətdir. Verilmiş determinantda

birinci sütunun elementləri $a_{21} \neq 0, a_{31} \neq 0, \dots, a_{n-1} \neq 0$ olduqda bu düstur aşağıdakı şəkildə olur.

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n}
 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{21}a_{31}\dots a_{n-1,1}} \begin{vmatrix}
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}
 \end{vmatrix} \quad (1)$$

(1) düsturunu ardıcıl tətbiq edib, biz verilmiş n tərtibli determinantı iki tərtibli determinanta gətiririk. Beləliklə, n tərtibli determinantın hesablanması müəyyən sayda ikitərtibli determinantların hesablanmasına gətirilir.

Misal: Determinantı hesablayın. $\Delta =$

$$\begin{vmatrix}
 3 & 2 & 1 & 0 \\
 5 & 4 & 3 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 \\
 3 & 5 & 7 & 3
 \end{vmatrix}$$

Həlli: (1) düsturuna görə

$$\Delta = \frac{1}{5 \cdot 1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(1) düsturunu bir də tətbiq edib, alırıq.

$$\Delta = \frac{2}{5 \cdot (-4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{vmatrix} 15 & 15 \\ -39 & -15 \end{vmatrix} = -36$$

835- 845 məsələlərində determinantları (1) düsturundan istifadə edərək hesablayın:

$$835. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$836. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$837. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & -5 \\ 4 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$838. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$839. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$840. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$841. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$842. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$843. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \textbf{844.} \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & -15 & -7 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 7 & 11 & 1 \end{vmatrix} \\
 & \begin{array}{c} \textbf{845.} \end{array} & \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

§22. Tərs matris. Matris tənliklər

Tutaq ki, A n -tərtibli kvadrat matrisdir.

Tərif. Kvadrat n -tərtibli A matrisi üçün elə B matrisi varsa ki, $AB = BA = E$ bərabərliyi doğru olsun, onda belə B matrisinə A matrisinin tərsi deyilir. A matrisinin tərsi A^{-1} kimi işarə olunur. $AA^{-1} = E$, $A^{-1}A = E$ bərabərlikləri ödənilərsə A^{-1} matrisinə A matrisinin tərs matrisi deyilir.

Teorem. A matrisinin tərsi varsa, yeganədir.

Teorem (Tərs matrisin varlığı haqqında): A matrisinin onda və yalnız onda tərs var ki, A matrisi qeyri-məxsusi olsun. $A = \|\alpha_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) matrisinin tərsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \dots \dots \\ A_{1n}A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

düsturu ilə tapılır, burada A_{ij} A matrisinin α_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

A matrisinin tərsi elementar çevirmələrin köməkliyi ilə aşağıdakı kimi tapılır.

Teorem. Əgər sətirlərin hər hansı qeyri-məxsusi elementar çevirmələri kvadrat A matrisini vahid E matrisinə çevirirsə, onda A matrisi tərsi olandır və bu elementar çevirmələr E vahid matrisini A^{-1} matrisinə çevirir.

Bu teorem tərs matrisin tapılmasının belə bir qaydasını deməyə imkan verir. $n \times n$ ölçülü A matrisinə tərs matrisi tapmaq üçün, $n \times 2n$ ölçülü düzbucaqlı (A/E) matrisini sətirlərin elementar çevirmələrinin köməkliyi ilə (E/C) şəklinə gətirmək lazımdır, bu zaman alınan C matrisi A matrisinə tərs matrisdir.

846. Göstərin ki, tərs matrisin aşağıdakı xassələri doğrudur:

$$1. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$2. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$3. (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

$$4. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$5. (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$$

Misal. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ matrisi verilir. Ona tərs A^{-1}

matrisinin olub-olmadığını göstərin və əgər varsa onu tapın.

Həlli: A matrisinin determinanti

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Deməli, verilmiş matris qeyri-məxsusi (cırılşmayan) matrisdir

və A^{-1} var.

(1) düsturuna görə

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A_{ij} cəbri tamamlayıcılarını tapaq. Alırıq:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -32, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Onda } A^{-1} = -\begin{pmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

847. İsbat edin ki, cırlaşmayan iki matrisin hasili cırlaşmayandır.

848. İsbat edin ki, heç olmasa biri cırlaşan olan iki kvadrat matrisin hasili cırlaşan matrisdir.

849. Tutaq ki, AB - cırlaşan matrisdir. Həmişə hökm etmək olarmı ki, vurulan matrislərdən heç olmasa biri cırlaşan matrisdir?

850. λ - nın hansı qiymətlərində matris cırlaşandır?

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & \lambda \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ \lambda & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & \lambda & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

851-855 məsələlərində bərabərliklərdən doğru olanı və doğru olmayanı göstərin.

851. $(A^{-1})^T A^T BA(BA)^{-1} = E$

852. $(B^{-1})^T B^T A^2 B(AB)^{-1} = A$

853. $(5A^2 + 7E) = A^{-1}(5A^3 + 7A)$

854. $ABA^{-1} = E$

856. İsbat edin ki, A, B, C eyniölçülü kvadrat matrislər və $AB = E$, $AC = E$ - dirsə, onda $B = C$.

856. $AB = E$ bərabərliyi düzbucaqlı matrislər üçün ola bilərmi?

857. İsbat edin ki, kvadrat matrisi onda və yalnız onda sətirlərin, (sütunların) elementar çevirmələrin köməyiylə vahid matrisə gətirmək olar ki, bu matris cırlaşmayan olsun.

Misal. Elementar çevirmələrin köməkliyi ilə

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin A^{-1} tərs matrisini tapın.

Həlli: A matrisinin yanına sağdan E vahid matrisini yazıb genişlənməmiş

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

matrisini düzəldək və genişlənmiş matrisi sətirlər üzərində elementar çevirmələrin köməyiylə ilə $(E|A^{-1})$ matrisinə çevirək.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Axırıncı matrisdən verilmiş A matrisinə tərs

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini tapırıq:

Matrislərin tərs matrislərini elementar çevirmələrin köməkliyi ilə tapın:

$$858. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad 859. \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 860. A = -3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$861. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 862. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad 863. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$864. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 865. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 866. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$867. \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 868. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -12 \end{pmatrix} \quad 869. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tərs matrisi cəbri tamamlayıcıların köməkliyi ilə tapın

$$870. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad 871. \begin{pmatrix} 2 & 19 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 872. \begin{pmatrix} 2 & -13 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$873. \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 874. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 875. \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$876. \begin{pmatrix} x & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 877. \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 878. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$879. \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad 880. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

881. Verilmiş bərabərlikləri ödəyən A matrisi üçün tərs matrisi tapın:

$$1) A^2 - A = 0 \quad 2) A^2 - 7A + E = 0 \quad 3) A^2 + 3A + E = 0$$

$$4) A^3 + 4A^2 - A + E = 0 \quad 5) A^3 - 3A^2 + 2A - E = 0$$

882. Tutaq ki, $A^2 - A + E = 0$. İsbat edin ki, A matrisi cırlaşmayandır və A^{-1} hesablamaq üçün sadə üsul göstərin.

883. İsbat edin ki, $A^3 = 0$ olduqda $A + E$ və $A^2 + E - A$ matrisləri cırlaşmayandır və qarşılıqlı tərsdirlər.

884. Göstərin ki, A, B, C cırlaşmayan matrislədirsə, onda ABC və $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ matrisləri qarşılıqlı tərsdirlər.

885. İsbat edin ki, A və B matrisləri cırlaşmayan olduqda, $AB = BA$, $AB^{-1} = B^{-1}A$, $A^{-1}B = BA^{-1}$ bərabərlikləri öz aralarında eynigüclüdür.

Verilmiş A, B matrisləri və λ ədədi üçün $(AB)^{-1}$ və $(\lambda A)^{-1}$ matrislərini hesablayın.

$$886. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4$$

$$887. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 6$$

$$888. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 3$$

Matris tənliklər

A, B, C, D məlum, X məchul olmaqla eyni tərtibli kvadrat matrislər isə

$$1) AX = B, \quad 2) XA = B, \quad 3) A \times D = C$$

tənliklərinə **matris tənliklər** deyilir.

$AX = B$ və ya $XA = B$ matris tənliklərinin həlli ümumiyyətlə müxtəlifdir.

889. Göstərin ki, A - cırlaşmayan matris olduqda $AX = B$ və $XA = B$ tənliklərinin yeganə həlli var: $X = A^{-1}B$ və $X = BA^{-1}$. A - cırlaşmayan olduqda $AX = B$ tənliyinin həlli olması üçün A və B matrislərinin sətirlərinin sayı, $XA = B$ tənliyinin həlli olması üçün A və B matrislərinin sütunlarının sayı bərabər olması zəruridir.

890. Göstərin ki, $AX = O$ matris tənliyinin onda və yalnız onda sıfırdan fərqli var ki, kvadrat A matrisinin determinantı sıfıra bərabər olsun.

891. A, B cırlaşmayan n -tərtibli kvadrat matris olduqda $AXB = C$ tənliyini həll edin.

892. Tutaq ki, A, B, C cırlaşmayan n - tərtibli kvadrat matrislərdir. $AX^{-1}B = C$ tənliyindən həmin tərtibdən X kvadrat matrisini tapın.

893. Göstərin ki, iki tərtibli hər bir kvadrat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

matrisi $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$ tənliyinin həllidir.

Misal 1. Tənliyi ödəyən X matrisini tapın.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 17 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Həlli: Burada $|A| = 1 \neq 0$ və $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 17 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ -

cırlaşmayan matrisdir. Tapırıq ki,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ və } X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -1 & -14 & -14 \end{pmatrix}.$$

Misal 6. Matris tənliyi həll edin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

burada X - axtarılan 2 - tərtibli matrisdir.

Həlli: Burada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ - cırlaşan matrisdir. Bu halda

yuxarıdakı üsul yaramır və başqa üsuldan istifadə etmək lazım gəlir, bunu verilmiş tənliyin həlli misalında izah edək.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \quad \text{götürək.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ matrisi və } X \text{ matrislərini vurduqdan sonra}$$

alırıq:

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & y_1 + 3y_2 \\ 2x_1 + 6x_2 & 2y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

buradan

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &= 5 \\ 2y_1 + 6y_2 &= 10 \end{aligned} \tag{2}$$

(1) və (2) sistemləri birgədir və qeyri - müəyyəndir. (1) sisteminin $x_1 = 1 - 3x_2$ ümumi həllini və (2) sisteminin

$y_1 = 5 - 3y_2$ ümumi həllini tapırıq. $x_2 = c_1$, $y_2 = c_2$ qəbul edib, alırıq:

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 3c_1 & 5 - 3c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Matris tənlikləri həll edin:

894. $B^{-1}X(AB)^{-1} = A$ **895.** $4AX + 5X = A^{-1}$

896. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ **897.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

898. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$

899. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

900. $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$

901. $X \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

902. $X \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 11 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$903. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$904. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$905. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$906. X \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & -10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$907. \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$908. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$909. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

910 - 914 tənliklərindən X matrisini tapın.

$$\mathbf{910.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ olduqda } AX = B \text{ və}$$

$A^{-1}X^{-1} = B^{-1}$ tənliklərini həll edin.

$$\mathbf{911.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ olduqda } A^T X = B \text{ və}$$

$(A^T)^{-1}X^{-1} = B^{-1}$ tənliklərini həll edin.

$$\mathbf{912.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ və } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

olduqda $AX^{-1}B = C$ tənliyindən kvadrat X matrisini tapın.

$$\mathbf{913.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{914.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

915 - 918 tənliklərindən bütün X matrislərini tapın.

$$\mathbf{915.} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{916.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{917.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{918.} \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

§23. Matrisin ranqı və xassələri

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \text{-----} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in P^{m \times n}$$

Tərif. P meydanı üzərində n - ölçülü vektorlar kimi baxılan $A_1, A_2, \dots, A_m$ sətirlər sisteminin ranqına A -nın sətirlər ranqı, P meydanı üzərində m - ölçülü vektorlar kimi baxılan $A^1, A^2, \dots, A^n$ vektorlar sisteminin ranqına A -nın sütunlar ranqı deyilir.

Teorem. Matrisin sətirlər sisteminin ranqı onun sütunlar sisteminin ranqına bərabərdir.

A matrisinin ranqı $r(A)$ kimi işarə olunur.

Teorem. A matrisinin ranqı onun sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə bərabərdir.

Ranqın tərifindən çıxır ki:

1. $m \times n$ ölçülü matris üçün $0 \leq r \leq \min(m, n)$,
2. $r = 0$ onda və yalnız onda olar ki, matrisin bütün elementləri sıfır olsun.

3. n - tərtibli kvadrat A matrisi üçün $r = n$ onda və yalnız onda olar ki, matris cırlaşmayan olsun.

Tərif. Aşağıdakı çevirmələrə matrisin sətir(sütun) elementar çevirmələri deyilir.

1. Matrisin hər hansı sətirinin (sütununun) sıfırdan fərqli ixtiyari ədədə vurulması;

2. Matrisin hər hansı bir sətirinin (sütununun) ixtiyari ədədə vurulmasının digər sətirin (sütunun) üzərinə əlavə edilməsi;

3. Sıfır sətiri (sıfır sütunu) matrisə əlavə etmək və ya atmaq;

Tərif. A matrisinin pilləli şəkli onun elə şəklinə deyilir ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

(1) Matrisin sıfır sətirləri (əgər onlar varsa) sıfır olmayan bütün sətirlərdən aşağıda yerləşir.

(2) $\alpha_{1k_1}, \alpha_{2k_2}, \dots, \alpha_{rk_r}$ - matrisin sıfır olmayan sətirlərinin həlledici elementləridirsə, onda $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ olsun.

Matrisin rənginin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1. Verilmiş matrisdən hər hansı sətirini silməklə alınan matrisin rəngi verilmiş matrisin rənginə bərabərdir və ya onda bir vahid kiçikdir;

2. Verilmiş matrisə elementləri ixtiyari ədədlər olan sətri əlavə etdikdə alınan matrisin rəngi, verilmiş matrisin rənginə bərabərdir və ya onda bir vahid böyükdür;

3. Əgər matrisdən sıfır sətri silinərsə və ya ona əlavə olunarsa, onda matrisin rəngi dəyişməz;

4. Matrisin transponirəsinin rəngi matrisin rənginə bərabərdir.

919. Göstərin ki, cırılmayan ixtiyari matrisi sətrlərin (sütunların) elementar çevirmələrinin köməkliyi ilə vahid matrisə gətirmək olar.

920. Göstərin ki, cırılmayan ixtiyari matris ancaq sətrlərin elementar çevirmələrinin köməkliyi ilə vahid matrisdən alınə bilər.

921. Göstərin ki, verilmiş matrisdən elementar çevirmələrlə alınan matrisin rəngi verilmiş matrisin rənginə bərabərdir. (elementar çevirmələrə nəzərən matrisin rənginin invariantlığı)

922. Göstərin ki, A matrisi soldan və ya sağdan cırılmayan B matrisinə vurularsa, onda alınan matrisin rəngi A matrisinin rənginə bərabər olar, yəni əgər $\det B \neq 0$ olarsa, onda $r_{AB} = r_{BA} = r_A$ olar.

923-928 məsələlərində matrislərin rəngini elementar çevirmələrdən istifadə edərək tapın.

923. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ olduqda AA^T hasilinin;

924. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ olduqda AA^T və $A^T A$ hasilələrinin;

925. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ olduqda AA^T və $A^T A$ hasilələrinin;

926. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduqda AA^T və $A^T A$ hasilələrinin;

927. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ AA^T hasilələrinin;

928. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ AA^T hasilələrinin;

929 - 936 məsələlərində elementar çevirmələrdən istifadə edərək matrislərin rəngini tapın.

$$929. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad 930. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$931. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad 932. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 13 & 7 & 4 \\ 18 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$933. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 934. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -6 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$935. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 936. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

937 - 942 məsələlərində matrisin rəngini həmişəyləndirici (daxilində saxlayan) minorlar üsulu ilə həll edin:

Bu üsul aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem. A matrisinin bütün k tərtibli ($k < \min(m, n)$) minorları sıfırdırsa, onda onun $(k+1)$ tərtibli minorları da sıfırdır.

Misal. Matrisin ranqını tapın.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Həlli. A matrisinin elementlərinin içərisində sıfırdan fərqli olanı vardır. Məsələn, yuxarı sol küncdə duran element. Bu elementi haşıyələn iki tərtibli minorların içərisində də sıfırdan fərqlisi vardır ki, məsələn $M = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$M - i$ haşıyələyən minorların içərisində, yəni,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

minorların içərisində sıfırdan fərqli olanı yoxdur. Deməli, A matrisinin ranqı 2 - yə bərabərdir.

$$\mathbf{937.} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{938.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{939.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$940. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 941. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$942. \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

943 - 949 məsələlərində λ parametrindən asılı olaraq matrislərin rəngini hesablayın.

$$943. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & \lambda \\ 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad 944. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

$$945. \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad 946. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & \lambda & 8 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$947. \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad 948. \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 4 \\ 0 & \lambda - 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad 949. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

950. A matrisinin rəngi $r(A)$, B -matrisinin rəngi $r(B)$ olduqda A və B matrislərindən düzəldilmiş $C = A \pm B$ matrisinin rəngi nəyə bərabər olar?

951. A və B matrisinin rəngləri uyğun olaraq $r(A)$ və $r(B)$ olduqda $C = A \cdot B$ matrisinin rəngi nəyə bərabər olar?

952. A matrisinin rəngi $r(A)$ -ya bərabər olarsa, $C = A^T A$ və $D = AA^T$ matrislərinin rəngi nəyə bərabər olar?

953. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ -dir. A və B matrislərinin rənglərini təyin edin.

VI FƏSİL

XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§ 24. Xətti tənliklər sistemi

$\mathcal{P}$ hər hansı xətti tənliklər sistemi skalyarlar meydanı

(xüsusi halda, $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ və ya $\mathcal{P} = C$ ola bilər), m, n ixtiyari

qeyd olunmuş natural ədədlər, $\alpha_{ij}, \beta_i \in P$, $\begin{pmatrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix}$

olduqda

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2\end{aligned}\quad (1)$$

sistemi əmsalları $\mathcal{P}$ meydanından olan n məchullu m sayda xətti tənliklər sistemi adlanır.

(1) sistemi qısa şəkildə

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + + \alpha_{in}x_n = \beta_i, \quad i = 1, ..., m$$

şəklində yazılır .

Tərif: Əgər $\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \dots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i$,

$i=1,...,m$, $\xi_i \in P$ olarsa, onda $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektoru (1) tənliklər sisteminin həlli adlanır.

Tərif:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n &= 0 \\ \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

sisteminə (1) sisteminə uyğun bircins xətti tənliklər sistemi deyilir.

Xətti tənliklər sisteminin həlli varsa onda sistemə birgə sistem, həlli yoxsa, birgə olmayan sistem deyilir.

Tərif: Xətti tənliklər sisteminin həlli yeganədirsə, onda sistemə müəyyən, birdən çox həlli varsa sistemə qeyri müəyyən sistem deyilir.

Xətti tənliklər sisteminin tam öyrənilməsi aşağıdakı məsələlərin həllindən ibarətdir.

1. Verilmiş sistemin birgə olub olmadığını müəyyən etmək.
2. Sistem birgə olduqda onun müəyyən və ya qeyri müəyyən olub olmadığını müəyyən etmək.
3. Sistem müəyyən olduqda onun yeganə həllini tapmaq.
4. Sistem qeyri müəyyən olduqda onun bütün həllərini təsvir etmək (ümumi həllini tapmaq).

Tərif. Əgər iki xətti tənliklər sisteminin hər birinin həlli digərinin də həllidirsə, onda bu xətti tənliklər sistemləri eynigüclü adlanır.

Tərif. Aşağıdakı çevirmələr xətti tənliklər sisteminin elementar çevirmələri adlanır:

α) Sistemin hər hansı tənliyinin hər iki tərəfinin sıfırdan fərqli skalyara vurulması;

β) Sistemin hər hansı tənliyinin ixtiyarı skalyara vurulub digər tənliyinin üzərinə əlavə edilməsi;

γ) Sistemə bütün əmsalları və sərbəst həddi sıfır olan tənliyin əlavə edilməsi və ya sistemdən atılması.

Teorem. Əgər xətti tənliklər sistemi digər xətti tənliklər sistemindən elementar çevirmələr nəticəsində alınmışsa, onda bu iki sistem eyni güclüdür.

Xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün ən çox yayılmış üsul Qaus üsuludur. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, məchulları ardıcıl yox etməklə verilmiş sistem pilləli şəkllə gətirilir və həlli tapılır. Qaus üsulu ilə xətti tənliklər sistemini həll etdikdə aşağıdakı hallar ola bilər:

- 1) Sistemin pilləli şəkli üçbucaq formasındadır. Bu halda sistemin yeganə həlli var;
- 2) Sistemin pilləli şəkli trapesiya formasındadır. Bu halda sistemin sonsuz sayda həlli var;
- 3) Sistemin pilləli şəkllində $0 = c$ ($c \neq 0$) tənliyi iştirak edir. Bu halda sistemin həlli yoxdur.

Misal.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -4 \\2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\-3x_1 - 2x_2 - 10x_3 + 6x_4 &= 15 \\4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= -3\end{aligned}$$

xətti tənliklər sistemini Qaus üsulu ilə həll etməli.

Həlli: Əvvəlcə sistemin ikinci, üçüncü, dördüncü tənliklərindən x_1 məchulunu yox edək. Bunun üçün birinci tənliyi -2-yə vurub, ikinci tənliyin üzərinə, 3-ə vurub üçüncü tənliyin üzərinə, -4-ə vurub dördüncü tənliyin üzərinə əlavə edək. Onda verilmiş sistemlə eynigüclü olan xətti tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -4 \\-5x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 16 \\7x_2 - 13x_3 + 18x_4 &= 3 \\-9x_2 + 11x_3 - 12x_4 &= 13\end{aligned}$$

Bu sistemin üçüncü və dördüncü tənliklərindən x_2 məchulunu yox edək. Bunun üçün ikinci tənliyi $\frac{7}{5}$ -yə vurub üçüncü tənliyin üzərinə, $-\frac{9}{5}$ -ə vurub, dördüncü tənliyin üzərinə əlavə edək.

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -4 \\
 -5x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 16 \\
 -86x_3 + 41x_4 &= 127 \\
 82x_3 + 3x_4 &= -79
 \end{aligned}$$

Sistemin dördüncü tənliyindən x_3 məchulunu yox edək. Bunun üçün üçüncü tənliyi $\frac{41}{43}$ ədədinə vurub dördüncü tənliyin üzərinə əlavə edək.

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -4 \\
 -5x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 16 \\
 -86x_3 + 41x_4 &= 127 \\
 x_4 &= 1
 \end{aligned}$$

$x_4 = 1$ qiymətini üçüncü tənlikdə yerinə yazsaq $x_3 = -1$ tapırıq. Sonra $x_4 = 1, x_3 = -1$, qiymətlərini ikinci tənlikdə yerinə yazsaq $x_2 = -4$ alarıq. Nəhayət, $x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1$ qiymətlərini birinci tənlikdə yerinə yazıb $x_1 = 3$ tapırıq. Beləliklə verilmiş xətti tənliklər sisteminin yeganə

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -4, -1, 1)$$

həlli tapılır.

Xətti tənliklər sisteminin matris formasında yazılışından istifadə edərək sistemin Qaus üsulu ilə həllini tapmağı daha da sadələşdirmək olar. Bu halda əsas matrisi gətirilmiş formada

yazmaqla sistemi həll etmək olar. Məsələn, baxılan misalın həllini aşağıdakı kimi aparmaq olar:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & -10 & 6 & 15 \\ 4 & 3 & 7 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} -2, 3, -4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & 16 \\ 0 & 7 & -13 & 18 & 3 \\ 0 & -9 & 11 & -12 & 13 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \frac{7}{5}, -\frac{5}{9} \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & -86 & 41 & 127 \\ 0 & 0 & 82 & 3 & -79 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \frac{41}{43} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & -86 & 41 & 127 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

4-cü sətri -41, 7, -4 ədədlərinə vurub uyğun olaraq 3-cü, 2-ci, 1-ci sətrilərin üzərinə əlavə edək:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

3-cü sətri 3, 1 ədədlərinə vurub, uyğun olaraq 2-ci və 1-ci sətrin üzərinə əlavə edək:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nəhayət 2-ci sətri -3 ədədinə vurub 1-ci sətrin üzərinə əlavə edək:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Beləliklə, sistemin (3, -4, -1, 1) həlli tapılır.

Tərif: (1) sistemində məchulların əmsallarından düzəldilmiş

$$A = \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right)$$

matrisinə sistemin əsas matrisi, A matrisinə sərbəst hədlər sütununu əlavə etməklə alınan

$$B = \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \beta_m \end{array} \right)$$

matrisinə sistemin genişlənmiş matrisi deyilir.

Xətti tənliklər sisteminin birgəliyi məsələsi aşağıdakı teoremlə həll olunur.

Teorem. (Kroneker-Kapelli). Xətti tənliklər sistemi onda və yalnız onda birgə olar ki, sistemin əsas matrisinin rəngi onun genişlənmiş matrisinin rənginə bərabər olsun.

Misal. Xətti tənliklər sisteminin birgəliyini yoxlayın, ümumi həllini və bir xüsusi həllini tapın:

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$$

$$7x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$$

Birinci tənliyi -6 ədədinə vurub ikinci tənliyin üzərinə, -7 ədədinə vurub 3-cü tənliyin üzərinə əlavə etsək, verilmiş sistemə ekvivalent sistemi alarıq:

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2$$

$$-15x_2 + 34x_3 - 17x_4 = -8$$

Alınmış sistemdən görünür ki, $\text{rang}A = \text{rang}B$. Onda sistem

birgədir. Buradan, məsələn, $x_1 = \frac{16 + 7x_3 + 79x_4}{15}$, sistemin $x_2 = \frac{8 + 34x_3 - 17x_4}{15}$

ümumi həlli, $\left(-\frac{56}{15}, \frac{59}{15}, 1, -1\right)$ hər hansı xüsusi həlli olur.

İndi n məchullu n sayda xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \vdots &\vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n &= \beta_n\end{aligned}\tag{3}$$

Burada

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

işarələrini qəbul etsək, (3) sistemini

$$AX=b \tag{4}$$

matris tənliyi şəklində yazmaq olar.

Teorem. Əgər $|A| \neq 0$ olarsa onda (4) tənliyinin yeganə həlli var və bu həll

$$X = A^{-1}b \quad (5)$$

şəklindədir.

Tərs matrisin düsturundan istifadə etməklə (5) bərabərliyindən $x_1, x_2, \dots, x_n$ məchullarını

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda} \quad (6)$$

şəklində tapmaq olar. Burada $\Delta = |A|$, $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ isə $|A|$ -da i -ci sütunun sərbəst hədlər sütunu ilə əvəz edilməsindən alınan determinantdır. Beləliklə aşağıdakı teorem alınır.

Teorem. (Kramer): n -məchullu n sayda xətti tənliklər sisteminin əmsallarından düzəldilmiş matrisin determinantı sıfırdan fərqlidirsə, onda sistemin yeganə həlli var və həmin həll (6) düsturları vasitəsilə tapıla bilər.

(6) düsturları Kramer düsturları adlanır.

Misal. Kramer qaydası ilə həll edin.

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10$$

$$5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 8$$

Həlli:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -7 & 14 & 0 \\ -7 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 14 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = 28$$

$\Delta \neq 0$ olduğu üçün sistemi Kramer qaydası ilə həll etmək olar.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 10 & -1 & 5 \\ 8 & -8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 14 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 56 \cdot$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & 0 \\ -7 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = 28.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 10 \\ 5 & -8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -7 & 14 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -7 & 14 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{56}{28} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{28} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{28} = 1$$

Bu misalın həllini (5) düsturuna əsasən də tapmaq olar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 34 & 10 & -14 \\ 7 & 7 & -7 \\ -19 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 34 & 10 & -14 \\ 7 & 7 & -7 \\ -19 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 56 \\ 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

Bircins olmayan birgə sistemin onda və yalnız onda yeganə həlli varki, sistemin əsas matrisinin rəngi məchulların sayına bərabər olsun.

Bircins olmayan birgə sistemin onda və yalnız onda sonsuz sayda həlli varki, sistemin əsas matrisinin rəngi məchulların sayından kiçik olsun.

Xətti bircins tənliklər sistemi həmişə birgədir, çünki heç olmazsa bir $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ kimi sıfır (trivial) həlli vardır.

Teorem: Xətti bircins tənliklər sisteminin onda və yalnız onda sıfırdan fərqli həlli var ki, məchulların əmsallarından düzəldilmiş matrisin rəngi məchulların sayından kiçik olsun.

Teorem: n məchullu n sayda xətti bircins tənliklər sisteminin onda və yalnız onda sıfırdan fərqli həlli var ki, məchulların əmsallarından düzəldilmiş determinant sıfıra bərabər olsun.

n məchullu xətti bircins tənliklər sisteminin həlləri çoxluğu $\mathcal{P}^n$ hesabı vektorlar fəzasının xətti altfəzasıdır. Bu altfəzanın bazisinə verilmiş bircins sistemin fundamental həllər sistemi deyilir. Beləliklə,

Tərif: Bircins xətti tənliklər sisteminin fundamental həllər sistemi bircins sistemin xətti asılı olmayan ℓ ə həllər sisteminə deyilir ki, bircins sistemin ixtiyari həlli bu həllər vasitəsilə xətti ifadə olunsun.

Teorem: Bircins xətti tənliklər sisteminin əmsallarından düzəldilmiş matrisin rəngi r məchulların sayı n -dən kiçik olarsa, onda sistemin fundamental həllər sistemi var və bu

fundamental sistemə daxil olan həllərin sayı $n-r$ ədədinə bərabərdir. Sistemin fundamental həllər sistemi varsa belə sistemlərin sayı sonsuzdur və ixtiyarı iki fundamental sistemə daxil olan həllərin sayı eynidir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, bircins olmayan sistemin hər hansı həlli ilə uyğun bircins sistemin bütün həlləri çoxluğunun cəmi bircins olmayan sistemin bütün həllərini verir, yəni a_0 bircins olmayan sistemin hər hansı həlli, H - bircins olmayan sistemin bütün həlləri çoxluğu, L - bircins sistemin bütün həlləri çoxluğu olduqda $H = a_0 + L$ bərabərliyi doğrudur. Beləliklə, bircins olmayan xətti tənliklər sisteminin həlləri çoxluğu sürüşmə vektoru a_0 olan $\mathcal{L}$ istiqamətli xətti çoxobrazlı təşkil edir.

Misal:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0$$

$$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0$$

sisteminin ümumi həllini və fundamental həllər sistemini tapmalı

Həlli: Sistemin əsas matrisini yazıb rəqəmini hesablayaq.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 24 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3, -4, -3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3, 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deməli, $r = 2, n = 4$ olduğu üçün fundamental sistemə daxil olan həllərin sayı $n - r = 2$ olur. x_3 və x_4 -ü sərbəst məchullar qəbul etsək, sistemin ümumi həllini taparıq:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -4x_3 + 3x_4 & \Rightarrow & x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 &= -6x_3 + 5x_4 & & x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{aligned}$$

Ümumi həll $(8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4)$, x_3, x_4 sərbəst məchullardır.

Fundamental həllər sistemini təyin etmək üçün x_3, x_4 sərbəst məchullarına elə qiymətlər verək ki, bu qiymətlərdən ibarət minor sıfırdan fərqli olsun. Məsələn hər hansı fundamental həllər sistemi aşağıdakı cədvəl vasitəsilə tapıla bilər.

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0

-7	5	0	1
----	---	---	---

Yəni hər hansı fundamental həllər sistemi $(8, -6, 1, 0), (-7, 5, 0, 1)$ həllərindən ibarətdir, sistemin ümumi həllini $c_1(8, -6, 1, 0) + c_2(-7, 5, 0, 1)$ şəklində göstərmək olar.

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$

Misal. $9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$

$$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7$$

Xətti tənliklər sisteminin həlləri çoxluğunun çoxobrazlısını tapmalı.

Həlli. Verilmiş sistemi və ona uyğun bircins sistemi Qaus üsulu ilə həll edək:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & -11 & 4 & -17 & 7 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 18 & 45 \\ 0 & 0 & 42 & 36 & 90 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 18 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{array} \right).$$

Buradan alınır ki, verilmiş sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 5 \\ 7x_3 + 6x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Sistemi ilə eyni güclüdür. Bu sistemin ümumi həlli

$$x_1 = \frac{1}{7}(8x_4 - 6), \quad x_2 = \frac{1}{7}(-13x_4 + 1), \quad x_3 = \frac{1}{7}(-6x_4 + 15), \quad x_4 -$$

sərbəst məchuldur. Hər hansı xüsusi həlli isə $\left(\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{9}{7}, 1\right)$.

Uyğun bircins sistemin ümumi həlli

$$x_1 = \frac{8}{7}x_4, \quad x_2 = -\frac{13}{7}x_4, \quad x_3 = -\frac{6}{7}x_4, \quad x_4 - \text{sərbəst məchuldur.}$$

$x_4 = 7c$ qəbul edək. Beləliklə, verilmiş xətti tənliklər

$$\text{sisteminin ümumi həlli } x = \left(\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{9}{7}, 1\right) + c(8, -13, -6, 7)$$

çəklində olacaq, burada c – ixtiyarı sabitdir. Başqa sözlə

verilmiş xətti tənliklər sisteminin həlləri çoxluğu $\mathcal{L}$

$$= \{c(8, -13, -6, 7)\} \quad \text{xətti altfəzasını} \quad a_0 = \left(\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{9}{7}, 1\right)$$

vektoru üzrə paralel sürüşdürməklə alınan xətti çoxobrazlısıdır,

$$\text{yəni} \quad \left(\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{9}{7}, 1\right) + L(8, -13, -6, 7) \quad \text{şəklində xətti}$$

çoxobrazlıdır.

Xətti tənliklər sisteminin müəyyən, qeyri-müəyyən və ya birgə olmadığını göstərin.

$$\begin{aligned} 954. \quad & 6x_1 + 9x_2 = 6 \\ & 10x_1 + 15x_2 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 955. \quad & 3x_1 + 2x_2 = 2 \\ & 9x_1 + 6x_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 956. \quad & ax + 4y = 2 \\ & 9x + ay = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 957. \quad & ax + by = ad \\ & bx + cy = bd \end{aligned}$$

$$958. \quad ax + by = c$$

$$\begin{aligned} 959. \quad & x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \beta \\ & x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 960. \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 961. \quad & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 962. \quad & 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4 \\ & 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 963. \quad & x_1 + 2x_2 = 9 \\ & x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_3 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 964. \quad & \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0 \\ & -2\frac{y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0 \\ & \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 965. \quad & 2x - 3y + z = 2 \\ & 3x - 5y + 6z = 5 \\ & 5x - 8y + 7z = 7 \end{aligned}$$

§ 25. Xətti tənliklər sistemini Qaus üsulu (məchulların ardıcıl aradan çıxarılması üsulu) ilə həll edin.

- $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$
966. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$
 $5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 8$
- $x_2 + x_3 = 1$
967. $x_1 + x_3 = 1$
 $x_1 + x_2 = 1$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$
968. $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3$
 $7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 6$
- $2x_1 + 3x_3 = 3$
969. $7x_1 + x_2 + 6x_3 = 2$
 $5x_1 + x_2 + 3x_3 = -1$
- $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$
970. $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7$
 $-x_1 + x_3 + 7x_4 = -5$
 $5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1$
- $2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1$
971. $-2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3$
 $-2x_1 + 7x_3 - 9x_4 = -7$
 $-4x_1 + x_2 + 15x_3 - 22x_4 = -16$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$
 $x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2$
972. $x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4$
 $3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12$
 $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2$$

$$973. \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -5$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$974. \quad 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 9$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = -4$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4$$

$$975. \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 - 4x_2 - 11x_3 + 3x_4 = -12$$

$$976. \quad 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 1$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6$$

$$5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$

$$977. \quad -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$$

$$x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1$$

$$3x_1 + 11x_2 + x_3 + 4x_4 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$

$$\mathbf{978.} \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 + 7x_3 - 9x_4 = -7$$

$$\mathbf{979.} \quad 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -1$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -4$$

$$\mathbf{980.} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -13$$

$$12x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5$$

$$35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1$$

$$\mathbf{981.} \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 3$$

$$2x_1 + 8x_2 + 10x_3 - 7x_4 = 9$$

$$3x_1 - 9x_2 - 3x_3 - x_4 = 1$$

$$\mathbf{982.} \quad 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 2$$

$$4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 = -1$$

$$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1$$

$$983. \quad 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 1$$

$$4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -1$$

$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -3$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2$$

$$984. \quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 8$$

$$7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 12$$

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$$

$$985. \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3$$

$$x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3$$

$$7x_1 + 11x_2 - 4x_3 - 15x_4 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$986. \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 8$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$987. \quad 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 6$$

$$988. \quad 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -10$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3$$

$$989. \quad 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4$$

$$10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 10x_4 = -4$$

$$990. \quad 3x_1 - 8x_2 - 14x_3 + 30x_4 = -9$$

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -6$$

$$x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 22$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 1$$

$$991. \quad x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 12x_4 + 7x_5 = -2$$

$$x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 6$$

$$992. \quad 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 18x_5 = 3$$

$$2x_1 + 3x_3 - x_4 - 4x_5 = -6$$

$$2x_2 + 8x_3 + 24x_4 + 14x_5 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 20x_4 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 13$$

$$993. \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + x_5 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 10x_5 = 18$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 10 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 - 21 = 0$$

$$994. \quad 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 - 33 = 0$$

$$2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 - 16 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 - 7 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 3$$

$$995. \quad 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -2$$

$$x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -13$$

$$7x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1$$

$$8x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$

$$996. \quad 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 2$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 1$$

$$8x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$$

$$997. \quad x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5 = 7$$

$$x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 29x_4 + 13x_5 = 1$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$$

$$-3x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$$

$$998. \quad 6x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -2$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -9$$

$$2x_1 + 3x_3 - x_4 - 4x_5 + 10 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 = 0$$

$$999. \quad x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 = 0$$

$$8x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 13x_4 + 8x_5 - 56 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 9x_5 - 28 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2$$

$$1000. \quad 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17$$

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7$$

$$2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57$$

Xətti tənliklər sistemini birgəliyini yoxlayın. Ümumi həllini və bir xüsusi həllini tapın.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

1001. $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

1002. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$

$$4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 1$$

$$2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

1003. $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = -3$$

1004. $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -4$

$$12x_1 - 11x_2 - 8x_3 - 3x_4 = 5$$

$$-4x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5$$

$$15x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 18x_4 = -5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1$$

$$1005. \quad 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = -5$$

$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8$$

$$8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4$$

$$1006. \quad -7x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 13$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 21$$

$$13x_1 + 9x_3 - 9x_4 + 5x_5 = -20$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3$$

$$1007. \quad 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$3x_1 - 7x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$1008. \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$1009. \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$$

$$1010. \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$$

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 - 16x_4 = -5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$

$$1011. \quad -7x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 = -7$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$

$$13x_1 - x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 8$$

$$x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 13x_4 = -8$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\
 1012. \quad & 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3 \\
 & 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16 \\
 & 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17 \\
 & 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -6 \\
 1013. \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\
 & x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -7 \\
 & 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -10 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 5 \\
 1014. \quad & 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 - 2x_5 = 12 \\
 & 9x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 17x_4 - 4x_5 = 22 \\
 & -x_1 + x_3 - x_4 = -2 \\
 & -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = -7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -13 \\
 1015. \quad & 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 21 \\
 & 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 12 \\
 & 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 29 \\
 & 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 130
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 1 \\
 \mathbf{1016.} \quad &5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -2 \\
 &x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 1 \\
 &7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\
 \mathbf{1017.} \quad &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7 \\
 &x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5 = 1 \\
 &x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -5 \\
 &2x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 = -6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\
 \mathbf{1018.} \quad &8x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\
 &4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 1 \\
 &8x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = -1 \\
 &4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\
 &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\
 \mathbf{1019.} \quad &x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\
 &x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5
 \end{aligned}$$

λ - parametrinin hansı qiymətində sistemin həlli var.

- $$\lambda x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2$$
- 1020.** $\lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2$
 $3x_1 + \lambda x_2 + 7x_3 = 1$
- $$\lambda x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$
- 1022.** $\lambda x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1$
 $\lambda x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 7$
- $$x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3$$
- 1024.** $x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2$
 $(\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda$
- $$x_1 + x_2 = 1$$
- 1025.** $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$
 $-x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1$
- $$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1$$
- 1021.** $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$
 $-x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1$
- $$x_1 + x_2 + (\lambda + 2)x_3 = -\lambda^2$$
- 1023.** $x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$
 $x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$
- $$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
- 1026.** $x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$
- $$x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^2$$
- 1027.** $x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda$
 $(\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1$
- $$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$$
- 1028.** $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$
 $4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4$
 $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\
 1029. \quad &2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\
 &6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\
 &\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\
 1030. \quad &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\
 &6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\
 &8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 1031. \quad &x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 &x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\
 &x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 2 \\
 1032. \quad &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 &x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
 &x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 1033. \quad &2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = \lambda \\
 &4x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 = \lambda^2 \\
 &8x_1 - 8x_2 - x_3 + 27x_4 = \lambda^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 = 15 \\
 &5x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 20x_4 = 15 \\
 \mathbf{1034.} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\
 &15x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 75x_4 = 9\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\
 \mathbf{1035.} \quad &6x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2 \\
 &6x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\
 &3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 \mathbf{1036.} \quad &2x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 &2x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + 3x_4 = 1 \\
 &x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\
 \mathbf{1037.} \quad &4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\
 &\quad - 2x_2 - 7x_3 - 19x_4 = 7 \\
 &7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda
 \end{aligned}$$

1038-1050. Sistemin əsas matrisini gətirilmiş şəkildə yazmaqla sistemin həllini tapın.

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13$$

1038. $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 18$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11$$

$$x_1 + 5x_2 + 25x_3 = 1$$

1040. $x_1 + 7x_2 + 49x_3 = 15$

$$x_1 + 8x_2 + 64x_3 = 25$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3$$

$$2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7$$

1041. $x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2$

$$7x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 29$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 1$$

1042. $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -5$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -7$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = -9$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 10$$

1043. $3x_2 + x_3 - 4x_4 = -2$

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 7$$

$$-x_1 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

1039. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$$

$$\mathbf{1044.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = -2$$

$$3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 11x_4 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$\mathbf{1045.} \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -7$$

$$x_1 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$\mathbf{1046.} \quad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5$$

$$5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 = 15$$

$$\mathbf{1047.} \quad 10x_1 + 22x_2 + 16x_3 + 39x_4 = 25$$

$$15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40$$

$$5x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 19x_4 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10$$

$$1048. \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8$$

$$1049. \quad 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3$$

$$24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28$$

$$1050. \quad 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43$$

$$48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58$$

$$60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69$$

§26. Bircins xətti tənliklər sistemi.

Aşağıdakı bircins xətti tənliklər sistemlərindən hansının sıfırdan fərqli həlli var?

$$1051. \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$1052. \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$

$$1053. \quad 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 8x_3 = 0$$

$$ax_2 = 0$$

$$1055. \quad bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$$

$$b \neq 0, \quad d \neq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$1054. \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0$$

$$3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$1056. \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$1057. \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$1058. \quad 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$1059. \quad -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 8x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$1060. \quad 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0$$

Xətti bircins tənliklər sisteminin $\mathcal{U}$ - həllər fəzasının

ölçüsünü tapın.

1061.
$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 &= 0 \\x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

1062.
$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \\-5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

1063.
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0 \\4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

1064.
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 &= 0\end{aligned}$$

1065.
$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 12x_4 &= 0 \\3x_1 + x_2 + 8x_3 - 7x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \\
 \mathbf{1066.} \quad &3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\
 &5x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\
 \mathbf{1067.} \quad &4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\
 &2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\
 \mathbf{1068.} \quad &x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\
 &5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0 \\
 &x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0
 \end{aligned}$$

Bircins x tti t nlikl r sisteminin fundamental h ll r sistemini tapin.

$$\begin{aligned}
 &3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\
 \mathbf{1069.} \quad &-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\
 &6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\
 &5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\
 \mathbf{1070.} \quad &-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\
 &4x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\
 \mathbf{1071.} \quad &3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\
 &4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\
 &2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\
 \mathbf{1072.} \quad &6x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 0 \\
 &8x_1 - 4x_2 + 20x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

$$1073. \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0$$

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$1074. \quad 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$1075. \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$1076. \quad -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-19x_1 + 24x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$1077. \quad 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$1078. \quad 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$1079. \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$1080. \quad 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$1081. \quad -x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 - 11x_4 = 0$$

$$1082. \quad 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 25x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 18x_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\
 1083. \quad & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\
 & 5x_1 + 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\
 & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\
 1084. \quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 0 \\
 1085. \quad & 4x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 0 \\
 & 6x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 0 \\
 & 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\
 1086. \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 0 \\
 & 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \\
 & 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$-x_1 + x_3 + \quad + x_6 = 0$$

$$x_2 - x_4 + x_5 = 0$$

$$\mathbf{1087.} \quad -x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$\mathbf{1088.} \quad -4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 6x_5 = 0$$

$$5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$-3x_1 + 7x_2 - x_3 + 8x_4 - 10x_5 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0$$

$$\mathbf{1089.} \quad 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$\mathbf{1090.} \quad 2x_1 + x_2 \quad - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$-2x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0$$

$$6x_1 - x_2 + 2x_3 \quad - 7x_5 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$-6x_1 + 9x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 0$$

$$5x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 - 6x_5 = 0$$

$$1091. \quad 3x_1 + 2x_2 - 9x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$$

$$11x_1 + 13x_2 - 13x_3 + 13x_5 = 0$$

$$11x_1 + 9x_2 - 37x_3 - x_4 + 17x_5 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 0$$

$$1092. \quad -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 6x_5 = 0$$

$$5x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 0$$

$$7x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0$$

$$8x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 11x_4 + x_5 = 0$$

$$a_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$$

$$1093. \quad a_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$$

$$a_3 = (0, 0, 1, -1, 0)$$

$$a_4 = (1, -2, 3, -2, 0)$$

vektorları

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0$$

tənliklər sistemi üçün fundamental həllər sistemi təşkil edirmi?

1094. $a_1 = (30, -24, 43, -50, -5)$
 $a_2 = (9, -15, 8, 5, 2)$ vektorları
 $a_3 = (4, 2, 9, -20, -3)$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0$$

$$5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0$$

tənliklər sistemi üçün fundamental həllər sistemi təşkil edirmi?

1095. $b_1 = (4, 2, 9, -20, -3)$
 $b_2 = (1, -11, 2, 13, 4)$ vektorları
 $b_3 = (9, -15, 8, 5, 2)$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0$$

$$5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0$$

tənliklər sistemi üçün fundamental həllər sistemi təşkil edirmi?

1096. $a_1 = (0, -2, 1, 0, 3)$ vektorları
 $a_2 = (0, -3, 0, 1, 5)$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 0$$

$$6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 10x_4 + x_5 = 0$$

tənliklər sistemi üçün fundamental həllər sistemi təşkil edirmi?

1097. $a_1 = (4, -1, 0, 2, 0)$ vektorları
 $a_2 = (10, 3, 0, 0, 2)$

$$x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0$$

$$-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 19x_5 = 0$$

tənliklər sistemi üçün fundamental həllər sistemi təşkil edirmi?

Bircins xətti tənliklər sisteminin ümumi həllini elə tapın ki, həlldəki məchullar tam əmsallı parametrlərin xətti kombinasiyası şəklində göstərilsin.

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

1098. $4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0$

$$6x_1 - 11x_2 - 4x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0$$

$$1099. \quad 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0$$

$$1100. \quad 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0$$

$$6x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0$$

$$1101. \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0$$

$$6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$1102. \quad -x_1 + 3x_2 + 7x_4 - 4x_5 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-3x_1 + 7x_2 - x_3 + 8x_4 - 10x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$1103. \quad 2x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$-2x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0$$

$$6x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_5 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\
 1104. \quad &6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\
 &9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\
 &3x_1 + 2x_2 \quad \quad + 4x_4 + 8x_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\
 1105. \quad &3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \\
 &3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\
 1106. \quad &4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\
 &12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
 1107. \quad &5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\
 &x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\
 &4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0
 \end{aligned}$$

§27. Bircins olmayan xətti tənliklər sisteminin həllər çoxluğunun xətti çoxobrazlı şəklində göstərilməsi.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$1108. \quad 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3$$

$$3x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$

$$1109. \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$

$$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$

$$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7$$

$$x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$

$$1110. \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$7x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 13$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 9$$

$$1111. \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$-x_1 + 3x_2 - 11x_3 + 5x_4 = 22$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$6x_1 + 11x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

$$1112. \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$

$$1113. \quad 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5$$

$$1114. \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$1115. \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1$$

$$1116. \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\
 1117. \quad & 2x_1 + \quad 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6 \\
 & 5x_1 + 7x_2 \quad + 6x_4 + 4x_5 = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\
 1118. \quad & 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 15 \\
 & 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\
 1119. \quad & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\
 1120. \quad & \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
 & x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 1 \\
 & \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\
 1121. \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 + x_5 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 1122. & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{array} \quad . \quad 1123. \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 = -4 \end{array}
 \end{array}$$

$$1124. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 1125. \begin{array}{l} 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 16x_2 + 11x_3 + x_4 = 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3 \\ 1126. \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ -2x_1 - x_2 \quad \quad + x_4 = 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \quad - 2x_5 = 2 \\ 1127. \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \quad \quad = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 8x_5 = -4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 9 \\
 \mathbf{1128.} \quad & 2x_1 + x_2 \quad \quad + x_4 + x_5 = 10 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 19 \\
 & x_1 \quad \quad - 3x_3 + 3x_4 \quad \quad = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\
 \mathbf{1129.} \quad & 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\
 & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1
 \end{aligned}$$

§ 28. Xətti tənliklər sisteminin Kramer qaydası ilə həlli.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1130.} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 7 \\
 & 5x_1 + 8x_2 = 14 \\
 \mathbf{1131.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1132.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\
 \mathbf{1133.} \quad & 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\
 \mathbf{1134.} \quad & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -2 \\
 \mathbf{1135.} \quad &-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1 \\
 &2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -12 \\
 &4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 5 \\
 \mathbf{1136.} \quad &3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\
 &4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 7x_4 = -4 \\
 &2x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 4x_4 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\
 \mathbf{1137.} \quad &-4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \\
 &4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 5 \\
 &3x_1 - 7x_2 - x_3 + 13x_4 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\
 \mathbf{1138.} \quad &-3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 = -6 \\
 &4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 8 \\
 &5x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 4
 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

1139. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2$$

1140. $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -6$

$$2x_1 + 3x_2 + 17x_3 + x_4 = 9$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = -10$$

$$6x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0$$

1141. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9$

$$-x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 2$$

$$4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 = -9$$

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 3x_4 = -3$$

1142. $\frac{5}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 = -1$

$$\frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 - x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 3$$

$$7x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 11$$

$$\begin{aligned}
 &2x + y + 4z + 8t + 1 = 0 \\
 1143. \quad &x + 3y - 6z + 2t - 3 = 0 \\
 &3x - 2y + 2z + 2t - 8 = 0 \\
 &2x - y + 2z - 4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\
 1144. \quad &3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\
 &6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\
 &3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\
 1145. \quad &3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\
 &5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 7 \\
 &4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\
 1146. \quad &3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 1 \\
 &4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -5 \\
 &-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 23
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\
 &-3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = 20 \\
 1147. \quad &5x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 37 \\
 &4x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &6x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\
 1148. \quad &9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 31 \\
 &7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13 \\
 &4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\
 1149. \quad &2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\
 &x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\
 &-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -8 \\
 1150. \quad &2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\
 &6x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 10 \\
 &x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\
 &x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 17x_5 = 15
 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 4$$

$$1151. -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 9$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 12$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$1152. 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = -3$$

$$-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2$$

§ 29. Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılışı və həlli.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$1153. 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3$$

$$1154. x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$1155. -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$1156. 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$\begin{array}{ll}
 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 & x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
 \mathbf{1157.} \quad x_1 + 2x_3 = 5 & \mathbf{1158.} \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\
 -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 11
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\
 \mathbf{1159.} \quad -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\
 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\
 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 & x_1 + 2x_3 = 2 \\
 \mathbf{1160.} \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 & \mathbf{1161.} \quad 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
 4x_1 + 17x_2 - 2x_3 = 16 & x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 \mathbf{1162.} \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\
 4x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 9 \\
 8x_1 - 8x_2 + 27x_3 - 27x_4 = -11
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\
 \mathbf{1163.} \quad 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\
 x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\
 -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -5
 \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\mathbf{1164.} \quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$

$$\mathbf{1165.} \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1$$

$$\mathbf{1166.} \quad 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 1$$

$$4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -5$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 23$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$\mathbf{1167.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1$$

$$\mathbf{1168.} \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -1$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2$$

$$1169. \quad 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -6$$

$$2x_1 + 3x_2 + 17x_3 + x_4 = 9$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = -10$$

§ 30. p xarakteristikali meydan üzərində xətti tənliklər sisteminin Qaus üsulu ilə həlli.

Misal. 7 xarakteristikalı meydan üzərində xətti tənliklər sistemini həll edin:

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

Həlli: 7 xarakteristikalı meydanda sistemə uyğun genişlənmiş matrisi yazaraq $7 \cdot 1 = 0$ şərtindən istifadə edib sistemi Qaus üsulu ilə həll edək:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1-ci və 2-ci sətirlərin yerini dəyişək;

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1-ci sətiri 4-ə vurub 2-ci sətirin üzərinə, 6-ə vurub 3-cü sətirin üzərinə əlavə edək;

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Bu matrisdə 2-ci sətiri 2-yə vurub 3-cü sətirin üzərinə əlavə edək;

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow 4x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 4$$

$$3x_2 + 4 = 2 \Rightarrow 3x_2 = -2 \Rightarrow 3x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + 4 - 4 = 3 \Rightarrow x_1 = 3$$

Deməli sistemin yeganə həlli $(3, 4, 4)$ şəklindədir.

Aşağıdakı sistemləri p xarakteristkalı meydan üzərində həll edin.

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} 1170. \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} 1171. \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} 1172. \quad & -x_1 + x_3 = 0 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{aligned}$$

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} 1173. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 1174. \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_2 + 2x_3 = 2 \end{aligned}$$

$$p = 3$$

$$\begin{aligned} 1175. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1176. \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1177. \quad & x_1 + 2x_3 = 1 \\ & x_2 + 2x_3 = 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1178. \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1179. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ & x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1180. \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{aligned}$$

$$p = 5$$

$$\begin{aligned} 1181. \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 = 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$\begin{aligned} 1182. \quad & 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$\begin{aligned} 1183. \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$\begin{aligned} 1184. \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$\begin{aligned} 1185. \quad & x_2 + 6x_3 = 5 \\ & x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$1186. \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$1187. \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$p = 7$$

$$1188. \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

1189. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ nöqtələrinin bir düz xətt üzərində yerləşməsi şərtini tapın.

1190. Bir düz xətt üzərində yerləşməyən $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ nöqtələrindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

1191. $(2, 1), (1, 2), (0, 1)$ nöqtələrindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

$$1192. \quad (3, 0), (-3, 0), \left(5, \frac{20}{3}\right), \left(5, -\frac{20}{3}\right), \left(-5, -\frac{20}{3}\right)$$

nöqtələrindən keçən ikitərtibli əyrinin tənliyini yazın.

1193. $(0, 0), (0, 1), (2, 0), (-1, -1), (0, -1)$

nöqtələrindən keçən ikitərtibli əyrinin tənliyini yazın.

1194. $(1, 1, 1), (2, 3, -1), (3, -1, -1)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

1195. $(0, 0), (1, 2), (2, -1)$ nöqtələrindən keçən çevrə tənliyini yazın.

1196. $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$ nöqtələrindən keçən küre tənliyini qurun.

1197. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$

nöqtələrindən keçən ikitərtibli əyrinin tənliyini yazın.

C A V A B L A R

§ 1. Çoxluqlar.

1. a), d). 2. Doğru deyil, çünki $\{1, 2\}$ elementi $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ çoxluğuna daxil deyil. 7. b). 10. a) $A \not\subset B, B \not\subset A$, b) $A \subset B$, c) $A = B$, d) $A \not\subset B, B \not\subset A$. 11. Misaldakı şərti ödəyən A, B, C çoxluqları yoxdur, çünki $x \in A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in A; A \cap C = \emptyset \Rightarrow x \notin C;$
 $x \in A \cap B, x \notin C \Rightarrow x \in A \cap B \setminus C \Leftrightarrow A \cap B \setminus C \neq \emptyset$. 12. $a=1, b=2,$
 $c=3, d=4$. 13. a), d). 14. b). 15. $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}^+ : x = 6y\}$
16. $\{X(x, y) \mid \exists A(a, b), |AX| < r, r \in \mathbb{R}^+\}$. 17. $\{ABCD$
dördbucaqlıları: $\angle A = \angle C = \frac{\pi}{2}\}$. 18. c), d). 20. a) U , b)
 $A \cup B$, c) C , d) $A \cap B$. 21. İxtiyarı A, B, C çoxluqları üçün
 $A \cup B = A \cup C \nRightarrow B = C$. 27. 2^3 sayda. 28. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
29. a) $\{1, a, c, \{1, b\}, \{a, 1\}\}$, b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\},$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-2, 3]\} \cup \{-3, 4, 5\},$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (2, 7]\},$
e) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\},$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-4, 4]\},$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [2, 7)\},$
h) $(-\infty, \infty),$ i) N çoxluğu, j) $\{1, 2\},$ k) $\{-2, -1, 0, 1, 2\},$

$$\text{m)} \left\{ x \in R \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \right\}, \quad \text{n)} \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \right\},$$

$$\text{l)} \{x \in R \mid x \in [1, 2)\} \cup \{-3, -2, 3\}, \quad \text{o)} \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z \right\},$$

$$\text{p)} \{x \in R \mid x \in [-3, 2]\} \cup \{3\}. \quad \mathbf{30.} \quad \text{a)} \{x \in R \mid x \in [-2, 1) \cup (1, 2]\},$$

$$\text{b)} \{2, 4, 6, 8\}, \quad \text{c)} \{\{1, a\}\}, \quad \text{d)} \{x \in R \mid x \in [3, 4]\}, \quad \text{e)}$$

$$\{x \in R \mid x \in [3, 6]\}, \quad \text{f)} \{x \in R \mid x \in (-2, 2]\}, \quad \text{g)} \{1\},$$

$$\text{h)} \{x \in R \mid x \in [-1, 1)\}, \quad \text{i)} \{-1, 0, 1\}, \quad \text{j)} \{-1, 0, 1, 4\},$$

$$\text{k)} \{x \in R \mid x \in [-3, -2]\}, \quad \text{l)} \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \right\},$$

$$\text{m)} \{-3, -2, -1, 0, 1\}, \quad \text{n)} \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\text{o)} \left\{ x \in R \mid x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \right\}, \quad \text{p)} \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \right\}.$$

$$\mathbf{31.} \quad \text{a)} \{x \in R \mid x \in [-2, 2]\}, \quad \text{b)} \{0, 1, 2, 3\}, \quad \text{c)} \{a, b, \{b\}, c\}, \quad \text{d)}$$

$$\{x \in R \mid x \in (-2, 2]\}. \quad \mathbf{33.} \quad X = (C \setminus A) \cup B. \quad \mathbf{34.} \quad A \cap B = \emptyset,$$

$$A \cup B = \{x \in Z^+\}, \quad B \setminus C = B. \quad \mathbf{35.} \quad B \subset A' \text{ olduqda sistemin}$$

həlli $B \subset X \subset A'$ şərtini ödəyən ixtiyarı X çoxluğuudur. $\mathbf{36.}$

$$\text{a)} \{f, t, u\}, \quad \text{b)} \emptyset, \quad \text{c)} \{5, 15, 25\}, \quad \text{d)} \{\{b, c\}\}. \quad \mathbf{37.} \quad \text{a)} \emptyset,$$

$$\text{b)} (2, 3), \quad \text{c)} \{1, 2\}, \quad \text{d)} \{1, 2, 6, 7, 8\}, \quad \text{e)} \{x \in R \mid x \in [-1, 0) \cup [3, 4]\},$$

$$\text{f)} \{x \in R \mid x \in (-1, 0] \cup (2, 4)\}, \quad \text{g)} \{x \in N \mid x = 2y \wedge x \geq 10\},$$

$$\text{h)} \{x \in R \mid x \in (-1, 0] \cup (2, 3]\}, \quad \text{i)} \left\{x \in R \mid x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\},$$

$$\text{j)} \left\{x \in R \mid x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}, \quad \text{k)} \left\{x \in R \mid x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z\right\},$$

$$\text{l)} \left\{x \in R \mid x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z\right\}, \quad \text{m)} \left\{x \in R \mid x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z\right\},$$

$$\text{n)} \emptyset, \quad \text{o)} \left\{x \in R \mid x \in \left[2, 2\frac{1}{2}\right]\right\}, \quad \text{p)} \emptyset,$$

$$\text{r)} \left\{x \in R \mid x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z\right\}. \quad \mathbf{38.} X = (A \setminus B) \cup C. \quad \mathbf{40.} 2^3.$$

$$\mathbf{42.} A' = B, (A \cup B)' = \emptyset, C' = \{x \in Z \mid x \geq 10\},$$

$$A \setminus C' = \{x \in Z \mid x = 2y \wedge x < 10\}, \quad C \setminus (A \cup B) = \emptyset.$$

$$\mathbf{44.} \text{ a)} \left\{x \in R \mid x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in Z\right\},$$

$$\text{b)} \left\{x \in R \mid x \neq \pm \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}, \quad \text{c)} R. \quad \mathbf{46.} \text{ a)} \{\{a\}, \{b\}, b\}, \quad \text{b)}$$

$$\{x \in R \mid x \in (-2, 1) \cup (3, 4]\}, \quad \text{c)} \{2, 3, 6, 7\}, \quad \text{d)} \{1, 2, 4, 5, 6\},$$

$$\text{e)} \{x \in R \mid x \in (2, 3]\}, \quad \text{f)} \{x \in R \mid x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)\},$$

$$\text{g)} \{-4, -3, -2, 1, 2\}, \quad \text{h)} \left\{x \in R \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z\right\},$$

i) $\{x \in R \mid x \in [-3, 2] \cup (3, 6)\}$

§ 2. Münasibətlər.

51. $A \neq B$ olduqda. 57. $C \subset A, D \subset B$ və ya $A \subset C, B \subset D$

olduqda. 60. $80; 100 \in M, 1; 5 \in K$ elementləri göstərilən cütlərə daxil deyil. 61. a), d). 62. Məsələn,

$A \setminus B = \{<1, 2>, <1, 3>, <1, 5>, <2, 3>, <2, 5>\}$. 63. a)

$\{<2, 3>, <2, 4>, <2, 5>, <3, 3>, <3, 4>, <3, 5>\},$

b) $\{<1, 1>, <2, 1>, <3, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <3, 2>\},$

c) $\{<2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>\},$

d) $\{<1, 3>, <1, 4>, <c, 3>, <c, 4>\}.$

e) $\{<x, y> \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\}, y \in \{-2, -1, 0, 1\}\}$

65. $X = \{2\}, Y = \{y \in Z \mid y \geq 1\}.$

69. a) $Dom\rho = [-1, 1], Im\rho = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$ qrafiki mərkəzi $(0, 0)$

nöqtəsində böyük yarımoxu 1, kiçik yarımoxu $\frac{1}{2}$ olan ellips;

b) $Dom\rho = R, Im\rho = R,$ qrafiki $x = y$ və $x = -y$ düz

xətləri; c) $Dom\rho = [-1, 1], Im\rho = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$ qrafiki təpələri $(-$

$1, 0), (0, \frac{1}{2}), (1, 0), (0, -\frac{1}{2})$ nöqtələrində olan dördbucaqlı; d)

$Dom\rho = (0, 1)$, $Jm\rho = (-1, 1)$, qrafiki mərkəzi koordinat başlanğıcında radiusu 1-ə bərabər olan dairənin sağ ($x > 0$) daxili nöqtələri çoxluğu;

e) $Dom\rho = Jm\rho = \{x \in [0, 1]\}$, qrafiki ucları $(1, 0)$, $(0, 1)$ nöqtələrində olan düz xətt parçası; f) $Dom\rho = \{x \in [-3, 3]\}$,

$Jm\rho = \{y \in [-2, 2]\}$ qrafiki ucları $(-3, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$, $(0, -2)$ nöqtələrində olan romb; g) $Dom\rho = \left[\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3} \right]$,

$Jm\rho = \left[\frac{3 - \sqrt{6}}{2}, \frac{3 + \sqrt{6}}{2} \right]$; qrafiki $3x + 4y \leq 12$

yarımmüstəvisinin $xy = 1$ əyrisi ilə hüdudlanmış hissəsi; h)

$Dom\rho = \{-3, 1\}$, $Jm\rho = \{1, 9\}$, qrafiki $(1, 1)$, $(-3, 9)$

nöqtələri; i) $Dom\rho = [-2, 2]$, $Jm\rho = [-3, 3]$, qrafiki təpələri $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$ nöqtələrində olan romb;

j) $Dom\rho = [0, 2]$, $Jm\rho = [-1, 1]$, qrafiki mərkəzi $(0, 0)$ nöqtəsində böyük yarımoxu 2, kiçik yarımoxu 1 olan ellipsin $x \geq 0$ qiymətinə uyğun hissəsi ilə əhatə olunmuş müstəvi hissəsi.

74.c). 75. a) $\rho = \{<10, 2>, <8, 2>, <8, 4>, <6, 2>, <4, 2>\}$,

b) $\rho^\cup = \{<2, 10>, <2, 8>, <4, 8>, <2, 6>; <2, 4>\}$

76. a) $\rho' = \{<1, 4>, <1, 5>, <1, 6>, <2, 4>, <3, 6>\}$,

b) $\rho^\cup = \{ \langle 5, 2 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}.$

78. a) $\{ \langle 2, 7 \rangle, \langle 3, 13 \rangle, \langle 4, 9 \rangle \},$ b) $\{ \langle 3, 5 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 0, 3 \rangle \},$

c) $\{ \langle 6, 7 \rangle, \langle 3, 11 \rangle \},$ d) $\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}.$

79. a) $s \circ \sigma = \{ \langle 2, 4 \rangle \}, \sigma \circ s = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \},$

$s^2 = \{ \langle 2, 2 \rangle \}, \sigma^2 = \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \};$

b) $s \circ \sigma = \{ \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}, \sigma \circ s = \{ \langle 2, 7 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \},$

$s^2 = \{ \langle 2, 8 \rangle \}, \sigma^2 = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$ **80.** a) $\{ \langle 1, 1 \rangle \},$ b)

$\{ \langle 1, 1 \rangle \},$ c) $\{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, a \rangle \},$ d)

$\{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}.$ **81.** a), b). **82.** a) $2^{m \cdot n};$ b)

$n^m;$ c) $n \geq m$ olduqda A_n^m sayda biyekti inikas var, $n < m$

olduqda göstərilən inikas yoxdur; d) $m = n$ olduqda. **83.**

f inyektiv inikas olduqda. **86.** ρ, s -funksional

münasibətlərdir;

$Dom \rho = Doms = \{0, 5, -7, 13\}, Jm \rho = \{k, a, p\}, Jms = \{a, k\}.$

87. a), b). **88.** a) funksiya deyil; b) funksiya, tərsi yoxdur; c)

funksiya deyil; d) funksiya, $f^{-1} = \{ \langle x, x^3 \rangle, x \in R \};$

e) funksiya, $f^{-1} = \{ \langle x, \sqrt[3]{x} \rangle, x \in R \};$

f) $f^{-1} = \left\{ \langle x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \rangle \mid -1 \leq x \leq 5 \right\};$

$$g) f^{-1} = \left\{ \left\langle x, \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \right\rangle \mid -1 \leq x \leq 8 \right\};$$

$$h) f^{-1} = \left\{ \left\langle x, 3x + 6 \right\rangle \mid -1 \leq x \leq 0 \right\}; \quad i) \text{ funksiya deyil}; \quad j)$$

$$\text{funksiya deyil}; \quad 89. a) (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}; b) -\frac{2}{x+2}, x \neq -2; c) x^2; d)$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1}, x \neq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x \neq -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}. 90. a) g(f(x)) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(g(x)) = 2x^{\frac{1}{2}} + 1, x \geq 0; \quad b)$$

$$g(f(x)) = \frac{-6x^2 - 12x - 8}{(x+2)^3}, \quad f(g(x)) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}, x \neq -1.$$

$$91. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad 92. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$93. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad 94. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$95. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 96. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$97. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 98. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad 99.$$

$$6. 100. 3. 101. 4. 102. 7. 103. 6. 104. 4. 105. 6.$$

$$106. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{107.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{108.} f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$f^{-121} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{109.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{110.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{111.} \text{ a) } u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{112.} \text{ a) } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{113.} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{114.}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{116.} n!.$$

117.

0	$\varphi_1 = E$	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
$\varphi_1 = E$	E	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_2	φ_2	E	φ_5	φ_6	φ_3	φ_4
φ_3	φ_3	φ_6	E	φ_5	φ_4	φ_2
φ_4	φ_4	φ_5	φ_6	E	φ_2	φ_3
φ_5	φ_5	φ_4	φ_2	φ_3	φ_6	E
φ_6	φ_6	φ_3	φ_4	φ_2	E	φ_5

126. a) refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik; b) antirefleksivlik, simmetriklik; c) refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik; d) antirefleksivlik, antisimmetriklik, tranzitivlik; e) antirefleksivlik, antisimmetriklik, tranzitivlik; f) refleksivlik, antisimmetriklik, tranzitivlik. 127. $\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle$ cütlerini. 128. $\langle c, c \rangle$ cütünü. 129. a) refleksivlik; b) anti refleksivlik, c) refleksivlik, simmetrik, tranzitivlik, d) simmetriklik; e) simmetriklik. 130. a) antirefleksivlik; b) antirefleksivlik, antisimmetriklik, tranzitivlik; c) simmetriklik;

d) refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik; e) antirefleksivlik; f) antirefleksivlik, simmetriklik; g) antirefleksivlik. **132.** heç birinə malik deyil. **133.** nizamilik münasibətdir. **134.** a).

135. a). **136.** $X = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 6\}$. **137.** b). **138.** $\{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 7, 7 \rangle \}$ **139.** c). **140.** a).

§3. Cəbri əməllər. Qrup və xassələri. Altqrup.

141. $\langle Q, * \rangle$ cəbrinin neytral elementi $e = 2$, $*$ əməlinə nəzərən 12 elementinin tərsi $\frac{1}{3}$ -dir. **143.** $a < b$ olduqda

$a^2 - b^2$ ədədi N -ə daxil olmadığına görə N -də cəbri əməl deyil. Bu əməl Z -də cəbri əməldir, kommutativ deyil, assosiativ deyil. **144.** a) $+$, $\cdot$; cəbri əməldir, hər ikisi kommutativ və assosiativdir; $-$, $:$; cəbri əməl deyil. b) $+$, $\cdot$; hər ikisi kommutativ və assosiativdir; c) $+$, $\cdot$, $-$; cəbri əməldir, kommutativdir, assosiativdir; d) $+$, $\cdot$, $-$; cəbri əməldir, toplama və vurma kommutativdir, assosiativdir; e) $+$, $\cdot$, $-$; cəbri əməldir, toplama və vurma kommutativdir, assosiativdir; f) $+$, $\cdot$, $-$; cəbri əməldir, toplama və vurma kommutativdir, assosiativdir; g) $+$, $\cdot$, $-$; cəbri əməldir, vurma kommutativdir, assosiativdir; h) $+$, $\cdot$, $:$; toplama və vurma kommutativdir, assosiativdir; **145.** a) Kommutativ deyil, assosiativ deyil, sağ neytral elementi 1-dir,

sol neytral element yoxdur; b) Kommutativdir, assosiativ deyil, neytral element yoxdur; c) Kommutativdir, assosiativdir, neytral elementi yoxdur; **146.** Toplama, çıxma, vurma cəbri əməllərdir, bölmə cəbri əməl deyil. Vurma assosiativdir, toplama vkommutativ, assosiativdir. **147.** a) yarımqrupdur; b) yarımqrup deyil; c) yarımqrupdur; d) yarımqrup deyil; e) monoiddir; f) monoiddir; g) yarımqrupdur; h) yarımqrup deyil; i) yarımqrup deyil; j) yarımqrupdur . **148.** Vurma əməmli təyin olunmayıb. **149.** yarımqrupdur. **152.** a) gətirir; b) gətirmir; c) gətirmir; d) gətirir; e) gətirir; f) gətirmir; g) gətirir; h) gətirmir; i) gətirir; j) gətirir, k) gətirir. **153.** a) gətirmir; b) gətirir; c) gətirir; d) gətirmir; e) gətirir; f) gətirmir; g) gətirir. **154.** a), c). **159.** a) $x = b^{-1} a^{-1} c$; b) $x = a^{-1} c b^{-1}$; c) $x = c b^{-1} a^{-1}$. **160.**

$$1) x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{163.} \text{ a), b), d), e).}$$

§4. Halqa. Meydan

171. 6-dan başqa hamısı halqa əmələ gətirir. Onlardan 2, 3, 4, 10, 13, 15 meydandır; vahidli halqalar; 1, 2, 3, 4, 5 ($n=1$ olursa), 8, 10, 11, 13, 14, 15. Tərsi olan elementlər 1. ± 1 ; 2. 0-a bərabər olmayan ixtiyarı ədəd; 3. 0-a bərabər olmayan ixtiyarı ədəd; 4. 0-a bərabər olmayan ixtiyarı ədəd; 8. ± 1 ; 10. 0-a bərabər olmayan ixtiyarı ədəd; 11. ± 1 ; 13. 0-a bərabər

olmayan ixtiyarı ədəd; 14. $\pm 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 15. 0-a bərabər olmayan ixtiyarı ədəd. **172.** 20-27 misallar kommutativ halqalardır; 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27 vahidli halqalardır. **173.** a) həll oluna biləndir, $x = 2 - \sqrt{3}$; b) həll oluna biləndir, $x = 2 + \sqrt{3}$; c) həlli yoxdur. **178.** $Z_{11} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$, $Z_{14} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}\}$, $Z_{15} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}\}$. **179.** Z_{11} halqasının althalqaları $\langle \bar{1} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$; Z_{14} halqasının althalqaları: $\langle \bar{1} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{7} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$; Z_{15} halqasının althalqaları: $\langle \bar{1} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$. **183.** $\{1, -1\}$. **184.** gətirmir. **185.** gətirmir. **187.** yox. Sıfırdan fərqli ixtiyarı elementin tərsi yoxdur. **188.** 1) bölünür: qismət $13 + 3i$; 2) bölünür: qismət $8 - 3i$; 3) bölünür: qismət $4 - 5i$. **189.** 1) bölünür: qismət $13 + 2\sqrt{3}$; 2) bölünmür. **198.** $x = 1 - 5\sqrt{2}$. **199.** $x = 7 - 2\sqrt{2}$. **200.** $x = 1 + 2\sqrt{3}$. **201.** $x = 4 + \sqrt{3}$. **202.** $x = 1 + 4\sqrt{3}$

§ 5. Dövrü qruplar. Qrupun elementinin tərtibi

213. $O(a) = 4, \{a\} = \{e = a^0, a, a^2, a^3\}$.

214. $O(a) = 3, \{a\} = \{e = a^0, a, a^2\}$.

215. $\{a\} = \{a^0 = e, a' = (1\ 3\ 2\ 4), a^2 = (1\ 2)(3\ 4), a^3 = (14\ 2\ 3)\}$

;

$\{b\} = \{b^0 = e, b' = (2\ 3\ 1\ 4), b^2 = (1\ 2)(34), b^3 = (2\ 4\ 1\ 3)\}$

$\{a\} \cap \{b\} = \{e, a, a^2\}$ Abel qrupudur. **216.** 1)

$\varphi(5) = 4, a, a^2, a^3, a^4$; 2) $\varphi(18) = 6, a, a^5, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}$.

217. a) a, a^5, a^7, a^{11} ; b) $O(a^2) = 6, O(a^3) = 4,$

$O(a^4) = 3, O(a^6) = 2, O(a^8) = 3, O(a^{10}) = 6$

§ 6. Qrupların, halqaların və meydanların

homomorfizmi və izomorfizmi

235. İzomorf deyil. 238. İzomorfdur. 240. İzomorfdur. 242.

qrupun ixtiyarı elementi homomorfizm doğuran a elementinin
obrazı ilə tam təyin olunur; belə homomorfizmlərin sayı $n! - a$

bərabərdir. 243. $e, b^3, b^6, b^9, b^{12}, b^{15}$. 244. e, b, b^2, b^3, b^4, b^5 .

245. e, b^5, b^{10} . 246. e . 250. 1) 3; 2) 3.

§ 7. Yanaşı siniflər. Normal bölənlər. Faktor qruplar.

261. G qrupunun e altqrupuna nəzərən ayrılığı G qrupunun
bütün bir elementli altqruplarının birləşməsi şəklində
göstərilməsidir. G qrupunun özünə nəzərən ayrılığı G -nin
özünə bərabər olan bir yanaşı sinifdən ibarətdir.

$$262. a + mZ = \{a + mk \mid k \in Z\}, a = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$263. a + Z = \{a + k \mid k \in Z\}, 0 \leq \alpha < 1$$

$$264. (\alpha + \beta i) + Z = \{(\alpha + a) + (\beta + b)i \mid a, b\}, 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1.$$

$$265. \langle a^3 \rangle = \{1, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}\} \quad a \langle a^3 \rangle = \{a, a^4, a^7, a^{10}, a^{13}, a^{16}\}, \\ a^2 \langle a^3 \rangle = \{a^2, a^5, a^8, a^{11}, a^{14}, a^{17}\}.$$

$$266. \langle a^2 \rangle = \{1, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, a^{12}, a^{14}\}.$$

$$a \langle a^2 \rangle = \{a, a^3, a^5, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{15}\}.$$

$$267. \quad \langle a^3 \rangle = \{a^{3k} \mid k \in Z\}, \quad a \langle a^3 \rangle = \{a^{3k+1} \mid k \in Z\},$$

$$a^2 \langle a^3 \rangle = \{a^{3k+2} \mid k \in Z\}. \quad 275. S_3 \text{ simmetrik qrupun dörd}$$

məxsusi altqrupu var. Üç iki tərtibli $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\},$

$\{a_1, a_4\}$ və bir üçtərtibli: $\{a_1, a_5, a_6\}$ Bunlardan yalnız

$H = \{a_1, a_5, a_6\}$ altqrup normal böləndir. 277.

$$Z/A = \{A, 1+A, 2+A, 3+A, 4+A, 5+A, 6+A\}; 1+A$$

$$278. \quad H = A \cap B = (6) \quad \text{və} \quad \text{faktor} \quad \text{qrup}$$

$$Z/H = \{H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H, 5+H\}$$

siniflərin cüt-cüt mümkün cəmlərini tapıb, Z/H faktor-qrupu üçün aşağıdakı Keli cədvəlini alırıq:

	$H + 0$	$H + 1$	$H + 2$	$H + 3$	$H + 4$	$H + 5$
$H + 0$	$H + 0$	$H + 1$	$H + 2$	$H + 3$	$H + 4$	$H + 5$
$H + 1$	$H + 1$	$H + 2$	$H + 3$	$H + 4$	$H + 5$	$H + 0$
$H + 2$	$H + 2$	$H + 3$	$H + 4$	$H + 5$	$H + 0$	$H + 1$
$H + 3$	$H + 3$	$H + 4$	$H + 5$	$H + 0$	$H + 1$	$H + 2$
$H + 4$	$H + 4$	$H + 5$	$H + 0$	$H + 1$	$H + 2$	$H + 3$
$H + 5$	$H + 5$	$H + 0$	$H + 1$	$H + 2$	$H + 3$	$H + 4$

281. 5 tərtibli dövrü qrup. **282.** 3 tərtibli dövrü qrup. **283.** m tərtibli dövrü qrup. **284.** 3 tərtibli dövrü qrup. **285.** 13 tərtibli dövrü qrup. **286.** 6 tərtibli dövrü qrup

§8. Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri, triqonometrik şəkli. Kompleks ədədlər üzərində əməllər.

292. $z_1^{-1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$, $z_2^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$, $z_1^2 = 8 - 6i$, $z_1^3 = 18 - 26i$,

$z_1^4 = 28 - 96i$, $z_2^2 = -5 + 12i$, $z_2^3 = -46 + 9i$, $z_2^4 = -119 - 120i$.

293. $z_1 + z_2 = -\frac{3}{2} + 3i$, $z_1 - z_2 = \frac{1}{2} + i$, $z_1 z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}i$, $\frac{z_2}{z_1} = \frac{10}{17} + \frac{6}{17}i$, $z_1^{-1} = -\frac{2}{17} - \frac{8}{17}i$, $z_2^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$,

$$z_1^3 = \frac{47}{8} - \frac{13}{2}i, z_1^4 = \frac{161}{16} + 15i, z_1^5 = -\frac{1121}{32} + \frac{101}{8}i,$$

$$z_2^3 = 2 + 2i, z_2^4 = -4, z_2^5 = 4 - 4i. \quad \mathbf{294.} \quad z_1 + z_2 = -1 - i,$$

$$z_1 - z_2 = -3 + 3i, z_1 z_2 = 5i, \frac{z_1}{z_2} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, \frac{z_2}{z_1} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i,$$

$$z_1^{-1} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, z_2^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i, z_1^4 = -7 - 24i, z_1^5 = 38 + 41i,$$

$$z_1^6 = -117 - 44i, z_2^4 = -7 + 24i, z_2^5 = 41 + 38i, z_2^6 = 117 - 44i.$$

$$\mathbf{295.} \quad 1 \quad n = 4k \quad \text{olduqda}; \quad i, \quad n = 4k + 1 \quad \text{olduqda};$$

$$-1, \quad n = 4k + 2 \quad \text{olduqda}; \quad -i, \quad n = 4k + 3 \quad \text{olduqda.} \quad \mathbf{296.}$$

$$21 - 22i. \quad \mathbf{297.} \quad 1, 2 + 4, 6i. \quad \mathbf{298.} \quad -1. \quad \mathbf{299.} \quad -62i. \quad \mathbf{300.} \quad -76i.$$

$$\mathbf{301.} \quad -556. \quad \mathbf{302.} \quad 5 + 5i. \quad \mathbf{303.} \quad \frac{-1 - 32i}{25}. \quad \mathbf{304.}$$

$$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha. \quad \mathbf{305.} \quad 2 + 2(\sqrt{3} + 1)i. \quad \mathbf{306.} \quad -2i, \quad n = 4k$$

$$\text{olduqda}; \quad 2, \quad n = 4k + 1 \quad \text{olduqda}; \quad 2i, \quad n = 4k + 2 \quad \text{olduqda};$$

$$-2, \quad n = 4k + 3 \quad \text{olduqda.} \quad \mathbf{307.} \quad -1 - i, \quad n = 4k \quad \text{olduqda};$$

$$1 - i, \quad n = 4k + 1 \quad \text{olduqda}; \quad 1 + i, \quad n = 4k + 2 \quad \text{olduqda};$$

$$-1 + i \quad n = 4k + 3 \quad \text{olduqda.} \quad \mathbf{308.} \quad (-4; -3). \quad \mathbf{309.} \quad (2; -4). \quad \mathbf{310.}$$

$$x = 1, \quad y = \alpha, \quad z = 2 + 2\alpha, \quad \forall \alpha \in R. \quad \mathbf{311.} \quad x = -\frac{22 + 7\alpha}{38},$$

$$y = \frac{8 - 13\alpha}{38} \quad z = \alpha, \quad \forall \alpha \in R. \quad \mathbf{312.} \quad x = -2, \quad y = \frac{3}{2},$$

$$z=2, t=-\frac{1}{2}. \quad \mathbf{313.} \quad z=i. \quad \mathbf{314.} \quad x=\frac{7-i}{2}; \quad y=\frac{-3-i}{2}. \quad \mathbf{315.}$$

$$\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}. \quad \mathbf{316.} \quad -7,1. \quad \mathbf{317.} \quad \text{həlli yoxdur.} \quad \mathbf{318.} \quad \text{sonsuz sayda}$$

$$\text{həlli var.} \quad \mathbf{319.} \quad x=2+i, \quad y=2-i. \quad \mathbf{320.} \quad x=1+i, \quad y=i. \quad \mathbf{321.}$$

$$x=\frac{6+13i}{41}, \quad y=-\frac{6+13i}{205}. \quad \mathbf{322.} \quad x=1-i, \quad y=1-2i. \quad \mathbf{323.}$$

$$a) \pm(1+i), \quad b) \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \quad c) \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i), \quad d) \pm(2-i),$$

$$e) \pm(3+4i), \quad f) \pm(1-3i), \quad g) \pm(1+4i), \quad h) \pm(5+6i),$$

$$i) \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i), \quad j) \pm(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i); \quad \pm(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i), \quad k) \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i);$$

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+3i). \quad \mathbf{324.} \quad \frac{1+3i}{2}; \quad 2-i. \quad \mathbf{325.}$$

$$0,1+0,2i; \quad -0,4-0,2i. \quad \mathbf{326.} \quad 2+3i; \quad 1+4i. \quad \mathbf{327.} \quad 1+i; \quad -\frac{6+3i}{5}.$$

$$\mathbf{328.} \quad 2+5i; \quad -3i. \quad \mathbf{329.} \quad -1; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \quad \mathbf{330.} \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i). \quad \mathbf{331.}$$

$$\pm\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{11}). \quad \mathbf{332.} \quad \frac{1}{2}[(3\sqrt{2}-4)\pm i\sqrt{2}]; \quad -\frac{1}{2}[(3\sqrt{2}+4)\pm i\sqrt{2}]$$

$$\mathbf{333.} \quad 1\pm 2i; \quad -4\pm 2i. \quad \mathbf{334.} \quad 2\pm i\sqrt{2}; \quad -2\pm 2i\sqrt{2}$$

335. $3 + 4i$. 336. $2 + i$. 339. a) $\cos 0 + i \sin 0$,

b) $\cos \pi + i \sin \pi$, c) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, d) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$,

e) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, f) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$

g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$, h) $2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$,

i) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$, j) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$.

340. a) $\cos(\pi - \varphi) + i \sin(\pi - \varphi)$, b) $\cos(\pi + \varphi) + i \sin(\pi + \varphi)$,

$\varphi = \alpha + 2\pi k$, burada $0 < \alpha < 2\pi$; c) $0 \leq \varphi < \pi$ olduqda

$2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$; $\pi \leq \varphi < 2\pi$ olduqda isə

$-2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos(\pi + \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\pi + \frac{\varphi}{2}))$ d) $2 \sin \frac{\varphi}{2} (\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}))$

e) $0 \leq \varphi < \pi$ olduqda $2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}))$;

$\pi \leq \varphi < 2\pi$ olduqda isə $-2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}))$,

f) $0 \leq \varphi < \pi$ olduqda $2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}))$;

$\pi \leq \varphi < 2\pi$ olduqda isə $-2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}))$.

341. a) $1 + i\sqrt{3}$, b) $3 - i$, c) -5 , d) $\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$,

$$e) \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) . \mathbf{342.} a) \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) - i\sin(-\frac{\pi}{12}))$$

$$b) 2\sqrt{2}(\cos(\frac{13\pi}{12} + \varphi) + i\sin(\frac{13\pi}{12} + \varphi)) ,$$

$$c) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}(\cos(\frac{11\pi}{12} - \varphi) + i\sin(\frac{11\pi}{12} - \varphi)) ,$$

$$d) 2(\sqrt{3}-1)\sin \frac{\varphi}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2})) . \mathbf{343.} a) \frac{2}{5}(-3 + 4i) ,$$

$$b) -\frac{3}{17}(15 + 8i) , c) 35 - 12i , d) 15 - 8i . \mathbf{344.} a) -\frac{2}{205}(156 + 133i) ,$$

$$b) \sqrt{5}(1 - 2\sqrt{3}) + i(2 + 5\sqrt{3}) , c) -33 - 56i , d) 429 - 60i . \mathbf{346.}$$

Paraleloqramın diaqanallarının kvadratları cəmi onun tərəflərinin kvadratları cəminə bərabər olmasıdır. **347.** a)

Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu çevrədir;

b) Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan r radiuslu qapalı

dairədir; c) Mərkəzi z_0 nöqtəsində r radiuslu açıq dairədir;

d) Mərkəzi $z_0 = 1 + i$ nöqtəsində və radiuslu 2 vahidə bərabər

olan açıq dairədir; e) Koordinat başlanğıcından çıxan elə meyl

bucağı $\frac{\pi}{6}$ -ya bərabər olan şüadır (başlangıç nöqtəsiz); f)

Koordinat başlanğıcından çıxan meyl bucağı φ -yə bərabər

olan şüadır (başlangıç nöqtəsiz); g) Təpəsi z_0 -da (z_0

nöqtəsiz) bir tərəfi φ meyl bucağı əmələ gətirən şua, digər

tərəfi isə həqiqi oxuna paralel olan qapalı bucaqdır; *h*) Təpəsi $2-i$ nöqtəsində (təpə nöqtəsini çıxmaqla) qapalı bucaq, tərəflərin biri $\frac{\pi}{3}$ meyl bucağına bərabər olan şüa, ikincisi isə həqiqi oxuna paralel olan şüadır. **348.** *a*) Mərkəzləri $(1;0)$ və $(-1;0)$ nöqtələrində radiusları 2-yə bərabər olan qapalı dairələrin kəsişməsidir; *b*) Mərkəzi $(1;-1)$ nöqtəsində radiusları 1 və 3-ə bərabər olan açıq dairəvi halqadır; *c*) Mərkəzi $(-1;2)$ nöqtəsində radiusu 2-yə bərabər olan $x=-1$ düz xətt ilə ayrılan sağ qapalı yarımdairədir, $(-1;0)$ nöqtəsini çıxmaqla; *d*) Boş çoxluqdur; *e*) Mərkəzi koordinat başlanğıcında radiusları 1 və 3-ə bərabər olan $y=x$ düz xəttin üzərində yerləşən açıq dairəvi yarımhəlqadır; *f*) Mərkəzi $2+3i$ nöqtəsində radiusları 2 və 3-ə bərabər olan $y=3$ düz xəttin üzərində yerləşən qapalı dairəvi yarımhəlqadır, $(-1;3)$ nöqtəsini çıxmaqla. **349.** $|z|=1$, yəni mərkəzi koordinat başlanğıcında radiusu 1-ə bərabər olan çevrədir. **350.** *a* və *b* nöqtələrini birləşdirən parçanın ortasından keçən perpendikulyardır. **351.** Fokusları $(-c;0)$ və $(c;0)$ nöqtələrində yerləşən $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b^2 = a^2 - c^2$) ellipsidir. **352.** Fokusları

$(-c;0)$ və $(c;0)$ nöqtələrində yerləşən $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(b^2 = c^2 - a^2)$ hiperboladır. **353.** Fokusu $(\frac{p}{2}; 0)$ nöqtəsində

yerləşən $y^2 = 2px$ paraboladır. **354.** $\lambda = 0$ olduqda $z = a$ nöqtəsidir, $\lambda = 1$ olduqda 350-cı məsələsinə gətirilir, $\lambda \neq 0; 1$

olduqda isə mərkəzi $\left(\frac{a^2 - \lambda^2 b}{1 - \lambda^2}; 0\right)$ -a yerləşən və radiusu

$r = \frac{|a - b|\lambda}{|1 - \lambda^2|}$ -a bərabər olan çevrədir. **356.**

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}; \beta = \frac{\pi}{6}; \gamma = \frac{7\pi}{12}$ və tərəfləri $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1);$

$2\sqrt{2}; 2(\sqrt{3} - 1),$ b) $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{3}; \gamma = \frac{5\pi}{12}$ və tərəfləri

$(3 - \sqrt{3})\sqrt{10}, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1).$ **357.** a) $2^7(1 + i),$ b) $2^{24},$

c) $2^{15}(-1 + i\sqrt{3}),$ d) $(2 - \sqrt{3})^{12},$

e) $(\cos(\pi - 10\alpha) + i\sin(\pi - 10\alpha)),$ f) $\cos 14\alpha - i\sin 14\alpha,$

g) $2^3(1 + i\sqrt{3}),$ h) $\frac{1+i}{256}.$ **360.** $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{n\alpha}{2} + i\sin \frac{n\alpha}{2}).$

361. $\cos \frac{n\pi}{3} + i\sin \frac{n\pi}{3}$ və n -dən asılı olaraq $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

qiymətlərini alır. **362.** a) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$,

b) $\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ c) $\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$,

d) $\sin^5 x - 10\sin^3 x \cos^2 x + 5\sin x \cos^4 x$. **363.** a) $\frac{3tgx - tg^3 x}{1 - 3tg^2 x}$,

b) $\frac{tg^5 x - 10tg^3 x + 5tgx}{tg^4 x - 10tg^2 x + 1}$, c) $\frac{tg^7 x - 21tg^5 x + 35tg^3 x - 7tgx}{tg^6 x - 35tg^4 x - 21tg^2 x - 1}$.

364. a) $\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, b) $\frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$,

c) $\frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$, d) $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$.

Göstəris: $z = \cos x + i\sin x$, onda $z^{-1} = \cos x - i\sin x$ və

buradan $\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$ və $\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ olur. Lazımı

dərəcələrə yüksəldib sadələşdirin. **365.** a) $2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$

b) $2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$. **Göstəris:** $(1+i)^n$ ifadəsini Nyuton binomu

düsturundan istifadə edərək ayrılışına baxmaq lazımdır. **366.**

Göstəris: 365-ci məsələdən istifadə etmək lazımdır. **367.**

a) $\frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$. **Göstəris:**

a) cəmini S və b) cəmini T ilə işarə edib $S+iT$ cəminə

baxılır. $z = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}$ qəbul edib,

$S+iT = z^2 + z^4 + \dots + z^{2n}$ cəmini həndəsi silsilənin hədləri cəmi kimi hesablayıb sadələşdirin. **368. Göstəriş:** 367-ci məsələnin göstərişindən istifadə edin. **369. Göstəriş:** 367-ci məsələnin göstərişindən istifadə edin.

$$371. a) S = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$b) T = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}. \text{ **Göstəriş:}** } S+iT \text{ cəmini}$$

$(1-z)$ -ə vuraraq $z = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}$ qəbul edin. **372.**

$$a) -i; \frac{\pm \sqrt{3} + i}{2}, \quad b) \pm 1 \pm i, \quad c) -1 + i; \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \quad d) \pm i\sqrt{3}; \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad \textbf{373.}$$

$$a) \sqrt[12]{2} \left(\cos \frac{24k+13}{72} \pi + i \sin \frac{24k+13}{72} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$b) \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{24k+19}{72} \pi + i \sin \frac{24k+19}{72} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.,$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[16]{2}} \left(\cos \frac{24k+5}{96} \pi + i \sin \frac{24k+5}{96} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

$$d) \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{24k+17}{72} \pi + i \sin \frac{24k+17}{72} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$e) \sqrt[14]{2 + \sqrt{3}} \left(\cos \frac{24k-1}{84} \pi + i \sin \frac{24k-1}{84} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$f) \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{12k+1}{60} \pi + i \sin \frac{12k+1}{60} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

$$g) \frac{1}{\sqrt[16]{2}} \left(\cos \frac{24k-1}{96} \pi + i \sin \frac{24k-1}{96} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

$$374. a) i; \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}-i) \quad b) 1-i; \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2}; -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$c) \pm \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}); \pm \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \quad d) \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); \pm \frac{\sqrt{2}}{4}[(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i] \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i], \quad e) \pm 1; \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

$$f) \sqrt[14]{2 + \sqrt{3}} \left(\cos \frac{24k+1}{84} \pi + i \sin \frac{24k+1}{84} \pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad 375.$$

$$a) \pm 1, \quad b) 1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad c) \pm 1; \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad d) \pm 1; \pm i; \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),$$

$$e) \pm 1; \pm i; \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{\pm \sqrt{3} \pm i}{2}. \quad 376. \quad a) -1, \quad b) \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

$$c) \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad d) \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \quad e) \frac{\pm \sqrt{3} \pm i}{2}. \quad 377. \quad a) 0,$$

$$b) \cos(n-1)\pi; \quad n = 2k \text{ olduqda } -1, \quad n = 2k+1 \text{ olduqda } i \text{ və } -i$$

1-ə bərabərdir. **378.** a) yoxdur b) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ c) $\frac{\pm \sqrt{3} \pm i}{2}$.

379. Əgər $\alpha_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ kökü δ_k göstəricisinə

aiddirsə, onda a) $\delta_0 = 1, \delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 12,$

$\delta_2 = \delta_{10} = 6, \delta_3 = \delta_9 = 4, \delta_4 = \delta_8 = 3, \delta_6 = 2$

b) $\delta_0 = 1, \delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_9 = \delta_{11} = \delta_{13} = \delta_{15} = 16,$

$\delta_2 = \delta_6 = \delta_{10} = \delta_{14} = 8,$

$\delta_4 = \delta_{12} = 4, \delta_8 = 2$. **380.** $-2i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{n}, k = 1, 2, \dots, n-1$. **Göstəris:**

$x + 2 = (x - 2)\alpha_k$ alınır $\alpha_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ancaq $k = 0$ ödəmir, çünki $x + 2 \neq (x - 2)$. Buradan

$x = -\frac{2(1 + \alpha_k)}{1 - \alpha_k}$ olur və sadələşdirib cavabı alırıq. **381.**

$x = 5 \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{n}, k = 1, 2, \dots, n-1$. **382.** $x = 3 \operatorname{ctg} \frac{4k + 3}{4n} \pi,$

$k = 1, 2, \dots, n-1$. **Göstəris:** $x + 3i = (x - 3i)\beta_k$ tənliyindən x -i tapıb 380-cı məsələdən istifadə edin, burada

$\beta_k = \sqrt[n]{-i} = \cos \frac{4k + 3}{2n} \pi + i \sin \frac{4k + 3}{2n} \pi, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. **383.**

$x = 4i \operatorname{ctg} \frac{4k + 1}{4n} \pi, k = 1, 2, \dots, n-1$.

§9. n – ölçülü hesabi vektorlar fəzası

391. 1) $d = (-4, 0, -1, 9)$; 2) $d = (-4, -3, 5, -10, -6)$; $d = (12, 6, 2, 16, 7)$. **392.** 1), 2) xətti kombinasiyasıdır; 3) xətti kombinasiyası deyil. **393.** a) $(-6, 19, 7, 11)$; b) $(19, 19, -2, 34)$; c) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}$; d) $-4 - 12x - 13x^2$; **394.** a) $(-2, 4, -3, 0)$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; **395.** a) $(-8, -7)$; b) $-13 + 3i$; c) $-5 - 26i$.

§10. Vektorlar sisteminin xətti asılılığı və xətti asılı olmaması

396. 1), 2) xətti asılıdır, 3) xətti asılı deyil. **409.** xətti asılıdır. **410.** xətti asılıdır. **411.** xətti asılıdır. **412.** xətti asılıdır, məsələn $a_3 = a_1 - 3a_2$. **413.** xətti asılı deyil. **414.** xətti asılı deyil. **415.** Xətti asılıdır: məsələn $a_3 = a_2 + 3a_1$. **416.** xətti asılıdır, məsələn $a_3 = 4a_1 - 3a_2$. **417.** xətti asılıdır, məsələn $a_1 = 2a_2 - 3a_3 + 4a_4$. **418.** xətti asılı deyil. **419.** xətti asılı deyil. **420.** xətti asılıdır, məsələn $a_3 = 2a_1 + 3a_2$. **421.** $\lambda \neq 3$ olduqda xətti asılı deyil. **422.** $\lambda \neq 2$. olduqda xətti asılı deyil. **423.** xətti asılıdır. **424.** xətti asılıdır. **425.** xətti asılı deyil. **426.** xətti asılıdır. **427.** xətti asılıdır. **428.** xətti asılı deyil. **429.** xətti asılıdır.

§11. Sonlu vektorlar sisteminin bazisi və ranqı.

433. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. 434. (1, -2, 1). 435. (1, 0, 1). 436. (3, 4, 2).
 437. (2, -3, 1). 438. (-3, 5, 2). 439. (1, 4, -2, 1). 440. (-1, 3, -2, 7). 441. n -ölçülü xətti fəzanın m -vektordan ibarət sistemi onda və yalnız onda xətti asılı deyil ki, bu vektorlar sisteminin ranqı m -ə bərabər olsun. 445. Bazis $a_1, a_2, a_3 = 2a_1 + a_2$.
 446. Bazis a_1, a_2, a_3 447. Bazis $a_1, a_2, a_3 = 2a_1 + a_2$. 448. Bazis $a_1, a_2, a_3 = a_1 + 3a_2$. 449. Bazis $a_1, a_2, a_3 = 3a_1 + a_2$.
 450. Bazis $a_1, a_2, a_3, a_4 = 4a_1 - a_3$. 451. λ -nın istənilən qiymətlərində. 452. $\lambda \neq 1$. 454. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = -2a_1 + a_2$. 455. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = -a_1 + a_2$. 456. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = -2a_1 + a_2$. 457. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = 2a_1 - 3a_2$. 458. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = 3a_1 - a_2$. 459. $\text{ranq} = 2$, bazis $a_1, a_2, a_3 = 3a_1 + a_2$.
 460. $\text{ranq} = 4$, bazis a_1, a_2, a_3, a_4 . 461. $\text{ranq} = 4$, bazis a_1, a_2, a_3, a_4 . 462. sistemin ixtiyarı iki vektoru. 463. məsələn, 1) a_1, a_2, a_3 ; 2) a_1, a_2, a_4 . 464. məsələn, 1) a_1, a_2, a_3 ; 2) a_1, a_2, a_4 ; 465. Bazis a_1, a_2, a_3, a_4 ; 466. verilmiş sistemin

özü. **467.** Bazis məsələni 1) a_1, a_2, a_3 ; 2) a_1, a_2, a_4 ; **473.**

$$L = \{\alpha - \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta\}.$$

$$\mathbf{474.} \quad L = \{\alpha - 2\beta + \gamma, -\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R\}.$$

$$\mathbf{475.} \quad L = \{\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 4\gamma, \alpha + \beta \mid \alpha, \beta, \gamma \in R\}.$$

$$\mathbf{476.} \quad L = \{2\alpha - \beta, -\alpha - 2\beta + \gamma, 3\alpha + 4\gamma, \alpha + 2\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R\}.$$

$$\mathbf{477} \quad L = \{\alpha + 2\beta - 2\gamma, \alpha + \beta, -\alpha + 3\gamma, 3\alpha + \beta + 4\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R\}$$

478. Daxildir, $x \in L$. **479.** Daxildir, $x \in L$. **480.** Daxil deyil,

$x \notin L$. **481.** Daxildir, $x \in L$. **482.** Daxildir, $x \in L$. **483.**

Daxildir, $x \in L$. **484.** Daxildir, $x \in L$. **485.** Daxil deyil, $x \notin L$.

486. Daxildir, $x \in L$. **487.** Daxildir, $a \in L$. **488.** Daxildir,

$a \in L$. **489.** Daxil deyil, $a \notin L$.

§12. Vektorlar fəzası – Xətti fəza

490. a), b), c)- Hə. **491.** yox. **492.** Yox. **493.** yox. **494.** Hə. **495.**

Yox. **496.** Hə. **497.** Yox. **498.** Hə. **499.** Hə. **500.** 2), 3), 4), 6),

7)-Hə, 1), 5)-Yox. **501.** İki n – tərtibli cırlaşmayan matrisin

cəmi cırlaşan ola bilər.

§13. Xətti vektor fəzanın bazisi, ölçüsü və xassələri.

$$\mathbf{502.} \quad a_1 = (3, -2, 1), \quad a_2 = (-2, 5, 0), \quad a_3 = (3, 2, 1).$$

$$\mathbf{503.} \quad x = (5, -4). \quad \mathbf{504.} \quad x = (-4, 7). \quad \mathbf{505.} \quad x = (1, -2, 3). \quad \mathbf{506.}$$

$$x = (2, 1, 3). \quad \mathbf{507.} \quad x = (3, -1, 2). \quad \mathbf{508.} \quad x = (4, -3, 2). \quad \mathbf{509.}$$

$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = 6$. **510.** $\lambda^3 - 2\lambda = 0$. **513.** a)(2,3,1);
 b)(4,3,0); c)(-6,-1,1). **514.** a)(4,-1,2); b)(2,3,1); c)(8,5,0). **515.**
 a)(-7,0,3); b)(1,-3,4); c)(-3,2,0). **516.** a)(-1,4,-2,3); b)(4,7,0,0);
 c)(-3,1,1,1). **517.** a)(-2,-3,1,5); b)(-5,0,2,0); c)(-6,-3,2,1). **518.**
 Bazis, məsələn $a_1, a_2, a_3 = (0, 0, 1)$. **519.** Bazis, məsələn
 $a_1, a_2, a_3 = (0, 1, 0)$. **520.** Bazis, məsələn $a_1, a_2, a_3 = (0, 0, 1, 0)$,
 $a_4 = (0, 0, 0, 1)$. **521.** Bazis, məsələn
 $a_1, a_2, a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$. **522.** Tamamlamaq
 olmaz. **523.** Bazis, məsələn $a_1, a_2, a_3, a_4 = (0, 0, 0, 1)$. **524.**
 Tamamlamaq olmaz. **525.** $\dim U = 2$, bazis məsələn a_1, a_2 .
526. $\dim U = 3$, bazis məsələn a_1, a_2, a_3 . **527.** $\dim U = 3$,
 bazis məsələn a_1, a_2, a_3 . **528.** $\dim U = 3$, bazis məsələn
 a_1, a_2, a_3 . **529.** $\dim U = 4$, bazis məsələn a_1, a_2, a_3, a_4 . **530.**
 $\dim U = 3$, bazis məsələn a_1, a_2, a_4 . **531.** Bazis,
 a_1, a_2 ; $\dim U = 2$. **532.** Bazis, a_1, a_2 ; $\dim U = 2$. **533.** Bazis,
 a_1, a_2, a_3 ; $\dim L = 3$. **534.** Bazis, a_1, a_2, a_3 ; $\dim U = 3$. **535.**
 Bazis, a_1, a_2, a_3 ; $\dim U = 3$.

**§14. Vektorlar fəzasının xətti altfəzası. Xətti altfəzaların
 verilməsi üsulları. Altəfəzalar üzərində əməllər və xassələr.**

536. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = 1$. 537. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = 1$. 538. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = 2$. 539. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = n(n-1)$. 540. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = n$.

541. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$. 542. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$. 543.

yox. 544. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = n-1$. 545. $H\mathfrak{a}$, $\dim U = n-1$. 546. gətirmir. 547. $a = (1, -2, 1)$. 548.

$a_1 = (2, 3, 1, 0)$, $a_2 = (1, 2, 0, 1)$. 549.

$a_1 = (-1, 4, 3, 0)$, $a_2 = (-1, -1, 0, 1)$. 550. $a = (5, 11, 7)$.

551. $a_1 = (2, 1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 0, -5, 7)$. 552.

$a_1 = (-2, -3, -1, 1, 0)$, $a_2 = (-6, -5, -1, 0, 1)$.

553. $a_1 = (1, 5, 2, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0, 2)$.

554. $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. 555. $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

556. $3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. 557. $\begin{matrix} -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$.

558. $\begin{matrix} -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{matrix}$. 559. $\begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \end{matrix}$

560. $\begin{matrix} 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$. 561. $x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$.

$$562. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad 563. \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$564. \quad \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \quad 566. \quad \text{cəmin bazisi, məsələn}$$

$$a_1, a_2, b_1; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3. \quad \text{Kəsişmənin bazisi}$$

$$c = 3a_1 - a_2 = b_1 + b_2 = (2, 1, 2), \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1.$$

$$567. \quad \text{cəmin bazisi, məsələn } a_1, a_2, b_1; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3.$$

$$\text{Kəsişmənin bazisi } c = 2a_1 - a_2 = -b_1 + b_2 = (0, 3, -3),$$

$$\dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1. \quad 568. \quad \text{cəmin bazisi, məsələn}$$

$$a_1, a_2, b_1; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3. \quad \text{Kəsişmənin bazisi}$$

$$c = 3a_1 + 2a_2 = 3b_1 + 2b_2 = (1, 2, 3, -4), \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1.$$

$$569. \quad \text{cəmin bazisi, məsələn } a_1, a_2, b_1; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3.$$

$$\text{Kəsişmənin bazisi } c = -2a_1 + a_2 = 3b_1 + b_2 =$$

$$= (-1, 3, -4, -3). \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1. \quad 570. \quad \text{cəmin bazisi,}$$

$$\text{məsələn } a_1, a_2, b_2; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3. \quad \text{Kəsişmənin bazisi}$$

$$c = 2a_1 = b_1 + b_2 = (2, 4, 0, 2) \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1. \quad 571. \quad \text{cəmin}$$

$$\text{bazisi, məsələn } a_1, a_2, b_1; \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3. \quad \text{Kəsişmənin bazisi}$$

$$c = 4a_1 + a_2 = 4b_1 - b_3 = (5, 4, 3), \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1. \quad 572.$$

cəmin bazisi, məsələn a_1, a_2, b_2 ; $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3$. Kəsişmənin bazisi $c = (0, 1, 0)$, $\dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1$. **573.** cəmin bazisi, məsələn a_1, a_2, b ; $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 3$. Kəsişmənin bazisi $c = 3a_1 - 2a_2 = b_2 = (1, 2, -1)$. $\dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1$.

§15. Xətti çoxobrazlı.

577. $L(x): x = \alpha a + a_0, \alpha \in R$ məsələn, $a = (-1, 1, 1)$,

$a_0 = (-11, -9, 0)$. **578.** $L(x): x = \alpha a + a_0, \alpha \in R$

məsələn, $a = (5, 2, 3)$, $a_0 = (2, 3, 0)$. **579.**

$L(x): x = \alpha_1 a + \alpha_2 a_2 + a_0, \alpha_1, \alpha_2 \in R$ məsələn,

$a_1 = (-3, 2, 1, 0), a_2 = (6, -4, 0, 1), a_0 = (4, -3, 0, 0)$. **580.**

$L(x): x = \alpha a + a_0, \alpha \in R$ məsələn, $a = (2, 3, 1, 1)$,

$a_0 = \left(-1, \frac{3}{2}, -2, 0\right)$. **581.** $L(x): x = \alpha_1 a + \alpha_2 a_2 + a_0,$

$\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Məsələn, $a_1 = (-1, 1, 1, 0), a_2 = (2, -1, 0, 1)$,

$a_0 = (-7, 6, 0, 0)$ **582.** $L(x): x = \alpha_1 a + \alpha_2 a_2 + a_0, \alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Məsələn, $a_1 = (5, -3, 1, 0), a_2 = (-8, 5, 0, 1), a_0 = (1, -2, 0, 0)$.

$$583. \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \cdot 584. \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 = 3 \end{cases} \cdot 585. 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7.$$

$$586. x_1 - 2x_2 + x_3 = -4. \quad 587. \begin{cases} -4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$588. 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 + x_4 = 13. \quad 589. \begin{cases} 4x_1 - 3x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

592. kəsişir, $(-2, -5, -1)$. 593. kəsişir, $(1, 2, 0, 1)$. 594. kəsişir, $(0, 0, -5, 3)$. 595. kəsişir, $(3, -5, -2, 4)$. 596. kəsişmir. 597. kəsişir, $(1, -2, -4, 2, -3)$. 598. kəsişir, $(-1, 0, 2)$. 599. kəsişir, $(6, -2, 7)$. 600. kəsişir, $(3, 7, 4, -4)$. . 601. kəsişir, $(3, 5, -1, -2)$. 602. kəsişir, $(3, -1, 5, -5, 9)$.

§ 16. Matrislər üzərində əməllər

603. Ola bilər. 604. A matrisini C ilə toplamaq olar D və

$$B \text{ matrisləri ilə yox.} \quad 605. \quad 1) \begin{pmatrix} -4 & 7 & 7 \\ 21 & 6 & 20 \end{pmatrix}; \quad 2)$$

$$\begin{pmatrix} 5+4i & -3 \\ -3 & 5-4i \end{pmatrix}; \quad 3) \quad \begin{pmatrix} 2+4i & -6+3i \\ 2+4i & 6-3i \end{pmatrix}; \quad 4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -10 & 17 \\ -3 & -20 & 1 & 10 \end{pmatrix}. \quad 606. \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}. \quad 607. \quad 1) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 3 \\ 9 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 10 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$4) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ 608. } AB \text{ və } BA \text{ hasilləri onda və yalnız}$$

onda var ki, $A = A_{m \times n}, B = B_{n \times m}$ olsun. **609.**

$\forall m, n, l, k \quad A = A_{m \times n}, B = B_{n \times k}, C = C_{k \times l}$ olsun. **610.**

$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}, a, b$ -ixtiyarı ədədlərdir. **611.** 2), 3), 5), 6) var;

1), 4), 7), 8), 9), 10), 11) yoxdur. **612.** 1) hasilin i -ci və k -ci sətirləri yerini dəyişər; 2) hasilin i -ci sətirinin üzərinə k -ci sətirin λ skalyarına vurulmuşu əlavə olunar; 3) hasilin i -ci və k -ci sütunları yerini dəyişər; 4) hasilin i -ci sütununa k -ci sütunun λ skalyarına vurulmuşu əlavə olunar.

613. 1) A matrisini sağdan $(1, 0, \dots, 0)^T$ sütununa; 2) A matrisini soldan $(1, 0, \dots, 0)$ sətirinə. **614.** a) 1) yox, 2) hə, 3) hə,

4) yox, 5) hə, 6) hə; b) 2) $m \times n, n \times 1, m \times 1$; 3) $1 \times m, m \times n, 1 \times n$; 5) $1 \times n, n \times 1, 1 \times 1$; 6)

$$n \times 1, 1 \times m, n \times m. \quad \mathbf{617.} \quad m=10, n=4. \quad \mathbf{618.}$$

$$m=6, n=5, k=8. \quad \mathbf{619.} \quad 1) \text{ doğrudur, } AB=BA=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$2) \text{ doğru deyil. } \mathbf{620.} \quad (128). \quad \mathbf{621.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & -15 & 9 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{622.}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ 8 & -1 & 3 \\ 30 & -12 & -4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{623.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 14 & 7 & 9 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{624.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 1 & 13 & 1 \\ -7 & 29 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{625.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 6 & 26 & 4 \\ 14 & 24 & 11 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{626.} \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 17 & 13 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{627.} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{628.}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{629.} \quad \begin{pmatrix} 9 & -6 & -9 \\ 10 & -2 & -10 \\ -1 & 18 & 1 \\ 16 & -4 & -16 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{630.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 10 & 1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 16 & -20 & -16 \\ -8 & 30 & 8 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{631.}$$

$$\begin{pmatrix} 144 & 55 \\ -55 & -21 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{632.} \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{633.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n\text{-cüt olduqda,}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \quad n\text{-tək olduqda. } \mathbf{634.} \quad \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}. \quad \mathbf{635.} \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}. \quad \mathbf{636.} \quad \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{637.} \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{638.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{639.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{640.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 15 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{641.} \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -7 & -4 & 10 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{643.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{644.} \quad \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{645.} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{646.}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{647.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{649.} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{matrisi.} \quad \mathbf{650.}$$

$$A_{n \times m}^T. \quad \mathbf{653.} \quad n = m \text{ olduqda.} \quad \mathbf{654.} \quad a_{ik} = \begin{cases} 0, & i = k \text{ olarsa} \\ -a_{ki}, & i \neq k \text{ olarsa} \end{cases}.$$

$$\mathbf{655.} \quad 1) \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{656.} \quad 1) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 30 & 0 & 29 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 11 & 10 \\ -11 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$657. \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 13 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}. \quad 658. B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad 659. A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$660. 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 661. 1) \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}. \quad 662. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 663. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \quad 664. 1)$$

olmaz, çünki A və B matrislərinin ölçüləri müxtəlifdir; 2)

olmaz, A^T və B -nin ölçüləri müxtəlifdir; 3) olmaz, A və

B^T -nin ölçüləri müxtəlifdir; 4) olar, çünki AB hasili var; 5)

olmaz, çünki BA hasili təyin olunmayıb; 6) olar, çünki $A^T B$

hasili təyin olunub; 7) olmaz, çünki AB^T hasili təyin

olunmayıb; 8) olmaz, $A^T B^T$ hasili yoxdur; 9) olar, çünki

$$B^T A^T = B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} \text{ hasili var. } 665. \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}. \quad 666.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \\ -9 & -3 & 15 \end{pmatrix}. \quad 667. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -6 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

§17. Determinantlar

668. -3 . **669.** 1 . **670.** 82 . **671.** 0 . **672.** -1 . **673.** $-\cos 2\alpha$. **674.** 1 .
675. $-a^2 + abi$. **676.** 0 . **677.** $(a-b)^2$. **678.** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
679. $x_1 = -2; x_2 = 5$. **680.** $x_1 = 3; x_2 = 6$. **681.**
 $x_1 = -1; x_2 = 4$. **682. Göstəriş:** Kvadrat tənliyin həlli
düsturunda kökaltı ifadənin müsbət olduğunu yoxlayın. **683.** 9 .
684. 100 . **685.** 5 . **686.** 0 . **687.** 144 . **688.** 152 . **689.** -4 . **690.** 96 .
691. 0 . **692.** 0 . **693.** -18 . **694.** 22 . **695.** 7 . **696.** 5 . **697.** ax^2 . **698.**
 $(a-c)(b-c)(b-a)$. **699.** $x = 3$. **700.** $x = 5$. **701.**
 $x_1 = 0; x_2 = 1$. **702.** $x_1 = 1; x_2 = -9$. **703.** $x_1 = 5; x_2 = 1$. **704.**
 $x_1 = 1; x_2 = 3$. **705.** $x = -2$. **706.** $x_1 = 1; x_2 = 2$. **707.**
 $x_1 = -2; x_2 = 2$. **708.** $x = a_1; x = a_2, \dots, x = a_{n-1}$. **709.**
 $x = -1, \dots, -n+1$.

§18. Permutasiyalar, əvəzləmələr

710. 22 . **711.** 8 . **712.** 18 . **713.** 13 . **714.** 13 . **715.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **716.**
 $\frac{n(n+1)}{2}$. **717.** inversiyaların sayı $\frac{n(n-1)}{2}$ olan $n, n-1, \dots, 2, 1$
petmutasiya. **718.** inversiyaların sayı 1 vahid dəyişər. **719.**
 $n-2$. **720.** 1) $k=6, l=1$; 2) $k=8, l=1$; 3) $k=7, l=4$;
4) $k=4, l=3$. **721.** cüt. **722.** cüt. **723.** cüt. **724.** tək. **725.** tək.
727. tək. **728.** cüt. **729.** cüt. **730.** $dek=n$ n -tək(cüt) olduqda

təkdir(cütdür.)**731.** cüt. **732.** $dek=n$, əvəzləmənin cütlüyü n -nin cütlüyü ilə üst-üstə düşür. **733.** $dek=2n$, əvəzləmə cütdür.

§19. Kvadrat matrisin determinanti və xassələri

734. mənfi işarə ilə daxildi. **735.** mənfi işarə ilə daxildi. **736.** determinantın həddi deyil. **737.** müsbət işarə ilə n – tərtibli determinantın həddidir. **738.** $(-1)^n$ işarəsi ilə n – tərtibli determinantın həddidir. **739.** $i = 2, k = 6$. **740.** $i = 1, k = 7$.

741. a) $(n-1)!(n-1)$; b) 1. **742.** 1) müsbət; 2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ **754.**

Tutaq ki, göstərilən çevirmələr nəticəsində d – determinantı

alınıb: onda 1) $d = (-1)^n \Delta$; 2) $d = \bar{\Delta}$; 3) $d = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; 4) $d = \Delta$; 5) $d = 0$. **755.** 1, 0 və ya -1. **756.** 0. **758.**

$\det(AB)^{-1} = \det B^{-1} \cdot \det A^{-1}$. **760.** -60. **761.** $\frac{\Delta}{m}$. **762.** 2, 3, -3.

763. 3, 4, -1. **764.** -6, 2, 3. **765.** 1, 9, -5. **766.** 3, 3, -2. **767.** 0, 0,

6. **768.** 1, 4, -4. **769.** $x = 3$. **770.** $x = 11$. **771.**

$x = 4, x = 5, x = 6$. **772.** $x = 3$. **774.** 128. **775.** -32. **776.** 12.

777. 15. **778.** 21. **779.** 20. **780.** 3072. **781.** 20. **782. Göstəris:**

Birinci sütunu 100-ə, ikinci sütunu 10-a vurub, alınan sütunları

axıncı sütuna əlavə edin. **785.** 1. **786.** $n(-1)^{n-1}$. **787.**

$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. **Göstəris:** hər bir sətirdən əvvəlkini

çıxmalı, sonra sonuncu sütunu əvvəlki sütunların üzərinə əlavə etməli.

§20. Determinantların hesablanması üsulları

788. 4. 789. -14. 790. 0. 791. -40. 792. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
 793. $2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc$. 794. 20. 795. -24. 796. -11.
 797. 0. 798. 48. 799. 258. 800. 94. 801. 21. 802. $(n-1)!$. 803.
 $(-1)^n(1-2n)$. 804. $2[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]$. 805. $(-2)^{n-1}(5n-2)$.
 806. $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$. 807. $2^{n-1}(3n+2)$. 808. 21. 809. -4. 810.
 $(-1)^{n-1}[1 + (n-1)2]$. 811. $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)$.
 812. $n+1$. 813. $2^{n+1} - 1$.

§21. Minorlar və cəbri tamamlayıcılar.

Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı

814. a) -25; b) 2. 819. 22. 820. 1. 821. -171. 822. -3. 823. 4.
 824. 64. 825. -117. 826. -25. 827. 264. 828. -30. 829. -236.
 830. 98. 831. 84. 832. -14. 833. 48. 834. -26. 835. -7. 836. 4.
 837. 0. 838. 7. 839. 14. 840. 0. 841. 25. 842. 261. 843. 1. 844.
 0. 845. 25

§22. Tərs matris. Matris tənliklər

850. 1) $\lambda = -6$; 2) $\lambda = 11$; 3) $\lambda = 4$; 4) *ixtiyari* λ üçün.
 851. doğrudur. 852. doğrudur. 853. doğru deyil. 854. doğrudur.

856. $AB = E$ düzbucaqlı matrislər üçün ola bilər. Məsələn,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{858.} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{859.} \quad \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{860.} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{861.} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{862.} \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -11 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{863.} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{864.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{865.} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{866.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{867.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 18 & -15 \\ -1 & 7 & -6 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{868.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 24 & 52 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 10 & 21 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{869.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{870.} \quad \begin{pmatrix} -6 & 14 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -7 & 17 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$871. \begin{pmatrix} 12 & -57 & -34 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & -19 & -11 \end{pmatrix}. 872. \begin{pmatrix} -6 & 13 & -26 \\ -1 & 2 & -4 \\ 10 & -21 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$873. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. 874. \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -9 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$875. \begin{pmatrix} 19 & 54 & 18 \\ 1 & 3 & 1 \\ -14 & -40 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$876. x \neq \frac{5}{6}, A^{-1} = \frac{1}{6x-5} \begin{pmatrix} 6 & 8 & -7 \\ -1 & 2x-3 & 2-x \\ -9 & -12 & 3x+8 \end{pmatrix}.$$

$$877. x \neq \frac{13}{12}, A^{-1} = \frac{1}{-12x+13} \begin{pmatrix} 6 & 8 & -4x-3 \\ -4+3x & -1 & 2-x \\ -9 & -12 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$878. \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. 879. \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

$$880. \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. 881. 1) \det A = 0 \text{ olarsa, onda } A^{-1}$$

yoxdur, əgər $\det A \neq 0$ olarsa, onda $A = E = A^{-1}$; 2) $-A + 7E$;

3) $-(A + 3E)$; 4) $-A^2 - 4A + E$; 5) $A^2 - 3A + 2E$. 886.

$$(4A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$887. (6A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 \\ -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$888. (3A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$892. X = BC^{-1}A. \quad 894. X = BA^2B \quad 895. X = (4A^2 + 5A)^{-1}.$$

$$896. \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}. \quad 897. \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}. \quad 898. \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -25 & 28 \end{pmatrix}. \quad 899.$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}. \quad 900. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 8 & 15 & 10 \end{pmatrix}. \quad 901. \begin{pmatrix} 59 & 7 & -76 \\ -63 & -7 & 80 \\ -45 & -5 & 58 \end{pmatrix}.$$

$$902. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 903. \begin{pmatrix} -5 & 22 & 1 \\ -7 & 29 & 3 \\ 10 & -40 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$904. \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 \\ 9 & -6 & -11 \end{pmatrix}. \quad 905. \begin{pmatrix} 6 & 10 & 23 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$906. \begin{pmatrix} -1 & -9 & -2 \\ 17 & 35 & 15 \\ 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}. \quad 907. \begin{pmatrix} 6 & 26 & -12 \\ 11 & 56 & -23 \\ 9 & 47 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$908. -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -18 & 11 \\ -1 & 5 & -11 \\ -11 & 22 & -33 \end{pmatrix}.$$

$$909. -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 12 & 4 \\ 11 & -9 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$910. X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 29 & -50 \\ 18 & -31 \end{pmatrix}.$$

$$911. X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} -13 & 23 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$912. X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}. 913. X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ -7 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$914. X = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & 3 \\ 28 & -35 \end{pmatrix}. 915. X = \begin{pmatrix} 5\alpha+3 & 5\beta+1 \\ 2\alpha+1 & 2\beta+1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \in R.$$

$$916. \text{.Həlli yoxdur. } 917. X = \begin{pmatrix} -8\alpha+3 & -8\beta+2 \\ 3\alpha-1 & 3\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \in R.$$

$$918. X = \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & 2\beta+1 \\ 7\alpha+1 & 7\beta+3 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \in R$$

§23. Matrisin ranqı və xassələri

923. 2. 924. 2; 2. 925. 2; 2. 926. 2; 2. 927. 3. 928. 3. 929. 2.

930. 3. 931. 3. 932. 2. 933. 4. 934. 3. 935. 2. 936. 3. 937. 2.

938. 2. 939. 3. 940. 3. 941. 2. 942. 3. 943. $\lambda = 4$ olduqda ranq ikiyə, $\lambda \neq 4$ olduqda ranq üçə bərabərdir. 944. $\lambda = 2$ olduqda ranq ikiyə, $\lambda \neq 2$ olduqda ranq üçə bərabərdir. 945. $\lambda = 4$ olduqda ranq ikiyə, $\lambda \neq 4$ olduqda ranq 3 - ə bərabərdir. 946. $\lambda = -4$ olduqda ranq üçə, $\lambda \neq -4$ olduqda ranq dördə bərabərdir. 947. $\lambda = 5$ olduqda ranq ikiyə, $\lambda \neq 5$ olduqda ranq üçə bərabərdir. 948. $\lambda(\lambda - 3) \neq 0$ olduqda ranq üçə $\lambda(\lambda - 3) = 0$ olduqda ranq ikiyə bərabərdir. 949. $\lambda = 3$ olduqda ranq ikiyə, $\lambda \neq 3$ olduqda ranq üçə bərabərdir. 950. $|r(A) - r(B)| \leq r(C) \leq r(A) + r(B)$. 951. $0 \leq r(C) \leq \max(r(A), r(B))$. 952. $r(A)$. 953. $r(A) = r(B) = 2$.

§24. Xətti tənliklər sistemi.

954. Sistem qeyri-müəyyəndir. 955. Sistem birgə deyil. 956. sistem $a \neq \pm 6$ olduqda müəyyəndir, $a = 6$ olduqda qeyri-müəyyəndir, $a = -6$ olduqda birgə deyil. 957. sistem həmişə birgədir, $ac - b^2 \neq 0$ olduqda müəyyəndir, $ac - b^2 = 0$ olduqda qeyri-müəyyəndir. 958. Sistem qeyri-müəyyəndir. 959. Sistem müəyyəndir. 960. Sistem müəyyəndir. 961. Sistem qeyri-müəyyəndir. 962. Sistem birgə deyil. 963. Sistem birgə

deyil. **964.** Sistem müəyyəndir. **Göstəriş:**

$$\frac{x}{a} = x', \frac{y}{b} = y', \frac{z}{c} = z' \text{ əvəzləməsi aparmaqla sistemi həll}$$

etməli. **965.** Sistem qeyri-müəyyəndir.

§ 25. Xətti tənliklər sistemini Qaus üsulu (məchulların ardıcıl aradan çıxarılması) üsulu ilə həlli.

966. sistemin yeganə həlli var: (1, -1, 3). **967.** sistemin yeganə

həlli var: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **968.** sistemin həlli yoxdur. **969.** Sistem

qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll

$$x_1 = \frac{3 - 3x_3}{2}, x_2 = \frac{-17 + 9x_3}{2}, x_3 - \text{sərbəst məchuldur.}$$

970. sistemin həlli yoxdur. **971.** sistemin yeganə həlli var:

$\left(\frac{37}{22}, 0, \frac{2}{11}, \frac{6}{11}\right)$. **972.** Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn,

$$\text{ümumi həll } x_1 = \frac{31}{6} + \frac{1}{2}x_4, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{7}{6} - \frac{1}{2}x_4,$$

$x_4 - \text{sərbəst məchuldur. 973. sistemin yeganə həlli var: (1, 1, -}$

$2, -1)$. **974.** sistemin yeganə həlli var: (2, -1, 1, 2). **975.**

sistemin yeganə həlli var: (5, -3, -3, -3). **976.** sistemin yeganə

həlli var: (1, -1, 1, -2). **977.** Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn,

$$\text{ümumi həll } x_1 = 6 - 26x_3, x_2 = -1 + 7x_3, x_4 = 0,$$

x_3 – sərbəst məchuldur. **978.** Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = -2 + 3x_3$, $x_4 = 4 - 3x_3$,

x_3 – sərbəst məchuldur. **979.** sistemin həlli yoxdur. **980.** sistemin yeganə həlli var: (1, 2, -4, -3). **981.** sistemin həlli yoxdur. **982.** Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll

$$x_1 = \frac{2 + 41x_4}{21}, \quad x_2 = \frac{-11 - 5x_4}{21}, \quad x_3 = \frac{4 + 7x_4}{3},$$

x_4 – sərbəst məchuldur. **983.** sistemin yeganə həlli var: (4, 1, -1, 0). **984.** Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll

$$x_1 = \frac{11 + 4x_3}{7}, \quad x_2 = \frac{1 - 13x_3}{7}, \quad x_4 = 0, \quad x_3 \text{ – sərbəst}$$

məchuldur. **985.** sistemin yeganə həlli var: (-1, 3, -2, 2). **986.**

sistemin yeganə həlli var: (2, 1, -3, 1). **987.** sistemin yeganə

həlli var: (-2, 1, 4, 3). **988.** sistemin yeganə həlli var:

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right). \quad \mathbf{989.} \quad \text{sistemin yeganə həlli var:}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 2, -3\right). \quad \mathbf{990.} \quad \text{sistemin yeganə həlli var: (1, 0, 3, 1).}$$

991. Sistem qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll

$$x_1 = \frac{-11 - 48x_5}{5}, \quad x_2 = \frac{18 - x_5}{5}, \quad x_3 = x_5, \quad x_4 = \frac{-2 + 4x_5}{5},$$

x_5 – sərbəst məchuldur. **992.** sistemin yeganə həlli var:

$(5, 4, -3, 3, -2)$. **993.** sistemin yeganə həlli var: $(1, 3, -2, 1,$

$1)$. **994.** sistemin yeganə həlli var: $(2, 1, 1, 2, -1)$. **995.** Sistem

qeyri-müəyyəndir, məsələn, ümumi həll

$$x_1 = -\frac{13}{8} - \frac{3}{4}x_4 - \frac{29}{8}x_5, \quad x_2 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{35}{8}x_5,$$

$$x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_5, \quad x_4, x_5 \text{ – sərbəst məchuldur. } \mathbf{996.}$$
 Sistem

qeyri-müəyyəndir, məsələn ümumi həll

$$x_1 = \frac{1}{12} + \frac{11}{12}x_5, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_5, \quad x_4 = 1, \quad x_5 \text{ – s}$$

ərbəst məchuldur. **997.** sistemin yeganə həlli var: $(-13, 25, -8, -$

$2, -1)$. **998.** sistemin yeganə həlli var: $(2, -3, 4, 3, 1)$. **999.**

sistemin yeganə həlli var: $\left(-\frac{17}{3}, \frac{44}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -2\right)$. **1000.**

sistemin yeganə həlli var: $(3, -5, 4, -2, 1)$. **1001.** sistemin həlli

yoxdur. **1002.** sistemin ümumi həll məsələn,

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1+3x_3-3x_4}{6}, \quad x_3, x_4 \text{ – sərbəst}$$

məchuldur. Xüsusi həll $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2, 1\right)$. **1003.** sistemin ümumi

həlli: $x_1 = 1 + x_3, \quad x_2 = -1 - 4x_3, \quad x_3 \text{ – sərbəst məchuldur;}$

xüsusi həlli (2, -5, 1). **1004.** sistemin yeganə həlli var: (1, 2, -2, $\frac{1}{3}$). **1005.** sistemin ümumi həll

$$x_1 = \frac{-71 + 43x_4}{15}, \quad x_2 = \frac{49 - 32x_4}{15}, \quad x_3 = \frac{2 - 13x_4}{6},$$

x_4 – sərbəst məchuldur; xüsusi həll (1, -1, -4, 2). **1006.** sistemin ümumi həll məsələn,

$$x_1 = -\frac{125}{13} + \frac{25}{13}x_5, \quad x_2 = \frac{40}{13} - \frac{14}{65}x_5, \quad x_3 = \frac{7}{3} - \frac{13}{15}x_5,$$

$x_4 = -\frac{28}{3} + \frac{37}{15}x_5$, x_5 – sərbəst məchuldur. Xüsusi həll (-0, 2, -2, 3, 5). **1007.** sistemin ümumi həlli, məsələn,

$$x_1 = -3 + 3x_4, \quad x_2 = \frac{-7 + 7x_4}{4}, \quad x_3 = \frac{1 + 3x_4}{4}, \quad x_4 \text{ – sərbəst}$$

məchuldur. Xüsusi həll (0, 0, 1, 1). **1008.** sistemin ümumi həll

$$\text{məsələn, : } x_1 = \frac{10 + 13x_4}{48}, \quad x_2 = \frac{10 - 11x_4}{16}, \quad x_3 = \frac{2 - x_4}{4},$$

x_4 – sərbəst məchuldur. Xüsusi həll $\left(-\frac{1}{3}, 2, 1, -2\right)$. **1009.**

sistemin ümumi həll məsələn, $x_1 = -2 - 4x_4$, $x_2 = 3$,

$x_3 = 1 + 3x_4$, x_4 – sərbəst məchuldur. Xüsusi həll (-6, 3, 4,

1). **1010.** sistemin ümumi həll məsələn,

$$x_1 = \frac{-1+5x_4}{2}, x_2 = \frac{-3+3x_4}{2}, x_3 = \frac{-1+3x_4}{2}, x_4 - \text{sərbəst}$$

məchuldur. Xüsusi həll (7,3,4,3). **1011.** sistemin yeganə həlli

var: $\left(0, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$. **1012.** sistemin yeganə həlli var: (1, 2, -4,

-3). **1013.** sistemin ümumi həll məsələn,

$$x_1 = -\frac{27+13x_4}{7}, x_2 = \frac{17+3x_4}{7}, x_3 = \frac{29+8x_4}{7}, x_4 - \text{sərbəst}$$

t məchuldur. Xüsusi həll (-2,2,3,-1). **1014.** sistemin ümumi

həll: $x_1 = 2 + x_3 - x_4, x_2 = -1 + x_3 + 2x_4 - x_5$. Xüsusi

həll (-1,-3,-2,1,2). **1015.** sistemin yeganə həlli var: $\left(2, -\frac{3}{2}, 4,$

$3, \frac{5}{2}\right)$. **1016.** sistemin həlli yoxdur. **1017.** sistemin yeganə həlli

var: (1, 0, -1, 1, 1). **1018.** sistemin ümumi həll məsələn,

$$x_1 = \frac{1+11x_5}{12}, x_2 = -1, x_3 = \frac{-1+4x_5}{3}, x_4 = 1,$$

x_5 –sərbəst məchuldur. Xüsusi həll (1,-1,1,1,1). **1019.**

sistemin yeganə həlli var: (-11, -13, -5, 44, -2). **1020.**

$\lambda(\lambda-3) \neq 0$ olduqda sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = \frac{1}{\lambda-3}, x_2 = \frac{\lambda-6}{\lambda(\lambda-3)}, x_3 = 0. \quad \lambda(\lambda-3) = 0 \quad \text{olduqda}$$

sistemin həlli yoxdur. **1021.** $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ olduqda

sistemin yeganə həlli var: $x_1 = \frac{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}{(\lambda + 3)(\lambda - 1)}$, $x_2 = \frac{2(\lambda - 3)}{(1 - \lambda)(\lambda + 3)}$,

$x_3 = \frac{2}{\lambda + 3}$. $(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$ olduqda sistemin həlli yoxdur.

1022. $\lambda \neq 0$ olduqda sistemin yeganə həlli var: $x_1 = \frac{1}{4\lambda}$,

$x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = 1$, $\lambda = 0$ olduqda sistemin həlli yoxdur. **1023.**

$\lambda \neq 1$ olduqda sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = \frac{(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \lambda^2}{2}, \quad x_3 = -\frac{\lambda^2 + 1}{2}, \quad \lambda = 1$$

olduqda sistem qeyri-müəyyəndir, həlli $x_1 = 2 - x_2$, $x_3 = -1$

şəklindədir, x_2 – sərbəst məchuldur. **1024.** $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$

olduqda sistemin yeganə həlli var: $x_1 = 2 - \lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$

$x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda = 0$ olduqda ümumi həll

$x_1 = -x_2 - x_3$ şəklindədir, x_2 , x_3 – sərbəst

məchuldur. $\lambda = -3$ olduqda ümumi həll $x_1 = x_2 = x_3$ şəklində

x_3 sərbəst məchuldur. **1025.** λ -ixtiyarı qiymətində qeyri-

birgədir. **1026.** $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$ olduqda sistemin yeganə

həlli var: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}$, $\lambda = 1$ olduqda

$x_1 = 1 - x_2 - x_3$ şəklində ümumi həlli var, x_2, x_3 – sərbəst məchullardır. $\lambda = -2$ olduqda sistemin həlli yoxdur. **1027.**

$\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ olduqda sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}, x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}, x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}.$$

$\lambda(\lambda + 3) = 0$ olduqda sistemin həlli yoxdur. **1028.** $\lambda = 1$

olduqda sistemin həlli yoxdur. $\lambda \neq 1$ olduqda sistemin ümumi

həlli: $x_1 = \frac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \frac{9}{8}x_3$, $x_2 = \frac{5}{4 - 4\lambda} + \frac{1}{4}x_3$,

$x_4 = \frac{5}{\lambda - 1}$, x_3 -sərbəst məchuldur. **1029.** sistem λ -nın ixtiyarı

qiymətində birgədir. $\lambda = 8$ olduqda ümumi həlli

$x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, x_1, x_4 – sərbəst

məchullardır, $\lambda \neq 8$ olduqda ümumi həlli

$x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, x_4 – sərbəst

məchuldur. **1030.** sistem λ -nın ixtiyarı qiymətində birgədir.

$\lambda = 8$ olduqda ümumi həlli $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \frac{3}{2}x_2$,

x_1, x_2 – sərbəst məchullardır. $\lambda \neq 8$ olduqda ümumi həlli

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0, \quad x_1 - \text{sərbəst məchuldur.}$$

1031. $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ olduqda sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}. \quad \lambda = 1 \text{ olduqda ümumi həlli}$$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ şəklindədir, x_2, x_3, x_4 – sərbəst məchullardır. $\lambda = -3$ olduqda sistemin həlli yoxdur. **1032.**

$(\lambda - 1)(2\lambda + 1) \neq 0$ olduqda sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = \frac{\lambda - 4}{2\lambda + 1}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = \frac{3}{2\lambda + 1}. \quad \lambda = 1 \text{ olduqda ümumi}$$

həlli $x_1 = -1, x_2 = 3 - x_3 - x_4, \lambda = -\frac{1}{2}$ olduqda sistemin

həlli yoxdur. **1033.** sistemin yeganə həlli var:

$$x_1 = -\frac{(\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda - 3)}{12}, \quad x_2 = -\frac{(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{20},$$

$$x_3 = \frac{(\lambda^2 - 4)(\lambda - 3)}{12}, \quad x_4 = \frac{(\lambda^2 - 4)(\lambda + 1)}{20}. \quad \mathbf{1034.} \quad \lambda = 5$$

olduqda qeyri-müəyyəndir, ümumi həlli: $x_1 = \frac{18 + 53x_4}{8},$

$$x_2 = \frac{10 - 35x_4}{8}, \quad x_3 = \frac{-10 - 5x_4}{8}, \quad x_4 - \text{sərbəst məchuldur.}$$

$\lambda \neq 5$ olduqda sistemin həlli yoxdur. **1035.** $\lambda = 22$ olduqda

həlli yoxdur. $\lambda \neq 22$ olduqda yeganə həlli var.

$$x_1 = \frac{70-3\lambda}{9(22-\lambda)}, x_2 = -\frac{1}{3(22-\lambda)}, x_3 = -\frac{5}{22-\lambda},$$

$$x_4 = \frac{1}{22-\lambda}. \quad \mathbf{1036.} \quad (\lambda-2)(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) \neq 0 \quad \text{olduqda}$$

$$\text{sistemin yeganə həlli var: } x_1 = 0, x_2 = \frac{2\lambda}{(\lambda-1)(2\lambda+3)},$$

$$x_3 = -\frac{2}{(\lambda-1)(2\lambda+3)}, x_4 = \frac{1}{2\lambda+3}. \quad \lambda = 1 \text{ olduqda həlli yoxdur,}$$

$\lambda = 2$ olduqda sistem qeyri-müəyyəndir: ümumi həll

$$x_1 = \frac{4}{7} - x_2, x_3 = -\frac{2}{7}, x_4 = \frac{1}{7}, x_2 - \text{sərbəst məchuldur.}$$

$$\lambda = -\frac{3}{2} \text{ olduqda sistemin həlli yoxdur. } \mathbf{1037.} \quad \lambda = 0 \text{ olduqda}$$

$$\text{qeyri-müəyyəndir, ümumi həlli: } x_1 = -\frac{3+5x_3+13x_4}{2},$$

$$x_2 = -\frac{7+7x_3+19x_4}{2}. \quad \lambda \neq 0 \text{ olduqda sistemin həlli yoxdur.}$$

1038. sistemin yeganə həlli var: (1, 2, 2). **1039.** sistem qeyri-

müəyyəndir, ümumi həlli: $x_1 = 1 + x_3, x_2 = 3 - 2x_3, x_3 -$

sərbəst məchuldur. **1040.** sistemin yeganə həlli var: (1, -5, 1).

$$\mathbf{1041.} \text{ sistemin yeganə həlli var: } \left(\frac{31}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, 0\right). \quad \mathbf{1042.}$$

sistemin yeganə həlli var: $(0, 0, 0, 2, -3)$. **1043.** sistem qeyri-müəyyəndir, ümumi həlli: $x_1 = 1 + x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -2 + x_4$, x_4 – sərbəst məchuldur. **1044.** sistemin yeganə həlli var: $(2, 0, 1, -1)$. **1045.** sistemin yeganə həlli var: $(1, 2, 3, -3)$. **1046.** sistemin yeganə həlli var: $(1, -1, 1, -1, 1)$. **1047.** sistemin həlli yoxdur. **1048.** sistemin yeganə həlli var: $(0, 2, -2, 0, 3)$. **1049.** sistemin yeganə həlli var: $(2, 0, -2, -2, 1)$. **1050.** sistem qeyri-müəyyəndir, ümumi həlli: $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{12}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{7}{8}x_5$, $x_4 = 1 - \frac{1}{2}x_5$, x_2, x_3, x_5 – sərbəst məchullardır.

§26. Bircins xətti tənliklər sistemi.

Aşağıdakı bircins xətti tənliklər sistemlərindən hansının sıfırdan fərqli həlli var?

1051. sistemin yalnız sıfır həlli var. **1052.** sistemin yalnız sıfır həlli var. **1053.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1054.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1055.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1056.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1057.** sistemin yalnız sıfır həlli var. **1058.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1059.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1060.** sistemin sıfırdan fərqli həlli var. **1061.** $\dim U = 2$. **1062.** $\dim U = 1$. **1063.**

$\dim U = 2$. **1064.** $\dim U = 2$. **1065.** $\dim U = 0$. **1066.**

$\dim U = 3$. **1067.** $\dim U = 3$. **1068.** $\dim U = 2$.

1069. sistemin yalnız sıfır həlli var, f.h.s. yoxdur.

1070. ümumi həlli: $x_2 = -2x_1, x_3 = 0$,

F.h.s:

| x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|-------|-------|
| 1 | -2 | 0 |

1071. sistemin yalnız sıfır həlli var, f.h.s. yoxdur.

1072. ümumi həlli: $x_2 = 2x_1 + 5x_3$, F.h.s :

| x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 0 |
| 0 | 5 | 1 |

1073. sistemin yalnız sıfır həlli var,

f.h.s.yoxdur.

1074. ümumi həlli:

$$x_1 = -\frac{1}{9}(x_3 + 4x_4 + 7x_5),$$

$$x_2 = \frac{1}{9}(5x_3 + 2x_4 - x_5), \text{ f.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 4 | -2 | -7 | 5 | -7 |
| 6 | 2 | 3 | -2 | -7 |
| 8 | 0 | -5 | 6 | -13 |

1075. ümumi həlli:

$$x_1 = -10x_2 - 2x_4,$$

$$x_3 = 7x_2 + x_4, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| -10 | 1 | 7 | 0 |
| -2 | 0 | 1 | 1 |

1076. ümumi həlli: $x_1 = -4x_3 - 3x_4,$

$$x_2 = -\frac{7x_3 + 5x_4}{2}, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| -8 | -7 | 2 | 0 |
| 6 | 5 | 0 | -2 |

1077. ümumi həlli: $x_1 = -3x_4,$

$$x_2 = -2x_3 - 6x_4, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| 0 | -2 | 1 | 0 |
| 3 | -6 | 0 | 1 |

1078. ümumi həlli: $x_1 = -\frac{11}{10}x_4,$

$$x_2 = \frac{1}{10}x_4, x_3 = \frac{1}{5}x_4, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| -11 | 1 | 2 | 10 |

1079. ümumi həlli:

$$x_1 = 8x_2,$$

$$x_3 = -5x_2,$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| 8 | 1 | -5 | 0 |

$$x_4 = 0 \quad \text{F.h.s :}$$

1080. sistemin yalnız sıfır həlli var, f.h.s. yoxdur.

1081. ümumi həlli:

$$x_1 = 13x_3, \quad x_2 = -39x_3,$$

$$x_4 = -10x_3, \quad \text{F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| 13 | -39 | 1 | -10 |

1082. ümumi həlli:

$$x_1 = 2x_4, \quad x_2 = 3x_4,$$

$$x_3 = -7x_4, \quad \text{F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 3 | -7 | 1 |

1083. sistemin yalnız sıfır həlli var, f.h.s. yoxdur.

1084. ümumi həlli: $x_1 = \frac{11}{3}x_5,$

$$x_2 = -\frac{5}{3}x_5, \quad x_3 = -\frac{14}{3}x_5,$$

$$x_4 = \frac{7}{3}x_5, \quad \text{F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 11 | -5 | -14 | 7 | 3 |

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | -6 | 0 | 4 | 0 |

1085. ümumi həlli:

$$x_1 = \frac{11x_3 + 3x_4 - x_5}{4},$$

$$x_2 = \frac{-5x_3 - 3x_4 + x_5}{2}.$$

| | | | | |
|----|-----|---|---|---|
| -1 | 2 | 0 | 0 | 4 |
| 11 | -10 | 4 | 0 | 0 |

1086. ümumi həlli: $x_2 = 0$,

$$x_4 = 2x_1 + 3x_3, \quad x_5 = 0$$

F.h.s:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |

1087. ümumi həlli:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = -x_5, \quad x_3 = -x_6,$$

$$x_4 = 0, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |

1088. ümumi həlli:

$$x_1 = \frac{2}{7}x_3 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{3}{7}x_3 + x_5,$$

$$x_4 = -\frac{1}{7}x_3, \text{ F.h.s:}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 4 | 7 | -1 | 1 |
| -2 | 2 | 0 | 0 | 2 |

1089. ümumi həlli:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$x_1 = x_5, x_2 = x_5, x_3 = x_5,$$

$$x_4 = x_5, \text{ F.h.s:}$$

1090. ümumi həlli:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_4, x_2 = 0,$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | -3 | 2 | 0 |

$$x_3 = -\frac{3}{2}x_4, x_5 = 0, \text{ F.h.s:}$$

1091. ümumi həlli:

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{7}x_5, x_3 = \frac{2}{7}x_5,$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | -5 | 2 | 0 | 7 |

$$x_4 = 0, \text{ F.h.s:}$$

1092. ümumi həlli:

$$x_1 = x_3, x_2 = x_4 = x_5 = 0,$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

F.h.s :

1093. yox. **1094.** yox. **1095.** hə. **1096.** hə. **1097.** hə. **1098.**

$$x_1 = -23c, x_2 = -14c, x_3 = 4c, c \text{ ixtiyari sabitdir. } \mathbf{1099.}$$

$$x_1 = c, x_2 = 2c, x_3 = 0, x_4 = 0, c \text{ ixtiyari sabitdir. } \mathbf{1100.}$$

$x_1 = 2c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = 3c_3, \quad x_4 = -3c_1 - c_2 - 4c_3,$
 $x_5 = -c_3, c$ ixtiyari sabitdir. **1101.** $x_1 = 10c_1 - 3c_2, \quad x_2 = 0,$
 $x_3 = -24c_1 + 3c_2, x_4 = 3c_1, x_5 = c_2, c$ ixtiyari sabitdir. **1102.**
 $x_1 = 2c_1 - c_2, \quad x_2 = 3c_1 + c_2, \quad x_3 = 7c_1, \quad x_4 = -c_1, \quad x_5 = c_2,$
 c ixtiyari sabitdir. **1103.** $x_1 = c, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -3c,$
 $x_4 = 2c, \quad x_5 = 0, c$ ixtiyari sabitdir. **1104.** $x_1 = 4c_1,$
 $x_2 = 2c_2, \quad x_3 = c_3, \quad x_4 = -(9c_1 + 3c_2 + 2c_3),$
 $x_5 = 3c_1 + c_2 + c_3, c$ ixtiyari sabitdir. **1105.** $x_1 = 6c,$
 $x_2 = -11c, \quad x_3 = 9c, \quad x_4 = -4c, c$ ixtiyari sabitdir. **1106.**
 $x_1 = 3c, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 4c, \quad x_4 = 0, c$ ixtiyari sabitdir. **1107.**
 $x_1 = -c_1 - 4c_2 - 7c_3, \quad x_2 = 5c_1 + 2c_2 - c_3, \quad x_3 = 9c_1,$
 $x_4 = 9c_2, \quad x_5 = 9c_3, c$ ixtiyari sabitdir.

§ 27. Bircins olmayan xətti tənliklər sisteminin həllər çoxluğunu xətti çoxobrazlı şəklində göstərilməsi

1108. sistemin ümumi həlli: $x_1 = -1 - 13x_3, \quad x_2 = 1 + 6x_3$
 həllər çoxobrazlısı $(12, -5, -1) + L((-13, 6, 1))$. **1109.** sistemin
 ümumi həlli: $x_1 = \frac{-6 + 8x_4}{7}, \quad x_2 = \frac{1 - 13x_4}{7}, \quad x_3 = \frac{15 - 6x_4}{7},$
 həllər çoxobrazlısı $(-2, 2, 3, -1) + L((8, -13, -6, 7))$. **1110.**

sistemin ümumi həlli: $x_1 = 4 - 3x_4$, $x_2 = 2 - 3x_4$,

$x_3 = -17 + 20x_4$ həllər çoxobrazlısı $(1, -1, 3, 1) + L((-3, -3, 20, 1))$. **1111.** sistemin yegənə həlli var : $(-1, 2, 0, 3)$. **1112.**

sistemin ümumi həlli: $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$,

$x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$ həllər çoxobrazlısı $(-9, 13, 1, 1, 1) + L((1, -2, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (5, -6, 0, 0, 1))$. **1113.** sistemin

ümumi həlli: $x_1 = \frac{-4 + 5x_4}{4}$, $x_2 = -\frac{3x_4}{16}$, $x_3 = \frac{8 - 15x_4}{8}$ həllər

çoxobrazlısı $\left(4, -\frac{3}{4}, -\frac{13}{2}, 4\right) + L\left(\left(10, -\frac{3}{2}, -15, 8\right)\right)$. **1114.**

sistemin ümumi həlli: $x_1 = \frac{-2 - 7x_4}{2}$, $x_2 = \frac{3x_4 - 2x_5}{4}$,

$x_3 = 2 + x_4$ həllər çoxobrazlısı $(-8, 1, 4, 2, 1) + L((-14, 3, 6, 4, 0), (0, -1, 0, 0, 2))$. **1115.** sistemin ümumi həlli:

$x_1 = \frac{10 - 7x_4}{15}$, $x_2 = -\frac{7x_4}{5}$, $x_3 = \frac{1 - 4x_4}{3}$ həllər çoxobrazlısı

$\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -1, 1\right) + L\left(\left(-\frac{7}{15}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{3}, 1\right)\right)$. **1116.** sistemin

ümumi həlli: $x_1 = -34$, $x_2 = 19 - 2x_4 - 3x_5$, $x_3 = 13$ həllər çoxobrazlısı $(-34, 9, 13, 2, 2) + L((0, -5, 0, 1, 1), (0, -2, 0, 1, 0))$.

1117. sistemin həlli yoxdur. **1118.** sistemin ümumi həlli:

$$x_1 = \frac{-15 - 8x_2 - 2x_5}{4}, x_3 = \frac{-3 + 2x_5}{4}, x_4 = -5 + x_5 \quad \text{həllər}$$

$$\text{çoxobrazlısı} \left(-\frac{3}{4}, -1, -\frac{7}{4}, -7, -2 \right) + L((-3, 1, 1, -3, 2) + (-1, 0, 1, 2, 2)).$$

1119. sistemin ümumi həlli:

$$x_1 = \frac{-1 - 2x_2 + 3x_5}{2}, x_3 = \frac{1 - 3x_5}{2}, x_4 = 0 \quad \text{həllər} \quad \text{çoxobrazlısı}$$

$$(0, 1, -1, 0, 1) + L((2, 1, -3, 0, 2), (3, 0, -3, 0, 2)).$$

1120. sistemin ümumi həlli: $x_1 = -8, x_2 = 3 + x_4, x_3 = 6 + 2x_4$ həllər

$$\text{çoxobrazlısı } (-8, 5, 10, 2) + L((0, 1, 2, 1)).$$

$$\text{həlli: } x_1 = -\frac{6 + 3x_4}{2}, x_2 = -\frac{8 + x_4 + 2x_5}{4}, x_3 = 2 + x_4 \quad \text{həllər}$$

$$\text{çoxobrazlısı } (-6, -3, 4, 2, 1) + L((-6, 0, 4, 4, -2), (0, -1, 0, 0, 2)).$$

1122. sistemin həlli yoxdur. **1123.** sistemin ümumi

$$\text{həlli: } x_1 = -5 + 3x_2 - 6x_4, x_3 = 2 + x_4 \quad \text{həllər} \quad \text{çoxobrazlısı } (-5, 2,$$

$$3, 1) + L((-3, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1)).$$

1124. sistemin ümumi həlli: $x_1 = 1, x_2 = -5 + 2x_3 + x_4$ həllər

$$\text{çoxobrazlısı } (1, -1, 1, 2) + L((1, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)).$$

1125. sistemin ümumi həlli: $x_1 = -5 + 4x_2 - 14x_4, x_3 = 2 + 5x_4$ həllər

$$\text{çoxobrazlısı } (-15, 1, 7, 1) + L((-6, 2, 5, 1), (-10, 1, 5, 1)).$$

1126. sistemin ümumi həlli: $x_1 = -3 + x_3 + 2x_4, x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4$

$$\text{həllər} \quad \text{çoxobrazlısı } ((0, -3, 1, 1) + L(4, -7, 2, 1), (-2, 3, 0, 1)).$$

1127. Sistemin həlli yoxdur. **1128.** sistemin ümumi həlli:

$x_1 = 1 + 3x_3 - 3x_4$, $x_2 = 8 - 6x_3 + 5x_4 - x_5$ həllər çoxobrazlısı:

$(1, 5, 1, 1, 2) + L((3, -6, 1, 0, 0), (-3, 5, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 1))$.

1129. sistemin ümumi həlli: $x_2 = 1 + 2x_1 - x_5$, $x_3 = 3 - 4x_5$,

$x_4 = 0$ həllər çoxobrazlısı $(1, 2, -1, 0, 1) + L((2, 3, -4, 0, 1), (1, 1, -4, 0, 1))$.

§ 28. Xətti tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həlli.

1130. $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. **1131.** $(1, 1, 1)$. **1132.** $(0, 1, 2)$. **1133.** $(1, -2, -1)$.

1134. $(5, -4, 2)$. **1135.** $(1, 1, 2, 1)$. **1136.** $(1, 1, 0, -2)$. **1137.**

sistemin həlli yoxdur. **1138.** $(2, 1, 2, 3)$. **1139.** $(1, 0, 1, 1)$.

1140. $(-1, -2, 1, 0)$. **1141.** $(1, 2, 0, 1)$. **1142.** $(3, 1, -2, 2)$. **1143.**

$\left(\frac{17}{8}, -\frac{7}{4}, -1, \frac{1}{16}\right)$. **1144.** $(2, -2, 1, -1)$. **1145.** Sistemin həlli

yoxdur. **1146.** $(2, 1, -3, 4)$. **1147.** $(3, 1, -2, 5)$. **1148.** sistemin

həlli yoxdur. **1149.** $(1, 1, 1, 1)$. **1150.** $(-2, -2, -1, 2, 1)$. **1151.**

$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 2\right)$. **1152.** $(1, 0, -1, 2, -1)$.

§ 29. Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılışı və həlli.

1153. (2, 1, 2). **1154.** (1, -2, -1). **1155.** (0, 1, 2). **1156.** (1, 1, 0).
1157. $\left(\frac{17}{3}, \frac{38}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **1158.** (2, 0, 1). **1159.** $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
1160. həlli yoxdur. **1161.** sistem qeyri-müəyyəndir. **1162.** (1,-1,0,1). **1163.** (1, 0, 0, 2). **1164.** (1, 1, 1). **1165.** (1,1,1,1). **1166.** (2, 1, -3, 4). **1167.** (-8, 3, -1, 4). **1168.** (0, 0, 1, -1). **1169.** (-1, -2, 1, 0).

§ 30. p xarakteristikali meydan üzərində xətti tənliklər sisteminin Qaus üsulu ilə həlli.

1170. sistemin yeganə həlli var: (1, 0, 0). **1171.** sistemin yeganə həlli var: (2, 0, 1). **1172.** sistemin yeganə həlli var: (2, 2, 2). **1173.** sistemin yeganə həlli var: (2, 1, 1). **1174.** sistemin yeganə həlli var: (1, 2, 0). **1175.** sistemin həlli yoxdur. **1176.** sistemin həlli yoxdur. **1177.** sistemin yeganə həlli var: (2, 3, 2). **1178.** sistemin yeganə həlli var: (1, 0, 0). **1179.** sistemin həlli yoxdur. **1180.** sistemin iki həlli var: (1, 2, 2) (3, 2, 1) . **1181.** Sistemin iki həlli var: (3, 1, 4) (0, 0, 4). **1182.** sistemin həlli yoxdur. **1183.** sistemin yeganə həlli var: (2, 5, 1,). **1184.** sistemin yeganə həlli var: (1, 0, 0,). **1185.** sistemin yeganə həlli var: (6, 1, 3,). **1186.** sistemin yeganə həlli var: (2, 6, 5,). **1187.** sistemin yeganə həlli var: (4, 2, 0, 3). **1188.** Sistem bircinsdir, yeganə sıfırdan fərqli həlli var; (1, 1, 2,).

$$\mathbf{1189.} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \mathbf{1190.} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad \mathbf{1191.}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \quad \mathbf{1192.} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \text{ hiperbolası. } \mathbf{1193.}$$

$$x^2 - 3xy - 2x = 0.$$

$$\mathbf{1194.} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (4x + y + 3z - 8 = 0). \quad \mathbf{1195.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0.$$

$$\mathbf{1196.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$$

$$\mathbf{1197.} \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ƏDƏBİYYAT

1. Baxşəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursu. Bakı, Nurlan 2008
2. Baxşəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş. Cəbr kursu. Bakı, Elm və təhsil 2011.
3. Cavadov M.N. Abdulkərimov L.Ş. Baxşəliyev Y.R. “cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi” III hissə ADPU 1992.
4. Cavadov M.N., Eyyubov R.Ə. , Əfəndiyev F.H. “Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi” II hissə Bakı, ADPU 1988.
5. Əkbərov M.S “Cəbrdən mühazirələr” Bakı BDU, 2001.
6. Qasimov V.Ə. “Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi” I hissə. Bakı “İsmayıl”. Nəşriyyat mərkəzi. 1998. 3108.
7. Qasimov V.Ə. “Qruplar və halqalar, çoxhədlilər və genişlənmələr” II hissə BDU nəşriyyatı 1999.
8. Sultanov R.M. “Xətti cəbrin əsasları” ADU 1960.
9. Mustafayev C.M., Yusubov İ.M., Pənahov M.Q. “Xətti cəbrin əsasları” Bakı 2004.
- 10 Бурдин А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии . Мн. Изд. БГУ.
11. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. Москва. Наука, 1976.
12. Гельфанд И.М.Лекции по линейной алгебре. Москва. Наука, 1966.

13. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М. Наука 1970.
14. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва. «Высшая школа» 1980
15. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Москва. Наука, 1977.
16. Кострикин А.И., Манин «Линейная алгебра». М. Наука 1979.
17. Курош А.Г. Курс высшей алгебре. Москва. Наука, 1971.
18. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., 1975.
19. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. «Просвещение». М. 183. е
20. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Москва. Наука, 1970.
21. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва., 1967.
22. Столл Р.Р. Множества, логика, аксиоматические теории. Москва, 1968.
23. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва Наука 1967.
24. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1977.
25. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Москва «Высшая школа» 1982.

M Ü N D Ə R İ C A T

| | |
|------------|---|
| Giriş..... | 3 |
|------------|---|

I FƏSİL. ÇOXLUQLAR VƏ MÜNASIBƏTLƏR

| | |
|-------------------|---|
| §1 Çoxluqlar..... | 5 |
|-------------------|---|

| | |
|------------------------|----|
| § 2. Münasibətlər..... | 23 |
|------------------------|----|

II FƏSİL. CƏBRLƏR. QRUP. HALQA. MEYDAN

| | |
|--|----|
| §3. Cəbri əməllər. Qrup və xassələri. Altqrup..... | 51 |
|--|----|

| | |
|------------------------|----|
| §4. Halqa. Meydan..... | 61 |
|------------------------|----|

| | |
|---|----|
| § 5. Dövrü qruplar. Qrupun elementinin tərtibi..... | 71 |
|---|----|

| | |
|--|----|
| § 6. Qrupların, halqaların və meydanların homomorfizmi və izomorfizmi..... | 76 |
|--|----|

| | |
|--|----|
| § 7. Yanaşı siniflər. Normal bölənlər. Faktor qruplar..... | 84 |
|--|----|

III FƏSİL . KOMPLEKS ƏDƏDLƏR MEYDANI

| | |
|---|----|
| §8. Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri, triqonometrik şəkli. Kompleks ədədlər üzərində əməllər..... | 95 |
|---|----|

IV FƏSİL. XƏTTİ FƏZALAR

| | |
|--|-----|
| § 9. n – ölçülü hesabi vektorlar fəzası..... | 117 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| §10. Vektorlar sisteminin xətti asılılığı və xətti asılı olmaması..... | 124 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| §11. Sonlu vektorlar sisteminin bazisi və rəngi..... | 130 |
|--|-----|

| | |
|---|-----|
| §12. Vektorlar fəzası - Xətti fəza..... | 138 |
|---|-----|

| | |
|--|-----|
| §13. Vektor fəzanın bazisi, ölçüsü və xassələri..... | 143 |
|--|-----|

§14. Vektorlar fəzasının xətti altfəzası. Xətti altfəzaların verilməsi üsulları. Altəfəzalar üzərində əməllər və xassələri.....149

§15. Xətti çoxobrazlı..... 163

V FƏSİL. MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR

§ 16. Matrislər üzərində əməllər.....172

§17. Determinantlar..... 189

§18. Permutasiyalar, əvəzləmələr.....196

§19. Kvadrat matrisin determinanti və xassələri.....198

§20. Determinantların hesablanması üsulları.....204

§21. Minorlar və cəbri tamamlayıcılar. Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı.....211

§22. Tərs matris. Matris tənliklər.....227

§23. Matrisin rəngi və xassələri.....241

VI FƏSİL. XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§ 24. Xətti tənliklər sistemi.....249

§ 25. Xətti tənliklər sistemini Qaus üsulu (məchulların ardıcıl aradan çıxarılması) üsulu ilə həll edin266

§ 26. Bircins xətti tənliklər sistemi.....282

§ 27. Bircins olmayan xətti tənliklər sisteminin həllər çoxluğunu xətti çoxobrazlı şəklində göstərilməsi.....294

§ 28. Xətti tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həlli.....299

| | |
|--|-----|
| § 29. Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılışı və həlli..... | 304 |
| § 30. p xarakteristikali meydan üzərində xətti tənliklər sisteminin Qaus üsulu ilə həlli..... | 307 |
| Cavablar..... | 313 |
| Ədəbiyyat..... | 379 |

Abdullayev Şəmsəddin Sahbət oğlu
Əkpərova Hökümə Ağakazım qızı
Hacıyev Sadəddin Seydi oğlu

CƏBRDƏN ÇALIŞMALAR

(DƏRS VƏSAİTİ)

I HİSSƏ

Nəşriyyatın direktoru: **Hüseyn Hacıyev**
Redaktor: **Mustafa Şəfiyev**
Korrektor: **Səlimova Xəyalə**
Dizayn: **Müşfiq Hacıyev**
Cildçi: **Elmar Mikayılov**

Çapa imzalanmış 16.11.2023-ci il
Kağız formatı 60x84^{1/16}, çap vərəqi 24
Sifariş 124, sayı 100

ADPU-nun nəşriyyatı
Bakı, Ü.Hacıbəyli küçəsi, 68
Tel: (+912) 493-74-10
E-mail: poliqrafiya@mail.ru