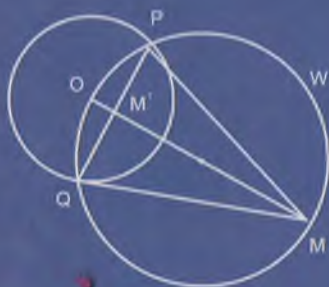


Z.Q. Sadıxov, G.A. Xudaverdiyeva

**HƏNDƏSİ QURMALARDAN
VƏ PROYEKTİV
HƏNDƏSƏDƏN MÜHAZİRƏLƏR**
(DƏRS VƏSAİTİ)



**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
AZƏRBAYCAN DÖVLƏT PEDAQOJİ UNİVERSİTETİ**

Z.Q.Sadıxov, G.A.Xudaverdiyeva

Həndəsi qurmalardan və proyektiv həndəsədən mühazirələr

(Dərs vəsaiti)

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazir-
liyinin 08.01.2010-cu il tarixli 10 saylı
əmrinə əsasən çap olunur.*

BAKİ – 2010

515
S-16^a

Elmi redaktoru: dos. Y.R.Baxşəliyev

Rəyçilər: dos. M.A.Nəcəfov

dos. H.D.Fəttayev

dos. N.Y.Əliyev

Zahirəli Qafar oğlu Sadıxov
Güləndam Abdulla qızı Xudaverdiyeva
Həndəsi qurmalardan və proyektiv həndəsədən
mühazirələr
Dərs vəsaiti. Bakı 2010. 270 səh

ADPU
Əsaslı kitabxana

340236

Ön söz

Bu dərs vəsaiti müəlliflərin uzun illər ərzində Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin Riyaziyyat fakültəsində, “Riyaziyyat”, “Riyaziyyat və İnformatika”, “İnformatika” ixtisasları üzrə bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələrə “Həndəsə” kursundan oxuduqları mühazirələrin mətnləri əsasında hazırlanmışdır. Müəyyən mənada X.Paşayevin və M. Nəcəfovun “Analitik həndəsədən mühazirələr” kitabının davamıdır.

Dörd fəsildən ibarət olan kitabın birinci fəsli həndəsi qurmalar nəzəriyyəsiindən bəhs edir. Burada qurma məsələlərinin nəzəri əsasları izah olunub, qurma məsələlərinin həllinin müxtəlif üsulları haqqında məlumat verilib. Kitabda bəhs olunan digər mövzular kimi bu mövzuları da bilmək orta məktəb müəllimlərinə çox vacibdir. Kitabın ikinci fəsli proyektiv həndəsənin sadə anlayışlarından bəhs edir. Burada proyektiv həndəsənin Veyl aksiomları, proyektiv koordinat sistemi, proyektiv çevirmələr, onların invariantları homolojiyalar və s. şərh olunub.

Üçüncü fəsil isə proyektiv həndəsənin əsas faktlarına həsr olunub. Proyektiv həndəsə xətti cəbr ilə həndəsənin müştərək sahəsi olduğundan gələcək müəllimləri cəbri

metodların həndəsədə necə böyük rol oynadığını bir daha anladır.

Kitabın dördüncü fəslı isə afın həndəsəsinə əsaslanaraq müstəvi fiqurların və çoxüzvlülərin təsviri üsullarına həsr olunub.

Kitabdan bakalavr və magistr pilləsində təhsil alan tələbələr, aspirantlar, orta və ali məktəb müəllimləri istifadə edə bilərlər.

I FƏSİL

MÜSTƏVİDƏ HƏNDƏSİ QURMALAR

§1. Xətkeş və pərgar vasitəsilə qurma məsələləri. Qurmanın postulatları

Məktəb həndəsə kursunun əsas bölmələrindən biri də qurma məsələləridir. Bu məsələlərdə əvvəlcədən verilmiş fiqurlara görə müəyyən şərtləri ödəyən fiquru qurmaq tələbi qoyulur. Qurma zamanı əvvəlcədən şərtləndirilmiş qurma alətlərindən istifadə olunur. Qurma alətlərinə misal olaraq xətkəşi, transportiri, pərgarı, tərəfləri paralel olan ikitərəfli xətkəşi və s. göstərmək olar. Məktəb həndəsə kursunda isə ancaq xətkəş və pərgarın köməyi ilə həll edilən qurma məsələlərinə baxılır. Biz müstəvi üzərində pərgar və xətkəşin köməyi ilə həll olunan qurma məsələlərinin müxtəlif həll üsullarından bəhs edəcəyik.

Fərz olunur ki, qurma aləti kimi nəzərdə tutulan xətkəşin üzərində bölgülər yoxdur. Onun vasitəsilə verilmiş və ya qurulmuş iki müxtəlif nöqtədən keçən düz xətt qurulur. Xətkəş ilə başqa heç bir əməliyyat yerinə yetirmək olmaz. Pərgar isə mərkəzi verilmiş və ya qurulmuş nöqtə olan, radiusu verilmiş və ya qurulmuş parçaya bərabər olan çevrəni qurmaq üçündür.

Fəzada hər hansı bir müstəvini qeyd edək və onu *əsas müstəvi* adlandıraraq. Fərz edəcəyik ki, baxılan bütün fiqurlar bu müstəvinin üzərində yerləşirlər. Əsas müstəvinin nöqtə, düz xətt və çevrələri qurma məsələlərində xüsusi rola malikdirlər. Bu fiqurlara *əsas fiqurlar* deyəcəyik. Əsas fiqurlardan başqa, əsas müstəvi üzərində parça, şüa, bucaq, yarım-müstəvi, çoxbucalıq, çevrə qövslərinə də baxılır. Qeyd edək ki, bu fiqurlardan hər biri müəyyən nöqtələrin, düz xətlərin və çevrələrin verilməsi ilə təyin olunurlar. Məsələn, AB parçası A və B nöqtələri və AB düz xətti ilə təyin olunur. Şüa isə başlanğıcı olan nöqtə, aid olduğu düz xətt və həmin düz xətt üzərindəki bir nöqtə ilə təyin olunur.

Beləliklə, hər bir qurma məsələsini verilən əsas fiqurlara görə başqa əsas fiqurların qurulması tələbi kimi də başa düşmək olar. Bütün həndəsə kursunda olduğu kimi nöqtələri latın əlifbasının böyük hərfləri A, B, C,... ilə işarə edəcəyik. Düz xətləri isə latın əlifbasının kiçik hərfləri *a, b, c, p, l, ...* işarə edəcəyik. Parçaları onların uc nöqtələrini göstərən iki hərf ilə, AB, CD, XY, ... və ya latın əlifbasının kiçik hərfi ilə $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}...$ kimi işarə edəcəyik. Bu parçaların uzunluğunu isə *a, b, c* kimi işarə edəcəyik. Bu halda *a, b, c* həqiqi ədədləri ifadə edir. Bucaqları $\angle BOA, \angle A, ...$ kimi və ya

yunan əlifbasının bir kiçik hərfi ilə $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \dots$ kimi işarə edəcəyik. Bu bucaqların dərəcə ölçülərini isə $\varphi, \psi, \dots$ kimi işarə edəcəyik. Ən nəhayət çevrələri $(M, AB), (O, \bar{r}), \dots$ kimi işarə edəcəyik. Burada birinci yerdə çevrənin mərkəzini bildiren nöqtə, ikinci yerdə isə çevrənin AB və ya $\bar{r}$ ilə işarə olunmuş radiusu yazılır. Bəzən qısaca olaraq çevrəni yunan hərfləri $\omega, \gamma, \dots$ və s. ilə işarə edəcəyik.

Qurma məsələsinin qoyuluşunda və həlli prosesində, əsas fiqurlardan ibarət olan müəyyən bir Ω çoxluğu qeyd olunur. Bu çoxluğun hər bir elementinə *qurulmuş fiqur* deyilir. Ω çoxluğuna daxil olan düz xətt və ya çevrə bir obyekt kimi başa düşülür. Yəni əgər γ çevrəsi qurulmuş fiqurdursa, buradan çıxmır ki, onun hər bir nöqtəsi də qurulmuş fiqurdur. Hətta γ çevrəsinin mərkəzi də qurulmuş fiqur hesab olunmaya bilər. Əgər qurulmuş çevrənin və ya düz xəttin hər hansı bir nöqtəsi qurulmuş fiqurdursa, bu Ω çoxluğunun ayrıca bir elementi sayılır. Belə nöqtələr məsələnin qoyuluşunda verilərsə və ya həll prosesində alınarsa ayrıca qeyd olunmalıdırlar.

Tərif vermədən daxil etdiyimiz qurulmuş əsas fiqur anlayışı aşağıdakı iki şərti ödəməlidir. Həmin şərtlərə qurmanın aksiomları da deyilir.

I. Qurma məsələlərinin şərtində verilən nöqtələr, düz xətlər və çevrələr Ω çoxluğuna daxildirlər, yəni qurulmuş fiqurlardırlar. Əsas fiqurların Ω çoxluğu *sonlu* çoxluqdur.

II. Heç olmazsa bir qurulmuş düz xətt var.

Hər bir qurulmuş düz xətt və qurulmuş çevrə üzərində heç olmazsa iki qurulmuş nöqtə var.

Daha sonra fərz edirik ki, elə əməliyyatlar var ki, bu əməliyyatlar Ω qurulmuş əsas fiqurlar çoxluğuna yeni qurulmuş əsas fiqurlar əlavə etməyə imkan verir. Belə əməliyyatlara qurmanın addımları deyilir. Qurmanın *postulatları* adlanan aşağıdakı əməliyyatlar artıq «icra olunmuş» qurma addımları hesab olunurlar.

Π1. Qurulmuş iki nöqtədən keçən düz xəttin qurulması.

Π2. Mərkəzi qurulmuş nöqtədə olan və radiusu uc nöqtələri qurulmuş parçaya bərabər olan çevrənin qurulması.

Π3. Paralel olmayan iki qurulmuş düz xəttin kəsişmə nöqtəsinin qurulması.

Π4. Əgər qurulmuş çevrə ilə qurulmuş düz xətt kəsişirlərsə, onların kəsişmə nöqtələrinin qurulması.

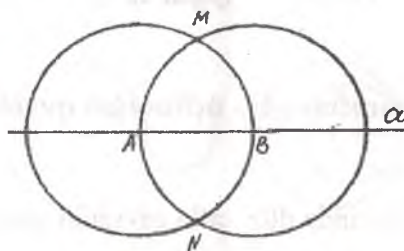
Π5. Əgər iki qurulmuş çevrə kəsişirlərsə, onların kəsişmə nöqtələrinin qurulması.

İndi isə pərgar və xətkəşlə həll olunan qurma məsələsinin qoyuluşunun ümumi şəklini göstərək: Qurulmuş

Əsas fiqurların $F_1, F_2, \dots, F_k$ ($k \in \mathbb{N}$) sonlu çoxluğu verilir və axtarılan, hələ qurulmamış Φ əsas fiqurunu xarakterizə edən xassələri göstərilir. $\Pi 1 - \Pi 5$ postulatlarından istifadə edərək, Φ əsas fiqurunda daxil olduğu əsas fiqurlardan ibarət sonlu çoxluğu qurmaq tələb olunur.

Məsələ 1. Verilmiş düz xətt üzərində olmayan hər hansı bir nöqtəni qurun.

Həlli: II aksioma görə verilən düz xətt üzərində ən azı iki A və B qurulmuş nöqtələri var. (A, AB) və (B, BA) çevrələrinin kəsişmə nöqtələrini M və N ilə işarə edək. $\Pi 5$ postulatına görə M və N nöqtələri qurulmuş nöqtələrdir. M və N nöqtələri verilən a düz xətti üzərində ola bilməzlər. Çünki $AB = AM + BM = 2AB$ alarıq. Bu isə A və B nöqtələrinin müxtəlif olması şərtinə ziddir.

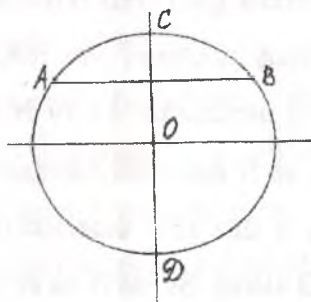


Şəkil 1.

Məsələ 2. Verilən çevrənin mərkəzini qurun.

Həlli: Tutaq ki, ω verilən çevrədir. II aksioma görə bu çevrə üzərində qurulmuş iki A və B nöqtələri vardır. Məktəb

həndəsə kursundan AB parçasının m orta perpendikulyarının qurulması məlumdur. m düz xətti ilə ω çevrəsinin kəsişmə nöqtələrini C və D ilə işarə edək. Π_4 postulatına görə bu nöqtələr qurulmuş nöqtələrdir. Deməli CD parçası da qurulmuş fiqurdur. CD parçasının O orta nöqtəsi çevrənin mərkəzi olacaqdır. Çünki vətərin ortasından ona perpendikulyar olan düz xətt çevrənin mərkəzindən keçir. }



Şəkil 2.

§2. Üç tərəfinə görə üçbucağın qurulması

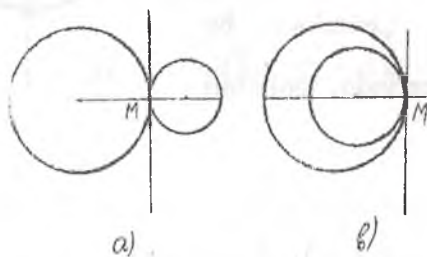
Müstəvi üzərində düz xətlə çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti haqqında məktəb həndəsə kursundan bildiyimiz aşağıdakı teoremi bir daha xatırlayaq:

Teorem 1. Tutaq ki, bizə müstəvi üzərində a düz xətti və (O, r) çevrəsi verilmişdir. Əgər O nöqtəsindən a düz

xəttinə qədər olan d məsafəsi üçün $d < r$ şərti ödənərsə, onda düz xətlə çevrənin iki müxtəlif ortaq nöqtəsi olar. $d = r$ şərti ödənərsə düz xətlə çevrənin bir ortaq nöqtəsi olar (düz xətt çevrəyə toxunar), $d > r$ şərti ödənərsə düz xətlə çevrənin ortaq nöqtəsi yoxdur.

Çevrəyə toxunan düz xətt çevrənin toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusuna perpendikulyardır. İndi müstəvi üzərində iki çevrənin qarşılıqlı vəziyyətinə baxaq. İki çevrənin iki müxtəlif ortaq nöqtəsi olarsa, onda deyirlər ki, həmin çevrələr kəsişirlər. İki çevrənin yalnız bir M ortaq nöqtələri olarsa, onda deyirlər ki, həmin çevrələr M nöqtəsində toxunurlar. M nöqtəsinə toxunma nöqtəsi deyilir. Toxunma nöqtəsi çevrələrin mərkəzlərindən keçən düz xəttin üzərində yerləşir. Çevrələrin həmin nöqtədən keçən ortaq toxunanları var.

(Şəkil 3. a) xaricdən; b) daxildən toxunurlar)

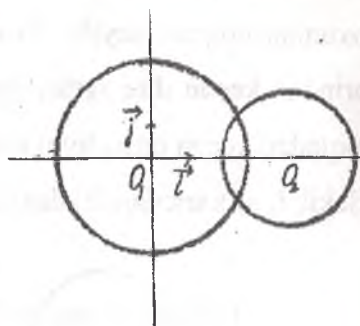


Şəkil 3.

Teorem 2. Tutaq ki, bizə mərkəzləri üst-üstə düşməyən iki $(O_1, \overline{r_1})$ və $(O_2, \overline{r_2})$ çevrələri verilmişdir. $d = O_1O_2$, $r_1 \geq r_2$. Əgər $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ olarsa çevrələr kəsişirlər, $d = r_1 + r_2$ olarsa çevrələr xaricdən toxunurlar, $d = r_1 - r_2$ olarsa, çevrələr daxildən toxunurlar $d < r_1 - r_2$ və ya $d > r_1 + r_2$ olarsa, çevrələr kəsişmirlər.

İsbatı: $\vec{O} \vec{i} \vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı O_1 nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün. $\vec{i}$ vahid vektoru isə $\vec{O_1O_2}$ vektoru ilə eyni istiqamətdə olsun (Şəkil 4).

Bu koordinat sistemində O_1 nöqtəsinin koordinatları $(0, 0)$, O_2 nöqtəsinin koordinatları $(d, 0)$ olacaq. Çevrələrin bu koordinat sistemində tənlikləri uyğun olaraq



Şəkil 4.

$$\begin{aligned} (O_1, \overline{r_1}): x^2 + y^2 &= r_1^2 \\ (O_2, \overline{r_2}): (x-d)^2 + y^2 &= r_2^2 \end{aligned} \quad (1)$$

olacaqdır.

$(O_1, \bar{r}_1)$ və $(O_2, \bar{r}_2)$ çevrələri yalnız və yalnız onda ortaq nöqtələrə malik olacaqlar ki, (1) tənliklər sisteminin həqiqi həlli olsun. Kəsişmə nöqtələrinin sayı isə (1) tənliklər sistemin həqiqi həllərinin sayına bərabər olacaqdır.

(1) tənliklər sistemində birinci tənlikdən ikincini çıxsaq

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r_1^2 \\ 2xd - d^2 &= r_1^2 - r_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

alırıq.

Bu tənliklər sistemindən

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}, \quad y^2 = r_1^2 - \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \right)^2 \text{ alınar.}$$

İkinci tənliyin sağ tərəfini vuruqlarına ayıraraq:

$$y^2 = \left(r_1 + \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \right) \left(r_1 - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \right)$$

Elementar çevirmələrdən sonra

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(r_1 + r_2 + d)(r_1 + r_2 - d)(r_1 - r_2 + d)(r_2 - r_1 + d)} \quad (3)$$

alırıq.

$r_1 + r_2 + d > 0$ və $r_1 - r_2 + d > 0$ ($r_1 \geq r_2$ olduğundan) olduğu üçün aşağıdakı üç haldan biri mümkündür.

1) $r_1 + r_2 - d > 0$ və $r_2 - r_1 + d > 0$ (3) tənliyinin sağ tərəfindəki kökaltı ifadə müsbət olduğundan (2) tənliklər

sisteminin iki müxtəlif həqiqi həlli var. Deməli, çevrələrin iki müxtəlif kəsişmə nöqtələri var; başqa sözlə çevrələr kəsişirlər.

2) $r_1 + r_2 - d = 0$ və ya $r_2 - r_1 + d = 0$ şərtlərindən biri ödənərsə, $y = 0$ olar. (2) tənliklər sisteminin yalnız bir həqiqi

həlli var: $\left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}, 0 \right)$. Bu halda çevrələrin bir ortaq

nöqtələri olar, başqa sözlə toxunurlar. $r_1 + r_2 - d = 0$ olarsa toxunma xaricdən, $r_2 - r_1 + d = 0$ olarsa toxunma daxildən olar.

3) Əgər (3) tənliyinin sağ tərəfindəki kökaltı ifadə də $r_1 + r_2 - d$ və $r_2 - r_1 + d$ vuruqlarından biri mənfi, biri müsbət olarsa, onda $d > r_1 + r_2$, $d < r_1 - r_2$ olar. Bu halda (2) tənliklər sisteminin həqiqi həlli yoxdur. Deməli, çevrələrin ortaq nöqtələri də yoxdur. Qeyd edək ki, $r_1 + r_2 - d < 0$ və $r_2 - r_1 + d < 0$ ola bilməz. Çünki bu halda

$r_1 + r_2 - d + r_2 - r_1 + d < 0$ alınır. Bu isə ola bilməz. Çünki, $r_2 > 0$. Teorem isbat olundu.

Nəticə: Tutaq ki, bizə (O_1, r_1) və (O_2, r_2) çevrələri verilmişdir. Belə ki, $O_1 \in (O_2, r_2)$. Əgər $2r_2 > r_1$ şərti ödənərsə çevrələr kəsişirlər, əgər $2r_2 = r_1$ şərti ödənərsə çevrələr daxildən toxunurlar, əgər $2r_2 < r_1$ şərti ödənərsə çevrələrin

ortaq nöqtələri olmaz. 2-ci teoremin köməyi ilə aşağıdakı qurma məsələsinin həllinin olub-olmaması sualına cavab verəcəyik.

Məsələ. Tərəfləri $\bar{a}$, $\bar{b}$ və $\bar{c}$ parçaları olan üçbucağı qurun.

Həlli: Bu məsələnin orta məktəb həndəsə kursundan məlum olan həllini təkrar edək. Hər hansı düz xətt götürüb, onun üzərində $AB = \bar{c}$ parçasını ayıraq. Sonra isə iki $(A, \bar{b})$ və $(B, \bar{a})$ çevrələrini quraq. C nöqtəsi həmin çevrələrin kəsişmə nöqtələrindən biri olsun. Onda ABC üçbucağı tələb olunan üçbucaq olar. İndi isə belə bir sual meydana çıxır: istənilən $\bar{a}$, $\bar{b}$ və $\bar{c}$ parçaları üçün ABC üçbucağını qurmaq mümkündürmü? Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $c \geq a, c \geq b$. Göstərək ki, bu halda ABC üçbucağını yalnız və yalnız onda qurmaq mümkün olar ki,

$$c < a + b \quad (4)$$

olsun. Həqiqətən, əgər ABC üçbucağı qurulmuşsa, onda üçbucaq bərabərsizliyinə əsasən $AB < AC + BC$ olar. Buradan da (4) bərabərsizliyi alınır.

Tərsinə fərz edək ki, $\bar{a}$, $\bar{b}$ və $\bar{c}$ parçaları üçün $c \geq a, c \geq b$ və $c < a + b$ bərabərsizlikləri ödənilir. Göstərək ki,

məsələnin şərtini ödəyən ABC üçbucağını qurmaq olar. Qur-
maya görə $AB = c$, buna görə $AB < a + b$. Digər tərəfdən əgər
 $a \geq b$ olarsa onda $c \geq a, c \geq b$ bərabərsizliklərindən $c > a - b$
və ya $AB > a - b$ alınar. Beləliklə, 2-ci teoremə görə $(A, \bar{b})$ və
 $(B, \bar{a})$ çevrələri iki C və C' nöqtələrində kəsişirlər.
 $AB > a - b$ bərabərsizliyindən alınır ki, A, B və C nöqtələri bir
düz xətt üzərində deyillər. Beləliklə biz tərəfləri AB, BC və AC
olan, tələb olunan ABC üçbucağının varlığını isbat etdik və
qurduq. Bu məsələnin həllindən aşağıdakı mühüm nəticə alınır:
Əgər $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ parçaları üçün $c \geq a, c \geq b$ və $c < a + b$
bərabərsizlikləri ödənərsə onda tərəfləri verilən parçalara
bərabər olan üçbucaq vardır. Xüsusi halda, tərəfləri verilən
parçaya bərabər olan bərabərtərəfli üçbucaq vardır.

§3. Elementar qurmalar. Qurma məsələlərinin həlli sxemi

Qurma məsələsini həll etmək - $\Pi 1 - \Pi 5$ postulatlarında
göstərilən ən sadə qurmaları müəyyən bir ardıcılıqla yerinə ye-
tirməklə tələb olunan fiquru qurmaq deməkdir. Lakin məsələni
bu qədər «xırda» hissələrə bölməklə, həll etmək heç də əlverişli
deyil. Bu səbəbdən də qurma məsələlərinin həlli zamanı bir

qədər başqa cür hərəkət edirlər. Belə ki, əgər hər hansı bir qurma məsələsi həll olunubsa, sonradan bu məsələnin həllindən tam şəkildə başqa qurma məsələlərinin həllində istifadə etmək olar. Bir sıra sadə qurma məsələləri var ki, onların həlli orta məktəb həndəsə kursunda məlumdur. Bu məsələlər daha mürəkkəb məsələlərin həlli zamanı qarşıya çıxdıqda, biz o məsələləri həll olunmuş hesab edərək, onların həllindən hazır şəkildə istifadə edə bilərik. Bu məsələlərə elementar qurma məsələləri deyəcəyik. Elementar qurma məsələlərinin siyahısı şərtidir. Adətən elementar qurmalar olaraq aşağıdakı məsələləri nəzərdə tuturlar.

Qurma 1. Verilən şüa üzərində onun başlanğıcından başlayaraq verilən parçaya bərabər parça ayırmaq.

Qurma 2. Təpəsi verilən şüanın başlanğıcında olan verilən yarımüstəvi üzərində, verilən bucağa bərabər bucaq ayırmaq.

Qurma 3. Üç tərəfinə görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 4. İki tərəfinə və onlar arasındakı bucağa görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 5. Tərəfinə və bu tərəfə bitişik iki bucağına görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 6. Açıq bucaqdan kiçik olan bucağın tənbölənini qurmaq.

Qurma 7. Verilən parçanın orta perpendikulyarını qurmaq.

Qurma 8. Verilən parçanın orta nöqtəsini qurmaq.

Qurma 9. Verilən nöqtədən keçən və verilən düz xəttə perpendikulyar olan düz xətti qurmaq.

Qurma 10. Verilən düz xətt üzərində olmayan nöqtədən həmin düz xətlə paralel düz xətti qurmaq.

Qurma 11. Hipetonuzuna və hər hansı iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurmaq.

Qurma 12. Hipetonuzuna və katetinə görə düzbucaqlı üçbucaq qurmaq.

Qurma 13. Çevrənin üzərində olan nöqtədən ona toxunan düz xətti qurmaq.

Qurma 14. Verilən parçanı verilən nisbətdə bölmək.

Bundan sonra bu məsələlərin həllindən heç bir izahat vermədən istifadə edəcəyik.

İndi də qurma məsələlərinin həllinin hansı sxem üzrə aparılması məsələsi üzərində dayanaq.

Qurma məsələsinin həlli dedikdə, $\Pi 1 - \Pi 5$ postulatlarında göstərilən ən sadə qurmaların hər hansı sonlu ardıcılığını tapmaq başa düşülür ki, həmin ən sadə qurmalar yerinə yetirildikdən sonra tələb olunan fiqur qurulmuş hesab olunur və ya məsələnin şərtləri daxilində tələb olunan fiqurun olmadığı isbat

olunur. Sonrası məsələnin həllərinin sayı, məsələnin həllinin olması üçün verilənlərin hansı şərtləri ödəməsi suallarına cavab verməkdən ibarət olur. Bütün bu suallara cavab vermək üçün qurma məsələlərinin həlli zamanı müəyyən bir sxemə riayət etmək lazım gəlir. Həmin sxemi müxtəlif qaydalarla seçmək olar. Ənənəvi olaraq ən çox istifadə olunan sxem aşağıdakı kimi olur: analiz, qurma, isbat və araşdırma. Bunlar qurma məsələlərinin həllinin mərhələləri adlanırlar.

[**Analiz** və ya **həllin axtarışı** mərhələsi qurma məsələsinin həlli üsulunu tapmaq üçün, verilən fiqurlarla axtarılan fiqurlar arasındakı əlaqələri müəyyən etməkdən ibarətdir.]

Analiz mərhələsində fərz olunur ki, qurma məsələsi həll olunub. Axtarılan və tələb olunan fiqurların təsvir olunduğu çertyoj «gözəyari» olaraq çəkilir. Sonra isə axtarılan fiqur ilə məsələnin verilənləri arasında əlaqələr öyrənilir. Bu əlaqələr o səviyyədə tapılmalıdır ki, axtarılan fiquru qurmaq üçün lazım olan ən sadə qurmaların ardıcılığını tamamilə müəyyən etmək mümkün olsun. Əgər tələb olunan fiquru qurmaq üçün lazım olan elementar qurmaların ardıcılığı məlumdursa, onda analiz mərhələsinə ehtiyac qalmır.

[**Qurma** mərhələsi məsələni həll etmək üçün lazım olan qurmaların (ən sadə və elementar) ardıcılığını göstərməkdən ibarətdir.] Bu zaman pərgar və xətkəşin köməyi ilə, göstərilən

ardıcılıqla, qurmaları yerinə yetirməklə faktiki olaraq tələb olan fiqurun çertyoju çəkilir.

İsbat mərhələsində qurma mərhələsində qurulmuş fiqurun məsələdəki bütün şərtləri ödədiyi göstərilir. Bir sıra hallarda qurulan fiqurun məsələdə qoyulan şərtləri ödəməsi qurma mərhələsində artıq aşkar görünür. Bu halda isbata ehtiyac qalmır.

Araşdırma mərhələsində aşağıdakı iki suala cavab verilir:

a) məsələnin şərtindəki verilən fiqurlar hansı şərti ödədikdə məsələnin, həlli var?

b) Verilənlərin müxtəlif mümkün hallarında məsələnin neçə həlli var?

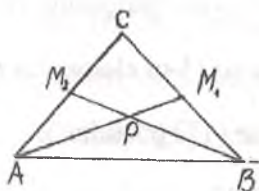
Yuxarıda deyilənləri əyani şəkildə göstərmək üçün bir qurma məsələsini həll edək.

Məsələ. Bir tərəfinə və qalan iki tərəfinə çəkilən medianlara görə üçbucaq qurun.

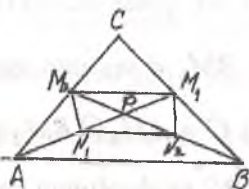
Həlli:

Analiz: Fərz edək ki, tələb olunan ABC üçbucağını qurmuşuq. AB tərəfi AM_1 və BM_2 medianları $AB = c$, $AM_1 = m_1$, $BM_2 = m_2$ şərtlərini ödəyir. Burada $\bar{c}$, $\bar{m}_1$ və $\bar{m}_2$ parçaları məsələnin şərtində verilən parçalardır. Məsələnin həlli ABC üçbucağının A, B və C təpə nöqtələrinin qurulmasına

gətirilir. A və B nöqtələrinin qurulması AB parçasının uc nöqtələri kimi, heç bir çətinlik törətmir.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

C nöqtəsi AM_2 və BM_1 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. Deməli M_1 və M_2 nöqtələri qurularsa, onda C nöqtəsi də qurulmuş olar. M_1 və M_2 nöqtələri isə uyğun olaraq AP və BP ştalları üzərindədirlər və $AM_1 = m_1$, $BM_2 = m_2$ olduğundan P nöqtəsi qurularsa M_1 və M_2 nöqtələri də qurular.

$AP = \frac{2}{3}m_1$, $BP = \frac{2}{3}m_2$ olduğundan, üç tərəfinə görə ABP üçbucağını qurmaq olar. Beləliklə aşağıdakı qurma ardıcılığını alarıq.

Qurma: 1) $AB = c$ parçasını qururuq (1-ci elementar qurma)

2) $r_1 = \frac{2}{3}m_1$ və $r_2 = \frac{2}{3}m_2$ parçalarını qururuq (14-cü

elementar qurma)

3) $(A, \bar{r}_1)$ və $(B, \bar{r}_2)$ çevrələrinin kəsişmə nöqtələrindən biri P nöqtəsini qeyd edək ($\Pi 5$ postulatı).

4) AP şüası üzərində $AM_1 = \bar{m}_1$ parçasını və BP şüası üzərində $BM_2 = \bar{m}_2$ parçasını ayıraq (1-ci elementar qurma).

5) $C = AM_1 \cap BM_2$ qurulur ($\Pi 3$ postulatı).

ABC tələb olunan üçbucaqdır.

İsbatı: AP parçasının N_1 orta nöqtəsini və BP parçasının N_2 orta nöqtələrini quraq. $M_2M_1N_2N_1$ dördbucaqlısının diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarı bölündüklərindən o paraleloqramdır. Deməli $M_2M_1 = N_1N_2$ və $M_2M_1 \parallel N_1N_2$ şərtləri ödənilir. N_1N_2 ABP üçbucağının orta xətti olduğundan $N_1N_2 \parallel AB$ və $N_1N_2 = \frac{AB}{2}$ olur. Buradan $M_1M_2 \parallel AB$ və $M_1M_2 = \frac{AB}{2}$ alırıq. Deməli M_1M_2 parçası ABC üçbucağının orta xəttidir. Buradan da çıxır ki, AM_1 və BM_2 parçaları ABC üçbucağının medianlarıdır. ABC –nin tələb olunan üçbucaq olduğu isbat olundu.

Araşdırma: 1) və 2) qurma addımları həmişə yerinə yetiriləndir. Qurmanın 3) addımı isə yalnız və yalnız

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2)$$

şərti ödəndikdə yerinə yetiriləndir. 4) addımı da həmişə yerinə yetiriləndir.

Göstərək ki, ilk dörd addımı yerinə yetirdikdən sonra qurmanın 5) addımı da həmişə yerinə yetiriləndir. Həqiqətən, əgər AM_2 və AM_1 düz xətləri paralel olarlarsa AM_2M_1B dördbucaqlısı paraleloqram olar. Onda $M_2M_1 = AB$ olar. Bu isə isbat etdiyimiz $M_2M_1 = \frac{AB}{2}$ münasibətinə ziddir. Deməli

AM_2 və BM_1 düz xətləri kəsişməlidirlər. Əgər AM_2 və BM_1 düz xətləri AB düz xəttinə nəzərən M_2M_1 parçasının yerləşmədiyi digər yarımmüstəvidə kəsişərlərsə onda $M_2M_1 > AB$ olar. Bu da $M_2M_1 = \frac{AB}{2}$ münasibətinə ziddir. Deməli

məsələnin yalnız və yalnız

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2)$$

şərti ödəndikdə həlli var və bu həll yeganədir (Bərabərlik dəqiqliklə)

§4. Qurma məsələlərinin kəsişmə üsulu ilə həlli

Qurma məsələlərinin həlli üçün əsasən üç usul vardır: Kəsişmə üsulu, çevirmələr üsulu və cəbri üsul. Bu paragrafda kəsişmə üsulu ilə qurma məsələlərinin həllindən bəhs edəcəyik.

Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir. Qurma məsələsinin həlli α_1 və α_2 şərtlərini ödəyən X nöqtəsinin qurulmasına gətirilir. α_1 şərtini ödəyən müstəvi nöqtələri çoxluğunu F_1 ilə α_2 şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunu F_2 ilə işarə edək. Onda aydındır ki, $X \in F_1 \cap F_2$ olacaq.

X nöqtəsinin qurulması üçün F_1 və F_2 çoxluqlarının xətkəş və pərgarın köməyi ilə qurula bilən olması zəruridir. Qurma məsələlərinin kəsişmə üsulu ilə həlli zamanı aşağıda sadalayacağımız çoxluqlara tez-tez müraciət olunur.

1) Müstəvinin A və B nöqtələrindən eyni məsafədə yerləşən bütün nöqtələrin çoxluğu AB parçasının orta perpendikulyarıdır.

2) Verilən düz xətdən verilən məsafədə olan nöqtələrin çoxluğu, həmin düz xəttə paralel olan və ondan verilən məsafədə yerləşən iki düz xətdən ibarətdir.

3) İki paralel düz xəttin hər birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrin çoxluğu verilən düz xətlərin simmetriya oxudur.

4) İki kəsişən düz xəttin hər birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrin çoxluğu verilən düz xətlərin əmələ gətirdiyi bucaqların tənbönlərini üzərində saxlayan və qarşılıqlı perpendikulyar olan iki düz xətdən ibarətdir.

5) Müstəvinin AB parçasının düz bucaq altında görüldüyü bütün nöqtələrinin çoxluğu, diametri AB parçası olan çevrənin A və B nöqtələrindən fərqli nöqtələri çoxluğudur.

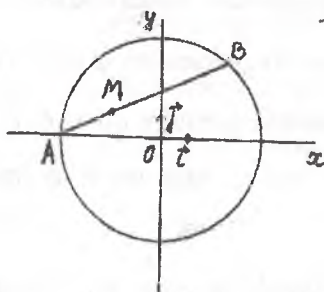
6) Müstəvinin AB parçasının φ ($\varphi \neq 180^\circ$) bucağı altında görüldüyü nöqtələrinin çoxluğu ortaq A və B uc nöqtələrinə malik olan və AB düz xəttinə nəzərən simmetrik olan iki qövstdən ibarətdir.

7) Verilən çevrənin φ ($\varphi \neq 180^\circ$) bucağı altında görüldüyü müstəvi nöqtələrinin çoxluğu, həmin çevrə ilə konsentrik olan, radiusu verilmiş çevrənin radiusundan böyük olan çevrədir.

8) (O, OA) çevrəsinin A nöqtəsindən çəkilən bütün vektorlarını eyni λ ($\lambda > 0$) nisbətində bölən bütün nöqtələr çoxluğu, mərkəzi OA düz xətti üzərində olan, bir çevrədir. (A nöqtəsi bu çevrəyə daxil deyil). Əgər xüsusi halda $\lambda = 1$ olarsa OA parçası həmin çevrənin diametri olacaqdır.

İsbatı: Düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı (O, OA) çevrəsinin O mərkəzi ilə üst-üstə düşsün (Şəkil 7). A nöqtəsinin koordinatları $A(-r, 0)$ olsun, $r = OA$. AB verilən çevrənin A nöqtəsindən çəkilən hər hansı vektordur. M nöqtəsi isə bu vektorin $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ şərtini ödəyən nöqtəsidir. B nöqtəsinin koordinatlarını $B(x_1, y_1)$ ilə, M

nöqtəsinin koordinatlarını isə $M(x, y)$ ilə işarə edək. Parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları düsturuna görə



Şəkil 7.

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1 + \lambda} \quad (1)$$

$\lambda > 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$, $1 + \lambda \neq 0$ və (1) düsturlarından alırıq.

$$x_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right), \quad y_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} y \quad (2)$$

$B(x_1, y_1)$ nöqtəsi verilən çevrənin üzərində olduğundan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ olacaq. Buradan

$$\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 y^2 = r^2 \quad (3)$$

və ya

$$\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(1+\lambda)^2} \quad (4)$$

Deməli M nöqtəsi mərkəzi $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$ nöqtəsində və

radiusu $\frac{\lambda r}{1+\lambda}$ -ya bərabər olan çevrənin üzərindədir. Beləliklə,

İsbat olundu ki, verilən çevrənin A nöqtəsindən çəkilən bütün vətərlərini λ ($\lambda > 0$) nisbətində bölən nöqtələr (4) tənliyi ilə verilən çevrənin A nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələrindən ibarətdir. A nöqtəsinin koordinatları da (4) tənliyini ödəyir. $\lambda = 1$ olarsa (4) tənliyi

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad (5)$$

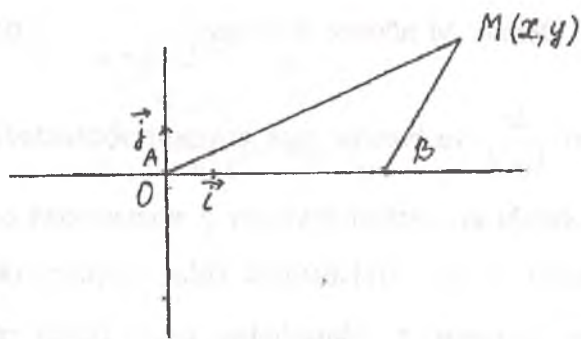
alırıq. Bu isə diametri OA olan çevrənin tənliyidir. İsbat olundu.

9) Müstəvinin verilmiş A və B nöqtələrindən məsafələrinin kvadratları fərqi verilən sabit ədədə bərabər olan nöqtələr çoxluğu, AB düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətdir.

İsbatı: $O \vec{i} \vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək

ki, koordinat başlanğıcı A nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün. $\vec{i}$ vek-

torunun istiqaməti $\overrightarrow{AB}$ vektorunun istiqaməti ilə üst-üstə düşsün.



Şəkil 8.

Verilən sabit ədədi α ilə, AB məsafəsini isə a ilə işarə edək. Seçilmiş koordinat sistemində $A(0, 0)$ və $B(a, 0)$ olacaq.

$M(x, y)$ nöqtəsi üçün $AM^2 - BM^2 = \alpha$ şərti ödənərsə onda $AM^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$, $BM^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$ olar. Yəni $x^2 + y^2 - ((x - a)^2 + y^2) = \alpha$. Buradan

$$2ax - a^2 = \alpha \text{ və}$$

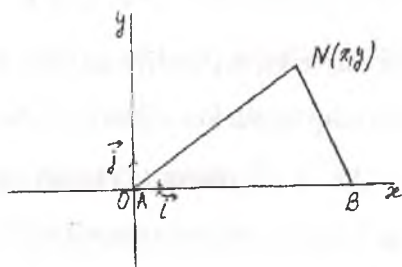
$$x = \frac{\alpha + a^2}{2a} \quad (6)$$

alırıq. (6) tənliyi isə $O \vec{i} \vec{j}$ koordinat sistemində Ox oxuna perpendikulyar olan düz xəttin tənliyidir. İsbat olundu.

10) Müstəvinin verilmiş A və B nöqtələrindən məsafələr cəminin sabit α^2 ədədinə bərabər olan nöqtələrinin çoxluğu, $2\alpha^2 > AB^2$ şərti ödəndikdə diametrlərindən biri AB parçası olan çevrə, $2\alpha^2 - AB^2 = 0$ şərti ödəndikdə AB parçasının orta nöqtəsindən ibarət bir elementli çoxluq, $2\alpha^2 - AB^2 < 0$ şərti ödəndikdə isə boş çoxluqdur.

İsbatı: $AB = a$ işarə edək. $O \vec{i} \vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı A nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün, $\vec{i}$ vektorunun istiqaməti isə $\overrightarrow{AB}$ vektorunun istiqamətində olsun.

Bu koordinat sistemində $A(0, 0)$ və $B(a, 0)$ olacaq. Fərz edək ki, $N(x, y)$ nöqtəsi üçün $AN^2 + BN^2 = \alpha^2$ şərti ödənilir.



Şəkil 9.

Bu münasibəti koordinatlarda yazsaq, alırıq:

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = \alpha^2$$

Buradan $2x^2 - 2ax + a^2 + 2y^2 = \alpha^2$ alınar.

Bərabərliyin hər iki tərəfini 2-yə bölsək,

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{2} + y^2 = \alpha^2 \quad \text{və ya}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2\alpha^2 - a^2}{2} \quad (7)$$

olar.

Göründüyü kimi $2\alpha^2 > a^2$ və ya $2\alpha^2 > AB^2$ şərti ödənərsə, (7) tənliyi mərkəzi $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ nöqtəsində başqa sözlə desək AB parçasında orta nöqtəsində, olan çevrənin tənliyidir.

Əgər $2\alpha^2 = a^2 = AB^2$ şərti ödənərsə (7) tənliyi

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

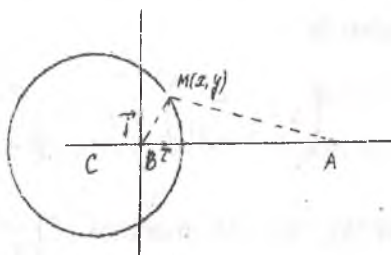
şəklinə düşər ki, bu tənliyi də yalnız bir nöqtənin, AB parçasının orta nöqtəsinin koordinatları ödəyər.

$2\alpha^2 < a^2$ olarsa (7) tənliyini koordinatları həqiqi ədədlər olan heç bir nöqtənin koordinatları ödəməz.

İsbat olundu.

11) Müstəvinin verilmiş A və B nöqtələrindən məsafələrinin nisbəti sabit λ ($\lambda \neq 1$) ədədinə bərabər olan nöqtələrinin çoxluğu mərkəzi AB düz xətti üzərində olan çevrədir. (Appolini çevrəsi)

İsbatı: $AB = a$ işarə edək. $B \vec{i} \vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı B nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün.



Şəkil 10.

$\vec{i}$ vektorunun istiqaməti isə $\overrightarrow{BA}$ vektorunun istiqamətində olsun (Şəkil 10). Bu koordinat sistemində $A(a, 0)$ və $B(0,0)$ olacaq. Fərz edək ki, $M(x, y)$ nöqtəsi elədir ki, $AM = \lambda MB$ şərti ödənilir.

Bu bərabərliyi koordinatlarda yazsaq alarıq:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib, oxşar hədləri islah etsək alarıq:

$$(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$\lambda \neq 1$ olduğundan aldığımız bərabərliyin hər tərəfini $1-\lambda^2 \neq 0$ ifadəsinə bölsək:

$$x^2 + y^2 - \frac{2ax}{1-\lambda^2} + \frac{a^2}{1-\lambda^2} = 0 \text{ və ya}$$

$$\left(x - \frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(1-\lambda^2)^2} - \frac{a^2}{1-\lambda^2}$$

Buradan da

$$\left(x - \frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 \lambda^2}{(1-a^2)^2} \quad (8)$$

tənliyi alınır ki, bu da mərkəzi $C\left(\frac{a}{1-\lambda^2}, 0\right)$ nöqtəsində,

radiusu isə $r = \frac{a\lambda}{|1-\lambda^2|}$ olan çevrənin tənliyidir. C nöqtəsinin

AB düz xətti üzərində olması aydındır. (Ordinatı 0-a bərabərdir). Bu çevrəyə Appoloni çevrəsi deyilir. Kəsişmə üsulu ilə həll olunan qurma məsələlərinə bəzi misallar göstərək.

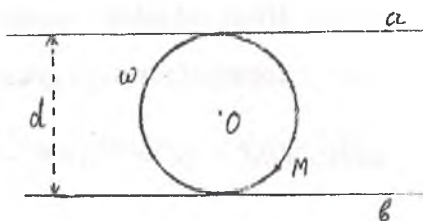
Məsələ 1. Verilən a və b paralel düz xətlərinə toxunan, verilmiş M nöqtəsindən keçən çevrəni qurun.

Həlli:

Analiz. Fərz edək məsələ həll olunub və tələb olunan ω çevrəsi qurulub. ω çevrəsinin mərkəzini O ilə işarə edək. Əgər O nöqtəsini qura bilsək onda (O, OM) çevrəsi tələb olunan ω çevrəsi olacaq. Beləliklə, məsələnin həlli tələb olunan çevrənin O mərkəzini qurmağa gətirilir.

O nöqtəsi isə aşağıdakı
iki şərti ödəyir:

1) O nöqtəsi a və b
paralel düz xətlərindən eyni
məsafədədir.



Şəkil 11, a

2) Əgər a və b paralel düz xətləri arasındakı məsafəni
 d ilə işarə etsək, onda $OM = \frac{d}{2}$ olar. a və b paralel düz xətlərindən eyni məsafədə yerləşən bütün nöqtələrin çoxluğu həmin düz xətlərin simmetriya oxudur. M nöqtəsindən isə $\frac{d}{2}$ məsafədə yerləşən bütün nöqtələrin çoxluğu $\left(M, \frac{d}{2}\right)$ çevrəsidir.

Buradan da aşağıdakı qurma üsulu alınır.

Qurma. 1) Verilən a və b düz xətlərinin hər hansı AB ortaq perpendikulyarını çəkək.

2) AB düz xəttinin a və b paralel düz xətləri arasında qalan AB parçasının m orta perpendikulyarını çəkək.
 $C = m \cap AB$ nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsidir.

3) (M, AC) çevrəsini çəkək. m düz xətti ilə (M, AC) çevrəsinin kəsişmə nöqtələrindən birini O ilə işarə edək.

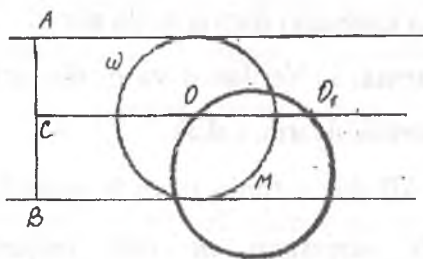
4) (O, OM) çevrəsini çəkək.

Bu çevrə tələb olunan çevrədir.

İsbatı: Qurmaya görə (O, OM) çevrəsi M nöqtəisindən keçir. $OM = AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} d$ olduğundan (O, OM) çevrəsi həm a , həm də b düz xəttinə toxunur.

Araşdırma: Aydındır ki, məsələnin ancaq onda həlli olar ki, m düz xətti ilə (O, OM) çevrəsinin ortaq nöqtəsi olsun. Həllərin sayı həmin ortaq nöqtələrin sayına bərabərdir. Üç hal mümkündür.

1) M nöqtəsi a və b paralel düz xətlərinin arasında yerləşir. Bu halda m düz xətti ilə M nöqtəsi arasındakı məsafə $\rho(m, M) < AC$ olar. Deməli m düz xətti ilə (O, OM) çevrəsininiki ortaq nöqtəsi olacaq və məsələnin iki həlli var. (Şəkil 11, b)



Şəkil 11, b

2) M nöqtəsi a və b düz xətlərinin birinin üzərindədir. Bu halda $\rho(m, M) = AC$. Deməli (M, AC) çevrəsi m düz xəttinə toxunur. Məsələnin yeganə həlli var.

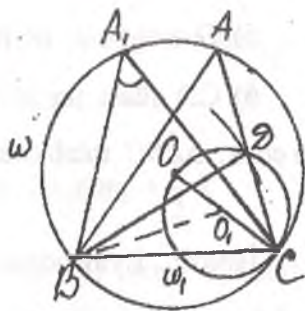
3) M nöqtəsi a və b paralel düz xətlərinin arasındakı zolağın xaricindədir. Bu halda $\rho(m, M) > AC$ olduğundan m düz xətti ilə (M, AC) çevrəsi kəsişmir. Deməli məsələnin həlli yoxdur.

Məsələ 2. Xaricinə çəkilmiş çevrənin R radiusuna, $\hat{A} = \varphi_0$ bucağına və m_b medianına görə ABC üçbucağını qurun.

Həlli:

Analiz: Fərz edək ki, tələb olunan ABC üçbucağını qurmuşuq. (Şəkil 12)

$\hat{A} = \varphi$, $BD = m_b$. Üçbucağın xaricinə çəkilmiş R radiuslu çevrəni ω ilə işarə edək. $\omega = (O, \overline{R})$. BC tərəfi ω çevrəsinin BAC qövsünün ixtiyari nöqtəsindən φ bucağı altında görünür.



Şəkil 12.

Başqa sözlə, ixtiyari $A \in \cup BAC$ üçün $\hat{BAC} = \varphi$ olacaqdır.

$D \in CA$ nöqtəsi isə $(B, \overline{m_b})$ çevrəsinin üzərində olacaq. Digər tərəfdən, D nöqtəsi CA vətəri $\lambda = 1$ nisbətində bölür. Yuxarıda

8)-ci çoxluğun xassəsinə görə D nöqtəsi diametrlərindən biri OC parçası olan çevrənin üzərində olacaq. Buradan aşağıdakı qurma üsulu alınır.

Qurma: 1) $\omega = (O, R)$ çevrəsini çəkək.

2) İxtiyari $B \in \omega$ və $A_1 \in \omega$ nöqtələri götürüb elə

$\angle BA_1C$ quraq ki, $BA_1C = \varphi$ olsun və $C \in \omega$ şərti ödənsin. B və C nöqtələri axtarılan üçbucağın iki təpə nöqtəsi olsun.

3) Diametri OC parçası olan ω_1 çevrəsini quraq.

4) $\omega_2 = (B, BD)$ çevrəsini quraq.

5) $D \in \omega_1 \cap \omega_2$ nöqtəsini qeyd edək.

6) CD şüası ilə ω çevrəsinin kəsişmə nöqtəsini A ilə işarə edək. $\triangle ABC$ tələb olunan üçbucaqdır.

İsbatı: Eyni qövsə söykəndikləri üçün $\hat{A} = \hat{BA_1C} = \varphi$ olar. İsbat etdiyimiz kimi $C \in \omega$ nöqtəsindən çəkilən vətərləri $\lambda = 1$ nisbətində bölən bütün nöqtələr diametri OC olan çevrənin üzərindədir və tərsinə. Deməli $CD = DA$ olur. Deməli $BD = m_b$. ABC üçbucağının B təpəsindən çəkilən medianıdır. Qurmaya görə isə $\triangle ABC$ -nin xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu R -ə bərabərdir.

Araşdırma: Məsələnin həlli olması üçün qurmanın 5)-ci addımındakı ω_1 və ω_2 çevrələrinin kəsişən olması üçün həm

zəruri, həm də kafi şərtidir. $\omega_1 = (O_1, OC) = \left(O_1, \frac{1}{2}\bar{R}\right)$ və $\omega_2 = (B, \bar{m}_b)$. Bu iki çevrənin mərkəzləri arasındakı məsafəni

topaq. ΔBOO_1 -də $\angle BOO_1 = 2\varphi$, $OB = R$, $OO_1 = \frac{1}{2}R$ olduğundan kosinuslar teoreminə görə

$$O_1B = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2 \cos 2\varphi} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\varphi}$$

Çevrələrin qarşılıqlı vəziyyəti haqqında teoremə görə (§2, teorem2) ω_1 və ω_2 çevrələrinin yalnız

$$\left|m_b - \frac{1}{2}R\right| \leq R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\varphi} \leq m_b + \frac{1}{2}R \quad (*)$$

olduqda ortaq nöqtələri olur. Deməli (*) şərti ödəndikdə məsələnin yeganə həlli olur, ödənmədikdə məsələnin həlli yoxdur.

§5. Qurma məsələlərinin çevirmələr üsulu ilə həlli

Qurma məsələlərinin həllində çox vaxt müstəvinin müxtəlif həndəsi çevirmələrindən istifadə olunur. Belə çevirmələrə misal olaraq müstəvinin hərəkətinin müxtəlif növləri olan simmetriyanı, paralel köçürməni, dönməni və s. göstərmək

olar. Eyni zamanda hərəkət çevirməsindən fərqli olan oxşar çevirmədən, oxşar çevirmənin xüsusi halı olan homotetiyadan, inversiya çevirməsindən də istifadə olunur.

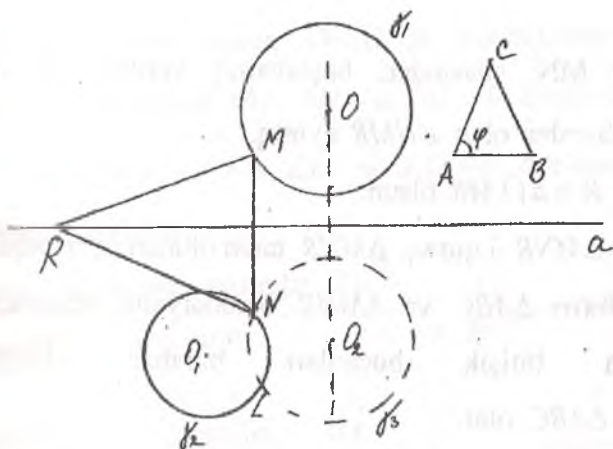
Əvvəlcə simmetriya üsulunun köməyi ilə bir məsələnin həlli üzərində dayanaq.

Məsələ 1. İki γ_1 və γ_2 çevrələri, a düz xətti və ABC bərabəryanlı üçbucağı verilmişdir ($AC=BC$). ABC üçbucağının oxşar elə MNR üçbucağını qurun ki, $M \in \gamma_1$, $N \in \gamma_2$ və R təpəsindən keçən hündürlük a düz xətti ilə üst-üstə düşsün.

Həlli:

Analiz. Tələb olunan MNR üçbucağının qurulduğunu fərz edək.

$M \in \gamma_1$, $N \in \gamma_2$ MNR bərabəryanlı üçbucağının hündürlüyü a düz xətti üzərindədir. a düz xəttinə nəzərən Ox simmetriyasına baxaq. Bu simmetriyada M nöqtəsi ilə N nöqtəsi də simmetrik olacaq. γ_1 çevrəsi ilə a düz xəttinə nəzərən simmetrik olan γ_3 çevrəsini quraq.



Şəkil 13.

N nöqtəsi $M \in \gamma_1$ nöqtəsi ilə simmetrik olduğundan,

$N \in \gamma_3$ olar. Buradan isə $N \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ alırıq. $\varphi = \angle BAC$ işarə

edək. $\angle NMR = \varphi$ olduğundan aşağıdakı qurmalar alınar.

Qurma: 1) a düz xəttinə nəzərən γ_1 çevrəsi ilə simmetrik olan γ_3 çevrəsini quraq.

2) γ_2 və γ_3 çevrələrinin kəsişmə nöqtələrindən birini N ilə işarə edək. $N \in \gamma_2 \cap \gamma_3$.

3) a düz xəttinə nəzərən N nöqtəsi ilə simmetrik olan M nöqtəsini quraq.

4) MN şüasından başlayaraq verilən $\hat{\varphi} = \angle BAC$ bucağına bərabər olan $\angle NMR$ ayıraq.

5) $R = a \cap MR$ olsun.

6) $\triangle MNR$ -i quraq. $\triangle MNR$ tələb olunan üçbucaqdır.

İsbatı: $\triangle ABC$ və $\triangle MNR$ bərabəryanlı üçbucaqdırlar. Oturacağa bitişik bucaqları bərabər olduğundan $\triangle MNR \sim \triangle ABC$ olar.

Araşdırma: Məsələnin həllinin varlığı Şəvrlələrinin qarşılıqlı vəziyyətindən asılıdır.

I hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri kəsişməzlərsə onda məsələnin həlli yoxdur.

II hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri toxunurlarsa onda bərabərlik dəqiqliklə məsələnin yalnız bir həlli var.

III hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri iki nöqtədə kəsişirlərsə bərabərlik dəqiqliklə məsələnin iki həlli vardır.

IV hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri üst-üstə düşərlərsə məsələnin sonsuz sayda həlli var.

İndi də paralel köçürmə metodu ilə həll olunan bir qurma məsələsini nəzərdən keçirək.

Məsələ 2. İki qarşı tərəfinə və üç bucağına görə qabarıq dördbucaqlı qurun:

Həlli:

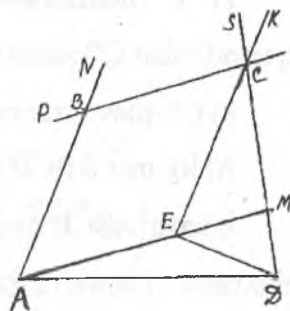
Analiz. Tələb olunan ABCD dördbucaqlısının qurulduğunu fərz edək (Şəkil 14). $AD = \bar{a}$, $BC = \bar{b}$ dördbucaqlının verilən tərəfləri və $\angle A = \bar{\varphi}$, $\angle B = \bar{\psi}$, $\angle D = \bar{\delta}$ dördbucaqlının verilən bucaqlarıdır.

Məsələnin şərtindən aydındır ki,

$$0 < \varphi < 180^\circ, 0 < \delta < 180^\circ$$

olmalıdır. BC tərəfini $\overrightarrow{BA}$ vektoru qədər paralel köçürək və onun obrazını AE ilə işarə edək.

ABCE fiquru paraleloqram olduğundan



Şəkil 14.

$\hat{BAE} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \psi$, $\hat{AEC} = \psi$ olar. AED üçbucağında isə üç element: $AD = \bar{a}$, $AE = BC = \bar{b}$ tərəfləri və onlar arasındakı $\hat{EAD} = \hat{A} - \hat{BAE} = \varphi - (180^\circ - \psi) = \varphi + \psi - 180^\circ$ bucağı məlumdur. Onda aşağıdakı qurmalar alınır.

Qurma: 1) hər hansı düz xətt üzərində $AD = \bar{a}$ parçası ayıraq.

2) AD şüasından başlayaraq ölçüsü $\varphi + \psi - 180^\circ$ -yə bərabər olan MAD bucağını ayıraq.

3) AM şüası üzərində $AE = b$ parçasını ayıraq.

4) DA şüasından başlayaraq M nöqtəsinin yerləşdiyi yarımüstəvidə $\angle SDA = \bar{\delta}$ bucağını ayıraq.

5) EA şüasından başlayaraq D nöqtəsinin yerləşmədiyi yarımmüstəvidə $\angle AEK = \bar{\psi}$ bucağını ayıraq.

$$6) C = EK \cap DS$$

7) C nöqtəsindən başlayaraq EA şüası ilə eyni istiqamətli olan CP şüasını quraq.

8) CP şüası üzərində $CB = \bar{b}$ parçasını ayıraq.

Aldığımız ABCD dördbucaqlısı tələb olunandır.

İsbatı: ABCE fiquru paraleloqram olduğundan $BC = \bar{b}$ şərti ödənər. (Qurmaya görə isə $AD = \bar{a}$)

$$\angle ABC = \angle AEC = \psi. \quad \angle BAE = 180^\circ - \psi$$

$$\angle A = \angle BAE = 180^\circ - \psi + \varphi + \psi - 180^\circ = \varphi$$

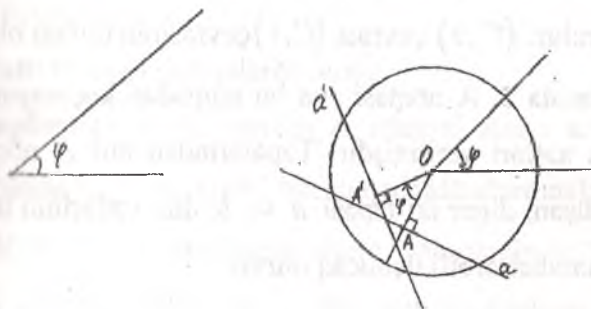
Qurmaya görə isə $AD = \bar{a}$.

Deməli ABCD tələb olunan dördbucaqlıdır.

Araşdırma: Qabarıq dördbucaqlının bucaqları cəmi 360° -yə bərabərdir. Deməli $\varphi + \psi + \delta < 360^\circ$ olsa məsələnin yeganə həlli var. Əks halda məsələnin həlli yoxdur.

İndi də dönmə üsulu ilə qurma məsələlərinin həllini nəzərdən keçirək. Öncə onu qeyd edək ki, bu üsul ilə məsələ həll edərkən dönmə çevirməsində nöqtənin, düz xəttin və çevrənin obrazını qurmağı bacarmalıyıq.

Fərz edək ki, müstəvinin O nöqtəsi ətrafında verilən φ bucağı qədər dönmə çevirməsi verilib. Bu çevirmədə verilən M nöqtəsinin və a düz xəttinin obrazını qurmaq lazımdır. (Şəkil 15).



Şəkil 15.

Əgər M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşərsə, onun obrazı elə onun özü olacaq. Fərz edirik ki, M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşmür. (O, OM) çevrəsini quraq. OM şüasından başlayaraq verilən φ bucağını ayıraq. Bucağın ikinci tərəfinin çevrə ilə kəsişdiyi M' nöqtəsi bu dönmədə M nöqtəsinin obrazı olacaq.

a düz xəttinin dönmədə obrazını qurmaq üçün O nöqtəsindən a düz xəttinə OA perpendikulyarı çəkilir. A nöqtəsinin O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər dönmədə A' obrazı qurulur. A' nöqtəsindən OA' düz xəttinə çəkilən a' perpen-

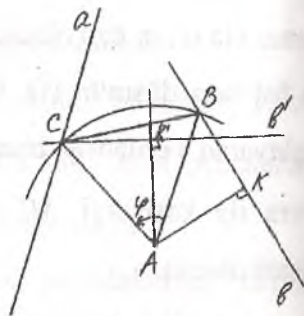
dikulyar düz xətt a düz xəttinin O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər dönmədə obrazı olacaq.

(C, r) çevrəsinin O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər dönmədə obrazını qurmaq üçün C nöqtəsinin bu dönmədə C' obrazı qurulur. (C', r) çevrəsi (C, r) çevrəsinin obrazı olacaq.

Məsələ 3. A nöqtəsi və bu nöqtədən keçməyən iki a və b düz xətləri verilmişdir. Təpələrindən biri A nöqtəsi ilə üst-üstə düşən, digər iki təpəsi a və b düz xətlərinin üzərində yerləşən bərabərtərəfli üçbucaq qurun:

Helli:

Analiz. Fərz edək ki, tələb olunan ABC üçbucağını qurmuşuq. $B \in b$, $C \in a$. b düz xəttinin A nöqtəsi ətrafında $\varphi = 60^\circ$ li bucaq qədər dönməsində B nöqtəsinin obrazı, b düz xəttinin obrazı olan b' düz xətti ilə a düz xəttinin kəsişməsi olan C nöqtəsi olacaqdır. Əgər C nöqtəsini qursaq, B nöqtəsini də asanlıqla qura bilərik.



Şəkil 16.

Qurma: 1) b düz xəttinin A nöqtəsi ətrafında $\varphi = 60^\circ$ bucaq qədər dönməsindən alınan b' obrazını quraq.

$$2) C = a \cap b'$$

3) (A, AC) çevrəsi ilə b düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini B ilə işarə edək.

4) Təpə nöqtələri A, B və C nöqtələri olan üçbucaq təşkil olunan üçbucaqdır.

İsbatı: Birbaşa qurmalarda alınır.

Araşdırma. b düz xəttini A nöqtəsi ətrafı ətrafında $\varphi = 160^\circ$ olmaqla, iki müxtəlif, bucaq qədərdöndərməklə onun iki müxtəlif b' və b'' obrazlarını alırıq. Məsələnin həllərinin sayı b' və b'' düz xətləri ilə a düz xəttinin kəsişməsindən alınan nöqtələrin sayına bərabər olar. Aşağıdakı hallar ola bilər.

a) a və b düz xətləri arasındakı bucaq 60° və 120° -dən fərqli olduqda b' və b'' düz xətləri ilə a düz xəttinin iki kəsişmə nöqtəsi alınır. Deməli məsələnin yalnız iki həlli olar.

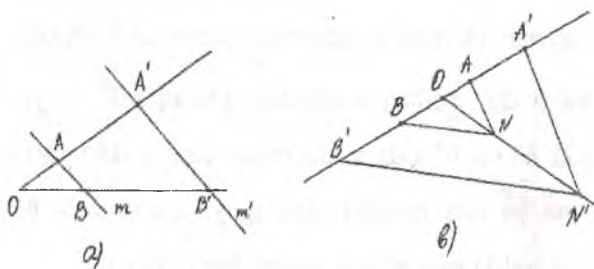
b) a və b düz xətləri arasındakı bucaq 60° və ya 120° bərabər olduqda b' və b'' düz xətlərindən biri a düz xəttini kəsəcək, digəri isə ya ona paralel olacaq, ya da onunla üst-üstə düşəcək. Birinci halda məsələnin yalnız bir həlli olur.

! Oxşar çevirmənin tətbiqi ilə qurma məsələlərinin həllinə baxaq. Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir: Övylə axtarılan fiqur ilə oxşar olan fiqur qurulur; sonra bu fiqurun köməyi ilə axtarılan fiqur qurulur.

Adətən bu üsul ilə qurma məsələləri həll edilərkən axtarılan figura homotetik olan fiqur qurulur. Bu səbəbdən də müəyyən nöqtələrin homotetiyada obrazlarını qurmaq zəruri meydana çıxır. Daha doğrusu, hələ orta məktəbdən məlum olan aşağıdakı məsələ tipində məsələləri tez-tez həll etmək lazım gəlir.

Məsələ. Mərkəzi O nöqtəsində olan homotetiyada hər hansı A nöqtəsi və onun A' obrazı verilir. Verilən B nöqtəsinin B' obrazını qurmaq tələb olunur.

Həlli: Əvvəlcə B nöqtəsinin OA düz xətti üzərində olmayan hala baxaq. O mərkəzli homotetiyada AB düz xətti ona paralel olan m' düz xəttinə keçəcək. B' nöqtəsi m' düz xətti ilə OB düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olacaq (Şəkil 17 a).

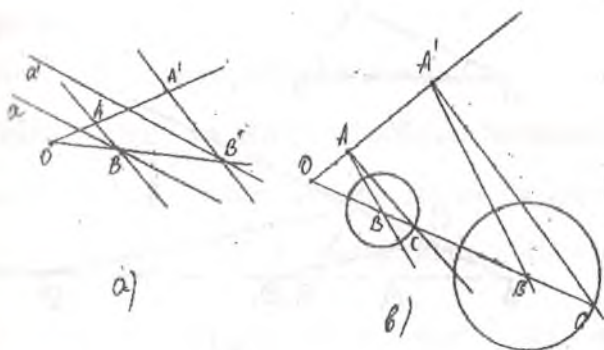


Şəkil 17.

Əgər B nöqtəsi OA düz xətti üzərində olarsa, əvvəlcə OA düz xətti üzərində olmayan hər hansı N nöqtəsinin N' obrazını yuxarıdakı qayda ilə qururuq. Sonra isə N nöqtəsi və

ının N' obrazından istifadə edib B' nöqtəsini qururuq (Şəkil 17 b).

Yuxarıdakı məsələdən istifadə edərək, hər hansı h düz xəttin də verilən homotetiyada obrazını qura bilərik. Bunun üçün həmin düz xəttin üzərindəki ixtiyari bir nöqtənin obrazını qururuq. Sonra isə həmin nöqtədən verilən düz xəttə paralel düz xətt keçiririk (Şəkil 18 a).



Şəkil 18.

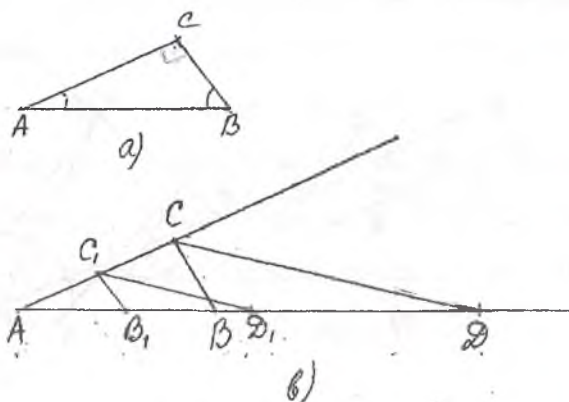
O mərkəzli iki A və A' nöqtəsi ilə verilən homotetiyada hər hansı ω çevrəsinin obrazını qurmaq üçün, bu çevrənin B mərkəzinin və hər hansı C nöqtəsinin obrazını qurmaq kifayətdir (Şəkil 18 b).

Məsələ 4. Perimetrinə və iki bucağına görə üçbucaq qurun.

Həlli: Əvvəlcə məsələnin qoyuluşunu bir qədər dəqiqləşdirək: bizdən elə bir ABC üçbucağı qurmaq tələb olunur ki,

o üçbucaq $\hat{A} = \varphi$, $\hat{B} = \psi$ və $AB+BC+AC=p$ şərtlərini ödəsin. Burada $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ və $\overline{p}$ qabaqcadan verilmiş fiqurlardır.

Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll olunub və tələb olunan ABC üçbucağı qurulub. Bu üçbucaq $\angle A = \overline{\varphi}$, $\angle B = \overline{\psi}$ və $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{p}$ şərtini ödəyir (Şəkil 19, a)



Şəkil 19.

Bucaqlarından biri $\overline{\varphi}$ -ə, digəri isə $\overline{\psi}$ -yə bərabər olan üçbucaqların hamısı ABC üçbucağı ilə oxşar olacaq. Oxşar üçbucaqlarının tərəflərinin nisbəti isə onların perimetrlərinin nisbətində bərabərdir. Homotetiyadan istifadə edərək, tələb olunan üçbucağı aşağıdakı kimi qura bilərik:

Qurma. 1) $\angle A = \overline{\varphi}$, $\angle B_1 = \overline{\psi}$ şərtini ödəyən hər hansı

AB_1C_1 üçbucağını quraq.

2) AB_1C_1 üçbucağının perimetrini p_1 ilə işarə edək.

AB_1 qüası üzərində $AD_1 = \overline{p_1}$ və $AD = \overline{p}$ parçalarını ayıraq.

3) A mərkəzli və D_1 nöqtəsini D nöqtəsinə keçirən homotetiyada B_1 nöqtəsinin B obrazını və C_1 nöqtəsinin C obrazını quraq.

Alınan ABC üçbucağı tələb olunandır.

İsbatı: AB_1C_1 və ABC üçbucaqları homotetikdirlər.

Bu homotetiyayı h ilə, onun əmsalını isə m ilə işarə edək.

$D = h(D_1)$, $B = h(B_1)$, $C = h(C_1)$ olduğundan $AD = m \cdot AD_1$

olar. $\hat{A} = \varphi$, $\hat{B} = \psi$ olması da aydındır. $AB = m \cdot AB_1$,

$AC = m \cdot AC_1$, $BC = m \cdot BC_1$ olduğundan

$$AB + AC + BC = m \cdot AB_1 + m \cdot AC_1 + m \cdot B_1C_1 =$$

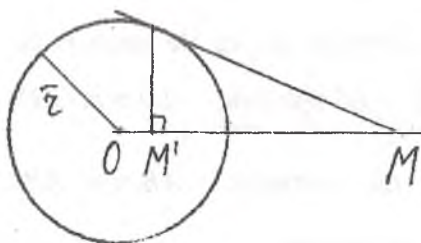
$$= m(AB_1 + AC_1 + B_1C_1) = m \cdot p_1 = m \cdot AD_1 = AD = p$$

Deməli ABC tələb olunan üçbucaqdır.

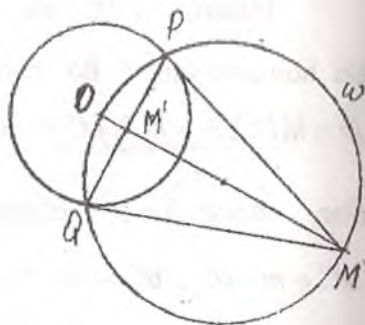
Araşdırma. Əgər $\varphi + \psi < 180^\circ$ olarsa məsələnin həlli var və yeganədir. Əgər $\varphi + \psi \geq 180^\circ$ olarsa məsələnin həlli yoxdur.

§6. İncersiya. Qurma məsələlərinin incersiya üsulu ilə həlli

Tutaq ki, bizə müstəvi üzərində (O, r) çəvrəsi verilib. Müstəvinin O nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələri çoxluğunu E_0 ilə işarə edək. Hər bir $M \in E_0$ nöqtəsinə OM şüası üzərində yerləşən və $OM \cdot OM' = r^2$ şərtini ödəyən M' nöqtəsini qarşı qoyaq. E_0 çoxluğunun bu cür çevrilməsinə (O, r) çəvrəsinə nəzərən incersiya və ya sadəcə incersiya deyilir. (Şəkil 20.)



Şəkil 20.



Şəkil 21.

(O, r) çəvrəsinə incersiya çəvrəsi, O nöqtəsinə incersiyanın mərkəzi, r^2 -na isə incersiyanın dərəcəsi deyilir. İncersiyanın tərifindən görünür ki, əgər incersiya zamanı M nöqtəsi M' nöqtəsinə inikas olunursa, onda M' nöqtəsi də M nöqtəsinə inikas olunur. İncersiya çəvrəsi üzərində olan nöqtələr isə

invariantdırlar, yəni öz-özünə inikas olunurlar. Verilən inversiyada nöqtənin obrazının qurulmasına baxaq.

Məsələ. İnversiya (O, r) çevrəsi ilə verilmişdir. Verilən M nöqtəsinin bu inversiyada M' obrazını qurun.

Həlli: Əgər M nöqtəsi (O, r) çevrəsi üzərindədirsə onda onun obrazı elə özü olacaqdır. Əgər M nöqtəsi (O, r) çevrəsi xaricində olarsa (Şəkil 21) onda OM şüası çəkkək. Sonra bu şüa diametrlərindən biri OM parçası olan ω çevrəsini quraq. ω çevrəsi ilə (O, r) çevrəsinin kəsişmə nöqtələri P və Q olsun. OM düz xətti ilə PQ düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olan M' nöqtəsi M nöqtəsinin obrazı olacaqdır. Bunu isbat edək. MP və MQ düz xətləri (O, r) çevrəsinə toxunan olduqlarından $\angle OPM$ və $\angle OMP$ bucaqları düz bucaq olacaqlar. Buradan alınır ki, $\triangle OPM' \sim \triangle OMP$ (bir iti bucaqları bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar kimi). Deməli

$$\frac{OM'}{OP} = \frac{OP}{OM} \text{ və ya } OM' \cdot OM = OP^2 = r^2$$

Əgər M nöqtəsi (O, r) çevrəsinin daxili nöqtəsi olarsa, yuxarıdakı qurmanı tərsinə icra etməklə M' nöqtəsini qura bilərik.

Düz xətt və çevrə kimi əsas qurma fiqurlarının inversiyada obrazlarını tapmaq üçün bizə inversiya çevirməsinin ana-

litik ifadəsi lazım olacaq. $O \vec{i} \vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı inversiya çevrəsinin mərkəzi ilə üst-üstə düşsün.

Fərz edək ki, $M(x, y)$ nöqtəsi E_0 çoxluğunun ixtiyari nöqtəsidir. $M'(x', y')$ isə onun obrazıdır. İnversiya çevirməsinin tərifindən görünür ki,

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}, \lambda > 0 \text{ və } \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2$$

Bu bərabərlikdən alınır ki,

$$x' = \lambda x, y' = \lambda y \quad (1)$$

Skalyar hasilin tərifindən alınır ki,

$$xx' + yy' = r^2 \quad (2)$$

x' və y' dəyişənlərinin (1) münasibətlərindəki qiymətlərini (2) də yerinə yazsaq $\lambda(x^2 + y^2) = r^2$ alınır. M nöqtəsi O nöqtəsindən fərqli olduğundan $\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2}$ alarıq. λ -nın bu qiymətini (1)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Əgər $M'(x', y')$ nöqtəsi $M(x, y)$ nöqtəsinin obrazı isə onda inversiyanın tərifinə görə $M(x, y)$ nöqtəsi də $M'(x', y')$ nöqtəsinin obrazıdır. Onda (3) düsturlarından alarıq:

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}, y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} \quad (4)$$

İndi isə inversiyada düz xəttin obrazı haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. O inversiya mərkəzindən keçən düz xətt (O nöqtəsini çıxmaq şərti ilə) inversiya zamanı özünə, inversiya mərkəzindən keçməyən düz xətt isə inversiya mərkəzindən keçən çevrəyə inikas olunur.

İsbatı: İnversiya çevirməsində inversiya mərkəzindən keçən düz xəttin O nöqtəsindən fərqli nöqtələri bu düz xətt üzərində olan nöqtələrə inikas olunduğundan teoremin birinci hissəsinin isbatı aydındır. İndi fərz edək ki, düz xətt inversiya mərkəzindən keçmir. Koordinat sistemini yuxarıdakı qayda ilə seçsək, həmin düz xəttin tənliyini $Ax + By + 1 = 0$ tənliyində x və y dəyişənləri əvəzinə onların (3) ifadəsindəki qiymətlərini yazsaq

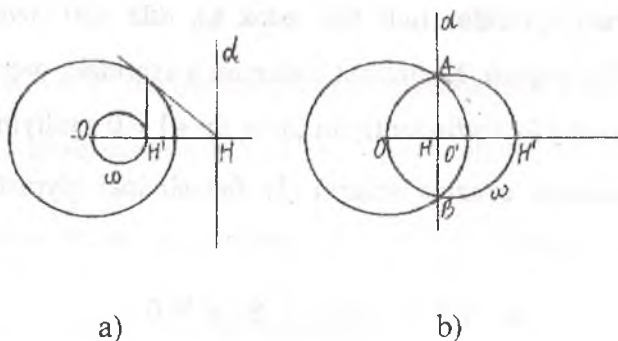
$$x'^2 + y'^2 + Ar^2 x' + Br^2 y' = 0 \quad (5)$$

çevrə tənliyi alınar. (5) tənliyində sərbəst hədd sıfır olduğundan, onun koordinat başlanğıcından keçən çevrənin tənliyi olduğu analitik həndəsə kursundan məlumdur.

Teorem isbat olundu.

Nəticə: İnversiyada, O inversiya mərkəzindən keçməyən d düz xətti (C, r) çevrəsinə inikas olunursa, onda OC düz xətti ilə d düz xətti qarşılıqlı perpendikulyardır.

İsbatı: (C, r) çevrəsinin (5) tənliyindən onun mərkəzinin koordinatlarını tapa bilərik. $C\left(-\frac{Ar^2}{2}, -\frac{Br^2}{2}\right)$ Onda $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{Ar^2}{2}, -\frac{Br^2}{2}\right)$ vektoru d düz xəttinin $\vec{n}(A, B)$ normal vektoru ilə kollienardır. Deməli OC düz xətti d düz xəttinə perpendikulyardır. Nəticə isbat olundu.



Şəkil 22.

Bu nəticədən istifadə edərək, inversiya çevirməsində d düz xəttinin obrazını asanlıqla qurmaq olar. Əgər d düz xətti O inversiya mərkəzindən keçirsə onda onun obrazı elə özü olacaqdır. Əgər d düz xətti O inversiya mərkəzindən keçmir-

80, onun obrazını aşağıdakı kimi qurmaq olar. O nöqtəsindən d düz xəttinə OH perpendikulyarını endirək. H nöqtəsinin (O, r) çevrəsinə nəzərən inversiyada H' obrazını quraq. Diametrlərdən biri OH' olan ω d düz xəttinin obrazı olacaq. (Şəkil 22, a) halında d düz xətti γ inversiya çevrəsini kəsmir, b) halında kəsir.

Teorem 2. (O, r) çevrəsinə nəzərən inversiyada O mərkəzindən keçən çevrə (O nöqtəsini çıxmaq şərti ilə) inversiya mərkəzindən keçməyən d düz xəttinə inikas olunur. O inversiya mərkəzindən keçməyən çevrə isə, O mərkəzindən keçməyən çevrəyə inikas olunur. O nöqtəsi həmin çevrələrin mərkəzlərini birləşdirəndüz xəttin üzərində olur.

İsbatı: Tutaq ki,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0 \quad (6)$$

başlanğıcı O inversiya mərkəzində olan $O \vec{i} \vec{j}$ koordinat sisteminə hər hansı ω çevrəsinin tənliyidir. Bu tənlikdə x və y dəyişənlərinin yerinə onların (4) bərabərliklərindəki ifadələrini yazsaq, onda ω çevrəsinin ω' obrazının tənliyini alırıq.

$$\left(\frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2} \right)^2 + \left(\frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} \right)^2 + \frac{Ar^2 x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{Br^2 y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0$$

və ya

$$\frac{r^4(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2} + \frac{Ar^2x' + Br^2y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0$$

Buradan isə

$$C(x'^2 + y'^2) + Ar^2x' + Br^2y' + r^4 = 0 \quad (7)$$

tənliyi alınar. Əgər ω çevrəsi koordinat başlanğıcından keçərsə, onda onun O nöqtəsindən fərqli olan bütün nöqtələri üçün $C=0$ olduğundan, bu çevrə $Ar^2x' + Br^2y' + r^4 = 0$ düz xəttinə inikas olunar. Əgər ω çevrəsi koordinat başlanğıcından keçmirsə onda onun ω' obrazının tənliyi (7) tənliyi olacaqdır. (7) tənliyi isə çevrənin tənliyidir. (6) və (7) tənliklərindən ω və

$$\omega' \text{ çevrələrinin uyğun olaraq } \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ və } \left(-\frac{Ar^2}{2C}, -\frac{Br^2}{2C}\right)$$

mərkəzlərini tapa bilərik. Bu nöqtələr və $O(0,0)$ nöqtəsi $Bx - Ay = 0$ tənliyi ilə verilən düz xəttin üzərindədirlər. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Tutaq ki, bizə ω_1 və ω_2 kimi iki fiqur verilmişdir. Belə ki, ω_1 ya düz xətt, ya da ki, çevrədir. ω_2 -isə çevrədir. Əgər ω_1 və ω_2 hər hansı M nöqtəsində (M nöqtəsi O inversiya mərkəzindən fərqli nöqtədir) bir-birinə toxunarlarsa, onda onların ω_1' və ω_2' obrazları da M nöqtəsinin obrazı olan M' nöqtəsində bir-birinə toxunurlar.

İsbatı: ω_1 və ω_2 fiqurlarının hər ikisi inversiya mərkəzindən keçmir. Deməli, əgər onlar toxunurlarsa, onların obrazlarının da bir ortaq nöqtəsi olar. ω_1 və ω_2 fiqurlarının obrazlarının ortaq nöqtəsi onların toxunma nöqtəsinin obrazı olacaq. Həmin nöqtə inversiya mərkəzi ola bilməz. Deməli ω_1' və ω_2' fiqurları da toxunurlar. Teorem isbat olundu.

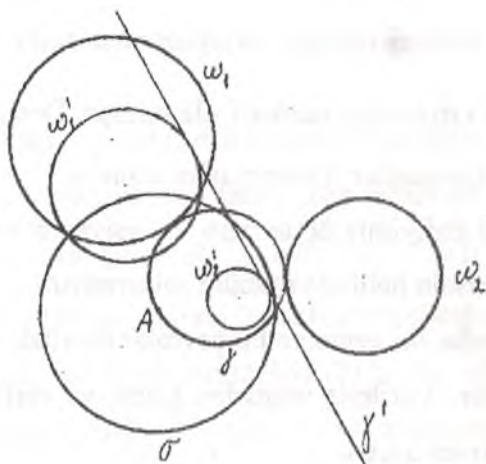
İsbat etdiyimiz üç teorem inversiyanın vasitəsi ilə qurma məsələlərinin həllində mühüm rol oynayır.

Məsələ. İki çevrə və bu çevrələr üzərində olmayan nöqtə verilmişdir. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş çevrələrə toxunan çevrəni qurun.

Həlli:

Analiz. Fərz edək ki, verilən A nöqtəsindən keçən, verilən ω_1 və ω_2 çevrələrinə toxunan γ çevrəsini qurmuşuq. (Şəkil 23). Mərkəzi A nöqtəsində olan ixtiyari σ çevrəsini çəkək. σ çevrəsinə nəzərən inversiya çevirməsinə baxaq. A nöqtəsi inversiya mərkəzi olduğundan, onun obrazı olmayacaq. γ çevrəsinin obrazı inversiya mərkəzindən keçməyən γ' düz xətti olacaq. ω_1 çevrəsinin obrazı ω_1' çevrəsi və ω_2 çevrəsinin obrazı ω_2' çevrəsi olar. γ' düz xətti həm ω_1' həm də

əsasən aşağıdakı qurmaları aparmaq olar.



Şəkil 23.

Qurma: 1) Mərkəzi A nöqtəsində olan ixtiyari σ çevrəsini quraq.

2) σ çevrəsinə nəzərən inversiyada ω_1 çevrəsinin ω'_1 obrazını quraq.

3) σ çevrəsinə nəzərən inversiyada ω_2 çevrəsinin ω'_2 obrazını quraq.

4) ω'_1 və ω'_2 çevrələrinin ehtimalda ortaq γ' toxunanını çəkək ki, o A nöqtəsindən keçməsin.

quraq (γ' toxunanı A nöqtəsindən keçmədiyi üçün onun obrazı çevrə olacaq). γ tələb olunan çevrə olar.

İsbatı: γ çevrəsinin ω_1 və ω_2 çevrələrinə toxunan olduğu 3-cü teoremdən alınır. γ' düz xətti inversiya mərkəzindən keçmədiyi üçün onun γ obrazı inversiya mərkəzi A-dan keçəcək.

Araşdırma: Əgər ω_1 və ω_2 çevrələrinin biri digərinin daxilində yerləşirsə və toxunmurlarsa onda ω_1' və ω_2' çevrələri də toxunmurlar və biri digərinin daxili oblastında yerləşir. Bu halda məsələnin həlli yoxdur. Əgər ω_1 və ω_2 çevrələri birbirinə daxildən toxunurlarsa bu halda A nöqtəsi çevrələrin xarici oblastındadırsa məsələnin sonsuz sayda həlli var. A nöqtəsi çevrələrin ω_1 və ω_2 çevrəsinin xaricindədirsə və ya kəsişirlərsə, A nöqtəsi həmin çevrələrin xaricindədirsə, bu halda məsələnin həllərinin sayı ω_1' və ω_2' çevrələrinin kəsişmə nöqtələrinin sayına bərabərdir.

§7. Qurma məsələlərinin cəbri üsulla həlli

Tutaq ki, hər hansı e vahid parçası seçilib. Seçilmiş ölçü vahidi ilə uzunluqları uyğun olaraq $a, b, \dots, l$ ədədlərinə

bərabər olan $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçaları verilir. Elə $\bar{x}$ parçası qurmaq tələb olunur ki, onun x uzunluğu verilən $a, b, \dots, l$ ədədləri ilə

$$x = f(a, b, \dots, l) \quad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunsun. Aydındır ki, parçanın uzunluğunu bildiren $a, b, \dots, l$ ədədləri həmişə müsbət ədədlər olur. Belə çıxır ki, (1) düsturu ilə hesablanan x ədədi də $\bar{x}$ parçasının uzunluğu olduğundan müsbət ədəd olmalıdır. Belə bir sual meydana çıxır: (1) düsturu ilə təyin olunan x ədədi ölçü vahidinin seçilməsindən asılı olmayaraq, həmişə eyni bir parçanın uzunluğunu ifadə edirmi?

Tutaq ki, bizə $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsi verilib. İxtiyari müsbət $a, b, \dots, l$ və t ədədləri üçün $f(a, b, \dots, l)$ və $f(ta, tb, \dots, tl)$ ifadələrinin mənası varsa və bu ifadələr üçün

$$f(ta, tb, \dots, tl) = tf(a, b, \dots, l) \quad (2)$$

şərti ödənərsə, onda $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsinə *bir dərəcəli bircins ifadə* deyilir.

Teorem. $a, b, \dots, l$ ədədləri verilən $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqları olduqda (1) düsturu ilə təyin olunan x ədədinin ölçü vahidin seçilməsindən asılı olmayaraq həmişə eyni parçanın uzunluğunu ifadə etməsi üçün zəruri və kafi şərt $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsinin birdərəcəli bircins ifadə olmasıdır.

İsbatı: Əvvəlcə şərtin zəruriliyini göstərək. Tutaq ki, $\bar{e}$ ölçü vahidi seçildikdə $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqları uyğun olaraq $a, b, \dots, l$ ədədlərinə bərabər, $\bar{e}'$ parçası ölçü vahidi seçildikdə $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqları $a', b', \dots, l'$ ədədlərinə bərabər olmuşdur. Onda elə t müsbət ədədi var ki,

$$a' = ta, \quad b' = tb, \quad \dots, l' = tl \quad (3)$$

Buna görə də

$$x' = f(a', b', \dots, l') = f(ta, tb, \dots, tl)$$

Əgər $x = f(a, b, \dots, l)$ və $x' = f(a', b', \dots, l')$ ədədləri eyni bir $\bar{x}$ parçasının müxtəlif ölçü vahidləri ilə uzunluğunu ifadə edirlərsə, onda $x' = tx$ olmalıdır. Buradan isə $f(ta, tb, \dots, tl) = tf(a, b, \dots, l)$ alırıq. Yəni $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsi birdərəcəli bircins ifadədir.

Tərsinə fərz edək ki, $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsi birdərəcəli bircins ifadədir, yəni (2) bərabərliyi ödənilir. Əgər $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqları $\bar{e}$ vahid parçası seçildikdə $a', b', \dots, l'$ ədədləri olarsa onda (3) bərabərlikləri ödənər. Onda

$$x' = f(a', b', \dots, l') = f(ta, tb, \dots, tl) = tf(a, b, \dots, l) = tx$$

Deməli, x' və x ədədləri eyni bir parçanın uzunluğunu ifadə edirlər. Teorem isbat olundu.

Orta məktəb həndəsə kursundan aşağıdakı sadə düsturlarla verilən parçaların qurulmasını bilirik.

I. $x = a + b$

II. $x = a - b \quad a > b$

III. p və q ədədləri natural ədədlər olduqda $x = \frac{p}{q} a$

IV. $x = \frac{ab}{c}$ (dördüncü mütənasib parçanın qurulması)

V. $x = \sqrt{ab}$

VI. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

VII. $x = \sqrt{a^2 - b^2} \quad a > b$

Bu düsturlarda a , b , c ədədləri seçilmiş ölçü vahidi ilə verilən $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ parçalarının uzunluqlarını göstərir.

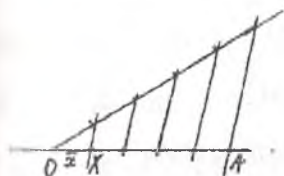
I-VII düsturlarının sağ tərəflərindəki ifadələr birdərəcəli bircins ifadələr olduqlarından, yuxarıda isbat etdiyimiz teoremə görə onlar ölçü vahidinin seçilməsindən asılı olmayaraq bərabərlik dəqiqliyi ilə bir $\overline{x}$ parçasını təyin edirlər.

1) və 2) düsturları ilə verilmiş parçaların qurulması aydındır.

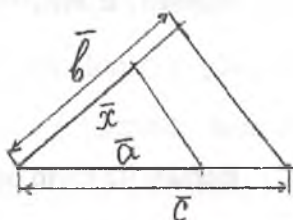
3) düsturu ilə verilmiş parçanı qurmaq üçün isə bu düsturu $x = \frac{p}{q} a$ şəklində yazaq.

p natural ədəd olduğundan, $pa = \underbrace{a + a + \dots + a}_p$ uzunluq-

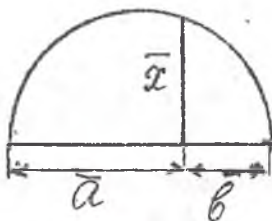
da parçanı qurmaq heç bir çətinlik törətmir. Sonra isə Fales teoremindən istifadə edərək pa uzunluqda parçanı q bərabər hissəyə bölmək lazımdır, (Şəkil 24)



Şəkil 24.



Şəkil 25.



Şəkil 26.

25-ci şəkildə $x = \frac{ab}{c}$ düsturu ilə verilən parçanın, 26-cı

şəkildə isə $x = \sqrt{ab}$ düsturu ilə verilən parçanın qurulması təsvir edilmişdir.

VI-VII düsturlarla verilmiş parçaların qurulması Pifaqor teoreminə əsaslanır.

I-VII düsturları ilə verilən parçaların qurulmasından istifadə edərək, daha mürəkkəb düsturlarla verilmiş parçaları qurmaq olar. Bir misal göstərək.

Misal 1. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ parçaları verilmişdir. Uzunluğu

$$x = \frac{a^3 + b^3}{c^2 + \sqrt{cd^3}}$$

düsturu ilə təyin olunan $\overline{x}$ parçasını qurun.

Həlli: 1) Əvvəlcə $x_1 = \sqrt{cd}$ düsturu ilə təyin olunan parçanı qururuq.

2) $x_2 = \sqrt{x_1 d}$ düsturu ilə təyin olunan parçanı qururuq.

$$x_2 = \sqrt[4]{cd^3}$$

3) $x_3 = \sqrt{c^2 + x_2^2} = \sqrt{c^2 + \sqrt{cd^3}}$ düsturu ilə təyin olunan parçanı qururuq.

4) $x_4 = \frac{a \cdot a}{x_3}$ və $x_5 = \frac{b \cdot b}{x_3}$ parçalarını qururuq.

$$x_4 = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + \sqrt{cd^3}}}, \quad x_5 = \frac{b^2}{\sqrt{c^2 + \sqrt{cd^3}}}$$

5) Ən nəhayət, $x = \frac{a^3 + b^3}{c^2 + \sqrt{cd^3}} = \frac{a^3 + b^3}{x_3^2} = \frac{a^3}{x_3^2} + \frac{b^3}{x_3^2} =$

$$= \frac{a \cdot a}{x_3} \cdot \frac{a}{x_3} + \frac{b \cdot b}{x_3} \cdot \frac{b}{x_3} = \frac{ax_4}{x_3} + \frac{bx_5}{x_3} \text{ münasibətindən isti-}$$

fada edərək $\frac{ax_4}{x_3}$ və $\frac{bx_5}{x_3}$ düsturları ilə təyin olunan parçaları

qurduqdan sonra x parçasını qururuq.

Bir sıra hallarda $f(a, b, \dots, l)$ birdərəcəli bircins ifadə olmadıqda $x = f(a, b, \dots, l)$ düsturu ilə təyin olunan $\bar{x}$ parçasını qurmaq tələb olunur. Bu halda eyni $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçaları üçün vahid parçanın seçilməsindən asılı olaraq $f(a, b, \dots, l)$ ifadəsi ilə müxtəlif $\bar{x}$ parçaları təyin olunur. Buna görə $\bar{x}$ parçasını təyin etmək üçün $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarından əlavə daha bir $\bar{e}$ vahid parçasını vermək tələb olunur. Bu halda $\bar{x}$ parçasının uzunluğu

$$x = ef\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \dots, \frac{l}{e}\right) \quad (4)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada $a, b, \dots, l$ ədədləri uyğun olaraq verilmiş $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqlarını, e isə ixtiyari seçilmiş $\bar{e}$ ölçü vahidinin uzunluğudur. Bu halda (4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadə $a, b, \dots, l, e$ dəyişənlərindən asılı birdərəcəli bircins ifadədir. Bəzi misallara baxaq.

Misal 2. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ parçaları və $\bar{e}$ vahid parçası verilmişdir.

a) $x = ab$, b) $y = \sqrt{a}$ düsturları ilə verilən parçaları qurmaq tələb olunur.

Həlli: a) $x = ab$ düsturu ilə verilən parçanı qurmaq üçün (4) düsturunun köməyi ilə ifadəni belə çevirək:

$$x = e \cdot \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e} = \frac{ab}{e}$$

Uzunluğu belə ifadə olunan parçanın qurulmasını bilirik.

$$b) \quad y = \sqrt{a}, \quad y = e \sqrt{\frac{a}{e}} = \sqrt{ae}$$

Uzunluğu bu düstur ilə ifadə olunan parçanın da qurulmasını bilirik.

Misal 3. Ölçü vahidi verilən e parçası olduqda uzunluğu $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ -ə bərabər olan parçanı qurun.

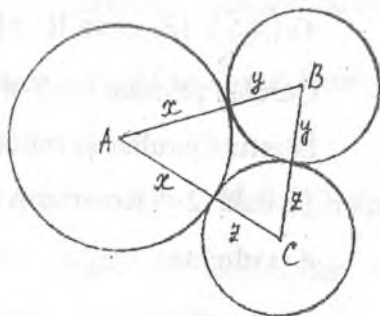
Həlli: Elə x parçasını qurmaq tələb olunur ki, onun uzunluğu $x = e\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ və ya $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ düsturu ilə ifadə olunsun. Bunun üçün əvvəlcə uzunluğu $y = \sqrt{(3e)e}$ olan $\bar{y}$ parçasını, sonra isə uzunluğu $z = \sqrt{(5e)e}$ düsturu ilə ifadə olunan $\bar{z}$ parçasını qururuq. Sonra isə uzunluğu $u = \sqrt{ez}$ düsturu ilə ifadə olunan $\bar{u}$ parçasını, ən nəhayət isə uzunluğu $x = \sqrt{y^2 + u^2}$ düsturu ilə ifadə olunan $\bar{x}$ parçasını qururuq.

Qurma məsələlərinin həllinin cəbri üsulu aşağıdakı prinsipə əsaslanır: məsələ elə qoyulur ki, verilən və axtarılan fiqurlar parçalardan ibarət olur. Müxtəlif həndəsə teoremlərinin və digər riyazi qanunauyğunluqların köməyi ilə axtarılan parçaların uzunluqlarını verilən parçaların uzunluqları ilə ifadə edən düsturlar tapılır. Sonra isə axtarılan parçalar qurulur.

Məsələ 1. ABC üçbucağı verilib. Mərkəzləri A, B və C nöqtələrində olan elə üç çevrə qurun ki, onlar bir-birinə xaricdən toxunsunlar.

Həlli:

Analiz. Fərz edək ki, tələb olunan $(A, \bar{x})$, $(B, \bar{y})$ və $(C, \bar{z})$ çevrələrini qurmuşuq. Tələb olunan parçalar bu çevrələrin radiuslarına bərabər x , y və z parçaları, verilən parçalar isə ABC üçbucağının tərəfləridirlər. $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.



Şəkil 27.

§2-dəki 2-ci teoremə əsasən

$$\begin{cases} x + y = c \\ x + z = b \\ y + z = a \end{cases}$$

alırıq.

Bu tənliklər sistemini həll etsək;

$$x = \frac{c+b-a}{2}, \quad y = \frac{a+c-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{alarıq.}$$

Qurma: 1) Uzunluğu $x = \frac{c+b-a}{2}$ düsturu ilə təyin olunan $\bar{x}$ parçasını qururuq.

2) Uzunluğu $y = \frac{a+c-b}{2}$ düsturu ilə təyin olunan $\bar{y}$ parçasını qururuq.

3) Uzunluğu $z = \frac{a+b-c}{2}$ düsturu ilə təyin olunan $\bar{z}$ parçasını qururuq.

4) $(A, \bar{x})$, $(B, \bar{y})$ və $(C, \bar{z})$ çevrələrini qururuq.

Qurulan çevrələr tələb olunana çevrələrdirlər.

İsbatı: Qurulan çevrələrin bir-biri ilə xaricdən toxunduqları §2-dəki 2-ci teoremdən birbaşa alınır.

Araşdırma: Əgər $c+b-a > 0$, $a+c-b > 0$ və $a+b-c > 0$ şərtlərinin hər hansı biri ödənməzsə, məsələnin həlli yoxdur. Həmin şərtlərin hər üçü ödənərsə, məsələnin yeganə həlli var.

Məsələ 2. Verilən $(O, \bar{r})$ çevrəsinin daxilinə düzgün onbucaqlı çəkin.



Şəkil 28.

Həlli: Tutaq ki, verilən $(O, \bar{r})$ çevrəsinin daxilinə düzgün onbucaqlı çəkmişik. AB parçası isə həmin onbucaqlının tərəfidir (Şəkil 28).

$AB = x$ işarə edək. Deməli, $AO = \bar{r}$ verilən parça, $\bar{x}$ isə axtarılan parçadır.

OAB üçbucağının B təpəsindən BM tən böləni çəkək.

$\triangle AOB$ bərabəryanlı üçbucaq olduğundan və $\hat{O} = 36^\circ$ olduğundan, $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{B} = 72^\circ$ olar. BM tən böləni olduğundan,

$\hat{ABM} = 36^\circ$ olar. Buradan isə $MB = x$ olduğu alınır.

$\hat{MBO} = 36^\circ$ və $\hat{O} = 36^\circ$ olduğundan isə $\triangle BMO$ -nun bərabəryanlı olduğu alınır. $MO = x$ olur.

Beləliklə, $\triangle ABM \sim \triangle AOB$. Bu səbəbdən də

$\frac{AB}{AM} = \frac{AO}{AB}$ və ya $\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x}$ alınır. Bu tənəsübdən isə

$x^2 + xr - r^2 = 0$ kvadrat tənliyini alırıq. Bu tənliyi həll etsək

$$x_1 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}, \quad x_2 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$$

$x_2 < 0$ olduğundan o məsələnin şərtini ödəmir. Məsələnin həlli olan parçanın uzunluğu ancaq $x_1 > 0$ ola bilər.

$$x_1 = \left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} \right) r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$$

$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ düsturu ilə təyin olunan $\bar{x}$ parçası düzgün

onbucaqlının tərəfi olar. Deməli, verilən r parçasına görə düzgün onbucaqlının tərəfi və tələb olunan onbucaqlı qurular.

Qurma aydındır.

İsbat aydındır.

Araşdırma. Bərabərlik dəqiqliyi ilə məsələnin yeganə həlli var.

§8. Qurma məsələsinin pərgar və xətkəş vasitəsilə həllinin mümkünlüyü əlaməti. Pərgar və xətkəşlə həll olunmayan klassik qurma məsələləri

Həndəsi qurmalar nəzəriyyəsində verilən fiqurlara görə bu və ya digər həndəsi fiqurun qurula bilən olub-olmaması məsələsi çox vacib problemdir. Əlbəttə bu sualın onda mənası var ki, tələb olunan fiqur ümumiyyətlə mövcud olsun. Mövcud olmayan fiqurun qurulması məsələsinin mənası yoxdur.

Belə bir məsələyə baxaq: düz xəttin üzərində üç M , N və P nöqtələri verilmişdir. tərəfləri MN , NP və MP olan üçbucaq qurmaq tələb olunur.

Bu məsələ həll olunan deyil, çünki belə bir üçbucaq yoxdur.

Başqa bir məsələyə baxaq: iki a və b düz xətləri və bunların üzərində olmayan A nöqtəsi verilib. A nöqtəsindən elə

bir düz xətt keçirin ki, a və b düz xətlərinin ondan ayırdığı parça p -yə bərabər olsun.

Baxmayaraq ki, belə bir p parçası mövcud ola bilər, lakin bu məsələni ümumiyyətlə pərgar və xətkəşvasitəsilə həll etmək mümkün deyil.

Tutaq ki, müəyyən ölçü vahidi seçildikdən sonra $\bar{x}$ parçasının uzunluğu $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{l}$ parçalarının uzunluqları ilə

$$x = f(a, b, \dots, l) \quad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Belə sual meydana çıxır: Uzunluğu (1) düsturu ilə verilmiş parçanı hansı hallarda pərgar və xətkəş vasitəsilə qurmaq olar? Bu suala aşağıdakı teoremlər cavab verir.

Teorem 1. Əgər $\bar{x}$ parçasının uzunluğu verilən parçaların uzunluqları ilə sonlu sayda hesab əməlləri (toplama, çıxma, vurma və bölmə) və kvadrat kök alma əməli vasitəsi ilə ifadə oluna bilirsə, onda $\bar{x}$ parçasını pərgar və xətkəş vasitəsi ilə qurmaq olar.

İsbatı: Teoremin hökmü demək olar ki, aşkardır. Belə ki, 7-ci paragrafdakı I-VII düsturlarının köməyi ilə uzunluqları verilmiş parçaların qurulma qaydası hələ orta məktəb həndəsə kursundan məlumdur.

Teorem 2. Əgər $\bar{x}$ parçasını verilən parçalardan istifadə pərgar və xətkəşlə qurmaq mümkündürsə, onda $\bar{x}$ parçası-

nın uzunluğunu verilən parçaların uzunluqları ilə sonlu sayda hesab əməlləri və kvadrat kökalma əməli vasitəsi ilə ifadə etmək olar.

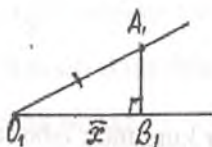
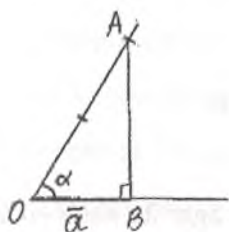
(Bu teoremin isbatını oxucu V.T.Bazilev və K.İ. Duniçevin Həndəsə (II hissə) kitabından tapa bilər).

İndi isə pərgar və xətkəşlə həll edilə bilinməyən klassik qurma məsələlərini nəzərdən keçirək.

1. Bucağın triyeksiyası məsələsi: $\overline{\alpha}$ bucağı verilmişdir. $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$ şərtini ödəyən $\overline{\varphi}$ bucağını qurun. (Verilmiş bucağın üç bərabər hissəyə bölünməsi).

Sonsuz sayda bucaqlar mövcuddur ki, bu məsələ həll oluna bilər. Məsələn, $\alpha = 90^\circ$ olduqda $\varphi = 30^\circ$ li bucağı pərgar və xətkəşlə asanlıqla qurulur. Eyni qayda ilə bucağın tənbölənini qurmaqla $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ olduqda $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$ şərtini ödəyən $\overline{\varphi}$ bucağını qurmaq çətinlik törətmir. Lakin sonsuz sayda bucaqlar mövcuddur ki, onlar üçün yuxarıda qoyulan məsələni pərgar və xətkəş vasitəsilə həll etmək olmaz.

Tutaq ki, $\angle O$ verilən bucaq, $\angle O_1$ axtarılan bucaqdır. $\overline{e}$ isə vahid parçadır (Şəkil 29).



Şəkil 29.

Hipetonuzları $OA = O_1A_1 = 2$ olan düzbucaqlı OAB və $O_1A_1B_1$ üçbucaqlarını quraq. Fərz edək ki, $OB = a$ və $O_1B_1 = \bar{x}$. Əgər $\bar{x}$ parçasını $\bar{a}$ parçasından istifadə edərək pərgar və xətkəşlə qurmaq olarsa, onda bucağın triyeksiyası məqəlsəi də pərgar və xətkəşlə vasitəsilə həll olunar və tərsinə.

Triqonometriya kursundan məlumdur ki,

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{a}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{O_1B_1}{O_1A_1} = \frac{x}{2}$$

Bu qiymətləri və $\cos \alpha = 3\cos 3\varphi$ münasibətini yuxarıda nəzərə alsaq

$$x^3 - 3x - a = 0 \quad (1)$$

əhəmiyyətini alırıq.

Əgər $\alpha = 60^\circ$ olarsa, onda $a = 1$ olar. Bunu (1) tənliyində nəzərə alsaq

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (2)$$

olar.

Cəbr kursunda isbat olunur ki, əgər üç dərəcəli çoxhədli rasional ədədlər meydanı üzərində gətirilən deyilsə, (ikidərəcəli və birdərəcəli çoxhədlilərin hasili şəklində göstərilə bilinmirsə) onda onun köklərindən heç birini həmin çoxhədlinin əmsalları (əmsallar istənilən rasional ədədlər olduqda) ilə hesab əməlləri və kvadrat kökalma əməli vasitəsilə ifadə etmək olmaz. Deməli yuxarıdakı x parçasını da $\alpha = 60^\circ$ olduqda uzunluğu vahidə bərabər olan parçaların köməyi ilə qurmaq olmaz.

İsbat etmək olar ki, p sadə ədəddirsə a parçasının uzunluğu $a = \frac{1}{2p}$ olduqda uyğun bucağın $\left(\alpha = \arccos \frac{1}{2p} \right)$ triyeksiyası məsələnin pərgar və xətkəşin köməyi ilə həll etmək olmaz.

2. Kubun ikiləşməsi məsələsi: Həcmi verilən kubun həcmindən iki dəfə böyük olan kubun tilini qurun.

Fərz edək ki, a verilən kubun tili, x isə axtarılan kubun tilidir. Məsələnin şərtinə görə

$$x^3 = 2a^3$$

Verilən kubun tilini vahid parça olaraq qəbul etsək, $x^3 - 2 = 0$ tənliyini alırıq. Bu tənliyin kökünü də sonlu sayda hesab əməlləri və kvadrat kökalma əməli vasitəsi ilə rasionral ədədlərlə ifadə etmək olmaz. Deməli, kubun ikiləşməsi məsələsini pərgar və xətkəş vasitəsilə həll etmək olmaz.

3. Çevrənin düzləndirilməsi məsələsi. Uzunluğu verilən çevrənin uzunluğuna bərabər olan parça qurun. Əgər həmin çevrənin radiusunu vahid parça qəbul etsək, onda məsələnin həlli e vahid parçası verildikdə uzunluğu $x = 2\pi$ olan x parçasının qurulmasına gətirilir.

Cəbr kursundan məlumdur ki, R həqiqi ədədlər çoxluğu, cəbri və transcendent ədədlərdən ibarət iki sinfə bölünür. Əmsalları rasional ədədlər olan çoxhədlinin kökü olan həqiqi ədədlərə cəbri, qalan həqiqi ədədlərə isə transcendent ədədlər deyilir. Hər bir $\frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) rasionl ədədi $mx - n$ çoxhədlisinin kökü olur. Deməli, bütün rasionl ədədlər cəbri ədədlərdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz teoremlərə əsasən uzunluqlara tam ədədlərlə ifadə olunan parçaların köməyi ilə yalnız o parçaları pərgar və xətkəşlə qurmaq olar ki, onların uzunluqlarını verilən parçaların uzunluqları ilə kvadrat kökalma və hesab

əməllərini sonlu sayda yerinə yetirməklə almaq olsun. Başqa sözlə, onların uzunluqları hökmən cəbri ədəd olmalıdır.

Lakin 1882-ci ildə Lindemani tərəfindən isbat olunmuşdur ki, π ədədi transcendent ədəddir. Deməli, uzunluğu π -yə bərabər olan parçanı pərgar və xətkəş vasitəsi ilə qurmaq olmaz.

4. Dairənin kvadraturası məsələsi. Sahəsi verilən dairənin sahəsinə bərabər olan kvadrat qurun.

Əgər r verilən dairənin radiusudursa, onda axtarılan kvadratin x tərəfi üçün $x^2 = \pi r^2$ şərti ödənməlidir. $y = \pi r$ olarsa, onda $x = \sqrt{yr}$ olar. Deməli, uzunluğu $y = \pi r$ olan parçanı qurmaq tələb olunur. $r = 1$ olarsa uzunluğu π -yə bərabər olan parçanın pərgar və xətkəşin köməyi ilə qurula bilən olmamasını yuxarıda qeyd etmişik.

Deməli, dairənin kvadraturası məsələsi də pərgar və xətkəşlə həll olunmur.

İ F Ə S İ L

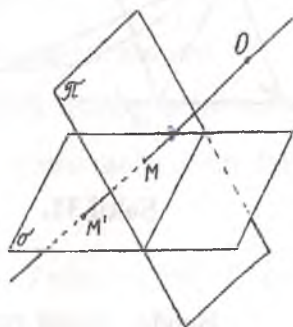
PROYEKTİV FƏZA

§9. Mərkəzi proyektəndirmə

Proyektiv həndəsə XIX əsrin birinci yarısında Fransada yaranmışdır. Bu elmin yaranması fransız riyaziyyatçısı Ponselenin (1788-1867) adı ilə bağlıdır.

E_3 Evklid fəzasında iki σ və π müstəvilərini və bu müstəvilərdən heç birinin üzərində olmayan O nöqtəsini götürək. π müstəvisinin ixtiyari M nöqtəsinə σ müstəvisinin elə M' nöqtəsini qarşı qoyaq ki, $M' = OM \cap \sigma$. M' nöqtəsinə M nöqtəsinin O mərkəzindən proyeksiyası deyilir.

Bu qayda ilə π müstəvisinin hər bir nöqtəsinə σ müstəvisinin müəyyən bir nöqtəsini qarşı qoymaqla π və σ müstəvilərinin nöqtələri arasında müəyyən uyğunluq alırıq.

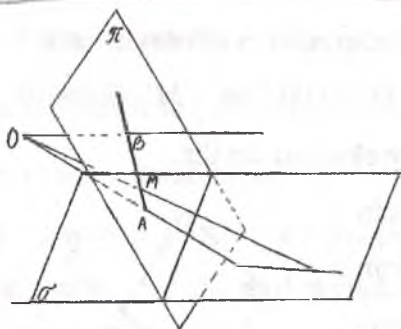


Şəkil 30.

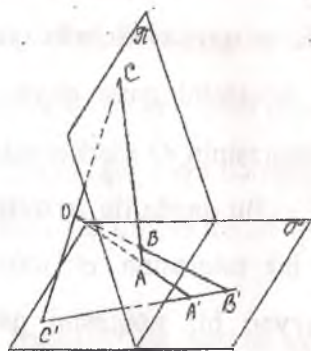
Bu uyğunluğa π müstəvisinin σ müstəvisinə O mərkəzindən mərkəzi proyektəndirilməsi deyilir.

π müstəvisi üzərində yerləşən Φ fiqurunun bütün nöqtələrinin O mərkəzindən proyeksiyaları çoxluğuna Φ fiqurunun proyeksiyası deyilir və Φ' ilə işarə olunur.

Proyeksiya mərkəzini və σ müstəvisinin vəziyyətini dəyişməklə eyni Φ fiqurunun müxtəlif Φ' proyeksiyalarını alarıq. Mərkəzi proyektəndirmədə fiqurun bir çox xassələri təhrif olunur: parçanın uzunluğu və bucağın qiyməti dəyişir; paralel düz xətlərin proyeksiyaları kəsişən düz xətlər, paraleloqramın proyeksiyası ixtiyari düzbucaqlı ola bilər.



Şəkil 31.



Şəkil 32.

Bundan başqa mərkəzi proyektəndirmədə $B \in \pi$ nöqtəsi üçün $OB \parallel \sigma$ olarsa B nöqtəsinin σ müstəvisi üzərində proyeksiyası yoxdur (Şəkil 31). AB parçasının B nöqtəsindən fərqli nöqtələri çoxluğu h' şüasına keçəcək. Mərkəzi proyekt-

ləndirmədə çevrənin proyeksiyası olaraq ellips, parabola və ya hiperbola almaq olar və s.

Lakin mərkəzi proyektləndirmədə Φ fiqurunun bir sıra xassələri saxlanılır. Bu xassələrə həndəsi fiqurun proyektiv xassələri deyilir. Belə xassələrə misal olaraq bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrin bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrə keçməsinə, ikitərtibli düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrin, yenə də ikitərtibli xətt üzərində yerləşən nöqtələrə keçməsinə göstərmək olar.

Lakin qeyd etmək lazımdır ki, üç nöqtədən birinin digər ikisi arasında olması xassəsi, (şəkil 3), parçaların uzunluğu, bucaqların ölçüsü kimi metrik xassələr də proyektiv xassələr deyillər. Paralellik də proyektiv xassə deyil.

§10. Proyektiv həndəsənin yaranması

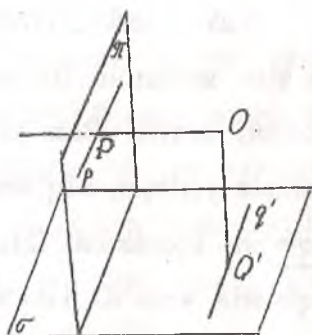
Proyektiv həndəsə elminin yaranmasında qeyri –mənşəli (sonsuz uzaqlaşmış) həndəsi elementlər anlayışının daxil edilməsi mühüm rol oynamışdır.

π müstəvisinin σ müstəvisinə O nöqtəsindən f proyektəndirilməsinə baxaq. Əgər σ və π müstəviləri paralel olarlarsa, onda f π müstəvisinin σ müstəvisinə qarşılıqlı birqiymətli inikası olacaq.

Lakin π müstəvisi ilə σ müstəvisi paralel olmazlarsa, onda f inikası qarşılıqlı birqiymətli inikas olmaz. $P \in \pi$ nöq-

təsi üçün $OP \parallel \sigma$ olarsa, onda onun σ müstəvisi üzərində obrazı yoxdur (Şəkil 33).

Digər tərəfdən $Q' \in \sigma$ nöqtəsi üçün $OQ' \parallel \pi$ olarsa, onda Q' nöqtəsinin π müstəvisi üzərində proobrazı yoxdur, yəni f inikasında Q' nöqtəsi π müstəvisi üzərində yerləşən heç bir nöqtənin obrazı deyil.



Şəkil 33.

Mərkəzi proyektəndirməni qarşılıqlı birqiymətli inikasa çevirmək üçün belə edirlər: E_3 fəzasında hər bir düz xəttə xəyalən bir sonsuz uzaqlaşmış nöqtə əlavə olunur, bu nöqtəyə qeyri – məxsusi nöqtə deyilir. Paralel düz xətlərə əlavə olunan (qeri - məxsusi) nöqtələr eyni hesab olunur, paralel olmayan düz xətlərə əlavə olunan qeyri –məxsusi nöqtələr isə müxtəlif hesab olunurlar.

E_3 fəzasının adi nöqtələrini məxsusi nöqtələr adlandıracağıq. Qeyri –məxsusi nöqtə əlavə olunmuş düz xəttə genişlənmiş düz xətt deyəcəyik.

Əgər genişlənmiş düz xətt hər hansı müstəvi üzərində yerləşirsə, hesab edəcəyik ki, onun qeyri –məxsusi nöqtəsi də

həmin müstəvidə yerləşir. Bu halda həmin müstəviyə genişlənmiş müstəvi deyəcəyik. Daha sonra şərtləşək ki, müstəvinin bütün qeyri –məxsusi nöqtələri bir düz xətt əmələ gətirir. Həmin düz xəttə qeyri –məxsusi düz xətt deyəcəyik.

Deməli, genişlənmiş müstəvi adi müstəviyə qeyri –məxsusi düz xətti əlavə etməklə alınır.

Analoji olaraq, E_3 fəzasında qeyri – məxsusi nöqtələrin bir qeyri –məxsusi müstəvi əmələ gətirdiyini şərtləşərək, E_3 fəzasına qeyri – məxsusi müstəvinə əlavə etməklə, genişlənmiş E_3 fəzasını alırıq.

Bu şərtləşmələrdən bir sıra maraqlı nəticələr alınır. Onlardan bəzilərinə qeyd edək.

a) Genişlənmiş müstəvi üzərində yerləşən ixtiyari iki düz xəttin ortaq nöqtəsi (məxsusi və ya qeyri - məxsusi) vardır.

Bu hökm bizim şərtləşmələrdən birbaşa alınır.

b) Genişlənmiş müstəvi üzərində yerləşməyən genişlənmiş düz xəttin həmin müstəvi ilə ortaq nöqtəsi (məxsusi və ya qeyri - məxsusi) vardır.

İsbatı. Tutaq ki, π genişlənmiş müstəvi, a genişlənmiş düz xətdir. Əgər a düz xətti π müstəvisinə paralel deyilsə, onda onlar ortaq məxsusi nöqtəyə maldıkdırlar. Bu nöqtə genişlənmiş müstəvi ilə genişlənmiş düz xəttin ortaq nöqtəsi olar.

Əgər a düz xətti π müstəvisinə paraleldirsə, onda π müstəvisi üzərində heç olmazsa, bir dənə b düz xətti var ki, bu düz xətt a düz xəttinə paralel olar. a və b düz xətləri paralel olduqlarından, genişlənmiş a və b düz xətlərinin qeyri – məxsusi nöqtələri eynidir. b genişlənmiş düz xəttinin qeyri – məxsusi nöqtəsi isə π müstəvisinə aiddir. Deməli, a genişlənmiş düz xətti ilə π genişlənmiş müstəvinin bir qeyri–məxsusi ortaq nöqtəsi vardır.

Analoji olaraq, isbat etmək olar ki,

c) İxtiyari iki genişlənmiş müstəvinin ortaq genişlənmiş düz xətti (məxsusi və ya qeyri - məxsusi) vardır.

Beləliklə, E_3 Evklid fəzasını qeyri–məxsusi nöqtələrlə genişləndirdikdə, mərkəzi proyektəndirmə ixtiyari iki π və σ müstəvisi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğa çevrilir. Bu uyğunluqda məxsusi nöqtələr qeyri-məxsusi nöqtələrə və tərsinə keçə bilirlər.

Bu səbəbdən də, məxsusi nöqtələrlə, qeyri –məxsusi nöqtələrin heç bir fərqli proyektiv xassələri yoxdur.

Proyektiv həndəsədə məxsusi və qeyri – məxsusi nöqtələr arasında heç bir fərq olmadığından, onlar eyni hüquqlu hesab edilirlər.

Qeyd etmək lazımdır ki, eyni qayda ilə A_3 -ölçülü afin fəzasını da genişlənmiş afin fəzasına çevirmək olar.

Biz proyektiv həndəsənin Veyl aksiomatikasının kəməyi ilə xətti cəbrin üsulları ilə öyrənəcəyik. Çünki Veyl aksiomları vektor cəbrinin anlayışlarından istifadə edilməklə ifadə olunurlar.

§11. Proyektiv fəzanın Veyl aksiomları.

Tutaq ki, bizə hər hansı K meydanı üzərində $(n+1)$ ölçülü V vektor fəzası verilir. V' ilə fəzanın $V / \left\{ \begin{smallmatrix} \vec{0} \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ vektorları çoxluğunu işarə edək. Hər hansı boş olmayan P çoxluğu üçün aşağıdakı iki şərti (aksiomu) ödəyən $f: V \rightarrow P$ inikası varsa, onda P çoxluğuna V vektor fəzasının doğurduğu n -ölçülü proyektiv fəza deyilir.

I. $f: V' \rightarrow P$ süryektivdir, yəni P çoxluğunun hər bir nöqtəsi müəyyən bir $\vec{x} \in V$ vektorunun obrazıdır.

II. İxtiyari $\vec{x}, \vec{y} \in V'$ vektorları üçün $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ bərabərliyi yalnız və yalnız $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları kolleniər olduqda doğrudur.

P çoxluğunun elementlərinə proyektiv fəzanın nöqtələri deyilir və latın əlifbasının baş hərfləri $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$ və s. işarə edilir.

Əgər $f(\vec{x}) = X$ olarsa, deyəcəyik ki, $\vec{x}$ vektoru X nöqtəsini doğurur. II aksiomdan alınır ki, V vektor fəzasının P proyektiv fəzasının eyni bir nöqtəsini doğuran bütün vektorları çoxluğu, sıfır vektoru istisna olmaqla, birölçülü altfəzadır. Kolleniar olmayan vektorlar isə müxtəlif nöqtələri doğururlar.

Bu səbəbdən də K meydanı sıfır xarakteristikalı meydan (sonsuz sayda elementi olan meydan) olduqda, P proyektiv fəzası da sonsuz sayda nöqtəyə malikdir. K meydanı sonlu meydan olduqda isə P proyektiv fəzada da sonlu sayda nöqtə olar.

Şərtləşək ki, bundan sonra biz yalnız R həqiqi ədədlər meydanı üzərində olan V vektor fəzaların doğruluğu proyektiv fəzalara baxacağıq.

Tutaq ki, P üçölçülü proyektiv fəzadır. Onda P fəzasını doğuran V vektor fəzası dördölçülü olacaq.

Dördölçülü V vektor fəzanın üçölçülü L_3 alt vektor fəzasının doğruluğu bütün nöqtələr çoxluğuna P fəzasında proyektiv müstəvi, L_2 alt ikiölçülü fəzasının doğurduğu nöqtələr çoxluğu isə proyektiv düz xətt adlanır. L_1 birölçülü altfəzasının doğurduğu çoxluğun isə nöqtə olduğunu demişdik.

L_2 və L_3 alt vektor fəzalarında cüt –cüt kolleniar olmayan sonsuz sayda vektorlar olduğundan, proyektiv düz xətt və

proyektiv müstəvi üzərində sonsuz sayda nöqtə vardır.

Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtənin, bir proyektiv müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtənin varlığını göstərmək olar.

Doğrudan da, P üçölçülü proyektiv fəzanı doğuran dördölçülü V vektor fəzasında, onun bazisi olan dörd $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorları vardır. Bu vektorların doğruluğu dörd A, B, C və D nöqtələri bir proyektiv müstəvi üzərində deyillər. Bundan başqa onlardan istənilən üç dənəsi bir proyektiv düz xətt üzərində ola bilməzlər.

Bunu isbat edək. Əksini fərz edək. $A, B,$ və C nöqtələri bir proyektiv düz xəttə aiddirlər. Onda bu nöqtələri doğuran $\vec{a}, \vec{b},$ və $\vec{c}$ vektorları ikiölçülü L_2 vektor fəzasına daxildirlər. Bu isə $\vec{a}, \vec{b},$ və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olmadıqlarına ziddir.

İsbat edəcəyimiz aşağıdakı xassələr üçölçülü proyektiv fəzanın, proyektiv müstəvinin və proyektiv düz xəttin tərifindən alınır.

Xassə 1. İstənilən iki A və B nöqtələrindən yalnız və yalnız bir proyektiv düz xətt keçir.

İsbatı. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları A və B nöqtələrini doğururlar. Onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar ola bilməzlər. Deməli, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının doğruluğu $L(\vec{a}, \vec{b})$ vektor fəzası ikiölçülü vektor altfəzasıdır. $L(\vec{a}, \vec{b})$ altfəzası müəyyən bir ℓ proyektiv düz xəttini doğurur. A və B nöqtələrinin hər ikisi ℓ proyektiv düz xəttinin üzərində olacaq.

İndi göstərək ki, A və B nöqtələrindən keçən yeganə proyektiv düz xətdir. Əgər ℓ' A və B nöqtələrindən keçən başqa bir düz xətt, L_2 isə bu düz xətti doğuran altfəza olarsa, onda $\vec{a} \in L_2$ və $\vec{b} \in L_2$ olar. Onda $L(\vec{a}, \vec{b})$ və L_2 altfəzaları üst-üstə düşəcəklər. Deməli, ℓ və ℓ' düz xətləri də üst –üstə düşəcəklər.

Xassə isbat olundu.

Analoji olaraq aşağıdakı xassəni də isbat etmək olar.

Xassə 2. Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən yalnız və yalnız bir proyektiv müstəvi keçir.

Xassə 3. Əgər iki A və B müxtəlif nöqtələri π proyektiv müstəvisinə aiddirsə, onda bu nöqtələrdən keçən AB düz xətti də π müstəvisinə aiddir.

İsbatı. Fərz edək ki, π proyektiv müstəvisinin doğurarı W üçölçülü vektor fəzasıdır, A və B nöqtələrinin doğuranları isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarıdır.

$L(\vec{a}, \vec{b})$ ikiölçülü vektor fəzası AB düz xəttinin doğurarı olacaq. $\vec{a} \in W, \vec{b} \in W$ olduğundan $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset W$ olar. Tutaq ki, M nöqtəsi AB düz xəttinin ixtiyari nöqtəsi, $\vec{m}$ vektoru isə M nöqtəsinin doğuranıdır. $\vec{m} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ olduğundan $\vec{m} \in W$ olar. Buradan çıxır ki, $M \in \pi$ olur.

Xassə isbat olundu.

Xassə 4. Bir proyektiv müstəvi üzərində yerləşən iki proyektiv düz xətt kəşir.

İsbatı. Fərz edək ki, a və b düz xətləri σ müstəvisi üzərində yerləşən ixtiyari iki proyektiv düz xətdirlər. L_2, L'_2 və W vektor fəzaları uyğun olaraq bu proyektiv düz xətləri və σ müstəvisini doğuran altfəzalardır. $a \subset \sigma$ və $b \subset \sigma$ olduğu üçün $L_2 \subset W$ və $L'_2 \subset W$ olar. L_2 və L'_2 fəzaları W üçölçülü vektor fəzasının müxtəlif ikiölçülü vektor altfəzaları olduqlarından, cəbrdən məlum olan teoremə əsasən L_2 və L'_2 fəzalarının birölçülü ortaq altfəzaları vardır. Həmin birölçülü

altfəzanın doğurduğu nöqtə isə a və b proyektiv düz xətlərinin ortaq nöqtəsi olar. Xassə isbat olundu.

Xassə 5. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari proyektiv müstəvi ilə, onun üzərində yerləşməyən proyektiv düz xəttin yalnız və yalnız bir ortaq nöqtəsi vardır.

Xassə 6. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari iki müxtəlif proyektiv müstəvinin, onların ortaq nöqtələrindən ibarət olan yalnız və yalnız bir ortaq düz xətti vardır.

5-ci və 6-cı xassələrin isbatı oxucuya tapşırılır.

§12. Proyektiv müstəvi və proyektiv düz xətt üzərində proyektiv koordinat sistemi

Tərif 1. Tutaq ki, $n(n \geq 2)$ ölçülü proyektiv fəzada $B_1, B_2, \dots, B_k$ ($k \geq 3$) kimi K nöqtə verilmişdir. Əgər bu nöqtələrin istənilən 3-ü bir proyektiv düz xətt üzərində yerləşmirsə, onda deyirlər ki, $B_1, B_2, \dots, B_k$ nöqtələri ümumi vəziyyətdədirlər.

Tərif 2. σ proyektiv müstəvisində ümumi vəziyyətdə olan, nizamlanmış A_1, A_2, A_3, E nöqtələri sisteminə proyektiv reper və ya proyektiv müstəvidə proyektiv koordinat sistemi deyilir, $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ ilə işarə edilir.

A_1, A_2, A_3 , nöqtələrinə reperin təpə nöqtələri, E nöqtəsinə reperin vahid nöqtəsi, A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 düz xətlərinə isə koordinat düz xətləri deyilir.

Əgər reperin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ və $\vec{e}$ vektorları $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{e}$ şərtini ödəməklə seçiliblərsə, onda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları sistemində $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi deyilir.

Göstərək ki, verilmiş repərə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi həmişə vardır. $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{e}$ vektorları uyğun olaraq A_1A_2, A_2A_3 , və E nöqtələrini doğuran vektorlar olsunlar. A_1A_2, A_2A_3 , nöqtələri bir proyektiv düz xətt üzərində olmadıqlarından, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ və $\vec{b}_3$ vektorları bir ikiölçülü vektor fəzaya aid ola bilməzlər.

Deməli, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ vektorları komplanar olmadıqlarından, onları σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları kimi qəbul edə bilərik. Onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ həqiqi ədədləri var ki,

$$\vec{e} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 \quad (2)$$

$\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1$, $\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2$, $\vec{a}_3 = \lambda_3 \vec{b}_3$ vektorları da A_1, A_2, A_3 , nöqtələrini doğururlar.

Beləliklə, biz A_1, A_2, A_3, E nöqtələrini doğuran və (1) şərtini ödəyən $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sistemini aldığımızı.

Əgər λ sıfırdan fərqli hər hansı həqiqi ədəd olarsa, (1) bərabərliyinin hər tərəfini λ -ya vurmaqla

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda \vec{e}$$

bərabərliyini alırıq. $\lambda \vec{a}_1, \lambda \vec{a}_2, \lambda \vec{a}_3, \lambda \vec{e}$ vektorları sistemi də R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar. Buradan çıxır ki, verilmiş reperə nəzərən sonsuz sayda əlaqəli vektorlar sistemi vardır.

Teorem 1. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ və $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ vektorlar sisteminin hər biri $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi isə onda elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki,

$$\vec{a}'_1 = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}'_2 = \lambda \vec{a}_2, \vec{a}'_3 = \lambda \vec{a}_3, \vec{e}' = \lambda \vec{e} \quad (3)$$

olur.

İsbati. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_1$ vektorları eyni bir A_1 nöqtəsini doğurduqlarından elə bir $\lambda_1 \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$. Analoji olaraq elə $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$ həqiqi ədədləri var ki, $\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$, $\vec{a}_3 = \lambda_3 \vec{a}_3$, $\vec{e} = \lambda_4 \vec{e}$.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olduqlarından $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{e}$ bərabərliyindən $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda_4 \vec{e}$ bərabərliyini alırıq. Axırını bərabərliyin hər tərəfini λ_4 -ə bölsək

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4} \vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} \vec{a}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \vec{a}_3 = \vec{e} \quad (4)$$

alırıq.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorları proyektiv müstəvinini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları olduqlarından, $\vec{e}$ vektorunun bu bazis vektorların üzrə ayrılışı yeganədir. Onda (4) və (1) bərabərliklərindən alırıq ki,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 1, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 1,$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ alınır. Bununla da (3) bərabərliklərinin doğruluğu isbat olundu.

İndi də, proyektiv müstəvi üzərində verilmiş proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatı anlayışını verək.

Fərz edək ki, X nöqtəsi proyektiv müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Bu müstəvi üzərində $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ proyektiv reperi verilmişdir. X nöqtəsini doğuran ixtiyari $\vec{x}$ vektoruna və R reperinə nəzərən nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sisteminə baxaq. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarını σ müstəvisini doğuran üçölçülü V vektor fəzasının bazis vektorları qəbul edək. $\vec{x}$ vektorunun bu bazisə üzrə ayrılışını yazaq.

$$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \quad (5)$$

Müəyyən nizamla götürülmüş x_1, x_2, x_3 ədədlərinə X nöqtəsinin R reperində proyektiv koordinatları deyilir, $X(x_1, x_2, x_3)$ və ya $X(x_1, x_2, x_3)_R$ kimi işarə edilir. x_1 -ə X nöqtəsinin birinci, x_2 -yə ikinci, x_3 ə isə üçüncü proyektiv koordinatı deyilir. $x \neq 0$ olduğundan x_1, x_2 və x_3 koordinatlarının üçü də birdən sıfıra bərabər ola bilməz.

Qeyd etmək lazımdır ki, X nöqtəsinin koordinatları bu nöqtəni doğuran $\vec{x}$ vektorunun seçilməsindən və R reperinə

nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlarının seçilməsindən asılıdır. Bu asılılığın xarakterini aydınlaşdıraraq. Tutaq ki,

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən başqa əlaqəli

vektorlar sistemidir. $\vec{x}$ isə X nöqtəsini doğuran başqa bir

vektordur. $\vec{x}$ və $\vec{x}'$ vektorları eyni bir nöqtəni doğurduqlarından olduqlarından elə $\mu \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{x}' = \mu \vec{x}$

olur. Bundan qabaq isbat etdiyimiz teoremə görə elə $\lambda \neq 0$

həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}'_1 = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}'_2 = \lambda \vec{a}_2, \vec{a}'_3 = \lambda \vec{a}_3$

X nöqtəsinin yeni seçilmiş əlaqəli vektorlar sistemində nəzərən $(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3)$ olsun. Onda

$$\vec{x}' = x'_1 \vec{a}'_1 + x'_2 \vec{a}'_2 + x'_3 \vec{a}'_3$$

Yuxarıda deyilənləri bu bərabərlikdə nəzərə alsaq alırıq:

$$\mu \vec{x}' = x'_1 \lambda \vec{a}_1 + x'_2 \lambda \vec{a}_2 + x'_3 \lambda \vec{a}_3$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini μ ədədinə bölsək

$$\vec{x} = \frac{\lambda}{\mu} x'_1 \vec{a}_1 + \frac{\lambda}{\mu} x'_2 \vec{a}_2 + \frac{\lambda}{\mu} x'_3 \vec{a}_3 \quad (6)$$

Bu bərabərliyi (5) bərabərliyi tutuşduraraq.

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x'_1, \quad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x'_2, \quad x_3 = \frac{\lambda}{\mu} x'_3, \quad \frac{\lambda}{\mu} \neq 0$$

alırıq.

Beləliklə, alırıq ki, proyektiv müstəvidə verilmiş proyektiv reperə nəzərən müstəvinin hər bir nöqtəsinin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edilir.

Yəni əgər (x_1, x_2, x_3) ədədləri (x_1, x_2, x_3) ədədlərinin üçü də birdən sıfır deyil) hər hansı bir nöqtənin $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində koordinatlarıdırsa, onda ixtiyari λ_0 ədədi üçün $(\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \lambda_0 x_3)$ nizamlı ədədləri də həmin nöqtənin $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinə nəzərən koordinatlarıdır.

$R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin bu reperə nəzərən koordinatları $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ olar.

Teorem 2. Əgər σ proyektiv müstəvisində $X \in \sigma$ nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları (x_1, x_2, x_3)

olarsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{\ell}$ vektorları R reperinə nəzərən ədəqli

vektorlar sistemidirsə, onda $\vec{y} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$ vektoru da X nöqtəsinə doğurur.

İsbati. Əgər (x_1, x_2, x_3) ədədləri $X \in \sigma$ nöqtəsinin R reperində koordinatlarıdırsa, onda R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sistemi var ki, $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$ vektoru X nöqtəsini doğurur. 1-ci teoremə əsasən elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_2, \vec{a}_3 = \lambda \vec{a}_3, \vec{e} = \lambda \vec{e}$.

Onda

$$\begin{aligned} \vec{y} &= x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = x_1 \lambda \vec{a}_1 + x_2 \lambda \vec{a}_2 + x_3 \lambda \vec{a}_3 = \\ &= \lambda \left(x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \right) = \lambda \vec{x} \end{aligned}$$

Deməli, $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{y}$ vektoru da X nöqtəsini doğurur. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Proyektiv müstəvidə R reperində koordinatları ilə verilmiş

$$X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3), Z(z_1, z_2, z_3)$$

nöqtələrinin bir düz xətt üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt

$$(*) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

İsbatı: Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir.

Onda 2-ci teoremə əsasən $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$,
 $\vec{y} = y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3$, $\vec{z} = z_1 \vec{a}_1 + z_2 \vec{a}_2 + z_3 \vec{a}_3$ vektorları uyğun olaraq X, Y və Z nöqtələrini doğururlar. Üç $\vec{x}, \vec{y}$ və $\vec{z}$ vektorlarının komplanar olması üçün onların xətti asılı olmaları zəruri və kafi şərtidir. Üç vektorun komplanarlığı şərti isə məhz (*) bərabərliyinin ödənməsidir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə çıxır.

Nəticə. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində koordinatları ilə verilmiş $X(x_1, x_2, x_3)$ nöqtəsinin $A_1 A_2$ koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt $x_3 = 0$ olması, $A_1 A_3$ koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri kafi şərt $x_2 = 0$ olması, $A_2 A_3$ koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt $x_1 = 0$ olmasıdır.

İndi də proyektiv müstəvidə koordinat sisteminin tərifinə analogi olaraq proyektiv düz xətt üzərində koordinat sisteminə tərif verək.

Tərif 3. Proyektiv düz xəttin müəyyən nizamla götürülmüş üç müxtəlif A_1, A_2, E nöqtələri sistemində proyektiv düz

xətt üzərində proyektiv reper deyilir və $R = (A_1, A_2, E)$ ilə işarə edilir. A_1, A_2 nöqtələrinə reperin nöqtələri, E nöqtəsinə isə vahid nöqtə deyilir.

A_1, A_2, E nöqtələrini doğuran $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ vektorları $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$ şərtini ödədikdə onlara R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi deyilir. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, isbat etmək olur ki, R reperinə nəzərən əlaqəli sistemi sonsuz saydadır. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ və $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{e}'$ vektorları R reperinə nəzərən iki əlaqəli vektorlar sistemi isə elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}_1' = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2' = \lambda \vec{a}_2, \vec{e}' = \lambda \vec{e}$ olur.

Üzərində $R = (A_1, A_2, E)$ reperi verilmiş ℓ düz xəttinin hər hansı X nöqtəsini götürək.

X nöqtəsini doğuran hər hansı $\vec{x}$ vektorunu və R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ vektorlar sistemini qeyd edək. ℓ düz xəttini doğuran L ikiölçülü fəzanın bazis vektorları uyğun olaraq $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarını qəbul edək. $\vec{x}$ vektorunun $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ bazis vektorları üzrə ayrılışını $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$ yazaq. Onda nizamla götürülmüş x_1, x_2

ədədlərinə X nöqtəsinin koordinatları deyilir və $X(x_1, x_2)$ ilə işarə olunur. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, proyektiv düz xətt üzərində də nöqtənin proyektiv koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunur.

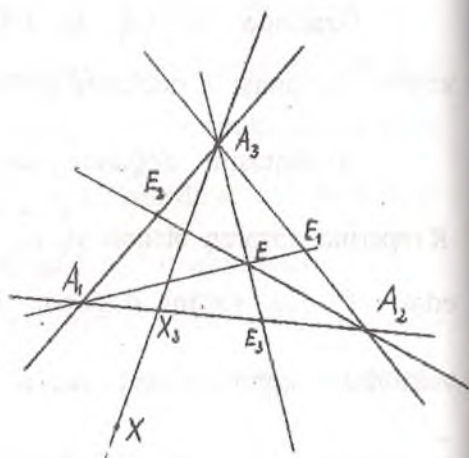
$R = (A_1, A_2, E)$ reperində təpə nöqtələrin və vahid nöqtənin koordinatları $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$ və $E(1, 1)$ olur.

§13. Proyektiv müstəvidə verilmiş reperin koordinat düz xətləri üzərində əmələ gətirdiyi reperlər

σ proyektiv müstəvisində $R = (A_1, A_2, E)$ proyektiv reperinə və A_3 nöqtəsindən fərqli ixtiyari X nöqtəsinə baxaq. A_1A_2 koordinat düz xətti ilə A_3X düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini X_3 ilə işarə edək.

(Şəkil 34.)

X_3 nöqtəsinə A_3 mərkəzindən X nöqtəsinin A_1A_2 düz xətti üzərində proyeksiyası deyilir. A_1A_2 düz xəttinin nöqtələrinin A_1A_2 üzərindəki proyeksiyalar o nöqtələrin özlərilə üst-üstə düşür.



Şəkil 34.

E nöqtəsinin A_3 mərkəzindən A_1A_2 koordinat düz xətti üzərində proyeksiyasını E_3 ilə işarə edək. Reperin tərifinə görə E_3 nöqtəsi A_1 və A_2 nöqtələri ilə üst-üstə düşə bilməz. Buna görə də A_1, A_2, E_3 nöqtələri A_1A_2 düz xətti üzərində reper əmələ gətirir. Onu R_3 ilə işarə edək: $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$

Analoji qayda ilə $R_2 = (A_1, A_3, E_2)$ və $R_1 = (A_2, A_3, E_1)$ reperlərini də təyin etmək olar.

Deməli, proyektiv müstəvi üzərində verilmiş $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperi A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 koordinat düz xətti üzərində uyğun olaraq $R_3 = (A_1, A_2, E_3), R_2 = (A_1, A_3, E_2), R_1 = (A_2, A_3, E_1)$ reperlərini əmələ gətirir.

İndi isə X nöqtəsinin R reperindəki koordinatları ilə onun koordinat düz xətləri üzərindəki proyeksiyalarının koordinatları arasındakı əlaqəni göstərən teoremi isbat edək.

Teorem. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperi verilərsə, bu reperə nəzərən (x_1, x_2, x_3) koordinatlarına malik olan və A_3 nöqtəsindən fərqli olan X nöqtəsinin A_3 mərkəzindən A_1A_2 koordinat düz xətti üzərindəki X_3 proyeksiyası $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ reperində $(x_1, x_2,)$ koordinatlarına malikdir.

İsbati. Əgər X_3 nöqtəsinin R reperindəki koordinatları (y_1, y_2, y_3) olarsa, $X_3 \in A_1 A_2$ olduğundan $y_3=0$ olar. $X_3(y_1, y_2, 0)_R$ olar. X, X_3 və A_3 nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından $A_2 A_3$ koordinat düz xəttindəki X_1 proyeksiyası

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

olar.

Axırıncı bərabərlik onu göstərir ki, x_1 və x_2 ədədləri y_1 və y_2 ədədləri ilə mütənasibdirlər. Yəni R reperində X_3 nöqtəsinin koordinatları $X_3(x_1, x_2, 0)$ olar.

Analoji qayda ilə E, E_3, A_3 nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından, alırıq ki, R reperində $E_3(1, 1, 0)$ olur.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olsun.

Bu bərabərliklərin birincisi göstərir ki, R reperinə nəzərən $E_3(1, 1, 0)$ və $X_3(x_1, x_2, 0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{x}_3 &= x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 \end{aligned}$$

vektorları uyğun olaraq E_3 və X_3 nöqtələrini doğururlar.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_3$ vektorları $A_1 A_2$ koordinat düz xətti üzərindəki $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir. İkinci bərabərlik göstərir ki, X_3 nöqtəsi R_3 reperinə nəzərən (x_1, x_2) koordinatlarına malikdir. Teorem isbat olundu.

Analoji olaraq isbat etmək olar ki, $X(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsinin A_2 mərkəzindən (əgər A_2 ilə üst-üstə düşmürsə) $A_1 A_3$ koordinat düz xəttindəki X_2 proyeksiyası $R_2 = (A_1, A_3, E_2)$ reperinə nəzərən (x_1, x_3) koordinatlarına A_1 mərkəzindən (A_1 ilə üst-üstə düşmürsə) $R_1 = (A_2, A_3, E_1)$ reperində (x_2, x_3) koordinatlarına malikdir.

§14. Proyektiv düz xəttin, proyektiv müstəvinin və proyektiv fəzanın modelləri

n -ölçülü $n \geq 1$ proyektiv fəzanı, elementləri nöqtələr adlanan boş olmayan elə P çoxluğu kimi təyin etdik ki, bu çoxluq $(n+1)$ - ölçülü V vektor fəzasının sıfırdan fərqli vektorları çoxluğunun P çoxluğuna kolleniər vektorları eyni bir nöqtəyə, kolleniər olmayan vektorları isə müxtəlif nöqtələrə keçirən syurektiv inikas vasitəsilə alınıb.

Bu zaman P çoxluğunun elementlərinin təbiəti haqqında heç nə deyilmir. $f: V' \rightarrow P$ inikası üzərinə də sürəktivlikdən başqa heç bir tələb qoyulmur.

Əgər elementləri müəyyən olan P çoxluğu və müəyyən n ölçülü proyektiv fəzanın aksiomlarını ödəyən $f: V' \rightarrow P$ inikası tapılırsa, onda deyəcəyik ki, verilmiş aksiomlar sisteminin interperetasiyası qurulmuşdur. P çoxluğunun özünə n ölçülü proyektiv fəzanın modeli deyilir.

Təbii olaraq n -ölçülü P proyektiv fəzasının modeli olaraq $(n+1)$ - ölçülü V vektor fəzasının bütün birölçülü altfəzaları çoxluğunu götürmək olar. Hər bir $\vec{x} \in V'$ vektoruna qarşı onun V fəzasında doğurduğu birölçülü altfəzanı qoyan f inikası Veylin 1-ci və 2-ci aksiomlarını ödəyər.

Həndəsədə proyektiv fəzanın aşağıdakı modellərinə daha çox müraciət olunur.

Tutaq ki, A_3 - V vektor fəzası üzərində üçölçülü afin fəzasıdır. Bu fəzada qeyd olunmuş O nöqtəsindən keçən bütün düz xətlər çoxluğunu P_2 ilə işarə edək. P_2 çoxluğuna mərkəzi O nöqtəsində olan düz xətlər bağlıdır da deyilir. Hər bir $\vec{a} \in V'$ vektoruna O nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}$

olan $(O, \vec{a})$ düz xətti qarşı qoyan $f: V' \rightarrow P_2$ inikasına baxaq.

Aydındır ki, f inikası proyektiv fəzanın hər iki aksiomunu ödəyir. Deməli, P_2 üçölçülü vektor fəzası üzərində ikiölçülü proyektiv fəzanın, yəni proyektiv müstəvinin modelidir.

Bu modeldə proyektiv müstəvinin nöqtələri olaraq mərkəzi O nöqtəsində olan düz xətlər bağlısının düz xətləri, düz xətləri olaraq həmin bağlının O mərkəzindən keçən və bir müstəvi üzərində yerləşən düz xətləri çoxluğu götürülür.

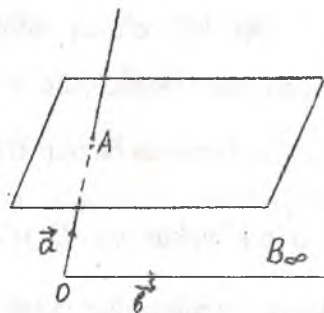
Analoji olaraq üçölçülü proyektiv fəzanın modelini qurmaq olar. Dördölçülü V vektor fəzası üzərində A_4 -dördölçülü afin fəzasına baxaq. Bu çoxluğunun P_3 ilə işarə edək. Hər bir $\vec{a} \in V$ vektoruna O nöqtəsindən keçən və istiqamətverici vektoru $\vec{a}$ olan düz xətti qarşı qoyan $f: V' \rightarrow P_3$ inikası proyektiv fəzanın aksiomlarının hər ikisini ödəyir. Buna görə də P_3 üçölçülü proyektiv fəzanın modelidir. Bu fəzada proyektiv nöqtələr olaraq O nöqtəsindən keçən düz xətlər, proyektiv düz xətlər olaraq O nöqtəsindən keçən və bir müstəvi üzərində yerləşən düz xətlər çoxluğu götürülür. Proyektiv müstəvi olaraq O nöqtəsindən keçən və istiqamətləndirici

vektorları üçölçülü fəzaya aid olan bütün düz xətlər çoxluğu götürülür.

İndi də proyektiv müstəvinin genişlənmiş müstəviyə və proyektiv düz xəttin isə genişlənmiş düz xəttə əsaslanan modellərini nəzərdən keçirək.

Üçölçülü V vektor fəzası üzərində genişlənmiş üçölçülü Afin və ya Evklid fəzasında hər hansı bir genişlənmiş $\bar{\pi}$ müstəvisini götürək. Fərz edək ki, O nöqtəsi genişlənmiş fəzanın $\bar{\pi}$ genişlənmiş müstəvisinə aid olmayan hər hansı məxsusi nöqtəsidir. Aşağıdakı kimi təyin olunmuş $f: V^* \rightarrow P_3$ inikasına baxaq:

Hər bir $\vec{a} \in V$ vektoruna O nöqtəsindən yönəldici vektoru $\vec{a}$ olan $(O, \vec{a})$ düz xəttinin $\bar{\pi}$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsi olan A -nı qarşı qoyaq.



Şəkil 35.

O nöqtəsindən keçən hər bir düz xətt $\bar{\pi}$ müstəvisini məxsusi və ya qeyri-məxsusi nöqtədə kəsir. Beləliklə f inikası V fəzasının hər bir sıfırdan fərqli vektoruna $\bar{\pi}$ genişlənmiş müstəvisinin müəyyən bir nöqtəsini qarşı qoyaq. 35-cı şəkildə

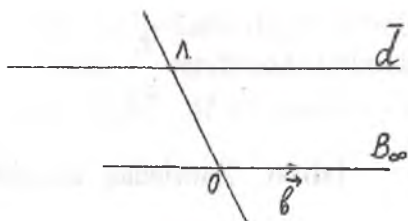
$\vec{a}$ vektoruna məxsusi A nöqtəsinin, $\vec{b}$ vektoruna isə B_∞ qeyri –məxsusi nöqtəsinin qarşı qoyulduğu göstərilib.

Genişlənmiş müstəvinin məxsusi və qeyri –məxsusi nöqtələrini eyni bir adla, proyektiv nöqtə adı ilə adlandırmağı şərtləşək.

$f: V' \rightarrow \pi$ inkası proyektiv fəzanın aksiomlarının hər ikisini ödəyir.

Analoji qayda da proyektiv düz xəttin genişlənmiş düz xətt modelinə baxaq. İkiölçülü V vektor fəzası üzərində ikiölçülü afin fəzasında genişlənmiş $\vec{d}$ düz xəttini götürək. O nöqtəsi afin fəzasının $\vec{d}$ düz xəttinə aid olmayan hər hansı nöqtəsi olsun (şəkil 36).

V çoxluğunu $\vec{d}$ genişlənmiş düz xəttinə inkas etdirən aşağıdakı $f: V' \rightarrow d'$ inkasına baxaq:



Şəkil 36.

Hər bir $\vec{a} \in V$ vektoruna O nöqtəsindən keçən və yönləldici vektoru $\vec{a}$ olan düz xətlə $\vec{d}$ düz xəttinin A kəsişmə nöqtəsini qarşı qoyaq. O nöqtəsindən keçən $\vec{d}$ düz xəttinin məxsusi və ya qeyri – məxsusi nöqtədə kəsməsindən asılı

olaraq V çoxluğuna daxil olan vektorlara məxsusi və ya qeyri – məxsusi nöqtə qarşı qoyular. $f: V' \rightarrow \bar{d}$ inkası bir ölçülü proyektiv fəza üçün Veyl aksiomlarının hər iksini ödəyir. Beləliklə, $\bar{d}$ genişlənmiş düz xətt proyektiv düz xəttin modeli kimi qəbul oluna bilər. Biz bundan sonra məhz bu modeli proyektiv düz xətt kimi qəbul edəcəyik.

Gələcəkdə aşağıdakı teoremdən istifadə edəcəyik.

Teorem. Genişlənmiş $\bar{d}$ düz xətti üzərində $R_\infty = (A_\infty, B, E)$ reperi götürülüb. A_∞ nöqtəsi bu düz xəttin qeyri –məxsusi nöqtəsidir. Əgər $\bar{d}$ düz xəttinin M məxsusi nöqtəsinin R_∞ reperində koordinatları x_1, x_2 olarsa onda həmin nöqtənin d düz xətti üzərində $B, \overrightarrow{BE}$ afin koordinat sistemində koordinat $\frac{x_1}{x_2}$ olar.

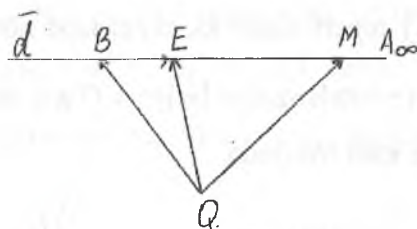
İsbatı. Xatırladaq ki, düz xətt üzərində $O, \vec{e}$ afin koordinat sistemində M nöqtəsinin koordinatı $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}$ şərtini ödəyən x ədədinə deyilir.

Genişlənmiş müstəvinin $\bar{d}$ düz xətti üzərində olmayan hər hansı Q nöqtəsini götürək. $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OB}$ və $\overrightarrow{OE}$ vektorları $\overline{R_\infty} = (A_\infty, B, E)$ reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini

doğuran vektorlar olar. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{QB}$ olduğu üçün

$\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$ vektorları $\overline{R_\infty} = (A_\infty, B, E)$ reperinə nəzərən

əlaqəli vektorlar sistemi olar.



Şəkil 37.

Hər hansı $M \in \bar{d}$ məxsusi nöqtəsinin B , $\overrightarrow{BE}$ koordinat sistemində koordinatı $\overrightarrow{BM} = x \cdot \overrightarrow{BE}$ şərtini ödəyən x ədədi olacaq. $\bar{d}$ genişlənmiş düz xətt modelində digər tərəfdən, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = x \overrightarrow{BE}$ olduğundan M nöqtəsinin $\overline{R_\infty}$ reperində koordinatları $(x, 1)$ olar.

Əgər teoremin şərtinə görə ədədlər cütü də M nöqtəsinin $\overline{R_\infty} = (A_\infty, B, E)$ reperində koordinatlarıdırsa,

$\frac{x_1}{x_2} = x$ olar. Bununla da teorem isbat olundu.

İndi isə aşağıdakı iki məsələyə baxaq:

Məsələ 1. Proyektiv düz xəttin $R = (A_1, A_2, E)$ reperi-
nə nəzərən koordinatları ilə verilmiş $M(x_1, x_2)$ nöqtəsini qu-
run.

Həlli. Fərz edək ki, $\bar{d}$ genişlənməmiş düz xətt üzərində
 $R = (A_1, A_2, E)$ reperi elədir ki, onun təpə nöqtələri və vahid
nöqtəsi məxsusi nöqtələrdirlər. İxtiyari $O \notin \bar{d}$ nöqtəsi götürək.

OE düz xətti üzərində

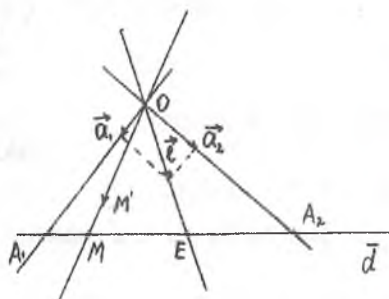
ixtiyari $\overrightarrow{OE'} = \vec{e}$ vektorunu

qeyd edək. $\vec{e}$ vektorunu

OA_1 və OA_2 düz istiqamətin-

də iki $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorları

üzrə ayıraq.



Şəkil 38.

$\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ vektorları sistemi $R = (A_1, A_2, E)$

reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olacaq. Sonra

$\overrightarrow{OM'} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$ vektorunu qururuq.

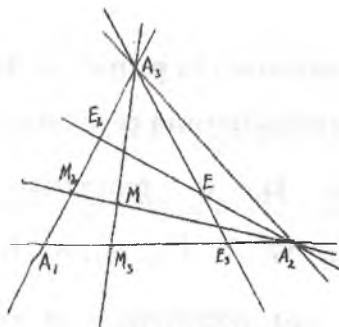
OM' düz xətti ilə $\bar{d}$ düz xəttinin M kəsişmə nöqtəsi
tələb olunan nöqtə olar.

Xüsusi halda R reperinin təpə nöqtələrindən və vahid
nöqtəsinin üçündən biri qeyri məxsusi nöqtədə ola bilər. Bu
halda da məsələ eyni qayda ilə həll olunur.

Məsələ 2. Proyektiv müstəvisinin $\overline{\pi}$ genişlənmiş müstəvi modelində $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində kordinatları ilə verilmiş $M(x_1, x_2, x_3)$ nöqtəsini qurun.

Həlli. Bu məsələni həll etmək üçün bundan qabaqkı 1-ci məsələnin həllindən və §13 teoremdən istifadə edəcəyik. Fərz edək ki bizə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperi verilib. Biz A_1, A_2, A_3, E nöqtələrinin hələlilik məxsusi nöqtələr olduğunu fərz edirik.

Bu nöqtələrin biri və ya ikisi qeyri – məxsusi nöqtə ola bilər. Genişlənmiş müstəvi adi afin müstəvisinə sonsuz uzaqlaşmış düz xətti əlavə etməklə alınır (şəkil 39).



Şəkil 39.

Proyektiv reperi isə bir düz xəttə aid olan üç nöqtəsi ola bilməz). §13- də isbat etdiyimiz teoremə əsasən E_3 nöqtəsi A_3 mərkəzindən E nöqtəsinin A_1A_2 koordinat düz xətti üzərində proyeksiya olarsa, $R_3 = (A_1, A_2, A_3)$ reperində M

nöqtəsinin A_3 mərkəzindən M_3 proyeksiyanın koordinatları (x_1, x_2) olar. A_1A_2 koordinat düz xətti üzərində $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ reperində koordinatları (x_1, x_2) olan M_3 nöqtəsinə qururuq. Sonra analoji qaydada A_1A_3 koordinat düz xəttindəki $R_2 = (A_1, A_2, E_2)$ reperində koordinatları (x_1, x_3) olan M_2 nöqtəsinə qururuq. A_3M_3 və A_2M_2 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi tələb olunan nöqtə olar: $M = A_3M_3 \cap A_2M_2$.

Xüsusi halda $R = (A_\infty, B_\infty, A_3, E)$ reperində də proyektiv koordinatları ilə verilmiş istənilən nöqtəni eyni qayda ilə qurmaq olar.

§15. Proyektiv müstəvidə və proyektiv düz xətdə nöqtənin koordinatlarının çevrilməsi

Fərz edək ki, σ proyektiv müstəvisində iki $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ və $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ reperləri verilib və R' reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları məlumdur:

$$A_1(a_{11}, a_{21}, a_{31})_R, A_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})_R, A_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})_R \text{ və } E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})_R.$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \quad (1)$$

matrisinə R reperindən R' reperinə keçid matrisi deyilir. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, e$ vektorlar sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olarsa, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}_1' &= a_{11} \vec{a}_1 + a_{21} \vec{a}_2 + a_{31} \vec{a}_3, \\ \vec{a}_2' &= a_{12} \vec{a}_1 + a_{22} \vec{a}_2 + a_{32} \vec{a}_3, \\ \vec{a}_3' &= a_{13} \vec{a}_1 + a_{23} \vec{a}_2 + a_{33} \vec{a}_3, \\ e_1' &= a_{10} \vec{a}_1 + a_{20} \vec{a}_2 + a_{30} \vec{a}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

vektorları R' reperinin A_1', A_2', A_3' təpə nöqtələrini və E' vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaqlar. (2) bərabərliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_3' - e_1' &= (a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{10}) \vec{a}_1 + \\ &+ (a_{21} + a_{22} + a_{23} - a_{20}) \vec{a}_2 + (a_{31} + a_{32} + a_{33} - a_{30}) \vec{a}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzasında xətti asılı olmayan vektorlar olduq-

larından, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sistemi R^* reperinə nəzərən yalnız və yalnız onda əlaqəli vektorlar sistemi olar ki, (2) matrisinin birinci üç sütununun cəmi onun dördüncü sütununa bərabər olsun. Bu halda (1) matrisinin sütunlarına əlaqəli sütunlar deyəcəyik.

Əgər R reperindən R^* reperinə (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olmazlarsa, onda bu matrisin birinci sütununu k_1 ədədinə, ikinci sütununu k_2 ədədinə üçüncü sütununu k_3 ədədinə vurmaqla onlar

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = a_{10} \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = a_{20} \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = a_{30} \end{cases} \quad (4)$$

(4) tənliklər sisteminin həlli kimi təyin edə bilərik. Proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatları sabit ədədi vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunduğundan.

$$\begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} & a_{10} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} & a_{20} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \quad (5)$$

matrisi də R reperindən R^* reperinə keçid matrisi olacaq. Bu matrisin sütunları əlaqəlidir.

(4) tənliklər sistemi haqqında onu qeyd edək ki, A_1^*, A_2^*, A_3^* nöqtələri bir düz xətt üzərində olmadıqlarından

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

olar.

Deməli (4) sisteminin yeganə həlli var. Həm də $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$ olar. Çünki əgər məsələn $k_1 = 0$ olarsa, onda E^* nöqtəsi $A_2^* A_3^*$ koordinat düz xətti üzərində olar. Bu isə $R' = (A_1^*, A_2^*, A_3^*, E^*)$ -in reper olması şərtinə ziddir. Eyni qayda ilə $k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$. Beləliklə, R reperindən R^* reperinə (5) keçid matrisinin sütunları əlaqədirlər.

İndi proyektiv müstəvidə müstəvidə koordinatların çevrilməsi məsələsinə keçək.

Məsələ 1. Proyektiv müstəvidə R və R' reperləri, R reperindən R' reperinə sütunları əlaqəli olan (1) keçid matrisi və proyektiv müstəvisinin R və R' reperlərində koordinatları uyğun olaraq (x_1, x_2, x_3) və (x'_1, x'_2, x'_3) olan ixtiyari X nöqtəsi verilmişdir. x_1, x_2, x_3 koordinatlarını x'_1, x'_2, x'_3 koordinatları ilə ifadə etmək tələb olunur.

Həlli. Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir. Onda (2) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R' reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlardır. (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olduğundan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ və $\vec{e}$ vektorları R' reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Fərz edək ki, $\vec{y}$ vektoru X nöqtəsini doğuran hər hansı bir vektordur. (y_1, y_2, y_3) bu vektorun $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisində, (y'_1, y'_2, y'_3) isə $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ bazisində koordinatlarıdır
Onda

$$\begin{aligned}\vec{y} &= y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3 \\ \vec{y} &= y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3\end{aligned}\quad (6)$$

(2) və (6) bərabərliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3 = y_1 \left(a_{11} \vec{a}_1 + a_{21} \vec{a}_2 + a_{31} \vec{a}_3 \right) + \\ &+ y_2 \left(a_{12} \vec{a}_1 + a_{22} \vec{a}_2 + a_{32} \vec{a}_3 \right) + y_3 \left(a_{13} \vec{a}_1 + a_{23} \vec{a}_2 + a_{33} \vec{a}_3 \right) = \\ &= (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) \vec{a}_1 + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) \vec{a}_2 + \\ &+ (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3) \vec{a}_3 = y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3\end{aligned}\quad (7)$$

Buradan isə alırıq:

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ y_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \\ y_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3\end{aligned}\quad (8)$$

(y_1, y_2, y_3) və (x_1, x_2, x_3) X nöqtəsinin R reperində koordinatları olduqlarından elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$, $y_3 = \lambda x_3$ olar. (y_1, y_2, y_3) və (x_1, x_2, x_3)

X nöqtəsinin R reperində də koordinatları olduqlarından elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$, $y_3 = \lambda x_3$ olar.

Bu qiymətləri (8) də nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= a_{11} \lambda x_1 + a_{12} \lambda x_2 + a_{13} \lambda x_3 \\
\lambda x_2 &= a_{21} \lambda x_1 + a_{22} \lambda x_2 + a_{23} \lambda x_3 \\
\lambda x_3 &= a_{31} \lambda x_1 + a_{32} \lambda x_2 + a_{33} \lambda x_3
\end{aligned} \tag{9}$$

Bu bərabərliklərin hər tərəfini λ' -ə bölsək və $\frac{\lambda}{\lambda'} = \rho$ işarə etsək alırıq.

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\rho x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\rho x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned} \tag{10}$$

(10) düsturlarına proyektiv müstəvidə koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Biz x_1, x_2 , və x_3 koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyi ilə tapdıq. Bu isə təbiiidir, çünki proyektiv reper nöqtənin koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edir. (10) düsturlarını bir misal üzərində nəzərdən keçirək.

Misal. Proyektiv müstəvidə R reperindən R^* reperinə

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

keçid matrisi verilmişdir. R reperindən R^* reperinə keçiddə proyektiv koordinatların çevrilməsi düsturlarını yazın.

Həlli. Göründüyü kimi verilən keçid matrisinin sütunları uyğunlaşmış deyillər. Birinci sütunun elə k_1 , ikinci k_2 , üçüncü sütunu elə k_3 ədədinə vuraq ki,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1 \\ k_2 = 1 \\ -k_1 + k_3 = 2 \end{cases}$$

şərti ödənsin. Bu sistemdən $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ və $k_3 = 1$ alırıq.

Deməli, R reperindən R' reperinə keçid matrisinin sütunları əlaqədirlər.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

R reperindən R' reperinə keçiddə çevirmə düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \rho x_2 = x_2 \\ \rho x_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

olar.

İndi proyektiv düz xətt üzərində proyektiv koordinatların çevrilməsi məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $\bar{d}$ proyektiv düz xətt üzərində $R = (A_1, A_2, E)$ və $R' = (A'_1, A'_2, E')$ reperləri verilir. R' reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperində koordinatları məlumdur.

$$A'_1(a_{11}, a_{21}), A'_2(a_{12}, a_{22}), E'(a_{10}, a_{20})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \quad (11)$$

matrisi R reperindən R' reperinə keçid matrisi adlanır. Əgər (11) matrisinin birinci iki sütununun elementləri cəmi onun üçüncü sütununa bərabər olarsa, onda bu matrisə sütunları əlaqəli matris deyəcəyik.

Məsələ 2. Proyektiv düz xəttin ixtiyari X nöqtəsinin bu proyektiv düz xətləri R və R' reperlərində koordinatları uyğun olaraq $(x_1, x_2)_R$ və $(x'_1, x'_2)_{R'}$ -dir. Əgər R reperindən R' reperinə sütunları əlaqəli olan (7) keçid matrisi verilibsə, x_1 və x_2 koordinatlarını x'_1, x'_2 koordinatları ilə ifadə edin.

Həlli: Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən vektorlar sistemdirsə, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}'_1 &= a_{11} \vec{a}_1 + a_{21} \vec{a}_2 \\ \vec{a}'_2 &= a_{12} \vec{a}_1 + a_{22} \vec{a}_2 \\ \vec{e}' &= a_{10} \vec{a}_1 + a_{20} \vec{a}_2 \end{aligned} \quad (12)$$

vektorları R' reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaq. (11) keçid matrisinin sütunları əla-

qəli olduqlarından, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ vektorları da R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Əgər X nöqtəsini doğuran hər hansı $\vec{y}$ vektorunun $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ və $\vec{a}_1', \vec{a}_2'$ bazislərində koordinatları uyğun olaraq (y_1, y_2) (y_1', y_2') olarsa onda

$$\vec{y} = y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 \quad \text{və} \quad \vec{y} = y_1' \vec{a}_1' + y_2' \vec{a}_2' \quad (13)$$

(12) və (13) münasibətlərindən isə

$$\begin{aligned} \vec{y} = y_1' \vec{a}_1' + y_2' \vec{a}_2' &= y_1' \left(a_{11} \vec{a}_1 + a_{21} \vec{a}_2 \right) + y_2' \left(a_{12} \vec{a}_1 + a_{22} \vec{a}_2 \right) = \\ &= (a_{11} y_1' + a_{12} y_2') \vec{a}_1 + (a_{21} y_1' + a_{22} y_2') \vec{a}_2 = y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 \end{aligned} \quad (14)$$

alırıq. Burada isə

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} y_1' + a_{12} y_2' \\ y_2 &= a_{21} y_1' + a_{22} y_2' \end{aligned} \quad (15)$$

(y_1, y_2) və (x_1, x_2) eyni bir R reperində X nöqtəsinin koordinatları olduqlarından $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$ olur. Analoji olaraq elə $\lambda' \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1' = \lambda' x_1'$, $y_2' = \lambda' x_2'$. Bu münasibətləri (15) -də nəzərə alsaq.

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_{11} \lambda' x_1' + a_{12} \lambda' x_2' \\ \lambda x_2 &= a_{21} \lambda' x_1' + a_{22} \lambda' x_2' \end{aligned}$$

olar.

Bu bərabərliklərin hər tərəfini λ -ə bölüb, $\rho = \frac{\lambda}{\lambda}$ işarə etsək,

$$\begin{cases} \rho x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 \\ \rho x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 \end{cases} \quad (16)$$

düsturlarını alırıq. (16) düsturlarına proyektiv düz xətt üzərində koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, burada da x_1 və x_2 koordinatların təbii olaraq sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin etdik.

§16. Proyektiv müstəvidə düz xəttin tənlikləri və düz xəttin koordinatları

Biz evklid fəzasında koordinat üsulu haqqında bəhs etdiyimiz zaman Φ fiqurunu təyin edən şərtlər, haqqında xüsusi halda Φ fiqurunun tənliyi haqqında danışmışdıq.

Proyektiv fəzada da Φ fiqurunun tənliyi anlayışı analogi qayda ilə verilir.

Verilən reperdə Φ fiqurunun tənliyi elə bir tənliyə deyilir ki, Φ fiqurunun hər bir nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəyir, Φ fiquruna aid olmayan istənilən nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəmir.

Proyektiv müstəvidə də evklid müstəvisində olduğu kimi fiqur olaraq əsasən düz xətlərə baxılır. Biz də düz xəttin

müxtəlif tənliklərini verəcəyik. Verilən iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyini çıxaraq.

Fərz edək ki, proyektiv müstəvidəki R reperində $\bar{d}$ düz xəttini iki $A(a_1, a_2, a_3)_R$ və $B(b_1, b_2, b_3)_R$ nöqtələri koordinatları ilə verilmişdir. $\bar{d}$ düz xəttinin ixtiyari $X(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsini götürək. A , B və X nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından §4-də 3cü teoremə əsasən

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

alırıq.

Bu isə $\bar{d}$ düz xəttinin tənliyidir.

A və B müxtəlif nöqtələr olduqlarından

$$\text{ranq} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 2 \quad (2)$$

Deməli, (1) tənliyi yalnız və yalnız onda ödənər ki, determinatın birinci sütunu, onun ikinci və üçüncü sütunlarının xətti kombinasiyası olsun.

Yəni elə λ və μ (ikisi də birdən sıfıra bərabər olmayan) həqiqi ədədləri var ki,

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\x_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\x_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3\end{aligned}\tag{3}$$

Bu tənliklər proyektiv müstəvidə düz xəttin parametrik tənlikləri adlanırlar. Onların mahiyyəti ondan ibarətdir ki, ikisi də birdən sıfıra bərabər olmayan λ və μ ədədləri necə olurlarsa, olsunlar (3) tənliklərindən alınan x_1, x_2, x_3 ədədləri (1) tənliyini ödədiyi üçün koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədir.

Tərsinə koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədirsə, onda həmişə elə λ və μ həqiqi ədədləri var ki, x_1, x_2, x_3 koordinatları (3) tənlikləri vasitəsi ilə a_1, a_2, a_3 və b_1, b_2, b_3 ədədləri ilə ifadə olunurlar.

(1) tənliyinin sol tərəfindəki determinatı birinci sütun elementlərinə görə açsaq.

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{alırıq.}$$

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{işarə etsək.}$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0\tag{4}$$

(2) bərabərliyindən alınır ki, u_1, u_2, u_3 ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Deməli, ixtiyari proyektiv reperdə düz xətt birdərəcəli bircins tənliklə verilir.

Bunun tərsi də doğrudur:

Teorem 1. Proyektiv müstəvidə birdərəcəli bircins (4) tənliyi ilə verilən fiqur proyektiv düz xətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $u_1 \neq 0$. Onda $P = (-u_2, u_1, 0)$ və $Q(-u_2, 0, u_1)$ nöqtələrinin koordinatları (4) tənliyini ödəyirlər. P və Q nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -u_2 & -u_3 \\ x_2 & -u_1 & 0 \\ x_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } u_1^2 x_1 + u_1 u_2 x_2 + u_1 u_3 x_3 = 0$$

Axırıncı tənliyin hər tərəfini u_1 -ə bölsək, onda

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ tənliyini alırıq. Deməli, P və Q nöqtələrindən keçən PQ düz xəttinin tənliyi (4) tənliyi ilə üst-üstə düşür. Teorem isbat olundu.

Fərz edək ki, bizə iki d_1 və d_2 düz xətləri

$$d_1 : u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad (5)$$

$$d_2 : v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad (6)$$

tənlikləri ilə verilmişlər.

Cəbr kursunda bircins tənliklər sisteminin əsas determinatının ranqı haqqında teoremdən birbaşa alınır ki,

Teorem 2. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda üst-üstə düşür ki,

$$\text{ranq} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$$

olsun. Buradan belə nəticə çıxır:

Nəticə. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda kəsişirlər ki,

$$\text{ranq} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

olsun.

Fərz edək ki, d düz xətti R reperində $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ tənliyi ilə verilmişdir. Onda u_1, u_2, u_3 ədədlərinə d düz xəttinin R reperində koordinatları deyilir və belə işarə edilir: $d(u_1, u_2, u_3)$ və ya $d(u_1, u_2, u_3)_R$. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi düz xəttin koordinatlarının üçü də eyni zamanda sıfır ola bilməz. Həm də ki, R reperində düz xəttin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunur. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reprində koordinat düz xətlərinin tənlikləri və koordinatları aşağıdakı kimi olur.

$$\begin{array}{ll}
A_1 A_2 : x_3 = 0 & A_1 A_2 (0, 0, 1) \\
A_1 A_3 : x_2 = 0 & A_1 A_3 (0, 1, 0) \\
A_2 A_3 : x_1 = 0 & A_2 A_3 (1, 0, 0)
\end{array}$$

§17. İkilik prinsipi

Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipi proyektiv həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir.

Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı aid olmaları münasibətini adətən belə ifadə edirik: «Nöqtə düz xəttin üzərindədir» və ya «düz xətt nöqtədən keçir». Bundan sonra biz bu münasibəti belə ifadə edəcəyik: «Nöqtə düz xəttə aiddir» və ya «düz xətt nöqtəyə aiddir».

Tutaq ki, π^* çoxluğu π proyektiv müstəvisi üzərində bütün düz xətlər çoxluğudur. π müstəvisində R reperini götürək. Koordinatları ilə verilmiş hər bir $A(a_1, a_2, a_3)_R \in \pi$ nöqtəsinə R reperində eyni koordinatlara malik $m \in \pi^*$ düz xəttini qarşı qoysaq onda müəyyən bir $\varphi: \pi \rightarrow \pi^*$ inikasını alarıq. Göstərək ki, bu inikas biyeksiyadır. φ inikası $A(a_1, a_2, a_3)_R$ nöqtəsinə $m(a_1, a_2, a_3)_R$ düz xəttini qarşı qoyur. Əgər A və B nöqtələri π proyektiv müstəvisinin müxtəlif nöqtələri isə onların koordinatları mütənəib deyillər.

Onda onlara qarşı qoyulan m və n düz xətlərinin də koordinatları mütənasib olmadıqlarından, bu düz xətlər onlarda müxtəlif düz xətlərdirlər. Deməli, φ inikası inyeksiyasıdır. Yəni müxtəlif nöqtələrə qarşı müxtəlif düz xətlər qoyulur. φ inikası həm də süryeksiyadır. Çünki, π' çoxluğunun hər bir düz xətti eyni koordinatlara malik olan nöqtənin obrazı olacaq. Beləliklə aldığımız ki, φ inikası biyeksiyadır, yəni qarşılıqlı birqıymətli uyğunluqdur, $\varphi^{-1} : \pi' \rightarrow \pi$ inikası düz xətlər çoxluğundan nöqtələr çoxluğuna biyeksiyadır.

Qeyd etmək lazımdır ki, φ və φ^{-1} inikaları nöqtələr və düz xətlər arasında «aid olmaq» münasibətini saxlayırlar: Yəni əgər $A \in d$ və $a' = \varphi(A)$ isə onda $D' = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsi a' düz xəttinə aid olar, $D' \in a'$. Həqiqətən, A nöqtəsi $(a_1, a_2, a_3)_R$ koordinatları ilə d düz xətti $(u_1, u_2, u_3)_R$ koordinatları ilə verilən $A \in d$ olduğundan

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \quad (1)$$

olar.

φ inikasının tərifinə görə a' düz xəttinin də koordinatları $(a_1, a_2, a_3)_R$ və D' nöqtəsinin də koordinatları (u_1, u_2, u_3) olar. Yəni $a' (a_1, a_2, a_3)$ və $D' (u_1, u_2, u_3)$ olar. (1) bərabərliyi göstərir ki, $D' \in a'$ olur.

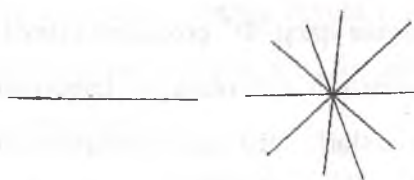
Bu təklifdən istifadə edərək aşağıdakı təklifin doğruluğunu isbat edək. Təklif A, B, C nöqtələri bir d düz xəttinə aid olarlarsa, onda

$$a = \varphi(A), \quad b = \varphi(B), \quad c = \varphi(C)$$

düz xətləri də bir $D = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsinə aid olarlar, başqa sözlə mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aid olarlar.

İsbatı: Yuxarıda qeyd etdiyimizə görə $A \in d$ olduğundan $D \in a$, $B \in d$ olduğundan $D \in b$, $C \in d$ olduğundan $D \in c$ olar. Deməli, a, b, c düz xətləri mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aiddirlər.

Bu təklifdən alınır ki, φ inikasında proyektiv müstəvinin bir düz xəttinə aid nöqtələri çoxluğu bir düz xətlər dəstəsinə keçir.



Şəkil 40.

Tərsinə, φ^{-1} inikasında bir nöqtəyə aid düz xətlər dəstəsi bir düz xəttə aid nöqtələr çoxluğuna keçir.

İndi də proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini ifadə edək.

İkilik prinsipi (müstəvidə). Əgər proyektiv müstəvidə nöqtələr, düz xətlər və onların qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «düz xətlər» sözünü «nöqtələr» sözü ilə, «nöqtələr» sözünü «düz xətlər» sözü ilə əvəz etdikdə alınan A^* təklifi də doğru olar.

A^* təklifinə A təklifi ilə ikili təklif deyilir. Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini əsaslandırmaq üçün, bu müstəvidə R reperini götürək və yuxarıda olduğu kimi φ və φ^{-1} inikaslarını quraq. Fərz edək ki, proyektiv müstəvinin nöqtələr və düz xətlərdən ibarət hər hansı Φ çoxluğu üçün nöqtə və düz xətlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudur. Φ çoxluğunun φ inikasında bütün nöqtələrinin obrazlarından və φ^{-1} inikasında bütün düz xətlərini obrazlarından ibarət olan Φ^* işarə edək.

A tənliyinə qarşı Φ^* çoxluğuna daxil olan nöqtələr və düz xətlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında A təklifindəki «nöqtələri düz xətlərlə, düz xətləri nöqtələrlə» əvəz etməkdən alınan A^* təklifini qarşı qoyaq. Aidliyi ifadə edən sözləri isə dəyişmədən saxladığımız üçün əgər A təklifi doğru olarsa onda A^* təklifi də doğru olar. Fikrimizi bir neçə misal üzərində aydınlaşdıraq.

Fərz edək ki, A təklifi belədir: 1. «İki nöqtə necə olur olsunlar, bu nöqtələrə aid olan bir düz xətt vardır».

Onda A^* təklifi belə olar. 1*. «İki düz xətt necə olur olsunlar bu düz xətlərə aid olan ancaq bir nöqtə vardır.»

Həqiqətən A təklifi doğrudur. Onunla ikili olan A^* təklifi də doğrudur.

2. Hər bir düz xəttə aid olan sonsuz sayda nöqtə vardır.

2*. Hər bir nöqtəyə aid olan sonsuz sayda düz xətt vardır.

3. Bir düz xəttə aid olmayan ən azı üç nöqtə vardır..

3*. Bir nöqtəyə aid olmayan ən azı üç düz xətt vardır.

İkilik prinsipi bir sıra teoremlərin isbatında istifadə olunur. Həmçinin qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qurduğumuz φ və φ^{-1} inikasları proyektiv müstəvinin nöqtələri və düz xətləri arasındakı yeganə biyektiv inikaslar deyil. Biz gələcəkdə ikilik prinsipi üçün yararlı olan daha başqa inyektiv inikaslar quracayıq.

İndi də üçölçüli proyektiv fəzada ikilik prinsipi haqqında qısa məlumat verək. Proyektiv fəzada ikilik prinsipi belə ifadə olunur:

İkilik prinsipi (proyektiv fəzada). Əgər proyektiv fəzada nöqtələrin, düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı B təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə

«nöqtələr» sözünü «müstəvilər» sözü ilə, «müstəviləri» sözünü «nöqtlər» sözü ilə əvəz etdikdə, qalan sözləri isə eyni ilə saxladıqda alınan B^* təklifi də doğru olar. Misallar göstərək.

1. Düz xətt və ona aid olmayan nöqtə üçün onların hər ikisinə aid olan yeganə müstəvi vardır.

1*. Düz xətt və ona aid olmayan müstəvi üçün, onların hər ikisinə aid olan yeganə nöqtə vardır.

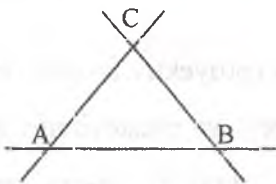
2. İki nöqtə necə olur-olsun, onlara aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

2*. İki müxtəlif müstəvi necə olurlarsa olsunlar, onlara aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

§18. Dezarq teoremi

Tərif. Bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən və bu nöqtələri cüt-cüt birləşdirən üç düz xətdən ibarət olan həndəsi fiqura üçtəpəli deyilir.

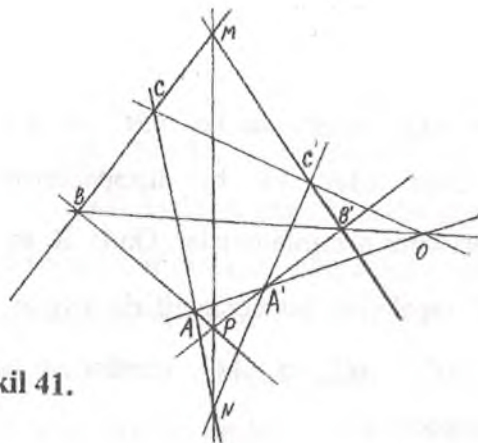
Nöqtələrə üçtəpəlinin təpə nöqtələri, düz xətlərə isə üçtəpəlinin tərəfləri deyilir. Təpələri A , B və C nöqtələri olan üçtəpəlini ABC ilə işarə edəcəyik.



Proyektiv müstəvidə iki ABC və $A'B'C'$ üçtəpəlilərini götürək. Fərz edək ki, bu üçtəpəlilərin təpə nöqtələri yazıldıqları kimi nizamlanmışlar. Onda A və A' , B və B' , C və C' təpələrinə bu üçtəpəlilərin uyğun təpələri, AB və BC və $B'C'$, AC və $A'C'$ tərəflərinə isə onların uyğun tərəfləri deyəcəyik.

Teorem 1. (Dezarq teoremi). Əgər iki üçtəpəlinin uyğun tərəflərindən keçən düz xətlər bir nöqtədən keçilirsə, (bir nöqtəyə aiddirlərsə), onda bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri də bir düz xətt üzərində olar. (bir düz xəttə aid olar).

İsbatı. Fərz edək ki, ABC və $A'B'C'$ verilən üçtəpəlilərdir. O nöqtəsi AA' , BB' və CC' düz xətlərinin hər üçünün kəsişdiyi nöqtələrdir. AB və $A'B'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni P ilə, AC və $A'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni N ilə BC və $B'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni M ilə işarə edək (Şəkil 41).

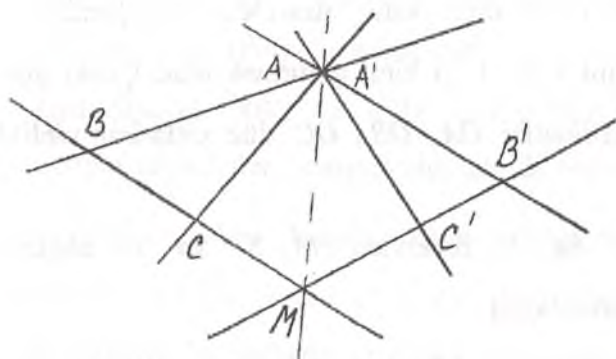


Şəkil 41.

Əgər O nöqtəsi AB , BC və ya CA tərəflərinin birinə aid olarsa, onda teoremin hökmünün doğruluğu aşkardır. Beləki əgər $O \in AB$ olarsa, onda $A' \in OA$, $B' \in OB$ və $OA = OB = AB$ olduğundan alarıq ki, $A'B'$ tərəfi ilə AB tərəfi ilə üst-üstə düşər.

AC ilə $A'C'$ -in kəsişdiyi nöqtə N , BC ilə $B'C'$ -in kəsişdiyi nöqtə M olarsa da MN ilə AB düz xətti, bir P nöqtəsində kəsişər. P nöqtəsi isə AB və $A'B'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsidir. Əgər bu üçtəpəlilərin bir cüt uyğun təpə nöqtələri, məsələn A və A' , üst-üstə düşərsə yenə teoremini hökmü aşkardır.

Çünki, A nöqtəsi həm AB və $A'B'$ tərəflərinin, həm də AC və $A'C'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsi olar, yəni N və P nöqtələri A nöqtəsi ilə üst-üstə düşər (Şəkil 42).



Şəkil 42.

Onda AM düz xətti bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələrinin aid olduğu düz xətt olar.

İndi fərz edək ki, A və A' , B və B' , C və C' ayrı – ayrı nöqtələrdirlər və O nöqtəsi bu üçtəpəlilərdən heç birinin tərəfinə aid deyil.

Proyektiv müstəvidə $R = (A, B, C, O)$ reperini götürək. Bu reperdə A, B, C, O nöqtələri

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) \text{ və } O(1, 1, 1)$$

koordinatlarına malikdirlər. OA düz xəttinin tənliyi $x_2 - x_3 = 0$, OB düz xəttinin tənliyi $x_1 - x_3 = 0$.

A' nöqtəsi OA düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatları $A'(a, 1, 1)$ kimi, B' nöqtəsi OB düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatlarını $B'(1, b, 1)$ kimi,

C' nöqtəsi OC düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatlarını $C'(1, 1, c)$ kimi götürmək olar. Çünki götürdüyümüz koordinatlar OA , OB , OC düz xətlərinin tənliklərini ödəyirlər.

İndi də R reperində M , N və P nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

P nöqtəsi AB və $A'B'$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. AB düz xəttinin tənliyi $x_3 = 0$ və $A'B'$ düz xəttinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & 1 \\ x_2 & 1 & b \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

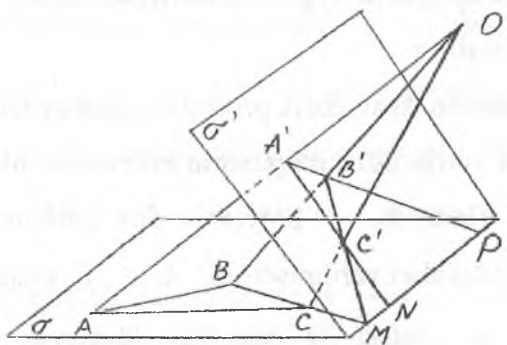
olur.

Buradan da $A'B' : (1-b)x_1 - (a-1)x_2 + x_3(ab-1) = 0$ alırıq. $x_3 = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda P nöqtəsinin koordinatları $P(a-1, 1-b, 0)$ kimi olar. Analoji qayda ilə $M(0, 1-b, c-1)$ və $N(a-1, 0, 1-c)$ alırıq. M , N və P nöqtələri bir düz xətt üzərindədir, çünki,

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & a-1 \\ 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & c-1 & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

(Determinatın ikinci və üçüncü sütunlarının cəmi onun birinci sütununu verir) Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, ABC və $A'B'C'$ üçtəpəliləri proyektiv fəzada müxtəlif müstəvilər üzərində olduqda da teorem doğrudur. Həqiqətən proyektiv fəzada uyğun olaraq σ və σ' müstəvilərində yerləşən ABC və $A'B'C'$ üçtəpəliləri uyğun təpələrindən keçən düz xətlərin O nöqtəsində kəsdiqlərini fərz edək. Onda A, B, A' və B' nöqtələri bir müstəvi üzərində olurlar.



Şəkil 43.

Onda AB və $A'B'$ düz xətləri kəsişərlər. Onların P kəsişmə nöqtəsi isə σ və σ' müstəvilərinin kəsişmə xətti üzərində olar. Çünki, AB σ müstəvisi üzərində, $A'B'$ isə σ' müstəvisi üzərindədirlər. Eyni qayda ilə AC və $A'C'$ uyğun tərəflərinin, BC və $B'C'$ uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri

də σ və σ' müstəvilərinin kəsişmə düz xətti üzərində olurlar. Deməli, M , N və P nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər.

Proyektiv müstəvidə Dezarq teoremi ilə ikili olan teoremə baxaq: Bu teorem Dezarq teoreminin tərs teoremidir.

Qeyd edək ki, üçtəpəlinin ikili fiquru yenə üçtəpəli olur. Bu fiqura bəzən üçtərəfli də deyilir.

Teorem 2. (Dezarq teoreminin tərsi) İki üçtəpəlinin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri bir düz xəttə aid olarlarsa, onda həmin üçtəpəlilərin uyğun təpələrindən keçən düz xətlər bir nöqtədə kəsişirlər.

Bu teoremin isbatı ikilik prinsipinə görə aındır.

§19. Düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbəti

Tərif. Tutaq ki, d proyektiv düz xəttinin elə dörd A , B , C , D nöqtələri verilmişdir ki, A , B , C nöqtələri müxtəlif D isə A nöqtəsi ilə üstə-üstə düşməyən hər hansı nöqtədir. d düz xətti üzərində $R_0 = (A, B, C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları (x_1, x_2) isə, onda $\frac{x_1}{x_2}$ nisbətinə A , B , C , D nöqtələrinin mürəkkəb (ikiqat və ya anharmonik) nisbəti deyilir və (AB, CD) kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, D nöqtəsi A ilə üst-üstə düşmədiyindən $R_0 = (A, B, C)$ reperində (x_1, x_2) koordinatları $x_2 \neq 0$ şərtini ödəyir.

Teorem 1. Əgər A, B və C proyektiv düz xəttin müxtəlif nöqtələri, λ hər hansı həqiqi ədəd isə, onda d düz xətti üzərində elə yeganə X nöqtəsi var ki, bu nöqtə üçün $(AB, CX) = \lambda$.

İsbatı: Proyektiv düz xəttin üzərində $R_0 = (A, B, C)$ reperini və bu repərdə koordinatları $(\lambda, 1)$ olan X nöqtəsini götürək. Tərifə görə $(AB, CX) = \lambda$. İndi göstərək ki, teoremin şərtini ödəyən X nöqtəsi yeganədir. Əgər proyektiv düz xəttin üzərində $(AB, CX') = \lambda$ şərtini ödəyən başqa bir $X'(x_1, x_2)_{R_0}$ nöqtəsi də olarsa, onda $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$. Buradan $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda}{1}$ alınır. Deməli, X və X' nöqtələrinin koordinatları mütənəsbidirlər. Bu isə o deməkdir ki, X' nöqtəsi X nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər proyektiv müstəvidə A, B, C, D və D' nöqtələri üçün $(AB, CD) = (AB, CD')$ şərti ödənərsə, onda D və D' nöqtələri üst-üstə düşürlər.

İndi də mürəkkəb nisbətin verilmiş nöqtələrin koordinatları vasitəsi ilə hesablanması düsturunu verək. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 2. Əgər proyektiv düz xətt üzərində müəyyən bir R reperində koordinatları ilə verilən

$$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$$

nöqtələri müxtəlif, $D(d_1, d_2)$ nöqtəsi ilə A nöqtəsi ilə üst-üstə düşmürsə, onda

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad (1)$$

İsbatı. R reperindən $R_0 = (A, B, C)$ reperinə keçid zamanı koordinatları çevrilməsi düsturlarını yazaq. Aydındır ki, ixtiyari $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ həqiqi ədədləri üçün A və B nöqtələrini koordinatlarını $A(k_1 a_1, k_1 a_2)$ və $B(k_2 b_1, k_2 b_2)$ kimi də yazə bilər. k_1 və k_2 ədədlərini elə seçək ki,

$$\begin{pmatrix} k_1 a_1 & k_2 b_1 & c_1 \\ k_1 a_2 & k_2 b_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ keçid matrisinin sütunları əlaqəli}$$

olsunlar. Yəni

$$\begin{cases} k_1 a_1 + k_2 b_1 = c_1 \\ k_1 a_2 + k_2 b_2 = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

Onda §7-də koordinatların çevrilməsinin (16) düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1 = k_1 a_1 x'_1 + k_2 b_1 x'_2 \\ \rho x_2 = k_1 a_2 x'_1 + k_2 b_2 x'_2 \end{cases} \quad (3)$$

kimi olar.

Əgər $R_0 = (A, B, C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları (y_1, y_2) olarsa, onda (3) düsturlarından alırıq.

$$\begin{cases} \rho d_1 = a_1 k_1 y_1 + b_1 k_2 y_2 \\ \rho d_2 = a_2 k_1 y_1 + b_2 k_2 y_2 \end{cases} \quad (4)$$

Buradan, y_1 və y_2 -ni tapaq.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & b_1 k_2 \\ \rho d_2 & b_2 k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 k_1 & b_1 k_2 \\ a_2 k_1 & b_2 k_2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a_1 & \rho d_1 \\ k_1 a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 k_1 & b_1 k_2 \\ a_2 k_1 & b_2 k_2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{k_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Mürəkkəb nisbətin tərifinə əsasən

$$(AB, CD) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{k_2 \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1 \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} \quad (5)$$

İndi isə (2) sistemini k_1 və k_2 -yə görə həll etsək, alırıq.

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Bu qiymətləri (5) –də yerinə yazsaq

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Bununla da (1) düsturunu aldıq.

Teorem isbat olundu.

Düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$1) (AB, CD) = (CD, AB)$$

$$2) (AB, CD) \neq 0 \text{ olarsa, } (AB, CD) = \frac{1}{(AB, CD)},$$

$$3) (AB, CD) \neq 0 \text{ olarsa, } (BA, CD) = \frac{1}{(AB, CD)}$$

$$4) (AB, CD) = (BA, DC)$$

$$5) (AB, CC) = 1, \quad (AB, CB) = 0$$

$$6) (AB, CD) + (AC, BD) = 1$$

1), 2) və 3) xassələrini isbat etmək üçün proyektiv düz xətt üzərində ixtiyari reper götürüb, yuxarıdakı nöqtələrin bu reperdə $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ və $D(d_1, d_2)$ koordinatları vasitəsi ilə onların

$$(AB, CD) \quad (CD, AB), \quad (AB, DC), \quad (BA, CD) \quad (BA, DC)$$

mürəkkəb nisbətlərini hesablasaq 1), 2), 3) xassələrinin doğruluğunu alarıq.

4) xassəli mürəkkəb nisbətin tərifindən birbaşa alınır.

5) xassəsini isbat edək. $R_0 = (A, B, C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatlarını (d_1, d_2) işarə edək. A, B və C nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq $(1, 0)$, $(0, 1)$ və $(1, 1)$ olduğundan alarıq.

$$(AB, BD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = 1 - \frac{d_1}{d_2} = 1 - (AB, CD)$$

Deməli, $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

Xassə isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, əgər A, B, C, D nöqtələrini müəyyən ntzamlı götürdükdə, onların mürəkkəb nisbəti məlum olarsa, 1) -5) xassələrinin köməyi ilə onların ixtiyari ntzamlı

götürülmüş mürəkkəb nisbətini hesablamaq olur. Fərz edək ki,
 $(AB, CD) = \eta \neq 0$.

Onda

$$\begin{aligned} (AB, DC) &= \frac{1}{\eta}, \quad (BA, CD) = \frac{1}{\eta}, \quad (BA, DC) = \eta, \\ (AD, BC) &= 1 - (AB, DC) = 1 - \frac{1}{\eta} = \frac{\eta - 1}{\eta} \end{aligned} \quad \text{və s.}$$

İndi isə genişlənmiş düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbətinin həndəsi mənasını göstərən aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3. Əgər A, B, C, D genişlənmiş düz xəttin məxsusi nöqtələri, P_∞ isə qeyri-məxsusi nöqtəsidirsə, onda

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} \quad (6)$$

$$(AB, CP_\infty) = -(AB, C) \quad (7)$$

olar. Burada (AB, C) və (AB, D) düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbətidirlər.

İsbati. Genişlənmiş düz xətdə $\bar{R} = (P_\infty, A, B)$ reperini götürək. Bu reperdə P_∞, A, B nöqtələri ilə $P_\infty(1, 0), A(0, 1), B(1, 1)$ olar. C və D nöqtələrinin koordinatlarını isə (c_1, c_2) və (d_1, d_2) ilə işarə edək.

Aydındır ki, $c_2 \neq 0, d_2 \neq 0$.

Genişlənmiş düz xəttini məxsusi M_1 və M_2 nöqtələrinin təyin elədiyi M_1M_2 parçasını $\lambda \neq -1$ nisbətində bölən

M nöqtəsi üçün $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$ münasibəti ödənilir və belə işarə edirlər. $\lambda = (M_1M_2, M)$. Əgər M_1, M_2, M nöqtələrinin

$A, \overrightarrow{AB}$ afin koordinat sistemində koordinatları uyğun olaraq x_1, x və x olarsa, onda

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1) \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x) \overrightarrow{AB}, \quad \text{buna görə}$$

$$(M_1, M_2, M) = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} \quad (8)$$

§14-də isbat etdiyimiz teoremə əsasən $\overline{R} = (P_\infty, A, B)$ reperində koordinatları ilə verilmiş

$$A(0,1), \quad B(1,1), \quad C(c_1, c_2), \quad D(d_1, d_2)$$

nöqtələri $A, \overrightarrow{AB}$ afin reperində $A(0), B(1), C(c), D(d)$

koordinatlarına malikdirlər. Burada $c = \frac{c_1}{c_2}, \quad d = \frac{d_1}{d_2}$

Deməli,

$$(AB, C) = \frac{1}{1-c}, \quad (AB, D) = \frac{d}{1-d} \quad (9)$$

İndi isə (1) düsturundan istifadə edərək (AB, CD) və (AB, CP_∞) mürəkkəb nisbətlərini hesablayaq.

$$\begin{aligned}
 (AB, CD) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1(d_2 - d_1)}{d_1(c_2 - c_1)} = \frac{\frac{c_1}{d_2 - d_1}}{\frac{c_2 - c_1}{d_1}} = \\
 &= \frac{\frac{c}{1-d}}{\frac{d}{1-d}} = \frac{(AB, C)}{(AB, D)},
 \end{aligned}$$

(6) düsturu isbat olundu.

$$(AB, CP_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1}{c_1 - c_2} = \frac{-c}{1-c} = -(AB, C)$$

(7) düsturu isbat olundu. Teorem isbat olundu

§20. Düz xətlər dəstəsinin dörd düz xəttinin mürəkkəb nisbəti

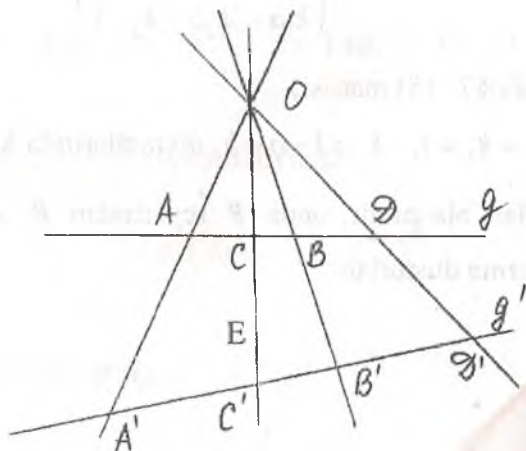
Tutaq ki, bizə proyektiv müstəvidə iki g və g' proyektiv düz xətləri və bu müstəvinin həmin düz xətlərə aid olmayan O nöqtəsi verilmişdir. g düz xətti üzərində ixtiyari M nöqtəsi götürək. OM düz xətti ilə g' düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini M' ilə işarə edək. §13-də dediyimiz kimi M' nöqtəsinə O mərkəzməndən M nöqtəsinin g' düz xətti üzərində proyeksiyası deyilir.

Teorem. Əgər A, B, C, D nöqtələri g düz xəttinin nöqtələri A', B', C', D' isə həmin nöqtələrin g' düz xətti üzərində O mərkəzindən proyeksiyalarıdırsa, onda,
 $(AB, CD) = (A'B', C'D')$

İsbatı: Proyektiv müstəvi üzərində iki $R = (A, B, O, E)$ və $R' = (A', B', O, E)$ reperlərini götürək. Burada E nöqtəsi OC düz xəttinin O və C nöqtələrindən fərqli hər hansı nöqtəsidir (Şəkil 44).

R reperində A', B' kordinatlarını təyin edək.

Bu reperdə OA düz xəttinin tənliyi $x_2 = 0$ olduğundan və A' nöqtəsi OA düz xətti üzərində olduğundan onun kordinatlarını belə götürmək olar $A(1, 0, a)_R$. Anoloji olaraq B' nöqtəsinin kordinatlarını $B(1, 0, b)_R$ götürmək olar.



Şəkil 44.

O və E nöqtələrinin R reperinə görə koordinatları isə $O(0, 0, 1)_R$ və $E(1, 1, 1)_R$ olar. R reperindən R' reperinə keçid matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

olar.

Bu matrisin sütunlarını əlaqəli şəkildə gətirmək üçün birinci sütununu elə k_1 , ikinci sütununu elə k_2 , üçüncü sütununu elə k_3 ədədlərinə vuraq.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & 0 & 1 \\ k_1 a & k_2 b & k_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(bax. §7, (5) matrisi)

$k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 1 - a - b$ qiymətlərində keçid matrisinin sütunları əlaqəlidir, onda R reperindən R' reperinə keçiddə çevirmə düsturları

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= x_1^* \\ \rho x_2 &= x_2^* \\ \rho x_3 &= ax_1^* + bx_2^* + (1-a-b)x_3^*\end{aligned}\quad (3)$$

şəklində olar. Əgər D nöqtəsi R və R' reperlərində $D(y_1, y_2, 0)_R$ və $D(y_1^*, y_2^*, y_3^*)_R$ koordinatları ilə verilərsə, (3) çevirmə düsturlarına əsasən

$$\begin{aligned}\rho y_1 &= y_1^* \\ \rho y_2 &= y_2^*\end{aligned}\quad (4)$$

Buradan isə $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1^*}{y_2^*}$ alarıq.

Koordinat düz xətləri üzərində nöqtənin proyeksiyalarının koordinatları haqqında teoremə görə §13-də D' nöqtəsinin $R'_3 = (A', B', C')$ reperində koordinatları (y_1^*, y_2^*) olar. D nöqtəsinin isə $R_3 = (A, B, C)$ reperində koordinatları

(y_1, y_2) olar. $(A'B', C'D') = \frac{y_1^*}{y_2^*}$ və $(AB, CD) = \frac{y_1}{y_2}$ olduğu

üçün yuxarıdakı $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1^*}{y_2^*}$ bərabərliyindən

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

alarıq.

Teorem isbat olundu.

İsbat etdiyimiz teoremdən istifadə edərək aşağıdakı məsələni həll edək.

Məsələ. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində koordinatları ilə verilmiş $P(p_1, p_2, p_3)$ və $Q(q_1, q_2, q_3)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda p_1 + \mu q_1 \\x_2 &= \lambda p_2 + \mu q_2 \\x_3 &= \lambda p_3 + \mu q_3\end{aligned}\quad (4)$$

parametrik tənlikləri verilmişdir. Bu düz xətt üzərində parametrlərin (λ_1, μ_1) qiymətlər cütünə uyğun $M_1(\lambda_1, \mu_1)$ və parametrlərin (λ_2, μ_2) qiymətlər cütünə uyğun $M_2(\lambda_2, \mu_2)$ nöqtələri üçün

$$(PQ, M_1M_2) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2} \quad (5)$$

olduğunu isbat edin.

Həlli. Fərz edək ki, PQ düz xətti A_3 nöqtəsindən keçmir. P', Q', M_1', M_2' ilə P, Q, M_1, M_2 nöqtələrinin A_3 mərkəzindən A_1A_2 düz xətti üzərində proyeksiyalarını işarə edək. Nöqtənin koordinat düz xətt üzərindəki proyeksiyasının koordinatları haqqında teoremə görə (§5) ¹³ A_1A_2 koordinat düz xətti üzərindəki $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ reperində P', Q', M_1', M_2' nöqtələri

$$P'(p_1, p_2), Q'(q_1, q_2), M'_1(\lambda_1 p_1 + \mu_1 q_1, \lambda_1 p_2 + \mu_1 q_2) \\ M'_2(\lambda_2 p_1 + \mu_2 q_1, \lambda_2 p_2 + \mu_2 q_2)$$

koordinatlarına malikdirlər. (1) düsturuna görə

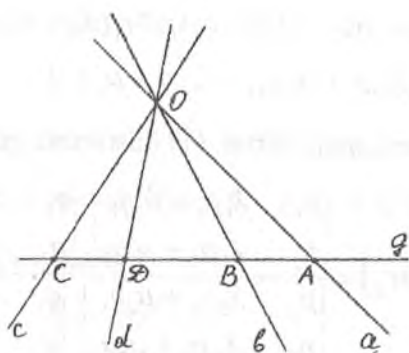
$$(P'Q', M'_1, M'_2) = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & \lambda_1 p_1 + \mu_1 q_1 \\ p_2 & \lambda_1 p_2 + \mu_1 q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & \lambda_2 p_1 + \mu_2 q_1 \\ p_2 & \lambda_2 p_2 + \mu_2 q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & \lambda_2 p_1 + \mu_2 q_1 \\ p_2 & \lambda_2 p_2 + \mu_2 q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & \lambda_1 p_1 + \mu_1 q_1 \\ q_2 & \lambda_1 p_2 + \mu_1 q_2 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu_2 \lambda_1}$$

Bundan əvvəl isbat etdiyimiz teoremə əsasən $(PQ, M_1 M_2) = (P'Q', M'_1 M'_2)$ olduğundan, (5) bərabərliyinin doğruluğu isbat olundu.

(5) bərabərliyi PQ düz xətti A_3 təpəsindən keçəndə də doğrudur. Bu halda PQ A_1 və A_2 təpələrinin heç olmazsa birindən keçmir. Fərz edək ki, PQ düz. A_2 təpəsindən keçmir. Onda $P_1 Q, M_1, M_2$ nöqtələrini A_2 mərkəzindən $A_1 A_3$ koordinat düz xətti üzərinə proyektəndirməklə, (5) düsturunu alırıq. Məsələ həll olundu.

Yuxarıda isbat etdiyimiz teoremin köməyi ilə düz xətlər bəqlisinin dörd düz xəttinin mürəkkəb nisbəti anlayışını verək.

Fərz edək ki, a, b, c, d proyektiv müstəvidə mərkəzi O nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin hər hansı dörd düz xəttidir (Şəkil 45).



Şəkil 45.

O mərkəzindən keçməyən hər hansı g düz xəttini götürək. Bu düz xəttin a, b, c, d düz xətləri ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A, B, C, D ilə işarə edək. Yuxarıda isbat etdiyimiz teoremə görə (AB, CD) mürəkkəb nisbəti g düz xəttinin seçilməsindən asılı deyil. (AB, CD) ədədinə a, b, c, d düz xətlərinin mürəkkəb nisbəti deyilir və (ab, cd) ilə işarə olunur. Təkrar edək ki, (ab, cd) g düz xəttinin seçilməsindən asılı deyil.

Bir düz xətt üzərində olan dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətinin xassələrindən (§19) istifadə edərək düz xətlər dəstəsinin dörd düz xəttinin aşağıdakı xassələrini asanlıqla isbat etmək olar.

$$1) (ab, cd) = (cd, ab)$$

2) Əgər $(ab, cd) \neq 0$,

$$\text{onda } (ba, cd) = \frac{1}{(ab, cd)}, \quad (ab, dc) = \frac{1}{(ab, cd)}$$

3) $(ab, cd) = (ba, dc)$

4) $(ab, cc) = 1, (ab, cb) = 0$.

5) $(ab, cd) + (ac, bd) = 1$.

§21. Müstəvinin proyektiv çevirmələri

Tərif. Proyektiv müstəvinin hər bir düz xəttini yenə də düz xəttə keçirən və bir düz xətt üzərində yerləşən dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətini dəyişməyən çevirməsinə proyektiv çevrilmə deyilir.

Başqa sözlə, proyektiv çevirmə bir düz xətt üzərində yerləşən dörd M_1, M_2, M_3, M_4 nöqtələrini elə M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 nöqtələrinə çevirir ki, onlar üçün

$$(M_1 M_2, M_3 M_4) = (M'_1 M'_2, M'_3 M'_4)$$

Müstəvinin proyektiv çevirməsinə ən sadə misal olaraq eynilik çevirməni göstərə bilərik. Bu çevirmədə hər bir nöqtə öz-özünə keçdiyi üçün, düz xətt düz xəttə keçir və düz xətt üzərindəki dörd nöqtənin mürəkkəb nisbəti dəyişmir.

Lemma 1. Tutaq ki, $R = (M_1, M_2, M_3, E)$ və $R' = (M'_1, M'_2, M'_3, E')$ proyektiv müstəvinin iki proyektiv

reperidir. R reperində koordinatları ilə verilmiş hər bir nöqtəyə R^* reperində eyni koordinatlara malik olan nöqtəni qarşı qoyan f inikası müstəvinin proyektiv çevirməsidir.

İsbatı. Fərz edək ki, f inikası $M(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsini $M^*(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsinə keçirir. İsbat edək ki, f inikası proyektiv çevirmədir.

Əgər $X(x_1, x_2, x_3)_R$, $Y(y_1, y_2, y_3)_R$, $Z(z_1, z_2, z_3)_R$ nöqtələri bir düz xəttə aid olarlarsa, onda üç nöqtənin bir düz xətt üzərində yerləşməsi şərtinə əsasən

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

olar. Bu isə o deməkdir ki, onların obrazları olan

$$X'(x_1, x_2, x_3)_{R'}, Y'(y_1, y_2, y_3)_{R'}, Z'(z_1, z_2, z_3)_{R'}$$

nöqtələri də bir düz xətt üzərindədirlər. İndi göstərək ki, f çevirməsində dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətini dəyişmir. Yuxarıda göstərdik ki, f inikası d düz xəttini yenə bir d' düz xəttinə inikas eləyir.

Əgər

$$A(a_1, a_2, a_3)_R, B(b_1, b_2, b_3)_R, C(c_1, c_2, c_3)_R, \\ D(d_1, d_2, d_3)_R$$

nöqtələri d düz xətti üzərində olarlarsa, onda onların f inikasında obrazları

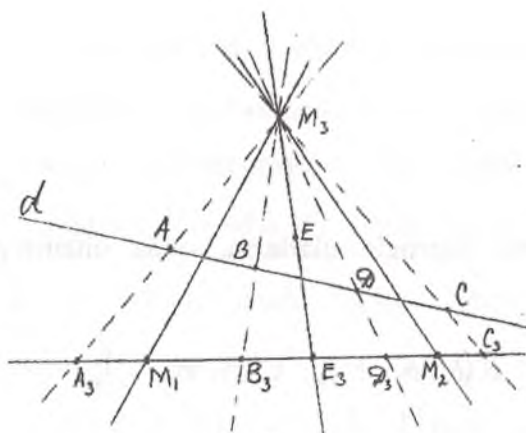
$$A'(a_1, a_2, a_3)_{R'}, B'(b_1, b_2, b_3)_{R'}, C'(c_1, c_2, c_3)_{R'}, \\ D'(d_1, d_2, d_3)_{R'}$$

nöqtələri də d' düz xəttinin üzərində olurlar. Buradan, daha sonra alınır ki, M_1, M_2, M_3 nöqtələrindən hər hansı biri, məsələn M_3 d düz xətti üzərində olmazsa, onda onun obrazı M'_3 nöqtəsi də d' düz xətti üzərində olmaz. A, B, C, D nöqtələrinin M_3 mərkəzindən M_1M_2 koordinat düz xətti üzərindəki proyeksiyalarını A_3, B_3, C_3, D_3 ilə işarə edək.

§5-də nöqtənin koordinat düz xətti üzərində proyeksiyalarının koordinatları haqqında, teoremə əsasən $R_3 = (M_1, M_2, E_3)$ reperində A_3, B_3, C_3, D_3 nöqtələrinin koordinatları

$$A_3(a_1, a_2)_{R_3}, B_3(b_1, b_2)_{R_3}, C_3(c_1, c_2)_{R_3}, D_3(d_1, d_2)_{R_3}$$

kimi olacaqlar



Şəkil 46.

§20-də isbat etdiyimiz teoremə əsasən $(AB, CD) = (A_3B_3, C_3D_3)$ olar.

§19- da 2-ci teoremə əsasən

$$(AB, CD) = (A_3B_3, C_3D_3) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad (1)$$

olar.

M_3 mərkəzindən A', B', C', D' nöqtələrinin M_1M_2 koordinat düz xətti üzərində proyeksiyalarını A_3', B_3', C_3', D_3' işarə etsək, $R_3 = (M_1, M_2, E_3)$ reperində (E_3 ilə E' nöqtəsinin M_1M_2 koordinat düz xətti üzərindəki proyeksiyası işarə olunmuşdur). A_3', B_3', C_3', D_3' nöqtələri koordinatları

$$A_1'(a_1, a_2)_{R_1}, B_1'(b_1, b_2)_{R_1}, C_1'(c_1, c_2)_{R_1}, D_1'(d_1, d_2)_{R_1}$$

olar. Anoloji qayda da

$$(A'B', C'D') = (A_3B_3, C_3D_3) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

alırıq.

(1) və (2) ifadələrini tutuşdursaq alırıq:

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

Lemma isbat olundu.

Lemma 2. Əgər f_1 və f_2 proyektiv çevirmələri və g düzxətti üzərindəki üç müxtəlif A, B, C nöqtələr üçün

$$f_1(A) = f_2(A), \quad f_1(B) = f_2(B), \quad f_1(C) = f_2(C)$$

şərti ödənersə, onda ixtiyarı $M \in g$ nöqtəsi üçün

$$f_1(M) = f_2(M) \text{ olar.}$$

İsbatı.

$$f_1(A) = f_2(A) = A', \quad f_1(B) = f_2(B) = B', \quad f_1(C) = f_2(C) = C',$$

$$f_1(M) = M' \quad \text{və} \quad f_2(M) = M'' \quad \text{ilə işarə edək. Proyektiv}$$

çevirmənin tərifinə görə

$$(A'B', C'M') = (AB, CM) \quad \text{və} \quad (A'B', C''M'') = (AB, CD)$$

olduğundan $(A'B', C'M') = (A'B', C''M'')$ alırıq. §19-də, 1-ci

teoremə görə M' və M'' nöqtələri üst – üstə düşməlidir.
 $f_1(M) = f_2(M)$. Lemma isbat olundu.

Proyektiv çevrilmələr haqqında əsas teoremi isbat edək.

Teorem. Fərz edək ki, $R = (M_1, M_2, M_3, E)$ və $R' = (M'_1, M'_2, M'_3, E')$ proyektiv müstəvisinin ixtiyarı iki reperidir. Proyektiv müstəvisinin R reperini R' reperinə keçirən ancaq və ancaq bir proyektiv çevirmə vardır. Bu çevirmədə R reperində koordinatları ilə verilmiş hər bir nöqtə R' reperində eyni koordinatlara malik olan (mütənəsiblik dəqiqliklə) nöqtəyə keçir.

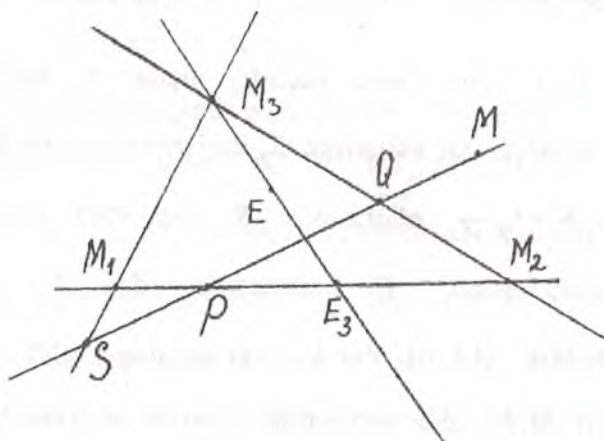
İsbatı. 1-ci lemmaya görə R reperini R' reperinə keçirən f proyektiv çevirməsi vardır. Bu çevirmə R reperinin $M_1(1, 0, 0)_R$, $M_2(0, 1, 0)_R$, $M_3(0, 0, 1)_R$ təpə nöqtələrini və $E(1, 1, 1)_R$ vahid nöqtəsini R' reperinin $M'_1(1, 0, 0)_{R'}$, $M'_2(0, 1, 0)_{R'}$, $M'_3(0, 0, 1)_{R'}$ təpə nöqtələrinə və $E(1, 1, 1)_{R'}$ vahid nöqtəsinə keçirir. İsbat edək ki, f teoremin şərtlərini ödəyən yeganə proyektiv çevirmədir. Əksini fərz edək: fərz edək ki, R reperini R' reperinə keçirən başqa bir f' proyektiv çevirməsi də var. M_1M_2 koordinat düz xətti ilə M_2E düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini E_3 ilə işarə edək.

f' inikası da M_1M_2 düz xəttini $M'_1M'_2$ düz xəttinə, M_3E düz xəttini M'_3E' düz xəttinə keçirdiyi üçün, E_3 nöqtəsini də $M'_1M'_2$ və M'_3E' düz xətlərinin E'_3 kəsişmə nöqtəsinə keçirər.

$f'(E_3) = E'_3 \cdot E_3 \rightarrow$ nöqtəsinin R reperində koordinatları $(1, 1, 0)$ olduğundan, E'_3 nöqtəsinin də R' reperində koordinatları $(1, 1, 0)$ olar və 2-ci lemmaya görə f və f' inikasıları M_1M_2 düz xəttinin üç müxtəlif nöqtəsində üst-üstə düşdüklərindən M_1M_2 düz xəttinin bütün nöqtələrində üst-üstə düşəcəklər.

Analoji qayda ilə isbat etmək olar ki, f və f' inikasıları M_1M_3 və M_2M_3 koordinat düz xətlərinin də bütün nöqtələrində üst-üstə düşəcəklər.

İndi fərz edək ki, M nöqtəsi proyektiv müstəvinin R reperinin koordinat düz xətlərinin üzərində yerləşməyən hər hansı nöqtəsidir. M nöqtəsindən M_1M_2 , M_1M_3 , M_2M_3 düz xətlərini uyğun olaraq P , S və Q nöqtələrində kəsən hər hansı düz xətt keçirək (şəkil 47).



Şəkil 47.

Yuxarıda isbat etdiyimiz kimi

$$f'(P) = f(P), f'(S) = f(S) \text{ və } f'(Q) = f(Q) \text{ olar.}$$

Buradan da 2-ci lemmaya görə $f'(M) = f(M)$ olduğunu alırıq.

Deməli, f' və f inikasları proyektiv müstəvinin bütün nöqtələrində üst-üstə düşürlər, başqa sözlə f inikası proyektiv müstəvinin R reperini onun R' reperinə keçirən yeganə proyektiv çevirmədir.

Bu proyektiv çevirmə 1-ci lemmaya görə R reperində koordinatları ilə verilmiş hər bir nöqtəni R' reperində eyni koordinatlarla malik olan nöqtəyə keçirir. Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər proyektiv müstəvinin proyektiv çevrilməsində hər hansı bir reperin təpə nöqtələri və vahid nöqtəsi invariant nöqtələr isə, onda həmin proyektiv çevirmə müstəvinin eynilik çevirməsidir.

§22. Müstəvinin proyektiv çevirmələrinin xassələri

Xassə 1. Proyektiv müstəvinin çevirməsində bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtə, bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəyə inikas olunur.

İsbatı. Xassəni əksini fərz etmək üsulu ilə isbat edək.

Fərz edək ki, proyektiv müstəvinin f proyektiv çevirməsində bir düz xətt üzərində olmayan üç A , B və C nöqtələri bir g düz xətti üzərində yerləşən A' , B' və C' nöqtələrinə keçir.

Fərziyyəmizə görə, f inikasında müstəvinin bütün nöqtələrinin obrazlarının g düz xətti üzərində olduğunu isbat edək. Həqiqətən də, M nöqtəsi proyektiv müstəvinin C nöqtəsindən fərqli ixtiyari nöqtəsi olarsa, onun $M' = f(M)$ obrazının g düz xətti üzərində olduğunu göstərək. MC və AB düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini N ilə işarə edək. A , B və N nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşdiklərindən, N nöqtəsinin N' obrazı da A və B nöqtələrinin obrazları olan

A' və B' nöqtələrinin yerləşdiyi g' düz xətti üzərində olar. C, M, N nöqtələri də bir dz xətt üzərində yerləşdiklərindən, M nöqtəsinin obrazı M' -də C və N nöqtələrinin obrazlarının yerləşdiyi g' düz xətti üzərində olar. Beləliklə, f inikası bütün proyektiv müstəvinini g' düz xəttinə inikas edir. Deməli, f inikası qarşılıqlı birqiymətli deyil. Bu da f -in proyektiv çevirmə olması şərtinə ziddir.

Xassə isbat olundu.

Xassə2. Müstəvinin proyektiv çevirməsində proyektiv reper proyektiv repera keçir.

Xassə 3. Müstəvinin proyektiv çevirməsində düz xətti yenə də düz xəttə keçir.

İsbatı. Proyektiv müstəvidə hər hansı bir R proyektiv reperinə və onun proyektiv çevirmədə obrazı olan R' reperinə baxaq. R reperində $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ tənliyi ilə verilən d düz xətti R' reperində eyni tənliklə təyin olunan fiqura keçəcək.

§ 18-də 1- ci teoremə görə isə həmin fiqur müəyyən d' düz xəttidir.

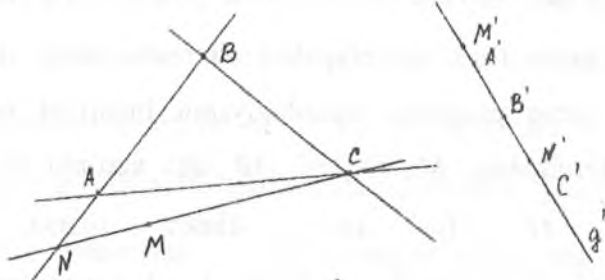
Tərif. Proyektiv müstəvinin bir düz xətti üzərində yerləşən azı üç müxtəlif invariant nöqtəsi olan və eynilik çevirməsindən fərqli proyektiv çevirməyə homolojiya deyilir.

Bir düz xəttə aid olan üç müxtəlif A , B və C nöqtələri homologiyanın invariant nöqtələri olarlarsa, onda AB düz xəttinin bütün nöqtələri homologiyanın invariant nöqtələri olacaq. Həqiqətən, M nöqtəsi AB düz xəttinin hər hansı nöqtəsi, M' isə onun obrazı olarsa, onda $(AB, CM) = (AB, CM')$. §19-dəki 1- ci teoremdən çıxan nəticəyə görə M və M' nöqtələri üst-üstə düşürlər. Homologiyada nöqtələrinin hamısı invariant olan düz xəttə homologiyanın oxu deyilir.

Homologiyanın aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 4. Homologiyada A nöqtəsinin obrazı A nöqtəsindən fərqli A' nöqtəsidirsə, onda AA' düz xətti homologiyanın invariantıdır.

İsbatı. AA' düz xətti homologiyanın g_0 oxundan fərqli düz xətt olacaq. Çünki g_0 oxunun hər bir nöqtəsinin homolojiya obrazı onu özü olur. AA' düz xəttinin g_0 oxu ilə kəsişmə nöqtəsini C ilə işarə edək. AC düz xəttinin iki A və C nöqtələri elə bir düz xəttin iki $A'C$ nöqtələrinə keçdiyindən AC düz xətti homologiyada invariant olar. AA' düz xətti isə AC ilə üst –üstə düşən düz xəttidir. Xassə isbat olundu.



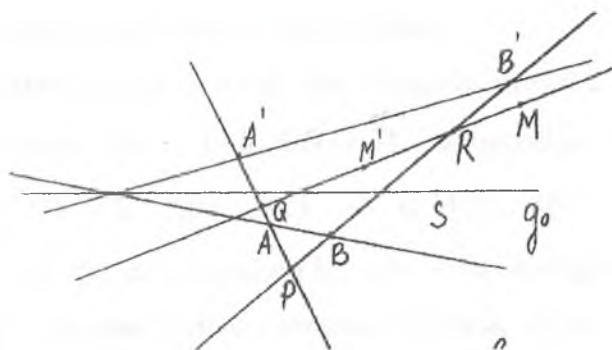
Şəkil 48.

Xassə 5. Homologiyada öz obrazı ilə üst-üstə düşməyən nöqtədən və onun obrazından keçən bütün düz xətlər mərkəzi homologiyanın invariant nöqtəsində olan bir düz xətlər dəstəsinə aiddirlər.

İsbatı. Tutaq ki, g_0 düz xətti f homologiyasında A nöqtəsi A' nöqtəsinə keçir. A' nöqtəsi A nöqtəsindən fərqlidir. AA' düz xətti üzərindən olmayan B nöqtəsi də B nöqtəsindən fərqli B' nöqtəsinə keçirsə, onda AA' və BB' düz xətlərinin P kəsişmə nöqtəsi f homologiyasının invariant nöqtəsi olar.

Proyektiv müstəvinin ixtiyari M nöqtəsini və f homologiyasında onun M -dən fərqli M' obrazı-nı nəzərdən keçirək. İsbat edək ki, MM' düz xətti P invariant nöqtəsindən keçər. Əksini fərz edək, (şəkil 49) MM' düz xətti P nöqtəsindən keçmir. Onda MM' düz xətti AA' və BB' düz xətlərini iki Q və R nöqtələrində kəsər. P , Q və R nöqtələri

bir düz xətt üzərində deyillər, f homologiyanın invariant nöqtəsidir. g_0 düz xətti üzərində elə S nöqtəsini götürək ki, P, Q, R və S nöqtələri ümumi vəziyyətdə olsunlar. Onda §21-da 2-ci teoremdən çıxan nəticəyə görə f çevirməsi proyektiv müstəvinin eynilik çevirməsi olar, bu isə f -in homologiya olması şərtinə ziddir. Xassə isbat olundu.



Şəkil 49.

Tərif. Homologiyada öz obrazı ilə üst-üstə düşməyən nöqtədən və onun obrazından keçən düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinə *homologiyanın mərkəzi* deyilir.

Əgər homologiyanın mərkəzi oxu üzərində olarsa belə homologiyaya parabolik homologiya deyilir.

Əgər homologiyanın mərkəzi onun oxu üzərində
olmazsa, belə homologiyaya hiperbolik homolojiya deyilir.
§21-də isbat edilmiş əsas teoremdən çıxan nəticədən alınır ki,
hiperbolik homologiyanın, onun mərkəzindən başqa, homologi-
yanın oxu üzərində yerləşməyən invariant nöqtəsi yoxdur.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, parabolik homologiyanın
onun oxu üzərində yerləşməyən invariant nöqtəsi yoxdur.

III FƏSİL

PROYEKTİV HƏNDƏSƏNİN ƏSAS FAKTLARI

§23. Tam dörd təpəli

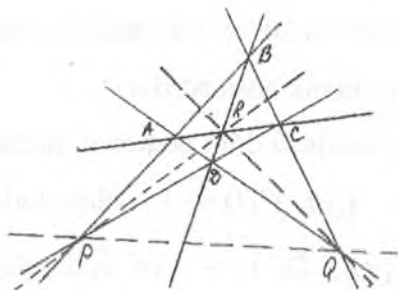
Tərif. Proyektiv düz xətt üzərində dörd A, B, C və D nöqtələri verilsə və $(AB, CD) = -1$ şərti ödənirsə, onda deyirlər ki, A və B nöqtələr cütü, C və D nöqtələr cütünü harmonik ayırır. (və ya A və B nöqtələr cütü, C və D nöqtələr cütü ilə harmonik qoşmadırlar).

Proyektiv düz xətt üzərində dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətinin xassələrinə görə $(AB, CD) = -1$ olmasından alınır ki, $(BA, CD) = -1$, $(AB, DC) = -1$ və $(CD, AB) = -1$ şərtləri də ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, əgər A və B nöqtələr cütü, C və D nöqtələr cütünü harmonik ayırırsa, onda, B və A nöqtələr cütü də C və D nöqtələr cütünü, A və B nöqtələr cütü də, D və C nöqtələr cütünü, ən nəhayət C və D nöqtələr cütüdə, A və B nöqtələr cütünü harmonik ayırır.

Tərif. Proyektiv müstəvidə istənilən üçü bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan dörd nöqtədən və bu nöqtələri cüt-cüt birləşdirən altı proyektiv düz xətdən ibarət olan figura tam dördtəpəli deyilir.

Həmin nöqtələrə tam dördtəpəlinin təpələri, onları cüt –cüt birləşdirən altı proyektiv düz xəttə isə tam dördtəpəlinin tərəfləri deyilir.

50-ci şəkildə təpə nöqtələri A, B, C və D olan $ABCD$ tam dördtəpəlisi təsvir edilmişdir.



Şəkil 50.

AB, BC, CD, AD, BD və AC düz xətləri tam dördtəpəlinin tərəfləridir. Tam dördtəpəlinin ortaq təpəyə malik olmayan tərəflərinə onun qarşı tərəfləri deyilir. $ABCD$ tam dördtəpəlisində AB və CD , BC və DA , AC və BD qarşı tərəflərdir. Qarşı tərəflərin kəsişdiyi nöqtələrə tam dördtəpəlinin diaqonal nöqtələri deyilir. Diaqonal nöqtələrini cüt-cüt birləşdirən proyektiv düz xətlərə tam dördtəpəlinin diaqonalları deyilir. Şəkildə P, Q, R nöqtələri $ABCD$ tam dördtəpəlisinin diaqonal nöqtələri, PQ, QR və RP proyektiv düz xətləri onun diaqonallarıdır.

Lemma. Tam dördtəpəlinin diaqonal nöqtələri bir proyektiv düz xətt üzərində deyillər.

İsbatı. $ABCD$ tam dördtəpəlisində P, Q və R nöqtələrinin bir proyektiv düz xətt üzərində olmadıqlarını isbat edək. Bunun üçün (A, B, C, D) reperini götürək. Bu reperdə AB koordinat düz xəttinin tənliyi $A(1, 0, 0)$ və $B(0, 1, 0)$ nöqtələrindən keçdiyindən

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } x_3 = 0 \text{ olar.}$$

CD koordinat düz xəttinin tənliyi $C(0, 0, 1)$ və $D(1, 1, 1)$ nöqtələrindən keçdiyindən

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } x_1 - x_2 = 0$$

Buradan da alarıq ki, P nöqtəsinin A, B, C, D reperində koordinatları $(1, 1, 0)$ olar.

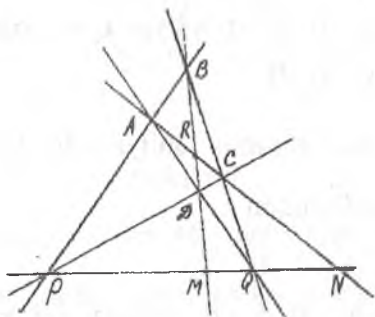
Eyni qayda ilə $R(1, 0, 1)$ və $Q(0, 1, 1)$ olar. Buradan isə alarıq ki,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 0 = -2 \neq 0$$

Deməli, R, P, Q nöqtələri bir proyektiv düz xətt üzərində deyillər.

İndi də proyektiv müstəvidə tam dördtəpəli haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. Tam dördtəpəlinin hər bir diaqnalındakı diaqnal nöqtələri, bu diaqnalın üçüncü diaqnalı əmələ gətirən tərəflərlə kəsişmə nöqtələrini harmonik olaraq ayırır.



Şəkil 51.

İsbatı. Tutaq ki, $ABCD$ tam dördtəpəli, P, Q, R isə onun diaqonal nöqtələridir. İsbat edək ki, PQ diaqonalı üzərindəki P və Q diaqonal nöqtələri, bu diaqonal ilə R diaqonal nöqtəsini əmələ gətirən BD və AC tərəfləri ilə kəsişmə nöqtələri olan M və N nöqtələrini harmonik olaraq ayırır. Bunun üçün P, Q, M və N nöqtələrini AC proyektiv

düz xəttinə əvvəlcə B və sonra da D nöqtəsindən proyektəndirək. Proyeksiyalar haqqında teoremə görə alırıq.

$$(PQ, MN) = (AC, RN) \text{ və}$$

$$(PQ, MN) = (CA, RN)$$

Mürəkkəb nisbətin xassələrinə görə

$$(AC, RN) = \frac{1}{(CA, RN)}$$

Buradan da alırıq ki, $(PQ, MN) = \frac{1}{(PQ, MN)}$

Bu isə o deməkdir ki, $(PQ, MN)^2 = 1$ M və N nöqtələri üst-üstə düşmədiyindən $(PQ, MN) \neq 1$ olar.

Bu isə deməkdir ki, $(PQ, MN) = -1$

Teorem isbat olundu.

$(PQ, MN) = (AC, RN)$ və $(PQ, MN) = -1$ münasibətlərindən alırıq ki, $(AC, RN) = -1$ Beləliklə, biz aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

Nəticə 1. Tam dördtəpəlinin hər hansı tərəfi üzərində iki təpə nöqtəsi, bu tərəf üzərindəki diaqnal nöqtəsini və bu tərəf ilə digər iki diaqnal nöqtəsindən keçən diaqnalla kəsişmə nöqtəsini harmonik olaraq ayırır.

Proyektiv düz xətlər bağılsına aid dörd a, b, c, d düz xətləri üçün $(ab, cd) = -1$ şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, a

və b proyektiv düz xətləri c və d proyektiv düz xətlərini harmonik olaraq ayırır. Yuxarıdakı şəkildən göründüyü kimi RM və RN düz xətləri RP və RQ düz xətlərini harmonik olaraq ayırır. Buradan isə aşağıdakı ikinci nəticəni alırıq.

Nəticə 2. Tam dördtəpəlinin iki qarşı tərəfi, bu tərəflərin kəsişmə nöqtəsindən keçən iki diaqonalı harmonik olaraq ayırır.

§24. Proyektiv müstəvidə qurma məsələləri

Proyektiv müstəvidə qurma məsələləri nəzəriyyəsi bir çox cəhətdən evklid müstəvisində qurma məsələləri nəzəriyyəsinin analoqudur. Lakin onlar arasında ciddi fərqlər var. Beləki proyektiv müstəvidə məsafə anlayışı təyin olunmadığına görə, burada qurma məsələlərinin həllində pərgardan istifadə olunmur. Ancaq xətkəşdən istifadə olunur. Fərz olunur ki, xətkəş vasitəsi ilə verilmiş və ya qurulmuş iki nöqtədən keçən proyektiv düz xətti qurmaq olar.

Proyektiv müstəvidə qurmalarda əsas fiqurlar olaraq nöqtə və düz xətt götürülür. Evklid müstəvisindən fərqli olaraq burada məsafə təyin olunmadığından pərgardan istifadə olunmur.

Qurma məsələsinin həlli prosesində əsas fiqurların müəyyən bir Ω çoxluğu qeyd olunur.

Əgər hər hansı bir düz xətt Ω çoxluğuna daxildirsə, buradan çıxmır ki, onun hər bir nöqtəsi də bu çoxluğa daxildir. Yəni hər bir qurulmuş və ya verilmiş düz xətt Ω çoxluğuna verilmiş və ya qurulmuş nöqtə kimi ayrıca bir element kimi daxil olur.

Əsas fiqurlar «qurmanın aksiomları» adlanan aşağıdakı iki şərti ödəməlidirlər.

I. Proyektiv müstəvidə ümumi vəziyyətdə olan qurulmuş nöqtələrin heç olmazsa bir «dördlüyü» var.

II. Qurulmuş və ya verilmiş nöqtələrin və düz xətlərin Ω çoxluğu hər bir qurma məsələsi üçün sonlu çoxluğudur. Bu çoxluğun bütün elementlərinə qısaca qurulmuş fiqur deyilir. Qurma məsələsi həllində yeni əsas fiqurların Ω çoxluğuna əlavə edilməsi aşağıdakı iki şərtin köməyi ilə edilir. Bu şərtlər qurmanın postulatları adlanır.

II 1. İki qurulmuş düz xəttin kəsişmə nöqtəsi də qurulmuş nöqtə hesab olunur.

II 2. İki qurulmuş nöqtədən keçən düz xətt də qurulmuş hesab olunur.

Proyektiv müstəvidə qurma məsələsi belə verilir: Qurulmuş fiqurların hər hansı bir sonlu çoxluğu verilir və tələb olunan əsas fiqurların xarakterik xassələri şərh edilir. Tələb olunur ki, qurma postulatlarının köməyi ilə əsas fiqurların elə

bir sonlu çoxluğu tapılsın ki, tələb olunan əsas fiqurlar da, onların arasında olsun.

Tutaq ki, bizə hər hansı proyektiv düz xətt üzərində üç A , B və C nöqtələri verilmişdir.

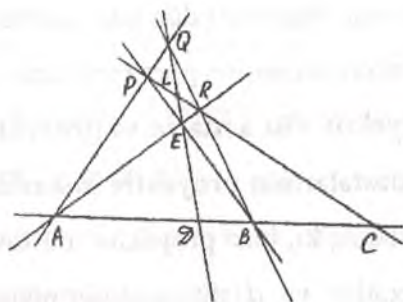
$(AB, CD) = -1$ şərtini ödəyən D nöqtəsinə, bu nöqtələrə dördüncü harmonik nöqtə deyilir.

Aşağıdakı qurma məsələsini həll edək.

Məsələ: Proyektiv düz xətt üzərində üç A , B və C nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrə dördüncü harmonik D nöqtəsini qurun.

Həlli. Analiz elə bir $PQRE$ dördtəpəlisi quraq ki, onun iki dioqnal nöqtəsi uyğun olaraq A və B olsun. Üçüncü dioqnal nöqtəsini əmələ gətirən tərəflərdən biri ilə AB düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi C olarsa, onda üçüncü dioqnal nöqtəsinin AB düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsi tələb olunan D nöqtəsi olacaq. Bu analizdən sonra aşağıdakı qurma üsulunu aldıq.

Qurma. Tutaq ki, d proyektiv düz xətti üzərində A , B və C verilən nöqtələrdir.



Şəkil 52.

A nöqtəsindən d düz xətti ilə üst –üstə düşməyən hər hansı düz xətt keçirək (şəkil 52).

Bu düz xətt üzərində iki P və Q nöqtələrini qeyd edək. Sonra isə BP , BQ və CP düz xətlərini quraq. CP və QB düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini R ilə işarə edək. Sonra isə AR düz xəttini çəkirik. AR düz xətti ilə BP düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini E ilə işarə edək. QE düz xətti ilə d düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi D tələb olunan nöqtə olar.

İsbatı. Həqiqətən A və B Nöqtələri qurulmuş $PQRE$ tam dördtəpəlisinin dioqnal nöqtələri olaraq, C və D nöqtələri bu tam dördtəpəlinin üçüncü L dioqnal nöqtəsini əmələ gətirən PQ və QE tərəfləri ilə d düz xəttini kəsişmə nöqtələri olduğundan, tam dördtəpəlinin dioqnal nöqtələri haqqında teoremə əsasən $(AB, CD) = -1$ olar.

Araşdırma. Proyektiv düz xətt üzərində dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətinin xassəsinə görə məsələnin yeganə həlli var.

§ 25. Proyektiv düz xətlərin və proyektiv düz xətt dəstələrinin proyektiv inikası

Tərif: Tutaq ki, bizə proyektiv müstəvidə iki d və d' proyektiv düz xətləri və d düz xəttinin nöqtələri çoxluğunun d' düz xəttinin nöqtələri çoxluğuna $f: d \rightarrow d'$ biyektiv inikası verilmişdir. $A, B, C, D \in d$ nöqtələrinin bu inikasında obrazları A', B', C' və D' olduqda

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

Şərti ödənərsə onda f inikasına proyektiv inikas deyilir.

Deməli, düz xəttin düz xəttə proyektiv inikasında nöqtə cütlərinin harmonik ayrılması da saxlanılır.

Teorem 1. Tutaq ki, $R = (A_1, A_2, E)$ və $R' = (A'_1, A'_2, E')$ uyğun olaraq d və d' proyektiv düz xətlərində ixtiyari reperlərdir. Onda d proyektiv düz xəttinin d' proyektiv düz xəttinə yalnız və yalnız bir proyektiv inikası var ki, o R reperini R' reperinə keçirir.

İsbatı. Əvvəlcə d düz xəttinin d' düz xəttinə R reperini R' reperinə keçirən proyektiv inikasının varlığını isbat edək. d düz xətti üzərindəki R reperinə görə koordinatları (x_1, x_2) olan M nöqtəsinə qarşı d' düz xəttinin R' reperinə

görə koordinatları (x_1, x_2) olan M' nöqtəsini qoyan $f: d \rightarrow d'$ inikasına baxaq. Proyektiv koordinatların tərifinə görə f inikası biyektiv inikas olar.

İndi göstərək ki, f proyektiv inikasdır, yəni dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətini saxlayır.

d düz xətti üzərində R reperinə görə koordinatları ilə verilmiş ixtiyari dörd $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ və $Q(q_1, q_2)$ nöqtələrini götürək. Bu nöqtələrin f inikasında obrazları d düz xətti üzərində R' reperinə görə koordinatları uyğun olaraq (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , (q_1, q_2) olan A' , B' , C' , Q' nöqtələri olacaq. Mürəkkəb koordinatlarla ifadəsi haqqında teoremə görə

$$(A'B', C'Q') = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & q_1 \\ b_2 & q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_2 & q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = (AB, CD)$$

Deməli, f proyektiv inikasdır. Bu inikas $A_1(1, 0)_R$ nöqtəsini $A'_1(1, 0)_{R'}$ nöqtəsinə, $A_2(1, 0)_R$ nöqtəsini $A'_2(1, 0)_{R'}$ nöqtəsinə, $E(1, 1)_R$ nöqtəsini $E'(1, 1)_{R'}$ nöqtəsinə keçirir. Deməli, R reperi R' reperinə keçir. İndi isbat edək ki, f inikası R reperini R' reperinə keçirən d düz xəttinin d' düz

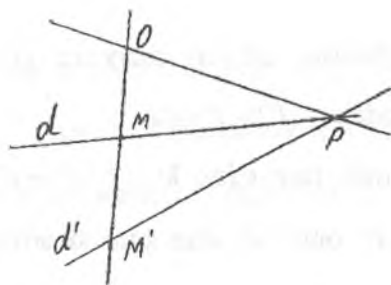
xəttinə yeganə proyektiv inikasıdır. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, başqa bir $f':d \rightarrow d'$ proyektiv inikası da var ki, o R reperini R' reperinə keçirir. d düz xətti üzərində A_1, A_2, E nöqtələrindən fərqli hər hansı bir $M \in d$ nöqtəsi götürək. $f(M)=M'$ və $f'(M)=M''$ işarə edək. Onda proyektiv inikası tərifinə görə

$$(A_1A_2, EM'') = (A_1A_2, EM) = (A_1A_2, EM')$$

d' proyektiv düz xətti üzərində A_1, A_2, E nöqtələri ilə birlikdə mürəkkəb nisbəti $\lambda = (A_1A_2, EM')$ -ə bərabər olan nöqtənin yeganəliyi haqqında teoremə görə M'' nöqtəsi M' nöqtəsi ilə üst-üstə düşəcək, yəni $f(M)=f'(M)$ olar. Bu isə o deməkdir ki, $f=f'$ olur. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən alınır ki, d düz xəttinin d' düz xəttinə sonsuz sayda proyektiv inikası var.

Tutaq ki, bizə proyektiv müstəvidə iki d və d' proyektiv düz xətləri və bu düz xətlər üzərində olmayan O nöqtəsi verilib. Hər bir $M \in d$ nöqtəsinə qarşı O mərkəzindən d' düz xətti üzərində M nöqtəsinin proyeksiyası olan M' nöqtəsini qoyaq (bax. şəkil 53)



Şəkil 53.

Proyektiv müstəvidə ixtiyari iki düz xətt kəsişdiyi üçün qurduğumuz f inikası d düz xəttinin nöqtələri çoxluğunun d' düz xəttinin nöqtələri çoxluğuna biyeksiya olacaq. Mərkəzi proyektəndirmə haqqında teoremə görə f inikası dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətini saxladığından proyektiv inikas olar. f proyektiv inikası d proyektiv düz xəttinin d' proyektiv düz xəttinə **perspektiv inikası** deyilir. O nöqtəsinə perspektivin mərkəzi deyilir.

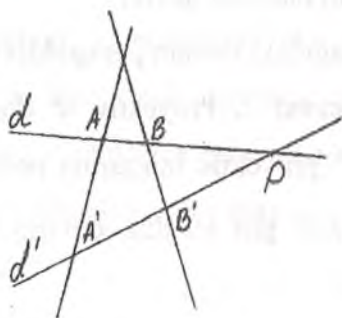
Aşağıdakı teorem **perspektivlik əlaməti** adlanır.

Teorem 2. Proyektiv d düz xəttinin d' düz xəttinə $f: d \rightarrow d'$ proyektiv inikasının perspektiv inikas olması üçün zəruri və kafi şərt bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinin özünə keçməsidir.

İsbatı. Tutaq ki, P nöqtəsi d və d' düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. Əgər f inikası perspektiv inikas olsa, onda

P nöqtəsinin ixtiyari mərkəzə görə proyeksiyası elə özü olduğundan $f(P) = P$ olur.

İndi fərz edək ki, $f: d \rightarrow d'$ proyektiv inikasdır və $f(P) = P$ olur. d düz xətti üzərində P nöqtəsindən fərqli ixtiyari iki A və B nöqtələri götürək. $A' = f(A)$ və $B' = f(B)$ işarə edək (şəkil 54). d və d' düz xətləri müxtəlif olduqlarından AA' və BB' düz xətləri də müxtəlif olar. Onda onlar müəyyən bir O nöqtəsində kəsişirlər və bu nöqtə d və d' düz xətlərinin heç birinə aid olmayacaq. O mərkəzinə görə d düz xəttinin d' düz xəttinə perspektiv inikasına baxaq. Bu inikasda A nöqtəsi A' nöqtəsinə, B nöqtəsi B' nöqtəsinə və P nöqtəsi özünə keçəcəkdir. Onda 1-ci teoremə görə bu inikas f inikası ilə üst-üstə düşər. Deməli, f inikası perspektiv inikasdır. Teorem isbat olundu.



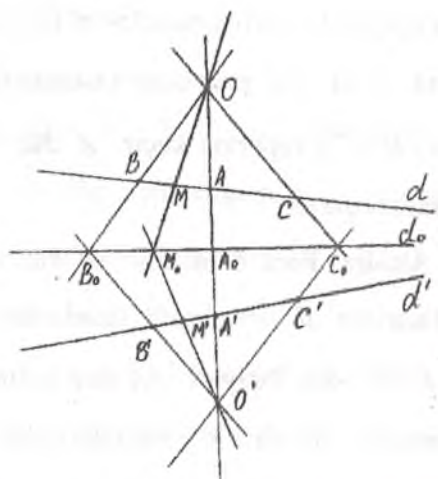
Şəkil 54.

İndi də aşağıdakı qurma məsələsini həll edək:

Məsələ1. $f: d \rightarrow d'$ proyektiv inikasında $R = (A, B, C)$ reperi $R' = (A', B', C')$ reperinə keçir. d düz xəttinin ixtiyari nöqtəsinin obrazını qurun.

Həlli, Analiz. Fərz edək ki, d düz xətti üzərindəki A, B, C nöqtələrinin d' düz xətti üzərindəki f inikasında obrazları A', B', C' -dir. İxtiyari AA' düz xəttini çəkək və bu düz xətt üzərində A və A' nöqtələrindən fərqli O və O' nöqtələrini qeyd edək. OB və $O'B'$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini B_0 ilə, OC və $O'C'$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini C_0 -ilə işarə edək. B_0C_0 düz xətti ilə AA' düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini A_0 işarə edək (şəkil 55) O mərkəzindən $f_1: d \rightarrow d_0$ və O' mərkəzindən $f_2: d_0 \rightarrow d'$ perspektiv inikaslarına baxaq. $f_2 \circ f_1$ inikası A nöqtəsini A' nöqtəsinə, B nöqtəsini B' nöqtəsinə və C nöqtəsini C' nöqtəsinə keçirir. 1-ci teoremə görə $f_2 \circ f_1 = f$ olar.

Buradan belə bir qurma üsulu alınır.



Şəkil 55.

Qurma. d düz xəttinin ixtiyari M nöqtəsinin obrazını belə qurarıq. O nöqtəsindən OM düz xəttini keçirək. OM ilə B_0C_0 düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini M_0 işarə edək. M_0 nöqtəsinin d' düz xətti üzərində O' mərkəzinə görə perspektiv inikasında obrazını M' işarə edək. M' tələb olunan nöqtə olar. Çünki $f(M) = f_2 \circ f_1(M) = f_2(M_0) = M'$. Məsələ həll olundu. Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipindən istifadə edərək düz xətt dəstələrinin proyektiv inikalarına belə tərif verə bilərik:

O mərkəzli proyektiv düz xətlər dəstəsinin O' mərkəzli proyektiv düz xətlər dəstəsinə biyektiv inikasında dörd düz xəttin mürəkkəb nisbəti saxlanılırsa, onda belə inikasa proyektiv inikas deyilir.

1-ci teoremdə ikili olan aşağıdakı teorem də doğrudur.

Teorem 3. Tutaq ki, a, b, c O mərkəzli proyektiv düz xətlər dəstəsinin ixtiyari üç düz xətti a', b', c' isə mərkəzi O' nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin üç düz xəttidir. Onda O mərkəzli düz xətlər dəstəsinin, O' mərkəzli düz xətlər dəstəsinə yeganə proyektiv inikası var ki, a, b, c düz xətləri uyğun olaraq a', b', c' düz xətlərinə keçir.

İndi proyektiv müstəvidə mərkəzləri O və O' nöqtələrində olan iki düz xətlər dəstələrinə və O, O' nöqtələrindən keçməyən d düz xəttinə baxaq. Birinci dəstənin hər bir a düz xəttinə qarşı ikinci dəstədən a və d düz xətlərinin kəsişmə nöqtələrindən keçən düz xətti qoyaq. Bu cür qarşı qoyma birinci düz xətlər dəstəsinin ikinci düz xətlər dəstəsinə proyektiv inikası olar.

Çünki bu zaman dörd düz xəttin mürəkkəb nisbəti saxlanır. Belə qurulmuş proyektiv inikasa mərkəzi O olan düz xətlər dəstəsinin, mərkəzi O' olan düz xətlər dəstəsinə perspektiv inikası deyilir. 2-ci teoremdən ilə ikilik prinsipinə görə aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 4. Bir düz xətlər dəstəsinin digər düz xətlər proyektiv inikasının perspektiv inikas olması üçün zəruri və kafi şərt bu düz xətlər dəstələrinin mərkəzlərindən keçən düz xəttin özü-özünə keçməsidir.

İndi isə həlli: 1-ci şəxsənin həllindən ikilik prinsipinin köməyi ilə alınan aşağıdakı məsələnin həllini oxucuya tapşırıq.

Məsələ 2. Mərkəzi O olan düz xətlər dəstəsinin mərkəzi O olan düz xətlər dəstəsinə f proyektiv inikasında a, b, c düz xətlər dəstəsinin a', b', c' obrazları verilir. Birinci düz xətlər dəstəsinin ixtiyari m düz xəttinin bu inikada obrazını qurun.

§26. Proyektiv düz xəttin proyektiv çevrilmələri

Tərif. Proyektiv düz xəttin özünə proyektiv inikasına onun proyektiv çevrilməsi deyilir. Proyektiv çevirməyə misal olaraq proyektiv düz xəttin eynilik çevrilməsini-yəni hər bir nöqtəsinə qarşı O nöqtənin özünü qoyan çevrilməni göstərə bilərik.

Bundan qabaqkı paragrafda d və d' proyektiv düz xətlərinin proyektiv inikaları haqda 1-ci teorem d və d' düz xətləri üst-üstə düşdükdə də doğru olar, yəni aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər proyektiv düz xətdə iki R və R' reperləri verilibsə, onda R və R' reperinə keçirən bir və yalnız bir proyektiv çevirmə var.

Tutaq ki, bizə $f: d \rightarrow d'$ proyektiv çevirməsi verilib. Bu çevrilmədə d düz xəttinin özünə keçən nöqtələrinə, f çevrilməsinin invariant (və ya təpənməz) nöqtələri deyilir.

1-ci teoremdən birbaşa alınır ki, invariant nöqtələri olan proyektiv çevrilmələr var.

Həqiqətən, tutaq ki, d proyektiv düz xəttinin üzərində beş ixtiyari A, B, C, B', C' nöqtələri verilib. Onda $R = (A, B, C)$ reperini $R' = (A, B', C')$ reperinə keçirən proyektiv çevirmənin ən azı bir invariant nöqtəsi (A nöqtəsi) var. $R = (A, B, C)$ reperini $R'' = (A, B, C')$ reperinə keçirən proyektiv çevirmənin isə ən azı iki invariant nöqtəsi (A və B nöqtələri) var.

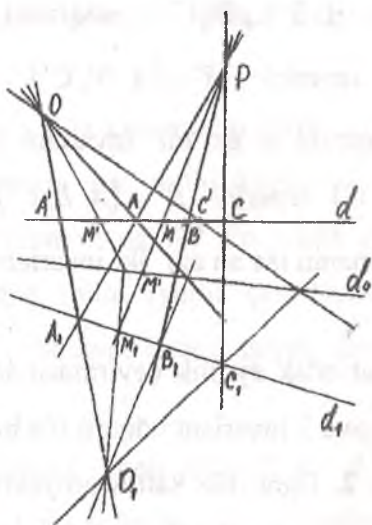
İndi isbat edək eynilik çevirməsindən fərqli proyektiv çevirmənin ən çoxu 2 invariant nöqtəsi ola bilər.

Teorem 2. Əgər düz xəttin proyektiv çevirməsinin üç invariant nöqtəsi varsa, onda O eynilik çevrilməsidir.

İsbatı. Tutaq ki, $f: d \rightarrow d$ proyektiv çevrilməsinin üç A, B, C invariant nöqtələri var. Həmin nöqtələr həm də $f_0: d \rightarrow d$ eynilik çevrilməsində də təpənməz olurlar. Proyektiv düz xətti $R = (A, B, C)$ reperini özünə keçirən yalnız bir proyektiv çevirməsi var (Teorem 1-ə görə). Deməli, $f = f_0$. Teorem isbat olundu.

Düz xəttin projektiv çevrilməsində nöqtənin obrazının qurulması məsələsinə baxaq:

Məsələ: d projektiv düz xəttinin $f: d \rightarrow d$ projektiv çevrilməsində $R = (A, B, C)$ reperi $R' = (A', B', C')$ reperinə keçir. d düz xəttinin ixtiyari $M \in d$ nöqtəsinin bu çevrilmədə obrazını qurmaq tələb olunur.



Şəkil 56.

Həlli. Projektiv müstəvidə d düz xətti üzərində olmayan P nöqtəsini və d düz xəttindən fərqli ixtiyari d_1 düz xəttini götürək (şəkil 56).

P mərkəzinə nəzərən d düz xəttinin d_1 düz xəttinə $f_1: d \rightarrow d_1$ perspektiv inikasında A, B, C, M nöqtələrinin A_1, B_1, C_1, M_1 obrazlarını quraq. Sonra isə bundan qabaqkı paraqrafın 1-ci məsələsində olduğu kimi (A_1, B_1, C_1) reperini (A', B', C') reperinə keçirən $f_2: d_1 \rightarrow d_1$ proyektiv inikasında M_1 nöqtəsinin M' obrazını qururuq. $f_2 \cdot f_1$ inikasının proyektiv inikas olduğu aydındır. Bu inikasında $R = (A, B, C)$ reperi $R' = (A', B', C')$ reperinə keçir. Bu isə o deməkdir ki, $f = f_2 \cdot f_1$

$$f(M) = f_2 \cdot f_1(M) = f_2(f_1(M)) = f_2(M_1) = M'$$

Deməli M' tələb olunan nöqtədir. Məsələ həll olundu.

§27. Proyektiv müstəvinin xəyali nöqtələri

Proyektiv müstəvidə proyektiv koordinat sistemində tərif verərkən gördük ki, əgər proyektiv müstəvidə $R = (A, B, C)$ reperi verilibsə onda, müstəvinin hər bir nöqtəsi hamısı birdən sıfır olmayan həqiqi ədədlərdən ibarət (x_1, x_2, x_3) koordinatlara malikdir.

Tərsinə, müəyyən bir nizamla götürülmüş, hamısı birdən sıfıra bərabər olmayan üç həqiqi ədəd, proyektiv müstəvinin müəyyən bir nöqtəsinin koordinatları olar.

Bir sıra məsələlərin həlli və izahı üçün proyektiv müstəvidə nöqtə anlayışını genişləndirmək lazım gəlir: yəni proyektiv müstəviyə xəyali nöqtələr adlanan nöqtələr əlavə etməli oluruq.

Fərz edək proyektiv müstəvidə hər hansı R reperi seçilib. Kompleks ədədlər çoxluğunu $\mathbb{C}$ ilə iarə edək. Hamısı birdən sıfıra ərabər olmayan müəyyən nizamlı götürülmüş ixtiyari $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ kortejini nöqtə adlandırmağı şərtləşək. x_1, x_2, x_3 ədədlərini həmin nöqtənin uyğun olaraq birinci, ikinci, üçüncü koordinatları adlandıraraq. İki (x_1, x_2, x_3) və (y_1, y_2, y_3) nöqtələri onda və ancaq onda üst-üstə düşürlər ki, elə bir $\lambda \in \mathbb{C}$ ədədi olsun ki, $y_1 = \lambda \cdot x_1, y_2 = \lambda x_2$ və $y_3 = \lambda x_3$ şərti ödənsin. Beləliklə, hər bir nöqtənin koordinatları $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ sabit vuruğa dəqiqliklə təyin olunur. Əgər $M(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ nöqtəsinin bütün koordinatları həqiqi ədədləri olarsa və ya $\lambda \in \mathbb{C}$ ədədinə vurmaqla həqiqi ədədlərə gətirmək olarsa, onda M nöqtəsinə həqiqi nöqtə deyilir. Əks halda M nöqtəsinə xəyali nöqtə deyilir.

Məsələn, $P(-1, 2, 3), Q(2i, 3i, -i)$ nöqtələri həqiqi nöqtə və $N(i, 2+i, 2-i)$ nöqtələri xəyali nöqtədir.

Yalnız təpə nöqtələri və vahid nöqtəsi həqiqi nöqtələr olan reperlərə baxacağımızı şərtləşək. Buradan da alınır ki, bir reperdən digər reperə keçid matrisinin elementləri həqiqi ədədlər olar. R reperindən R' reperinə keçid matrisi $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3$) olsun. Proyektiv müstəvinin M nöqtəsinin R reperindəki koordinatları (x_1, x_2, x_3) və R' reperindəki koordinatlarını (x'_1, x'_2, x'_3) işarə edək. Aydındır ki, bir reperdən digər reperə keçid düsturlarının əmsalları $-a_{ij}$ - lar həqiqi ədədlər olduğundan həqiqi nöqtələr həqiqi nöqtələrə keçir. Xəyali nöqtələr üçün isə bunu demək olmaz. Bütün həqiqi və xəyali nöqtələr çoxluğu birlikdə kompleks proyektiv müstəvi adlanır.

Koordinatları qoşma kompleks ədədlər olan nöqtələrə – qoşma nöqtələr deyilir. Məsələn, $A(3 + i, 5, 2i)$ nöqtəsi ilə $B(3 - 2i, 5, -2i)$ nöqtələri qoşma –eompleks nöqtələrdir.

Deməli, xəyali nöqtə anlayışı reperin seçilməsindən asılı deyil. Kompleks –qoşma nöqtələr isə ixtiyari reperə görə kompleks –qoşma olurlar.

Kompleks proyektiv müstəvidə həqiqi nöqtələrə sadəcə nöqtə, xəyali nöqtələr isə öz adları ilə adlanırlar. Kompleks proyektiv müstəvidə, proyektiv müstəvidə olduğu kimi düz xətt dedikdə (x_1, x_2, x_3) koordinatları

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğu başa düşürlər. Burada u_1, u_2, u_3 hamısı birdən sıfır olmayan ixtiyari kompleks ədədlərdir. Bu ədədlər yazıldıqları nizam ilə kompleks proyektiv müstəvidə düz xəttin koordinatları adlanır. Düz xəttin koordinatları da sabit $\lambda \in C, \lambda \neq 0$ vuruğu dəqiqliklə təyin olunur.

Bütün koordinatları həqiqi ədəd olan və ya həqiqi ədədlərə gətirilə bilən olduqda həmin düz xətt həqiqi düz xətt, əks halda isə xəyli düz xətt adlanır. Bu anlayışlar da reperin seçilməsindən asılı deyil.

Aşağıdakı sadə faktların isbatını oxucuya həvalə edirik:

1. Hər bir həqiqi düz xətt üzərində sonsuz sayda xəyli nöqtə var.

2. Hər bir xəyli düz xətt üzərində yalnız bir həqiqi nöqtə var.

Həqiqətən $(a_1 + b_1i)x_1 + (a_2 + b_2i)x_2 + (a_3 + b_3i)x_3 = 0$ düz xətti üzərində həqiqi nöqtə

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \text{ və } b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

həqiqi düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir.

3. Kompleks proyektiv müstəvidə iki müxtəlif nöqtədən bir və ancaq bir düz xətt keçir. Kompleks qoşma nöqtələrdən isə keçən düz xətt həqiqi düz xətdir.

4. İki müxtəlif düz xətt ancaq bir nöqtədə kəsişir.

Tutaq ki, bizə proyektiv müstəvidə d həqiqi düz xətti və onun üzərində A, B, C, D kimi dörd nöqtə verilmişdir. Proyektiv müstəvidə elə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperi seçək ki, A_1 və A_2 nöqtələri d düz xəttinin üzərində olsunlar. Bu reperə görə verilən nöqtələr koordinatları ilə

$$A(a_1, a_2, 0), B(b_1, b_2, 0), C(c_1, c_2, 0), D(d_1, d_2, 0)$$

kimi olacaqlar. Bu dörd nöqtənin mürəkkəb nisbəti isə isbat etdiyimiz kimi

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad (1)$$

olar. Əgər kompleks proyektiv müstəvidə $A'_1, A'_2 \in d$ şərtini ödəyən başqa bir $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E)$ reperini götürsək onda (AB, CD) mürəkkəb nisbətini A, B, C, D nöqtələrinin R' reperinə görə koordinatları ilə də hesablasaq eyni nəticəni alarıq.

$(AB, CD) = -1$ olarsa, onda deyirlər ki, A, B nöqtələr cütü C, D nöqtələr cütünü harmonik olaraq ayırır.

İndi isə aşağıdakı lemmanı isbat edək:

Lemma. Tutaq ki, bizə kompleks proyektiv müstəvidə d həqiqi düz xətti və bu xəttin üzərində M_1, M_2 kompleks qoşma nöqtələri verilib. Onda bu düz xəttin hər bir $P \in d$ həqiqi nöqtəsi üçün $(M_1 M_2, PQ_1) = -1$ şərtini ödəyən yeganə $Q_1 \in d$ nöqtəsi və $(M_1 M_2, PQ_2) = i$ şərtini ödəyən yeganə $Q_2 \in d$ həqiqi nöqtəsi var.

İsbatı. $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperini elə seçək ki, A_1 və A_2 nöqtələri d düz xətti üzərində olsunlar və P nöqtəsi A_2 ilə üst–üstə düşsün. Bu reperə görə

$M_1(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, 0)$, $M_2(a_1 - ib_1, a_2 - ib_2, 0)$, $P(0, 1, 0)$ olar. M_1 -in koordinatlarını $a_1 + ib_1$ -ə M_2 -nin koordinatlarını $a_2 - ib_1$ bölsək, M_1 və M_2 nöqtələri koordinatları ilə

$$M_1\left(1, \frac{a_2 + ib_2}{a_1 + ib_2}, 0\right), \quad M_2\left(1, \frac{a_2 - ib_2}{a_1 - ib_2}, 0\right)$$

şəklində olar. Kompleks ədədlərin qoşmalarının nisbəti onların nisbətinin qoşmasına bərabər olduğu üçün M_1 və M_2 nöqtələrini koordinatları ilə birlikdə belə yazı bilərik:

$$M_1(1, a + ib, 0), \quad M_2(1, a - ib, 0),$$

d düz xətti üzərində P nöqtəsindən fərqli ixtiyari $Q \in d$ nöqtəsi koordinatları ilə $Q(1, y, 0)$ kimi olar. Əgər $(M_1 M_2, PQ) = -1$ olarsa, (1) düsturuna görə

$$(M_1 M_2, PQ) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a+ib & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-ib & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+ib & y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-ib & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y-a+ib}{y-a-ib}$$

olmağından $\frac{y-a+ib}{y-a-ib} = -1$ alınır. Buradan isə $y = a$ alınır.

Beləliklə, $(M_1 M_2, PQ) = -1$ şərtini yeganə $Q_1(1, a, 0)$ nöqtəsi ödəyir. Bu halda teorem isbat olundu.

Analoji olaraq $(M_1 M_2, PQ) = i$ olmağından isə $y = a + b$ alınır, yəni $(M_1 M_2, PQ) = i$ şərtini $Q_2(1, a + b, 0)$ nöqtəsi ödəyir. Lemma isbat olundu.

§28. Proyektiv müstəvidə ikitərtibli xətlər

Tərif. Proyektiv müstəvidə müəyyən bir R reperinə görə koordinatları

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğuna ikitərtibli xətt deyilir.

Burada fərz olunur ki, a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) əmsallarının hamısı birdən sıfıra bərabər deyil və $a_{ij} = a_{ji}$. Onda (1) tənliyini qısaca belə yazı bilərik.

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (2)$$

İndi göstərək ki, ikitərtibli xətt anlayışı R reperinin seçilməsindən asılı deyil.

Tutaq ki, (2) tənliyi γ ikitərtibli xəttin $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində tənliyidir. Əgər proyektiv müstəvidə başqa bir $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ reperi də verilərsə, onda R reperindən R' reperinə keçid düsturları

$$\rho x_i = b_{i1} x'_1 + b_{i2} x'_2 + b_{i3} x'_3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

şəklində olar. Bu düsturları (2) –də nəzərə alsaq γ xətti üçün yeni reperdə

$$\sum_{i,j}^3 a'_{ij} x'_i x'_j = 0 \quad (4)$$

tənliyi alınar. Burada

$$a'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^3 b_{ki} a_{k\ell} b_{\ell j} \quad (5)$$

(4) tənliyi göstərir ki, γ ikitərtibli xəttinin istənilən repərə görə tənliyinin şəkli eyni olur, yalnız tənlikdə əmsallar (5) qanunu ilə dəyişirlər.

(2) tənliyinin sol tərəfi üçölçülü V vektor fəzasında

$$g\left(\vec{x}\right)=\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j \quad (6)$$

kvadratik formasının ifadəsidir. V vektor fəzası proyektiv müstəvini də doğuran fəzadır. A_1, A_2, A_3 nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V$ bazis vektorları, A'_1, A'_2, A'_3 nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3 \in V$ vektorları olsun, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorları $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ bazisinə görə koordinatları ilə $\vec{a}'_1(b_{11}, b_{21}, b_{31}), \vec{a}'_2(b_{12}, b_{22}, b_{32}), \vec{a}'_3(b_{13}, b_{23}, b_{33})$ olarsa, onda

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisindən $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ bazisinə keçid matrisi olar. (6)

kvadratik formasının matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (8)$$

eyni zamanda (1) ikitərtibli xəttin də matrisi olar. (4) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttin matrisi

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \quad (9)$$

olarsa, cəbr və həndəsə kurslarından məlum olduğu kimi

$$A' = {}^t B \cdot A \cdot B \quad (10)$$

olar. Burada ${}^t B$ ilə B matrisinin transponirə olunmuş matrisidir. Yenə cəbr kursundan məlum olduğu kimi $\det B \neq 0$ olduğu üçün

$$\text{ranq} A' = \text{ranq} A \quad (11)$$

olur.

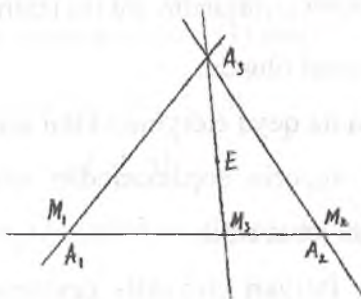
Deməli (4) tənliyi ilə təyin olunan xəttin əmsalları sıfır ola bilməz. İsbat etdik ki, ikitərtibli xətt anlayışı reperin seçilməsindən asılı deyil.

Tərif. A matrisinin ranqına (1) tənliyi ilə verilən γ ikitərtibli xəttin ranqı deyilir.

Ranqı 3-ə bərabər olan ikitərtibli xətlərə cırlaşmayan, ranqı 3-dən kiçik olan ikitərtibli xətlərə cırlaşan ikitərtibli xətlər deyilir.

Yuxarıda gördük ki, bir repərdən digərinə keçdikdə ikitərtibli xəttin ranqı dəyişmir. Aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Proyektiv müstəvidə ixtiyari düz xətt cırlaşmayan ikitərtibli xətti Ən çoxu iki nöqtədə kəsə bilər.



Şəkil 57.

İsbatı. Lemmanın əksini fərz etmək üsulu ilə isbat edək. d düz xətti cırlaşmayan γ xəttini üç M_1, M_2 və M_3 nöqtələrində kəsir. Proyektiv müstəvidə elə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperini elə seçək ki, A_1 nöqtəsi M_1 ilə, A_2 nöqtəsi M_2 ilə üst – üstə düşsün. A_3 nöqtəsini isə elə götürək ki, M_3 nöqtəsi A_3E düz xətti ilə A_1A_2 düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olsun. Bu repera görə M_1, M_2, M_3 nöqtələri koordinatları ilə $M_1(1, 0, 0), M_2(0, 1, 0), M_3(1, 1, 0)$ olacaqdır. Nöqtələrin koordinatlarını γ xəttinin

$$\sum_{i,j}^n a_{i,j} x_i x_j = 0$$

tənliyində yerinə yazsaq, alarıq ki,

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0$$

Bu isə o deməkdir ki, $\det A = 0$

Yəni γ xətti cırlaşandır. Bu isə lemmanın şərtinə ziddir.

Lemma isbat olundu.

Yuxarıda da qeyd etdiyimiz kimi ikitərtibli xətt anlayışı və onun rəngi reperin seçilməsindən asılı deyil. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem: İxtiyari proyektiv çevirmədə ikitərtibli xəttin rəngi dəyişmir, yəni ikitərtibli xətt rəngi onun rənginə bərabər olan ikitərtibli xəttə keçir.

İndi isə ikitərtibli xətlərin proyektiv təsnifatını verək. Cəbr və həndəsə kurslarından məlumdur ki, üçölçülü V vektor fəzasında elə $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisi var ki, γ xəttinin

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{i,j} x_i x_j = 0 \quad (2)$$

tənliyinin sol tərəfindəki

$$g(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j} x_i x_j \quad (6)$$

kvadratik forması

$$g(\vec{x}) = \varepsilon_1 (x'_1)^2 + \varepsilon_2 (x'_2)^2 + \varepsilon_3 (x'_3)^2 \quad (12)$$

şəklində olur. Burada $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$

Əgər proyektiv müstəvidə $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e} = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 \in V$ vektorlarının doğruluğu A'_1, A'_2, A'_3, E' nöqtələrindən ibarət $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ reperini seçsək, (1) tənliyi

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_3^2 = 0 \quad (13)$$

şəklinə düşər. ($\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, 3$)

γ xəttinin r rəqəminin qiymətindən asılı olaraq aşağıdakı hallar mümkündür.

I. $r = 3$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki tiptən biri ola bilər.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (14)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (15)$$

(14) tənliyi ödəyən heç bir həqiqi nöqtə yoxdur. Bu səbəbdən də ona ikitərtibli sıfır xətt deyilir. (15) tənliyi ilə verilən xətt isə ikitərtibli oval xətt deyilir.

II. $r = 2$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki şəkildən birində ola bilər.

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad (16)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad (17)$$

(16) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt $x + ix_2 = 0$ və $x - ix_2 = 0$ kimi iki xəyali düz xəttə parçalanan xətt olur. Bu iki xətt $(0, 0, 1)$ həqiqi nöqtədə kəsişirlər.

(17) tənliyi ilə verilən xətt isə $x + x_2 = 0$, $x - x_2 = 0$ kimi iki həqiqi düz xəttə parçalanan xətdir.

III. $r = 1$. Bu halda γ xəttinin tənliyi

$$x_1^2 = 0 \quad (18)$$

şəklində olur. Bu halda ikitərtibli xətt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ kimi iki üst-üstə düşən xəttə parçalanan xətt olur. (14), (15), (16), (17), (18) şəklində olan tənliklərə ikitərtibli xəttin kanonik tənlikləri deyilir.

Deməli, proyektiv müstəvidə ancaq beş tip ikitərtibli xətt vardır. Onları aşağıdakı cədvəldə verək.

	Xəttin adı	Xəttin kanonik tənliyi	Xətti rəngi
1.	Oval xətt	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	3
2.	Sıfır xətt	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3
3.	İki həqiqi düz xətt	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2
4.	İki xəyali düz xətt	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2
5.	İki üst-üstə düşən düz xətt	$x_1^2 = 0$	1

§29. İkitərtibli xətt ilə düz xəttin kəsişməsi

Tutaq ki, proyektiv müstəvidə hər hansı R reperinə görə koordinatları

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən γ ikitərtibli xətti $\sqrt{P(p_1, p_2, p_3), Q(q_1, q_2, q_3)}$ nöqtələrindən keçən ,

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 &= \lambda p_2 + \mu q_2 \\ x_3 &= \lambda p_3 + \mu q_3 \end{aligned} \quad (2)$$

parametrik tənlikləri ilə d düz xətti verilmişdir. d düz xətti ilə γ xəttinin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq. Bunun üçün isə x_1, x_2, x_3 dəyişənlərinin (2) düsturlarındakı ifadələrini (1)-də yerinə yazaq. Onda aşağıdakı eimi bir ifadə alırıq.

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0 \quad (3)$$

$$A_{11} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i p_j, \quad A_{12} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i q_j, \quad A_{22} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} q_i q_j, \quad (4)$$

μ və λ parametrlərinin (3) bərabərliyini ödəyən, ikisidə birdən sıfıra bərabər olmayan bir cüt həqiqi qiymətinə γ xətti ilə d düz xəttinin bir kəsişmə nöqtəsi uyğun gəlir. Bu nöqtənin də koordinatları həqiqi ədədlərdir və onları (2) tənliyindən tapmaq olur. (λ_1, μ_1) və (λ_2, μ_2) parametrlərinə uyğun gələn

M_1 və M_2 nöqtələri onda və ancaq onda müxtəlif olurlar ki, (λ_1, μ_1) ədədlər cütü ilə (λ_2, μ_2) ədədlər cütü mütənasib olmasınlar.

Əgər γ xətti cırlaşmayandırsa, onda bu xəttin d düz xətti ilə ikidən artıq ortaq nöqtəsi ola bilməz. Buradan çıxır ki, (3) tənliyində

$$A_{11}, A_{12}, A_{22}$$

əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Biz də ancaq bu hala baxarıq.

$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ işarə edək. Aşağıdakı üç haldan biri mümkündür.

a) $\Delta > 0$ (3) tənliyinin λ və μ parametrlərinə görə heç bir həqiqi həlli yoxdur. Həmin tənliyin ancaq bir cüt mütənasib olmayan kompleks kökü vardır. Deməli, γ xətti ilə d düz xətti koordinatları kompleks qoşma ədədlər olan iki müxtəlif nöqtədə kəsişirlər.

b) $\Delta < 0$. Bu halda (3) tənliyinin iki cüt mütənasib olmayan həqiqi kökü vardır. Deməli γ xətti ilə d düz xətti iki müxtəlif nöqtədə kəsişirlər.

c) $\Delta = 0$. Bu halda (3) tənliyinin ancaq bir həlli (sabit vuruq dəqiqliyi ilə) vardır. Deməli γ xətti ilə d düz xətti ancaq bir

nöqtədə kəsişirlər. Kəsişmə nöqtəsi M_0 olarsa, d düz xəttinə M_0 nöqtəsində γ xəttinə toxunan düz xətt deyilir.

Teorem. Cırlaşmayan ikitərtibli xəttin hər bir nöqtəsində ona toxunan ancaq bir düz xətt vardır.

İsbatı. Tutaq ki, γ cırlaşmayan ikitərtibli xətti

$$\gamma: \sum a_{ij} x_i x_j = 0$$

tənliyi ilə verilib. $P(p_1, p_2, p_3) \in \gamma$ nöqtəsindən və proyektiv müstəvinin $P(p_1, p_2, p_3)$ nöqtəsindən fərqli ixtiyari $Q(q_1, q_2, q_3)$ nöqtəsindən keçən PQ düz xəttinin parametrik tənlikləri

$$x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1$$

$$x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2$$

$$x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3$$

şəklində olar.

x_1, x_2, x_3 dəyişənlərinin qiymətlərini γ xəttinin tənliyində yerinə yazsaq.

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0$$

$P \in \gamma$ olduğu üçün $\sum a_{ij} p_i p_j = 0$ olar.

PQ düz xəttinin γ xəttinə toxunan olması üçün $\Delta = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2 = 0$ olmalıdır. $A_{11} = 0$ olduğu üçün $A_{12} = 0$ alarıq. Başqa sözlə, $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i q_j = 0$.

Tənliyi belə şəkildə yazaq.

$$\sum_{i=1}^3 (a_{i1} p_i) q_1 + \sum_{i=1}^3 (a_{i2} p_i) q_2 + \sum_{i=1}^3 (a_{i3} p_i) q_3 = 0$$

Bu tənlikdə $Q(q_1, q_2, q_3)$ nöqtəsinin koordinatlarını dəyişən (x_1, x_2, x_3) koordinatları ilə əvəzləsək,

$$\sum_{i=1}^3 (a_{i1} p_i) x_1 + \sum_{i=1}^2 (a_{i2} p_i) x_2 + \sum_{i=1}^3 (a_{i3} p_i) x_3 = 0$$

Bu isə $P(p_1, p_2, p_3)$ nöqtəsində γ xəttinə toxunanın tənliyidir. Alınan tənliyin proyektiv müstəvi üzərində düz xətt tənliyi olması aydındır. Toxunanın tənliyinin qurulmasından görünür ki, o yeganədir. Teorem isbat olundu.

§30. İkitərtibli xəttə nəzərən qoşma nöqtələr.

Polyus və polyar

Tərif. Tutaq ki, bizə proyektiv müstəvidə hər hansı R reperinə nəzərən

$$\gamma: \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə γ ikitərtibli xətti və $P(p_1, p_2, p_3)$ və $Q(q_1, q_2, q_3)$ nöqtələri verilib. Əgər

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i q_j = 0 \quad (2)$$

olarsa, $P(p_1, p_2, p_3)$ və $Q(q_1, q_2, q_3)$ nöqtələrinə γ xəttinə nəzərən qoşma nöqtələr deyilir.

Tərifdən göründüyü kimi, əgər P və Q nöqtələri qoşmadırlarsa, onda Q və P nöqtələri də qoşmadırlar. γ xəttinə aid olan hər bir nöqtə isə öz-özünə qoşmadır.

İkitərtibli xəttə nəzərən qoşmalılıq anlayışının həndəsə mahiyyətini aydınlaşdırmaq: Əgər P və Q nöqtələri γ xəttinə nəzərən qoşmadırlarsa və onlardan biri γ xətti üzərindədirsə, (2) bərabərliyindən göründüyü kimi digəri birinci nöqtədən ikitərtibli xəttə çəkilən toxunanın üzərində olar. γ xəttinin üzərində olmayan nöqtələr üçün aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem: Cırılaşmayan γ ikitərtibli xəttinə aid olmayan P və Q nöqtələri onda və ancaq onda γ xəttinə nəzərən qoşma olurlar ki, PQ düz xətti γ xəttini iki nöqtədə kəssin və kəsişmə nöqtələri P və Q nöqtələrini harmonik olaraq ayırsın.

İsbatı. Tutaq ki, proyektiv müstəvidəki R reperinə nəzərən P və Q nöqtələri koordinatları ilə $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ şəklindədir. PQ düz xəttinin parametrik tənlikləri

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda p_1 + \mu q_1 \\x_2 &= \lambda p_2 + \mu q_2 \\x_3 &= \lambda p_3 + \mu q_3\end{aligned}\quad (3)$$

olar.

Bu tənlikləri (1) –də nəzərə alsaq, alarıq.

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{12}\mu^2 = 0 \quad (4)$$

$$A_{11} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i p_j, \quad A_{12} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i q_j, \quad A_{22} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} q_i q_j \quad (5)$$

PQ düz xətti ilə γ xəttinin kəsişmə nöqtələrini M_1 və M_2 işarə edək. (3) tənliyində parametrlərin M_1 nöqtəsinə uyğun qiymətləri cütünü (λ_1, μ_1) və M_2 nöqtəsinə uyğun qiymətləri cütünü (λ_2, μ_2) ilə işarə edək. Bu cütlərin hər biri (4) tənliyini ödəyəcək. Q nöqtəsi γ xətti üzərində olmadığı üçün $A_{22} \neq 0$ olar. Buradan da çıxır ki, $\lambda = 0$ ola bilməz. (4) tənliyini aşağıdakı şəkilə gətirək:

$$A_{22} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\mu}{\lambda} + A_{11} = 0 \quad (6)$$

M_1 və M_2 nöqtələri γ xəttinin nöqtələri olduğundan $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ və

$\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ ədədləri (6) tənliyinin kökləri olar. Viyet teoreminə görə

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -\frac{2A_{12}}{A_{22}} \quad (7)$$

P və Q nöqtələri qoşma olduqlarından yuxarıdakı (2) münasibətinə görə $A_{12} = 0$ alırıq. Bu isə

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu_2 \lambda_1} = -1$$

20-ci paragrafdakı həll etdiyimiz məsələdən alınır ki, $(PQ, M_1 M_2) = -1$. Teorem isbat olundu.

Bundan sonra isə proyektiv həndəsənin çox mühüm anlayışlarından biri – verilən ikitərtibli xəttə nəzərən polyus və polyar anlayışlarını verək.

Fərz edək ki, (1) tənliyi ilə verilən γ xətti cırılşmayandır. Proyektiv müstəvinin hər hansı $P(p_1, p_2, p_3)$ nöqtəsini qeyd edək. γ xəttinə nəzərən P nöqtəsi ilə qoşma olan $X(x_1, x_2, x_3)$ nöqtələrinin çoxluğunu g ilə işarə edək. (2) münasibətinə görə g çoxluğunun hər bir X nöqtəsinin koordinatları

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i x_j = 0 \quad (2')$$

tənliyini ödəyər. (2) tənliyini belə şəkildə yazaq.

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} p_i\right) x_1 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2} p_i\right) x_2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3} p_i\right) x_3 = 0 \quad (8)$$

γ xətti cırılşmayan olduğundan x_1, x_2, x_3 dəyişənlərinin (8) tənliyindəki əmsallarının hamısı birdən sıfıra bərabər ola bilməz. (Əks halda (1) xəttinin matrisinin sütunları xətti asılı olar)

P nöqtəsi ilə γ xəttinə nəzərən qoşma olan bütün nöqtələrin çoxluğu g proyektiv düz xəttidir. Bu düz xəttə P nöqtəsinin polyarı deyilir. P nöqtəsinə isə g düz xəttinin γ xəttinə nəzərən polyusu deyilir.

Proyektiv müstəvinin hər hansı nöqtəsinin polyarı onda və ancaq onda həmin nöqtədən keçir ki, nöqtə γ ikitərtibli xəttinə aid olsun.

Deməli proyektiv müstəvinin hər bir P nöqtəsinə γ cırılşmayan ikitərtibli xəttə nəzərən onun polyarı olan düz xətt uyğundur, tərsinə proyektiv müstəvinin hər bir

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

Düz xəttinə onun polyusu olan nöqtə uyğundur. Bu nöqtənin (p_1, p_2, p_3) koordinatları

$$\sum_{i=1}^3 a_{i1} p_i = \lambda u_1, \quad \sum_{i=1}^3 a_{i2} p_i = \lambda u_2, \quad \sum_{i=1}^3 a_{i3} p_i = \lambda u_3 \quad (9)$$

tənliklərinin köməyiylə tapılır.

Qeyd etdiyimiz kimi sistemin matrisinin determinatı

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Deməli sistemin yeganə həlli var.

Beləliklə, proyektiv müstəvinin hər bir cırlaşmayan γ ikitərtibli xətti; bu müstəvinin nöqtələri çoxluğu ilə onun düz xətləri çoxluğu arasında qarşılıqlı bir qiymətli uyğunluq yaradır. Bu uyğunluğu polyaritet deyilir.

(2) bərabərliyində a_{ij} əmsalları i və j indekslərinə görə simmetrikdir, yəni

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3$$

Buna görə də (2) və (9) münasibətlərini nəzərə aldıqda aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem. Proyektiv müstəvidə verilən γ cırlaşmayan ikitərtibli xəttə nəzərən P nöqtəsi Q nöqtəsinin polyarı üzərindədirsə, onda Q nöqtəsi də P nöqtəsinin polyarı üzərində olar.

Bu teoremdən birbaşa olaraq aşağıdakı nəticəni alırıq: Tutaq ki, bizə π proyektiv müstəvisi verilib. π' ilə bu müstəvinin düz xətləri çoxluğunu işarə edək. $\psi: \pi \rightarrow \pi'$

inikası hər bir nöqtəyə qprşı onun polyarını qoyan inikas – polyarrefetdir. Bu inikasında $a \subset \pi$ düx xəttinin nöqtələri $\psi(A) = a$ şərtini ,ödəyən A nöqtəsindən keçən düz xətlər dəstəsinə inikas edər. Bu zaman isbat etmək olar ki, a düz xətti üzərindəki dörd nöqtə, A mərkəzli düz xətlər dəstəsinin elə dörd düz xəttinə keçər ki, onların mürəkkəb nisbətləri eynidir.

§31. Oval xətlərə aid bəzi konstruktiv teoremlər

Proyektiv müstəvidə kanonik tənliyi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ şəklində olan ikitərtibli xəttə oval xətt demişdik.

Tərif. Proyektiv müstəvidə γ oval xətti üzərində olmayan P nöqtəsindən keçən hər bir düz xətt γ xəttini iki həqiqi koordinatlı nöqtədə kəsərsə, onda P nöqtəsinə γ oval xəttinin daxili nöqtəsi deyilir.

Əgər P nöqtəsi γ oval xətti üzərində deyilsə və onun daxili nöqtəsi də deyilsə, onda ona γ xəttinə nəzərən xarici nöqtə deyilir.

Verdiyimiz tərifdən görünür ki, oval xəttə toxunan düz xəttin toxunma nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələri xarici nöqtələrdir.

Lemma. Proyektiv müstəvinin $M(m_1, m_2, m_3)$ nöqtəsi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (1) tənliyi ilə verilən γ oval xəttinə nəzərən onda və ancaq onda daxili nöqtə olar ki, $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ olsun.

İsbatı. Tutaq ki, $M(m_1, m_2, m_3)$ nöqtəsi γ xəttinə nəzərən daxili nöqtədir. Onda $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 \neq 0$ olar. Əgər $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$ olarsa, onda M və $N(-m_2, m_1, 0)$ nöqtələrindən keçən MN düz xəttinin γ oval xəttini həqiqi koordinatlı nöqtələrdə kəsmədiyini göstərək. MN düz xətti ilə γ oval xəttini kəsişmə nöqtələrini tapmaq üçün MN düz xəttinin parametrik tənliklərini yazaq.

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda m_1 - \mu m_2 \\ x_2 &= \lambda m_2 + \mu m_1 \\ x_3 &= \lambda m_3 \end{aligned} \quad (2)$$

x_2, x_1, x_3 dəyişmələrinin (2)-dəki qiymətlərini (1)-də nəzərə alsaq.

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0 \quad (3)$$

tənliyinin əmsalları üçün

$$\begin{aligned} A_{11} &= m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0, \\ A_{12} &= m_1 \cdot (-m_2) + m_1 \cdot m_2 = 0 \end{aligned}$$

və $A_{22} = m_1^2 + m_2^2 > 0$ alırıq. Bu isə o deməkdir ki, $\Delta = A_{11} \cdot A_{22} > 0$ olur. Yəni λ, μ parametrlərinin (3) tənliyini ödəyən həqiqi qiymətləri yoxdur. Bu isə M -in daxili nöqtə olması şərtinə ziddir. Deməli, $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$.

Tərsinə, fərz edək ki, μ, γ xəttinə nəzərən daxili nöqtədir, yəni M nöqtəsindən keçən ixtiyari ℓ düz xətti γ oval xəttini iki həqiqi koordinatlı nöqtədə kəsir. ℓ düz xətti üzərində ixtiyari $N(n_1, n_2, n_3)$ nöqtəsini götürək, belə ki, $n_3 = 0$ şərti ödənsin. Onda (3) tənliyinin əmsalları üçün $A_{11} = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$, $A_{22} = n_1^2 + n_2^2 > 0$. Buradan çıxır ki, $\Delta = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2 < 0$. Yəni ℓ düz xətti γ oval xəttini həqiqi koordinatlı iki nöqtədə kəsir. Lemma isbat olundu.

Lemmadan birbaşa alınır ki, $N(n_1, n_2, n_3)$ nöqtəsi γ oval xəttinin xarici nöqtəsi ancaq və ancaq onda olur ki, $n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 > 0$ olsun.

İndi göstərək ki, γ oval xəttinin hər bir xarici nöqtəsindən γ xəttinə toxunan iki düz xətt keçir.

Həqiqətən fərz edək ki, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ tənliyi verilən γ oval xətti və onun $A(a_1, a_2, a_3)$ xarici nöqtəsi verilib. A nöqtəsinin γ xəttinə nəzərən polyarını d ilə işarə edək. Gös-

tərək ki, d düz xətti γ oval xəttini iki müxtəlif həqiqi nöqtədə kəsir. A nöqtəsindən γ xəttini iki müxtəlif M_1 və M_2 nöqtələrində kəsən düz xətt keçirək. Bu düz xətt üzərində elə $B(b_1, b_2, b_3)$ nöqtəsi götürək ki, A və B nöqtələr cütü M_1 və M_2 nöqtələr cütü ilə harmonik qoşma olsunlar. Yuxarıda isbat etdiyimiz kimi $B \in d$ olar. A və B nöqtələrindən keçən düz xətti ilə γ xəttinin kəsişmə nöqtələri üçün qurduğumuz

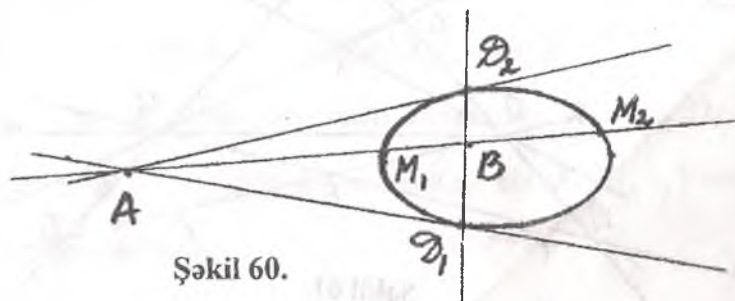
$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0$$

tənliyi üçün şərtə görə $\Delta = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2 < 0$ olmalıdır.

$$A_{11} = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 < 0, \quad A_{12} = 0$$

olmasından alınar ki, $A_{22} = b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 < 0$ olur. Bu o deməkdir ki, B nöqtəsi γ oval xəttinin daxili nöqtəsidir.

Deməli, B nöqtəsindən keçən d düz xətti γ xəttini iki müxtəlif D_1 və D_2 nöqtələrində kəsər. Bu nöqtələrdən γ xəttinə çəkilən toxunan isə, toxunanın tənliyindən göründüyü kimi $A(a_1, a_2, a_3)$ nöqtəsindən keçər. (şəkil 60)



Şəkil 60.

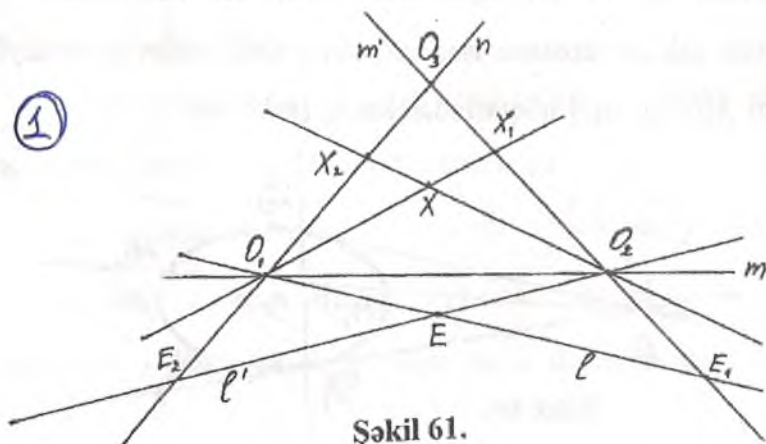
A nöqtəsindən γ xəttinə üçüncü toxunan düz xəttin olması mümkün deyil. Çünki həmin düz xətti ilə γ xəttinin toxunma nöqtəsi yenə A nöqtəsinin d polyarı üzərində olmalıdır. d düz xətti ilə γ xəttinin üç ortaq nöqtəsi ola bilməz.

Oval xəttə aid konstruktiv teoremlərdən birincisi olan Şteyner teoremini və onun tərsinin isbatını verək.

Teorem 1. (Şteyner). Tutaq ki, iki müxtəlif O_1 və O_2 mərkəzli düz xətt dəstələri və bu dəstələrdən birincinin ikinciyə perspektiv olmayan proyektiv f inikası verilib.

Onda bu inikada uyğun düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinin γ çoxluğu, O_1 və O_2 nöqtələrindən keçən oval xətt əmələ gətirir.

İsbatı. O_1O_2 düz xəttini m ilə onun proobrazını isə n ilə işarə edək (Şəkil 61).



Şəkil 61.

$m = f(n)$. f inikası üç müxtəlif düz xətt və onların obrazları ilə tamamilə təyin olunduğundan, onu birinci dəstəyə daxil olan n, m, λ düz xətləri və onların m, m', λ' obrazları ilə təyin edək. f perspektiv inikas olmadığından n, m və m' düz xətləri cüt – cüt müxtəlif olurlar. Bu səbəbdən də $O_1 = n \cap m, O_2 = m \cap m'$ və $O_3 = n \cap m'$ nöqtələri bir düz xətt üzərində deyillər (şəkil 61) $E = \lambda \cap \lambda'$ nöqtəsi isə m, m', n düz xətlərindən heç birinin üzərində deyillər. Bu səbəbdən O_1, O_2, O_3, E nöqtələri proyektiv müstəvidə bir R reperi təşkil edirlər.

f inikasında uyğun düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinin γ çoxluğunun R reperinə nəzərən tənliyini çıxaraq.

$O_1 O_2 O_3$ üçtəpəlinin tərəfləri üzərində olmayan ixtiyari $X(x_1, x_2, x_3)$ nöqtəsini götürək. Bir bağlıya aid olan dörd düz xəttin mürəkkəb nisbətinin tərifinə görə

$$(mn, \lambda O_1 X) = (O_2 O_3, E_1 X_1) \quad (3)$$

$$\textcircled{2} \quad (m' m, \lambda' O_2 X) = (O_3 O_1, E_2 X_2) \quad (4)$$

m' proyektiv düz xətti üzərindəki $R_1 = (O_2, O_3, E_1)$ reperinə görə X_1 nöqtəsi koordinatları ilə $X_1(x_2, x_3)$ olacaq. Bu səbəbdən də

$$(O_2 O_3, E_1 X_1) = \frac{x_2}{x_3} \quad (5)$$

Eyni qayda ilə n düz xətti üzərində $R_2 = (O_3, O_1, E_2)$ reperinə görə X_2 nöqtəsi koordinatları ilə $X_2(x_3, x_1)$ olar. Yenə alarıq ki,

$$(O_3 O_1, E_2 X_2) = \frac{x_3}{x_1} \quad (6)$$

Buradan da alarıq ki,

$$(mn, \lambda O_1 X) = \frac{x_2}{x_3} \text{ və } (m' m, \lambda' O_2 X) = \frac{x_3}{x_1} \quad (7)$$

$X \in \gamma$ və proyektiv çevirmənin tərifinə görə

$$(m n, \lambda O_1 X) = (m' m, \lambda' O_2 X)$$

bu səbəbdən də $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$ alarıq. Axırkı bərabərliyi isə belə

yaza bilərik:

$$x_1 \cdot x_2 - x_3^2 = 0 \quad (8)$$

③

Əgər $X \notin \gamma$ olarsa onda $(m n, \lambda O_1 X) \neq (m' m, \lambda' O_2 X)$

Buradan da $\frac{x_2}{x_3} \neq \frac{x_3}{x_1}$, və ya X nöqtəsinin koordinatları

(8) tənliyini ödəmir.

Əgər X nöqtəsi $O_1O_2O_3$ üçtəpəlinin tərəfləri üzərində olsa, onda onun koordinatları (8) tənliyini yalnız o nöqtə O_1, O_2, O_3 nöqtələrindən biri ilə üst-üstə düşdükdə ödəyər. Beləliklə, (8) tənliyi γ çoxluğunun tənliyidir. Digər tərəfdən (8) tənliyi oval xətt tənliyidir.

Teorem isbat olundu.

$O_1(1, 0, 0)$ və $O_2(0, 1, 0)$ nöqtələrindən γ xəttinə çəkilən toxunanların tənlikləri $x_2 = 0$ və $x_1 = 0$ olar. Buradan da aşağıdakı nəticəni alırıq.

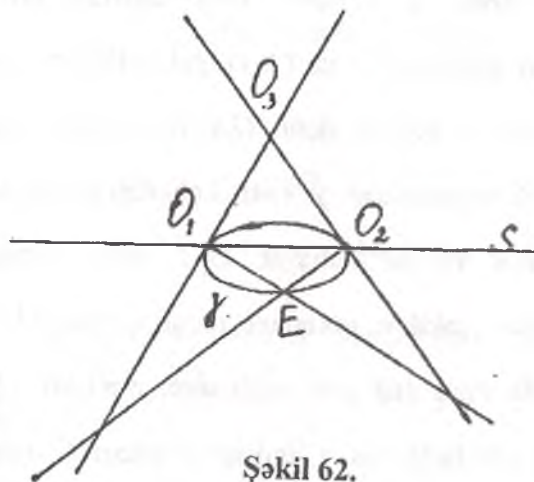
④ **Nəticə.** Əgər f 1-ci teoremdəki inikasdırsa, onda $f(O_1O_2)$ və $f^{-1}(O_1O_2)$ düz xətləri γ xəttinə O_2 və O_1 nöqtələrində çəkilən toxunanlar olacaqlar. İndi də Şteyner teoreminin tərs teoremini isbat edək.

Teorem 2. γ oval xətti üzərində iki O_1 və O_2 nöqtələrini götürək. O_1 və O_2 nöqtələri ilə üst-üstə düşməyən hər bir $M \in \gamma$ nöqtəsi üçün O_1M düz xəttinə qarşı O_2M düz xəttini, O_1 nöqtəsindən γ xəttinə çəkilən toxunana qarşı O_2M düz xəttini və ən nəhayət O_1O_2 düz xəttinə qarşı O_2 nöqtəsindən çəkilən toxunanı qarşı qoyan O mərkəzi O_1 nöqtəsində olan düz xətt bağlısının, mərkəzi O_2 nöqtəsində olan düz xətt bağlısına f inikası, mərkəzi O_1 nöqtəsində olan

düz xətt bağısının mərkəzi O_2 nöqtəsində olan düz xətt bağısına perspektiv olmayan proyektiv inikasıdır.

İsbatı. Proyektiv müstəvidə $R = (O_1, O_2, O_3, E)$ reperini götürək. Burada O_3 nöqtəsi γ xəttinə O_1 və O_2 nöqtələrindən çəkilən toxunanların kəsişmə nöqtəsi E isə γ xətti üzərində O_1 və O_2 nöqtələrindən fərqli ixtiyari nöqtədir.

Tutaq ki, γ xəttinin qurduğunuz reperdə tənliyi $\sum_{i,j}^3 a_{ij}x_i x_j = 0$ olur. $O_1 \in \gamma$ və $O_2 \in \gamma$ olduğu üçün $a_{11} = a_{22} = 0$ olacaq. $x_2 = 0$ və $x_1 = 0$ γ xəttinə O_1 və O_2 nöqtələrində çəkilən toxunanlar olduqları üçün $a_{13} = 0$ və $a_{23} = 0$ alarıq. (Bax toxunanın tənliyinə)



Şəkil 62.

Beləliklə γ oval xəttinin qurduğumuz reperdə tənliyi

$$2a_{12}x_1x_2 + a_{33}x_3x_3 = 0$$

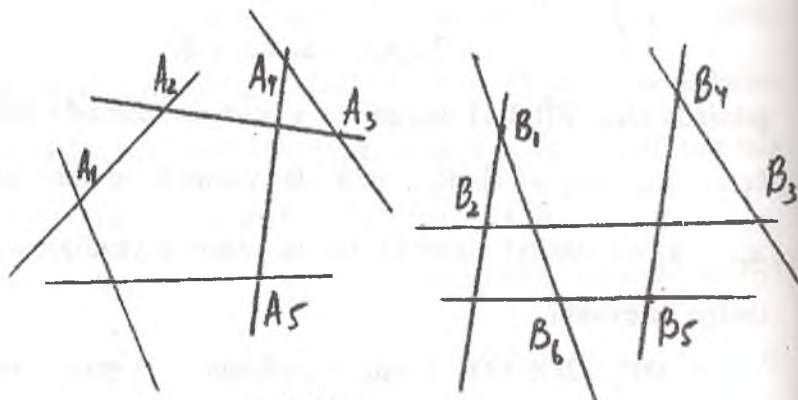
şəklində olar. $E(1, 1, 1)$ nöqtəsi də γ xəttinin üzərində olduğu üçün $2a_{12} + a_{33} = 0$ alarıq, bunu da yuxarıda nəzərə alsaq $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ tənliyi alınar ki, bu da yuxarıda yazdığımız (8) tənliyi ilə eynidir.

O_1O_3, O_1O_2, O_1E düz xətlərini uyğun olaraq O_2O_1, O_2O_3, O_2E düz xətlərinə inikas eləyən mərkəzi O_1 nöqtəsində olan düz xətlər bəqlisinin mərkəzi O_2 nöqtəsində olan düz xətlər bəqlisinə f' proyektiv inikasa baxaq. Şteyner teoreminə görə bu inikasdə uyğun düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinin çoxluğu (8) tənliyi ilə təyin olunan xətt olar. Biz də eyni tənliyi γ oval xətti üçün aldıq.

Teorem isbat olundu.

Tərif. Tutaq ki, proyektiv müstəvidə ümumi vəziyyətdə olan və müəyyən nizam ilə götürülmüş altı $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ nöqtələri verilib. Bu nöqtələrdən və altı $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ düz xətlərindən əmələ gələn fiqura altıtəpəli deyilir və $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ kimi işarə

olunur. Verilən nöqtlərə altıtəpəlinin təpə nöqtələri, A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 və A_6A_1 düz xətlərinə



Şəkil 63.

altıtəpəlinin tərəfləri deyilir. A_1A_2 və A_4A_5 , A_2A_3 və A_5A_6 , A_3A_4 və A_6A_1 tərəfləri altıtəpəlinin qarşı tərəfləri deyilir.

63-cü şəkildə iki $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ və $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ altıtəpələri təsvir olunmuşdur. İkinci altıtəpəlidə B_1B_2 və B_4B_5 , B_2B_3 və B_5B_6 , B_3B_4 və B_6B_1 tərəfləri qarşı tərəflərdir.

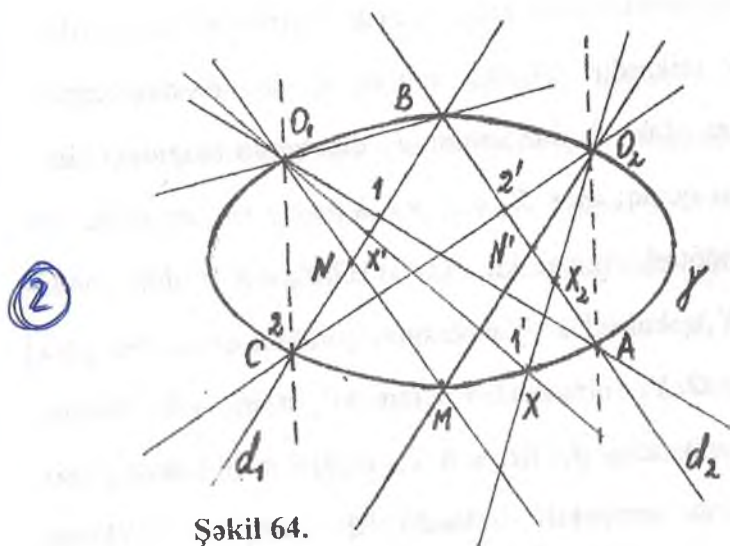
Teorem 3. (Paskal teoremi) İkitərtibli oval xəttin daxilinə çəkilmiş altıtəpəlinin qarşı tərəflərinin kəsişmə nöqtələrinin üçü də bir düz xətt üzərindədir.

①

İsbatı. O_1ABCO_2M altıtəpəlisinin təpə nöqtələri γ ikitərtibli xəttinin üzərindədir.

İsbat edək ki,

$$O = O_1A \cap CO_2, \quad N' = AB \cap O_2M \quad \text{və} \quad N = BC \cap MO_1$$



Şəkil 64.

nöqtələri bir düz xətt üzərindədir (Şəkil 64).

Tutaq ki, f mərkəzi O_1 nöqtəsində olan düz xətlər bağlısının mərkəzi O_2 olan düz xətlər bağlısına Şteyner teoreminin tərs teoremindəki kimi γ oval xəttinin əmələ gətirdiyi proyektiv inikasdır. BC düz xəttini d_1 ilə, BA düz xəttini d_2 ilə işarə edək. d_1 düz xəttini d_2 düz xəttin aşağıdakı kimi φ inikasını quraq: əgər $X_1 \in d_1$ və $X_2 \in d_2$ nöqtəsi üçün elə $X \in \gamma$ nöqtəsi varsa ki, $O_1X_1 \cap O_2X_2 = X$ olur, onda $\varphi(X_1) = X_2$ qəbul edək. f inikasının qurulma qaydasına görə $f(O_1X_1) = O_2X_2$ olmasından alınır ki, $\varphi: d_1 \rightarrow d_2$ inikası proyektiv inikasdır. $d_1 \cap d_2 = B$ və $\varphi(B) = B$ olmasından isə alınır ki, φ perspektiv inikasdır. Bu perspektiv inikası mərkəzi isə $O = O_1A \cap CO_2$ nöqtəsidir. $N' = \varphi(N)$ olmasından isə alınır ki, N' , O və N nöqtələri bir düz xətt üzərindədir.

③

Teorem isbat olundu.

Teorem 4. (Paskal teoreminin tərsi). Əgər altıtəpəlinin qarşı tərəflərinin kəsişmə nöqtələrinin hər üçü bir düz xəttə aid olarlarsa, onda bu altıtəpəlinin təpə nöqtələrinin hamısı eyni bir ikitərtibli oval xəttin üzərindədir.

İsbatı. Tutaq ki, O_1ABCO_2M verilən altıtəpəlidir. Bu altıtəpəlinin qarşı tərəflərinin kəsişmə nöqtələrini

$$O = O_1A \cap CO_2, N' = AB \cap O_2M \text{ və } N = BC \cap MO_1$$

işarə edək. Mərkəzi O_1 olan düz xətlər bağlısının mərkəzi O_2 olan düz xətlər bağlısına elə bir f proyektiv inikasına baxaq ki,

$$f(O_1A) = O_2A, \quad f(O_1B) = O_2B, \quad f(O_1C) = O_2C$$

olsun. Şteyner teoreminə görə f inikasında uyğun düz xətlərin kəsişmə nöqtələri çoxluğu γ ikitərtibli oval xətti əmələ gətirir.

O_1, O_2, A, B, C nöqtələri bu oval xəttin üzərindədirlər.

Göstərək ki, M nöqtəsi də bu oval xəttin üzərində olar.

④

Düz xətlər bağlısının f proyektiv inikası $d_1 = BC$ və $d_2 = BA$ düz xətləri arasında $\varphi: d_1 \rightarrow d_2$ proyektiv inikası əmələ gətirər. Bu inikada $B = \varphi(B)$ olduğundan φ bir O mərkəzli perspektiv inikas olar. Teoremin şərtinə görə O, N, N' nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından $N' = \varphi(N)$ olar. Bu isə o deməkdir ki, $O_2N' = f(O_1N)$ olur. Bu səbəbdən də $M = O_1N \cap O_2N'$ nöqtəsi γ oval xəttinin üzərində olar. Teorem isbat olundu.

§32. Proyektiv nöqtəyi – nəzərdən Afin həndəsəsi

Hər şeydən əvvəl Afin fəzasının tərifini bir daha oxucuya xatırladaq.

Tərif. Tutaq ki, bizə həqiqi ədədlər meydanı üzərində n -ölçülü V vektor fəzası və elementlərini nöqtə adlandıracağımız boş olmayan E çoxluğu verilib. $E \times E$ çox-

luğunun V çoxluğuna inikas eləyən elə bir $\sigma : E \times E \rightarrow V$ inikası var ki, o aşağıdakı iki şərti ödəyir:

1) İxtiyari $A \in E$ nöqtəsi və $\vec{p} \in V$ vektoru üçün elə yeganə $X \in E$ nöqtəsi var ki, $\sigma(A, X) = \vec{p}$

2) İxtiyari $A, B, C \in E$ nöqtələri üçün

$$\sigma(A, B) + \sigma(B, C) = \sigma(A, C) \text{ (Üçbucaq aksiomu).}$$

Onda E çoxluğuna V vektor fəzası üzərində n -ölçülü Afin fəzası deyilir və A_n ilə işarə edilir. $A, B \in E$ nöqtələri üçün $\sigma(A, B)$ vektorunu isə $\vec{AB}$ kimi işarə edəcəyik.

1-ölçülü Afin fəzasını Afin düz xətti və ya sadəcə düz xətt, 2-ölçülü Afin fəzasını isə Afin müstəvisi və ya sadəcə müstəvi adlandıracağıq.

P_2 proyektiv müstəvisində hər hansı d_0 proyektiv düz xəttini qeyd edək. $P_2 \setminus d_0$ çoxluğunun nöqtələrini latın əlifbasının baş hərfləri ilə, d_0 çoxluğunun nöqtələrini isə $A_0, B_0, \dots$ və s. işarə edərik.

Göstərək ki, $A_2 = P_2 \setminus d_0$ çoxluğunda təbii şəkildə Afin müstəvisi strukturunu vermək olar.

P_2 proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzasını V ilə, d_0 proyektiv düz xəttini doğuran ikiölçülü vektor fəzasını W_0 ilə işarə edək.

V fəzasında W_0 altfəzasına daxil olmayan hər hansı $\vec{e}_0$ vektorunu qeyd edək. A_2 çoxluğunun hər bir M nöqtəsi üçün bu nöqtəni doğuran elə bir $\vec{m} \in V \setminus W_0$ vektoru seçək ki, $\vec{m} - \vec{e}_0 \in W_0$ olsun. $\vec{m}$ vektoruna M nöqtəsinin normallaşdırılmış doğuranı deyəcəyik. V fəzası üçün $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in W_0$ olmaq şərti ilə $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_0$ bazis vektorlarını seçək. M nöqtəsinin hər hansı $\vec{m}'$ doğuran vektorunu götürək. $\vec{m}' \notin W_0$ olar.

$$\vec{m}' = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_0$$

olsun. $\vec{m}' \notin W_0$ olduğundan $\gamma \neq 0$ olar.

$$\vec{m} = \frac{1}{\gamma} \vec{m}' = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2 + \vec{e}_0$$

olarsa, onda $\vec{m} - \vec{e}_0 = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2 \in W_0$ alarıq.

Deməli tələb olunan $\vec{m}$ vektorunu seçdik. Bu vektor M nöqtəsinin normallaşdırılmış doğuranıdır.

Fərz edək ki, $\vec{m}_1$ vektoru M nöqtəsinin başqa bir normallaşdırılmış doğuran vektorudur. Onda elə λ həqiqi ədədi var ki, $\vec{m}_1 = \lambda \vec{m}$ olar. $\vec{m}_1 - \vec{e}_0 \in W_0$ olmasından alınır ki, $\vec{m}_1 - \vec{m} = \left(\vec{m}_1 - \vec{e}_0 \right) - \left(\vec{m} - \vec{e}_0 \right) \in W_0$ olur. Buradan $\lambda \vec{m} - \vec{m} \in W_0$ və ya $(\lambda - 1)\vec{m} \in W_0$ alınır. $\vec{m} \notin W_0$ olmasından alınır ki, $\lambda - 1 = 0$, $\lambda = 1$ olur. Yəni $\vec{m}_1 = \vec{m}$ aldıq. Daha sonra onu da qeyd edək ki, əgər $\vec{m}, \vec{n} \in V \setminus W_0$ vektorları uyğun olaraq $M, N \in A_2$ nöqtələrinin normallaşdırılmış doğuran vektorları olarsa onda $\vec{n} - \vec{m} = \left(\vec{n} - \vec{e}_0 \right) - \left(\vec{m} - \vec{e}_0 \right) \in W_0$ alırıq. $M, N \in A_2$ nöqtələri üçün $\sigma(M, N) = \vec{n} - \vec{m}$, burada m və n vektorları qeyd etdiyimiz kimi M və N nöqtələrinin normallaşdırılmış doğuranlardır. $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m}$ işarə edək.

Göstərək ki, qurduğumuz σ inikası Afin fəzasının tərifindəki şərtləri ödəyir:

- 1) $M \in A_2$ nöqtəsi və $\vec{a} \in W_0$ vektoru üçün elə bir $X \in A_2$ nöqtəsi seçək ki, $M \vec{X} = \vec{a}$ olsun. Bunun üçün X

nöqtəsi olaraq doğuran vektoru $\vec{x} = \vec{m} + \vec{a}$ olan nöqtəni götürək. Burada $\vec{m}$ M nöqtəsinin normallaşdırılmış doğuranıdır.

Göstərək ki, $\vec{x}$ normallaşdırılmış doğurandır.

$$\vec{x} - \vec{e}_0 = \vec{m} + \vec{a} - \vec{e}_0 = \left(\vec{m} - \vec{e}_0 \right) + \vec{a} \in W_0$$

$$\vec{MX} = \vec{x} - \vec{m} = \vec{m} + \vec{a} - \vec{m} = \vec{a}$$

X nöqtəsi yeganədir. Əgər başqa bir X' nöqtəsi üçün

$\vec{MX} = \vec{a}$ olarsa və X' nöqtəsinin normallaşdırılmış doğuranı

$\vec{x}'$ -dirsə $\vec{MX} = \vec{MX'}$ olmasından $\vec{x}' - \vec{m} = \vec{x} - \vec{m}$ alarıq. Buradan

isə $\vec{x}' = \vec{x}$ alınır. Yəni X' nöqtəsi X nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

Birinci sətirin ödəndiyi isbat olundu.

2) Tutaq ki, $M, N, P \in A_2$ ixtiyari nöqtələr və $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ bu nöqtələrin normallaşdırılmış doğuran vektorlarıdır. Onda

$$\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{n} - \vec{m} + \vec{p} - \vec{n} = \vec{p} - \vec{m} = \vec{MP}$$

İkinci şərtin doğruluğu da isbat olundu. Deməli, A_2 çoxluğu W_0 ikiölçülü vektor fəzası üzərində ikiölçülü Afin fəzasıdır, başqa sözlə Afin müstəvisidir. Əgər A_2 Afin

müstəvisindən genişlənmiş müstəviyə keçmək istəsək onda A_2 -yə d_0 düz xəttini əlavə etmək lazımdır, yəni $\overline{A_2} = A_2 \cup d_0$.

Burada d_0 genişlənmiş Afin müstəvisinin qeyri – məxsusi düz xətti olur, A_2 -nin nöqtələri isə məxsusi nöqtələr olurlar. d_0 düz xəttinin nöqtələri də qeyri – məxsusi nöqtələr olurlar.

Proyektiv müstəvinin d_0 qeyri – məxsusi düz xəttindən fərqli digər düz xətlərini $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ və s. ilə işarə edək.

A_0 nöqtəsi $\overline{a}$ düz xəttinin qeyri – məxsusi nöqtəsi olarsa $\overline{a} \setminus \{A_0\}$ çoxluğuna Afin düz xətti deyərik və onu a ilə işarə edərik. $a = \overline{a} \setminus \{A_0\}$.

A_0 nöqtəsinə a düz xəttinə uyğun qeyri məxsusi nöqtə deyəcəyik.

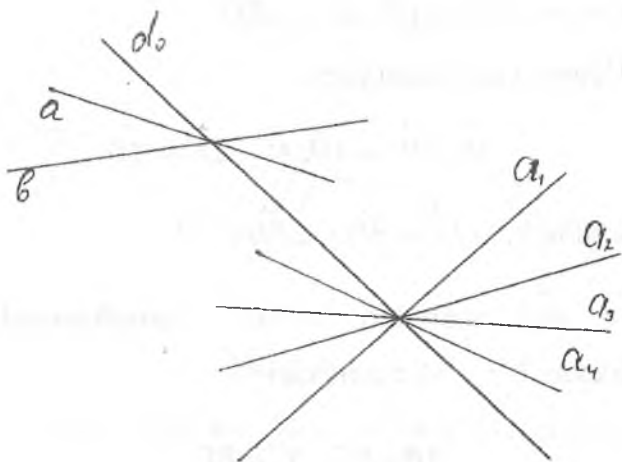
Lemma 1. Əgər M və N nöqtələri ℓ düz xəttinin üzərində olarlarsa, onda $\overrightarrow{MN}$ vektoru ℓ düz xəttinə uyğun L_0 qeyri – məxsusi nöqtənin doğurarı olar.

İsbatı. Tutaq ki, ℓ düz xəttini doğuran altfəzadır. $\vec{m}$ və $\vec{n}$ vektorları M və N nöqtələrini doğuran normallaşdırılmış vektorlardır. Yuxarıda isbat etdiyimiz kimi $\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} \in W_0$

olar. Digər tərəfdən $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} \in W$ olar. Bu səbəbdən də $\vec{MN} \in W_0 \cap W$ olur. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{MN}$ vektoru L_0 nöqtəsinin doğuranıdır. Lemma isbat olundu.

Tərif: Əgər iki Afin düz xəttinə uyğun olan qeyri – məxsusi nöqtələr üst-üstə düşürsə, belə düz xətlərə paralel düz xətlər deyilir.

Başqa sözlə əgər $a \cap b = \emptyset$ olarsa, onda a və b düz xətləri paralel olurlar və tərsinə (şəkil 65)



Şəkil 65.

Beləliklə burda verdiyimiz paralellik anlayışı adi Afin fəzalarındakı paralellik anlayışı ilə tamamilə üst-üstə düşür.

Beləki, cüt – cüt paralel olan $a_1, a_2, \dots, a_n$ xətlərinin hamısına eyni bir qeyri – məxsusi nöqtə uyğun gəlir.

İsbat etdiyimiz lemmadan birbaşa alınır ki, AB və CD düz xətləri onda və ancaq onda paralel olurlar ki, $\vec{AB}$ və $\vec{CD}$ vektorları kolleniar olsunlar.

Lemma 2. Əgər $AB \parallel CD$ və $AC \parallel BD$ olarsa, onda $\vec{AB} = \vec{CD}, \vec{AC} = \vec{BD}, \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

İsbatı. Lemmanın şərtindən alınır ki, elə λ və μ həqiqi ədədləri var ki, $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}, \vec{AC} = \mu \vec{BD}$.

Üçbucaq qaydasına görə

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}, \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}.$$

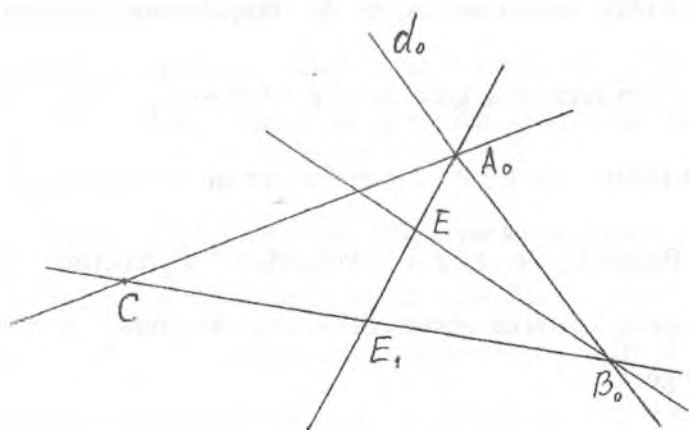
Buradan alınır ki, $\lambda \vec{CD} + \vec{BD} = \mu \vec{BD} + \vec{CD}$.

$\vec{CD}$ və $\vec{BD}$ vektorları kolleniar olmadıqlarından bu bərabərlikdən $\lambda = \mu = 1$ alınır, yəni

$$\vec{AB} = \vec{CD}, \vec{AC} = \vec{BD}.$$

$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ və $\vec{BD} = \vec{AC}$ olmasından isə $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ alınır. Lemma isbat olundu.

Tutaq ki, P_2 müstəvisində $A_0, B_0 \in d_0$ olmaq şərti ilə hər hansı $R_0 = (A_0, B_0, C, E)$ reperi seçilib, (şəkil 66) onda bu reper A_2 müstəvisində müəyyən bir $R_0^A = (C, E_1, E_2)$ reperi təyin edər. Burada $E_1 = A_0E \cap B_0C$, $E_2 = B_0E \cap A_0C$. R_0^A reperinə R_3 reperinə uyğun Afin reperi deyəcəyik.



Şəkil 66.

A_2 afin müstəvisində hər hansı M nöqtəsini götürək. Bu nöqtənin R_0 reperində koordinatlarını (x_1, x_2, x_3) və R_0^A reperində koordinatlarını (x, y) işarə edək.

$$\text{Göstərək ki, } x = \frac{x_1}{x_3} \text{ və } y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Əvvəla $M \in A_2$ və $M \notin d_0$ olduğundan $x_3 \neq 0$ olar. Deməli A_2 müstəvisinin bütün nöqtələri üçün yuxarıdakı bərabərliklərin mənası var.

$\vec{c}, \vec{e}, \vec{m}$, ilə uyğun olaraq C, E, M nöqtələrinin normallaşdırılmış doğuranlarını işarə edək. 1-ci lemmaya görə $\vec{e}_1 = \vec{CE}_2$ və $\vec{e}_2 = \vec{CE}_1$ vektorları A_0 və B_0 nöqtələrinin doğuranları olurlar. 2-ci lemmaya görə isə $\vec{CE} = \vec{CE}_1 + \vec{CE}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Bu bərabərlikdən alınır ki, $\vec{e} - \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, və ya $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{c}$.

Beləliklə $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{c}, \vec{e}$ vektorları R_0 reperinə görə uyğunlaşmış vektorlar sistemidirlər. Afın koordinat sisteminin tərifinə görə

$$\vec{CM} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2.$$

Buradan isə $\vec{m} - \vec{c} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2$, $\vec{m} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + \vec{c}$.

$\vec{m}$ vektoru M nöqtəsini doğurduğu üçün, bu nöqtənin R_0 reperində koordinatları $(x, y, 1)$ olar. Deməli (x_1, x_2, x_3) koordinatları ilə $(x, y, 1)$ koordinatları mütənasib olurlar. Bu isə

o deməkdir ki, $x_1 = \lambda x$, $x_2 = \lambda y$, $x_3 = \lambda \cdot 1$. Buradan da $x = \frac{x_1}{x_3}$

və $y = \frac{x_2}{x_3}$ alınır.

§33. Proyektiv müstəvinin proyektiv çevrilmələr qrupu və onun altqrupları

Analitik həndəsə və cəbr kursundan bilirik ki, müstəvinin bütün biyektiv çevrilmələri çoxluğu çevirmələrin kompozisiyası əməlinə nəzərən qrup əmələ gətirir. Praktikada isə ən çox istifadə olunan bu qrup özü yox, onun müxtəlif altqrupları olur.

Tutaq ki, bizə hər hansı P_2 proyektiv müstəvisi verilib. Onun bütün proyektiv çevrilmələri çoxluğunu H işarə edək. Göstərək ki, H çoxluğu P_2 müstəvisinin bütün biyektiv çevrilmələri qrupunun alt qrupunu əmələ gətirir. Həqiqətən əgər $f_1 \in H$ və $f_2 \in H$ olarsa, yəni f_1 və f_2 dörd nöqtənin mürəkkəb nisbətini saxlayarsa, onda $f_1 \circ f_2 \in H$ olar. İkinci fərz edək $f \in H$, göstərək ki, $f^{-1} \in H$ olur. A, B, C nöqtələrinin bir proyektiv düz xətt üzərində olduğunu fərz edək. Onda $A' = f^{-1}(A)$, $B' = f^{-1}(B)$, $C' = f^{-1}(C)$ nöqtələri də proyektiv çevrilmələrin xassəsinə görə bir proyektiv düz xətt üzərində olar. Bu zaman f^{-1} həm də dörd nöqtənin mürəkkəb

nisbətini saxlayar. Buradan da alınır ki, proyektiv çevrilmələrin H çoxluğu P_2 müstəvisinin bütün çevrilmələr qrupunda altqrup əmələ gətirir. Proyektiv həndəsə isə proyektiv müstəvinin bu qrupa nəzərən invariant qalan xasələrini öyrənir.

İndi isə proyektiv müstəvidə qeyd olunmuş d_0 düz xətti verildikdə $A_2 = P_2 / d_0$ çoxluğunda qurduğumuz afin fəzasına baxaq. H qrupunun elə elementlərinə ayıraq ki, onlar P_2 müstəvisinin d_0 düz xəttini özünə keçirir. Belə proyektiv çevrilmələr çoxluğunu H_0 ilə işarə edək. H_0 çoxluğuna daxil olan bütün proyektiv çevrilmələr A_2 çoxluğunun özünə keçirər. Deməli H_0 çoxluğu H qrupunda A_2 çoxluğunu saxlayan çevrilmələr çoxluğu kimi altqrup əmələ gətirər.

Tutaq ki, $f \in H_0$ ixtiyari proyektiv çevirmədir. $R_0 = (A_0, B_0, C, E)$ isə $A_0, B_0 \in d_0$ şərtini ödəyən hər hansı proyektiv reperdir. f çevirməsi d_0 düz xəttini özünə keçirdiyindən və bu xəttin tənliyi $x_3 = 0$ olduğundan onun analitik ifadəsi belə olar.

$$\begin{aligned} \rho x_1^* &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x_2^* &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x_3^* &= \phantom{c_{31}x_1 + c_{32}x_2} + c_{33}x_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Çünkü, $c_{31} = c_{32} = 0$, $c_{33} \neq 0$, $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ olar. A_2 afin müstəvisi

üçün $x_3 \neq 0$ və $x_3 \neq 0$ olmadığından alınır ki, (1) tənliklərinin hər hansı x_3 -ə bölsək alarıq:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x_0 + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned} \quad (2)$$

Burada ρ sabit həqiqi ədəd olduğundan $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}$, $i, j = 1, 2$,

$$\text{və} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \rho x'_1, \quad y' = \rho x'_2$$

(2) çevirmə düsturları isə A_2 Afin müstəvisinin $R_0 = (A_2, B_0, C, E)$ reperinə uyğun $R_0^A = (C, E_1, E_2)$ reperində Afin çevirmələrinin düsturlarıdır. (Bax bundan əvvəlki paragrafa)

Növbəti mərhələdə H_0 altqrupunun elə bir H_1 altqrupunun quracağı ki, həmin altqrup müstəvinin oxşarlıq çevirmələrinin əmələ gətirdiyi qrupa izomorf olar. Bu qrupun invariantların öyrənən həndəsənin isə evklid həndəsəsi olduğu məlumdur. Başqa sözlə proyektiv nöqtəyi-nəzərdən evklid həndəsəsinə baxırıq.

d_0 düz xətti üzərində iki I_1 və I_2 kompleks –qoşma nöqtələr götürək. Bu nöqtələri dövrü nöqtələr adlandıracağıq. d_0 düz xəttini onun üzərində qeyd olunmuş I_1 və I_2 nöqtələri ilə birlikdə d_1 ilə işarə edərək. İndi proyektiv müstəvinin proyektiv çevirmələrinin elə H_1 çoxluğuna baxaq ki, ixtiyari $f \in H_1$ üçün aşağıdakı şərt ödənilir: ya $I_1 = f(I_1)$ və $I_2 = f(I_2)$ ya da ki, $I_1 = f(I_2)$ və $I_2 = f(I_1)$. Göstərək ki, H_1 çoxluğu H_0 -də altqrup əmələ gətirir. Həqiqətən $\forall f \in H_1$ proyektiv çevirməsi üçün $f(d_0) = d_0$ olduğundan $f \in H_0$ olar. Deməli $H_1 \subset H_0$ olur. Sonra ixtiyari $f_1, f_2 \in H_1$ üçün $f_1 \circ f_2 \in H_1$ olur. $f \in H_1$ isə $f^{-1} \in H_1$ olur. Deməli H_1 , H_0 -də altqrupdur. Digər tərəfdən hər bir $f \in H_1$ çevirməsi A_2 müstəvisinin müəyyən bir $\hat{f}$ afin çevirməsini əmələ gətirir. Bu çevirmələrin əmələ gətirdiyi $\hat{H}_1$ qrupu isə A_2 afin müstəvisinin afin çevirmələr qrupunun bir altqrupudur.

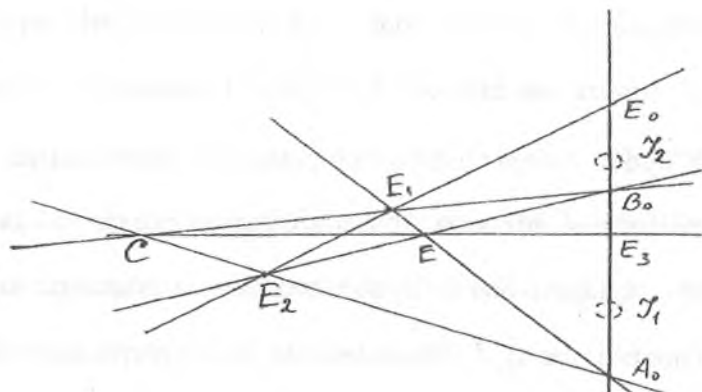
Sonrakı mərhələdə H_1 -yə daxil olan çevirmələrin analitik ifadəsini yazmağa çalışırıq. Bunun üçün $\bar{A}_2 = A_2 \cup d_0$ müstəvisində elə bir proyektiv reper seçək ki, bu reperdə I_1 və I_2 nöqtələri koordinatları ilə $I_1(1, i, 0)$ və $I_2(1, -i, 0)$ olsunlar.

Belə reperləri R_i ilə işarə edək və isbat edək ki, belə reperlər var və sonsuz saydadırlar. (A_0, B_0, C, E) reperinin B_0 təpəsi olaraq d_i düz xəttinin ixtiyari nöqtəsini, C təpəsi olaraq $\bar{A}_2$ müstəvisində d_i düz xətti üzərində olmayan ixtiyari nöqtəsini götürək. A_0 təpəsi olaraq d_i düz xəttinin elə nöqtəsini və E vahid nöqtəsi olaraq d_i üzərində olmayan elə nöqtə götürək ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

$$(I_1 I_2, B_0 A_0) = -1, \quad (I_1 I_2, B_0 E_3) = i \quad (3)$$

olsun. Burada E_3 ilə CE və d_0 düz xətlərinin kəsişmə nöqtələri işarə olunmuşdur (Bax şəkil 67). Bundan qabaqkı paraqrafdakı 1-ci lemmaya görə A və E nöqtələrinin seçilməsi həmişə mümkündür.

Belə seçilən reperin tələb olunan reper olduğunu göstərək: seçdiyimiz reperdə dövrü nöqtələrin koordinatlarını uyğun olaraq $I_1(1, a + bi, 0)$ və $I_2(1, a - bi, 0)$ kimi işarə edək. Koordinat düz xətti üzərində nöqtənin koordinatları haqqında teoremə əsasən $R_3 = (A_0, B_0, E_3)$ koordinat sistemində I_1, I_2, A_0, B_0, E_3 nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq belə olurlar:



Şəkil 67.

$$I_1(1, a + bi), I_2(1, a - bi), A_0(1, 0), B_0(0, 1), E_3(1, 1)$$

Mürəkkəb nisbətin hesablanması haqqında teoremə görə

$$(I_1 I_2, B_0 A_0) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a + bi & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a - bi & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a + bi & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a - bi & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - bi}{a + bi}$$

$$(I_1 I_2, B_0 E_3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a + bi & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a - bi & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a + bi & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a - bi & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - a + bi}{1 - a - bi}$$

$$(3) \text{ şərtlərinə görə } \frac{a - bi}{a + bi} = -1 \quad \text{və} \quad \frac{1 - a + bi}{1 - a - bi} = i$$

olduğunu qəbul etsək onda $a = 0$, $b = 1$ alarıq. Deməli, I_1 və I_2 nöqtələri koordinatları ilə $I_1(1, i, 0)$ və $I_2(1, -i, 0)$ olur.

Deməli qurduğumuz reper R_1 reperidir. A_0 və C nöqtələrinin seçilməsi zamanı yol verdiyimiz sərbəstlik isə, belə reperlərin sonsuz sayda olduğunu göstərir.

Bundan sonra fərz edərik ki, götürdüyümüz reperlər R_i reperləridir. A_2 müstəvisində isə götürdüyümüz hər bir R_i reperinə uyğun $R_i^A = (C, E_1, E_2)$ afin reperinə Dekart reperi deyəcəyik (şəkil 67).

Beləliklə, hər bir $f \in H_1$ proyektiv çevirməsinin R_0 reperində analitik ifadəsi ilə onun R_i reperində də analitik ifadəsi olacaq:

$$\begin{aligned}\rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x_3' &= \phantom{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 +} + c_{33}x_3\end{aligned}\quad (4)$$

$$c_{31} = c_{32} = 0, \quad c_{33} \neq 0 \quad \left| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right| \neq 0, \quad \rho \neq 0, \quad \rho \in \mathbb{C}$$

($\mathbb{C}$ ilə kompleks ədədlər çoxluğu işarə olunub). Lakin $f \in H_1$ proyektiv çevirmələri üçün c_{ij} əmsalları daha başqa şərtləri ödəməlidirlər. f çevirməsi dövrü nöqtələri dövrü nöqtələrə inikas elədiyindən aşağıdakı iki hal mümkündür:

$$1) \quad f(I_1) = I_1, \quad f(I_2) = I_2 \quad \text{olarsa,} \quad f(I_1) = I_1 \quad \text{və} \quad (4)$$

düsturlarından alarıq ki, $\rho = c_{11} + c_{12}i$, $\rho i = c_{21} + c_{22}i$

Buradan isə $c_{11} = c_{22}$, $c_{12} = -c_{21}$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu şərtlər ödənəndə $f(I_2) = I_2$ alınar.

b) ikinci hala baxaq: $f(I_1) = I_2$, $f(I_2) = I_1$.

$f(I_1) = I_2$ bərabərliyindən və (4) düsturlarından alırıq ki, $c_{11} = -c_{22}$, $c_{12} = c_{21}$. Bu şərtlər ödəndikdə isə $f(I_2) = I_1$ bərabərliyi də ödənilir. Aşağıdakı kimi yeni işarələmələr qəbul edək:

$$c_{11} = a', c_{21} = b', c_{13} = c_1', c_{23} = c_2'.$$

Onda (4) düsturları

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a' x_1 - \varepsilon b' x_2 + c_1' x_3 \\ \rho x_2' &= b' x_1 + \varepsilon a' x_2 + c_2' x_3 \\ \rho x_3' &= + c_{33}' x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Burada çevirmənin matrisinin determinatı

$$\begin{vmatrix} a' & -\varepsilon b' & c_1' \\ b' & \varepsilon a' & c_2' \\ 0 & 0 & c_{33}' \end{vmatrix} = (a'^2 + b'^2) \varepsilon \cdot c_{33}' \neq 0, \quad \varepsilon \text{ isə } \pm 1\text{-ə}$$

bərabər olar. a) halında $\varepsilon = 1$, b) halında isə $\varepsilon = -1$ olur.

Yenidən A_2 afin müstəvisinə qayıdaq. bu müstəvi hər bir $f \in H_1$ çevrilməsi d_0 düz xəttini özünə keçirdiyindən A_2 çoxluğunun bütün nöqtələri üçün $x_3 \neq 0$ olur. Buradan isə

alınır ki, $x'_3 \neq 0$ olur. (5) tənliklərinin sağ tərəflərini $c_{33}x_3 - \vartheta$, sol tərəflərini isə ρx_3 -ə bölüb

$$\left(\rho x'_3 = c_{33}x_3\right) \quad a = \frac{a'}{c_{33}}, \quad b = \frac{b'}{c_{33}}, \quad c_1 = \frac{c'_1}{c_{33}}, \quad c_2 = \frac{c'_2}{c_{33}},$$

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \frac{x'_1}{x_3}, \quad y' = \frac{x'_2}{x_3},$$

işarə etsək, alarıq.

$$\begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c_1 \\ y' &= bx + \varepsilon ay + c_2 \end{aligned} \quad (6)$$

$a = k \cos \varphi$, $b = k \sin \varphi$ olmaq şərti ilə, yəni $k \in (0; +\infty)$, $\varphi \in [-\pi; \pi]$ parametrlərini daxil etsək alarıq.

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi) + c_1 \\ y' &= k(x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi) + c_2 \end{aligned} \quad (7)$$

(7) tənlikləri isə evklid müstəvisinin oxşarlıq çevrilməsindəki tənlikləri ilə eyni şəkildədirlər. Bu səbəbdən evklid müstəvisinin oxşarlıq çevrilmələri qrupu ilə H_1 qrupları izomorf olurlar. Onda A_2 müstəvisinin H_1 qrupuna nəzərən invariant olan xassələri elə evklid həndəsəsinin xassələri ilə eyni olacaq.

IV FƏSİL

TƏSVİR ÜSULLARI

§34. Müstəvilərin afin inikası

Bu paraqrafda E_3 fəzasında (Üçölçülü evklid fəzası) müstəvilərin afin inikalarından bəhs edəcəyik. Afin inikaları analitik həndəsə kursunda öyrəndiyimiz afin çevrilmələri anlayışının ümumiləşməsidir.

Tərif 1. Tutaq ki, bizə E_3 fəzasında iki $\bar{\sigma}$ və σ müstəviləri verilib. $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ isə $\bar{\sigma}$ müstəvisinin σ müstəvisinə elə qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır ki, o $\bar{\sigma}$ müstəvisinin bir düz xətt üzərində yerləşən ixtiyari üç $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ nöqtəsini σ müstəvisinin elə üç

$$M_1 = f(\bar{M}_1), \quad M_2 = f(\bar{M}_2), \quad M_3 = f(\bar{M}_3)$$

nöqtəsinə keçirir ki, M_1, M_2, M_3 nöqtələri bir düz xətt üzərindədirlər və onların $(M_1 M_2, M_3)$ sadə nisbəti $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ nöqtələrinin $(\bar{M}_1 \bar{M}_2, \bar{M}_3)$ sadə nisbətinə bərabər olur. Onda f inikasına $\bar{\sigma}$ müstəvisinin σ müstəvisinə afin inikası deyilir.

Deməli $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ inikası onda afin inikası olar ki, bir düz xətt üzərində olmayan $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3 \in \bar{\sigma}$ nöqtələri üçün

$$(\overline{M_1 M_2}, \overline{M_3}) = (f(\overline{M_1}), f(\overline{M_2}), f(\overline{M_3}))$$

olur.

Tərif 2. E_3 fəzasında $\overline{\sigma}$ müstəvisini σ müstəvisinə inikas eləyən $f: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ inikası üçün elə $k > 0$ həqiqi ədədi varsa ki, ixtiyari $\overline{A}, \overline{B} \in \overline{\sigma}$ nöqtələri və onların $A = f(\overline{A}), B = f(\overline{B})$ obrazları üçün $AB = k \overline{AB}$ şərti ödənilir, onda f -ə oxşarlıq inikası deyilir.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, oxşarlıq inikası afin inikasıdır.

Tərif 3. E_3 fəzasında müstəvinin özünə afin inikasına onun afin çevrilməsi deyilir. Beləliklə afin çevrilməsi afin inikasının xüsusi halı olur.

Bildiyimiz kimi müstəvidə ona paralel, kolleniar olmayan iki $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorları və bir O nöqtəsi $O \vec{e}_1, \vec{e}_2$ afin koordinat sistemi əmələ gətirir. Analitik həndəsədən bizə məlum olan afin reperinin tərifini bir daha xatırlayaq.

Tərif 4. Müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan, nizamlanmış üç A, B, C nöqtələrinə afin reperi deyilir və $R = (A, B, C)$ ilə işarə olunur.

A, B, C nöqtələrinə reperin təpə nöqtələri deyilir. A nöqtəsinə həm də reperin başlanğıc nöqtəsi deyilir. Əgər

$AB = AC = 1$ və $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ olarsa, onda $R = (A, B, C)$ afin

reperinə ortonormallaşdırılmış reper deyilir. Fərz edək ki, bizə

müstəvidə $O \vec{e}_1, \vec{e}_2$ afin koordinat sistemi verilib.

$\vec{OE}_1 = \vec{e}_1, \vec{OE}_2 = \vec{e}_2$ olarsa, bu koordinat sistemə uyğun

$R = (O, E_1, E_2)$ afin reperini alırıq. Tərsinə, əgər bizə

$R = (O, E_1, E_2)$ afin reperi verilibsə, onda

$\vec{e}_1 = \vec{OE}_1, \vec{e}_2 = \vec{OE}_2$ götürməklə $O \vec{e}_1, \vec{e}_2$ afin koordinat sistemi

alırıq. Müstəvinin ixtiyari M nöqtəsinin $O \vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinat

sistemindəki (x, y) koordinatlarına, onun həm də

$R = (O, E_1, E_2)$ reperinə nəzərən koordinatları da deyilir.

Aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. Tutaq ki, bizə E_3 üçölçülü afin fəzasında iki

$\bar{\sigma}$ və σ müstəviləri və bu müstəvilər üzərində uyğun olaraq

$\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ və $R = (A, B, C)$ reperləri verilib. Onda $\bar{R}$

reperinin təpə nöqtələrini R reperinin uyğun təpə nöqtələrinə

keçirən $\bar{\sigma}$ müstəvisinin σ müstəvisinə bir və yalnız bir afin

inikası var. Bu zaman $\bar{M} \in \bar{\sigma}$ nöqtəsi elə bir $M \in \sigma$ nöqtəsinə

keçir ki, M nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları, $\overline{M}$ nöqtəsinin $\overline{R}$ reperinə nəzərən koordinatlarına bərabər olur.

İsbatı. Göstərək ki, elə bir $g: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikası var ki, o $\overline{R}$ reperini R reperinə keçirir. $\overline{R}$ reperini görə koordinatları (x, y) olan $\overline{M} \in \overline{\sigma}$ nöqtəsinə qarşı, R reperinə görə koordinatları (x, y) olan $M \in \sigma$ nöqtəsinə qoyan $g: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ inikasına baxaq. $\overline{R}$ reperinə görə $\overline{A}$ nöqtəsinin koordinatları $(0, 0)$, $\overline{B}$ nöqtəsinin koordinatları $(1, 0)$ və $\overline{C}$ nöqtəsinin koordinatları $(0, 1)$ olar. Eyni zamanda R reperinə görə A nöqtəsinin koordinatları $(0, 0)$, B nöqtəsinin koordinatları $(1, 0)$ və C nöqtəsinin koordinatları $(0, 1)$ olar. Deməli, $g(\overline{A}) = A$, $g(\overline{B}) = B$ və $g(\overline{C}) = C$ olur. g inikasının qarşılıqlı birqiymətli olduğu aydındır. Onun afin inikası olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}$ nöqtələri $\overline{\sigma}$ müstəvisinin $\overline{R}$ reperinə nəzərən koordinatları uyğun olaraq $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$ olan, bir düz xəttə aid üç nöqtəsidir. onda bu nöqtələrin g inikasında obrazları olan

$$M_1 = g(\overline{M}_1), \quad M_2 = g(\overline{M}_2), \quad M = g(\overline{M}) \quad \text{nöqtələrinin}$$

R reperinə nəzərən koordinatları da uyğun olaraq

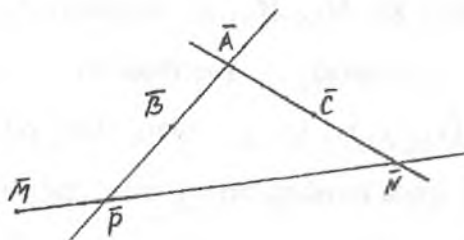
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$ olar. Əgər $\overline{M}$ nöqtəsi $\overline{M_1 M_2}$ parçasını $\lambda = \left(\overline{M_1 M_2}, \overline{M} \right)$ nisbətində bölərsə, onda məlum düsturlara görə

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

olar.

M nöqtəsi də $M_1 M_2$ parçasını eyni λ nisbətində bölmür. Yəni g inikası üç nöqtənin sadə nisbətini saxlayır. Deməli g inikası afin inikasıdır.

İndi də göstərək ki, g inikası $\overline{R}$ reperini R reperinə keçirən yeganə afin inikasıdır. Əksini fərz edək; fərz edək ki, başqa bir $g_1: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikası da var ki, $g_1(\overline{A}) = A, g_1(\overline{B}) = B$ və $g_1(\overline{C}) = C$ olur. İxtiyari $\overline{M} \in \overline{\sigma}$ nöqtəsi götürək. $\overline{M}$ nöqtəsindən $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ düz xətlərini uyğun olaraq $\overline{P}$ və $\overline{N}$ nöqtələrində kəsən hər hansı düz xətt keçirək.



Şəkil 68.

Afin inikasin tərifinə görə $(AB, g(\overline{P})) = (\overline{AB}, \overline{P})$ və $(AB, g_1(\overline{P})) = (\overline{AB}, \overline{P})$ olmasından alınır ki, $(AB, g_1(\overline{P})) = (AB, g(\overline{P}))$. Buradan isə $g_1(\overline{P}) = g(\overline{P})$ alınır. Eyni qayda ilə $g_1(\overline{N}) = g(\overline{N})$ alınır.

Daha sonra

$$(g_1(\overline{P})g_1(\overline{N}), g_1(\overline{M})) = (\overline{P} \overline{N}, \overline{M})$$

və

$$(g(\overline{P})g(\overline{N}), g(\overline{M})) = (\overline{P} \overline{N}, \overline{M})$$

olmasından isə $(g_1(\overline{P})g_1(\overline{N}), g_1(\overline{M})) = (g(\overline{P})g(\overline{N}), g(\overline{M}))$ alınır.

$g_1(\overline{P}) = g(\overline{P})$, $g_1(\overline{N}) = g(\overline{N})$ olmasından isə $g_1(\overline{M}) = g(\overline{M})$

alırıq. Teorem isbat olundu. Bu teoremin köməyi ilə asanlıqla isbat olunur ki, afin inikasında düz xətt –düz xəttə, paralel düz xətlər –paralel düz xətlərə, yarımmüstəvi –yarımmüstəviyə, parça –parçaya, şüa –şüaya, bucaq-bucağa, reper isə repərə keçir.

Tərif: Əgər $\overline{\sigma}$ müstəvisin σ müstəvisinə inikas eləyən elə bir $f: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikası varsa ki, $\overline{F} \subset \overline{\sigma}$ fiqurunu $F \subset \sigma$ fiquruna keçirir, onda $\overline{F}$ və F fiqurlarına afin –ekvivalent fiqurlar deyilir.

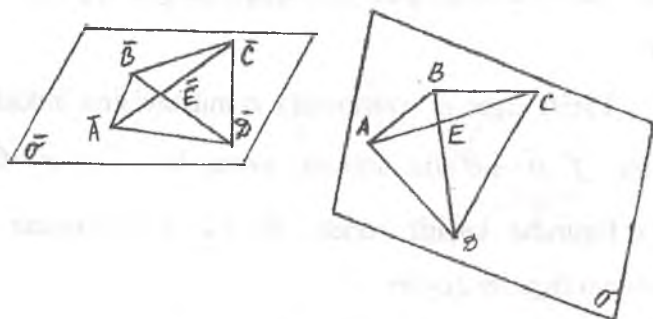
İsbat etdiyimiz teoremdən alınır ki, uyğun olaraq $\bar{\sigma}$ və σ müstəviləri üzərində yerləşən ixtiyari iki üçbucaq afin-ekvivalent fiqurlardır.

Teorem 2. Uyğun olaraq $\bar{\sigma}$ və σ müstəviləri üzərində yerləşən iki $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ və $ABCD$ dördbucaqlıları onda və ancaq onda afin-ekvivalent olurlar ki,

$$(\bar{AC}, E) = (\bar{AC}, \bar{E}), (BD, E) = (\bar{BD}, \bar{E}) \text{ şərtləri ödənsin.}$$

Burada $\bar{E}$ ilə $\bar{AC}$ və $\bar{BD}$ düz xətlərinin, E ilə AC və BD düz xətlərinin kəsişmə nöqtələri işarə olunmuşdur.

İsbatı. Fərz edək $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ və $ABCD$ dördbucaqlıları afin-ekvivalentdirlər. Yəni elə bir $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikası var ki, $f(\bar{A}) = A, f(\bar{B}) = B, f(\bar{C}) = C, f(\bar{D}) = D$ olur. Bu o deməkdir ki, f inikası $\bar{AC}$ düz xəttini AC düz xəttinə, $\bar{BD}$ düz xəttini isə BD düz xəttinə inikas edir.



Şəkil 69.

Onda $f \overline{AC}$ və $\overline{BD}$ düz xətlərinin $\overline{E}$ kəsişmə nöqtəsini AC və BD düz xətlərinin E kəsişmə nöqtəsinə keçirdər, yəni $f(\overline{E}) = E$ olar.

f afin inikası olduğundan $\overline{AC}, \overline{E} = (AC, E)$ və $(\overline{BD}, \overline{E}) = (BD, E)$ olur.

Tərsinə, indi fərz edək ki, $\overline{ABCD}$ və $ABCD$ dördbucaqlıları üçün $(\overline{AC}, \overline{E}) = (AC, E)$ və $(\overline{BD}, \overline{E}) = (BD, E)$ şərtləri ödənilir. İsbat edək ki, $\overline{ABCD}$ və $ABCD$ dördbucaqlıları afin-ekvivalentdirlər. $\overline{R} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ və $R = (A, B, C)$ reperlərinə baxaq. Birinci teoremə görə $\overline{R}$ reperini R reperinə keçirən f afin inikası

$$f(\overline{A}) = A, f(\overline{C}) = C, (\overline{AC}, \overline{E}) = (AC, E)$$

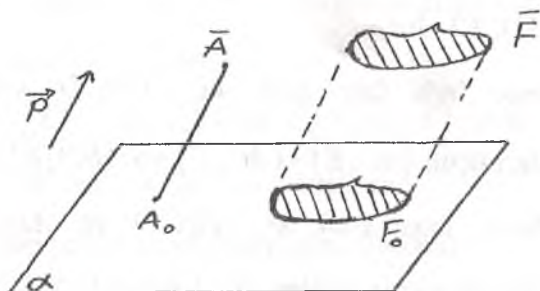
münasibətlərindən alınır ki, $f(\overline{E}) = E$ olur. Deməli, $\overline{BE}$ düz

xətti BE düz xəttinə inikas edər. $(\overline{BD}, \overline{E}) = (BD, E)$

bərabərliyindən alınır ki, $f(\overline{D}) = D$ olur. Yəni $\overline{ABCD}$ və $ABCD$ dördbucaqlıları afin ekvivalentdirlər. Teorem isbat olundu.

§35. Paralel proyektəndirmə. Paralel proyektəndirmədə müstəvi fiqurların təsviri

Üçölçülü evklid fəzasında hər hansı σ müstəvisi və bu müstəviyə paralel olmayan $\vec{p}$ vektoru götürək.



Şəkil 70.

Fəzanın hər hansı $\bar{A}$ nöqtəsini götürək. $\left(A_0, \vec{p} \right)$ düz xətti ilə σ müstəvisinin kəsişmə nöqtəsini A_0 ilə işarə edək. Bu nöqtəyə $\vec{p}$ vektoru istiqamətində paralel proyektəndirmədə σ müstəvisi üzərində $\bar{A}$ nöqtəsinin proyeksiyası adlanır. Əgər σ müstəvisi və $\vec{p}$ vektoru qabaqcadan verilmişsə onda A_0 nöqtəsinə qısaca $\bar{A}$ nöqtəsinin paralel proyeksiyası deyilir. Əgər $\vec{p}$ vektoru σ müstəvisinə perpendikulyar olarsa, onda A_0 nöqtəsinə $\bar{A}$ nöqtəsinin ortoqonal proyeksiyası adlanır.

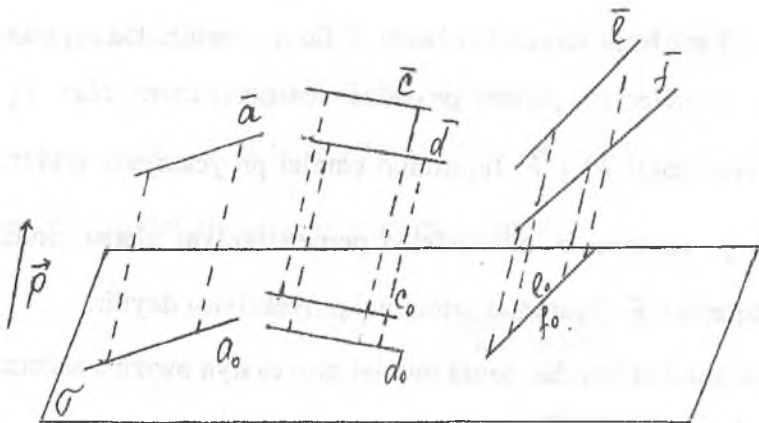
Fərz edək fəzada hər hansı $\overline{F}$ fiquru verilib. Bu fiqurun bütün nöqtələrinin paralel proyeksiyalarından ibarət olan F_0 fiquruna (şəkil 70) $\overline{F}$ fiqurunun paralel proyeksiyası deyilir. Əgər $\vec{p}$ vektoru σ müstəvisinə perpendikulyar olarsa, onda F_0 fiquruna $\overline{F}$ fiqurunun ortoqonal proyeksiyası deyilir. Bu paragrafda bundan sonra paralel proyeksiya əvəzinə sadəcə proyeksiya deyəcəyik.

İndi isə paralel proyeksiyalamanın bir sıra xassələrini göstərək. Bu xassələrin isbatı isə demək olar ki, aydındır.

Xassə 1°. Düz xəttin proyeksiyası düz xətdir (bax şəkil 71).

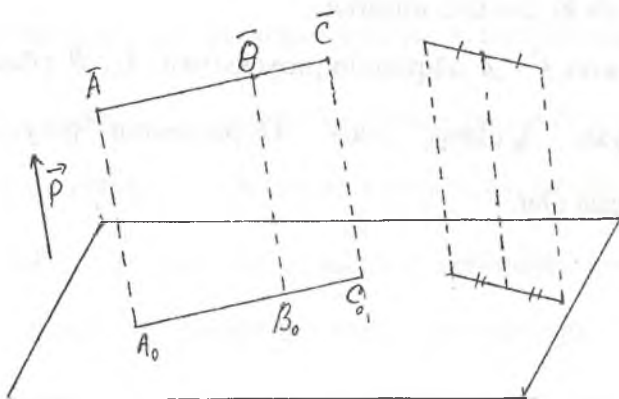
Xassə 2°. Paralel düz xətlərin proyeksiyaları ya paraleldirlər, ya da ki, üst-üstə düşürlər.

Xassə 3°. $\overline{A}$ nöqtəsinin proyeksiyası A_0 , $\overline{B}$ nöqtəsinin proyeksiyası B_0 olarsa, onda $\overline{AB}$ parçasının proyeksiyası A_0B_0 parçası olar.



Şəkil 71.

Xəssə 4. Paralel proyeksiyalamada bir düz xətt üzərində olan üç nöqtənin sadə nisbəti saxlanılır; xüsusi halda parçanın orta nöqtəsinin proyeksiyası onun proyeksiyasının orta nöqtəsidir (bax şəkil 72).



Şəkil 72.

Xassə 5. Paralel parçaların proyeksiyaları ya paraleldirlər, ya da ki, bir düz xəttə aid olurlar.

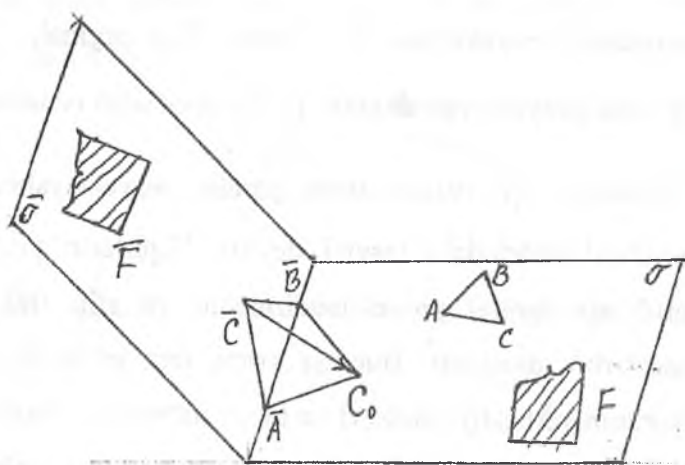
Xassə 6. Paralel parçaların və ya bir düz xətt üzərində olan parçaların proyeksiyaları onların özləri ilə mütənasib olurlar.

Bu xassələrdən sonra müstəvi fiqurların təsviri anlayışını verə bilərik. Hər hansı σ müstəvisi və bu müstəviyə paralel olmayan $\vec{p}$ vektorunu götürək. σ müstəvisini **təsvir müstəvisi** və $\vec{p}$ vektorunun istiqamətini proyektəndirmə istiqaməti adlandıraraq. İxtiyari $\overline{F}$ fiqurunun $\vec{p}$ istiqamətində τ müstəvisi üzərindəki proyeksiyası F_0 olarsa, $\overline{F}$ -ə original, F_0 -ə isə originalın proyeksiyası deyilir. F_0 ilə oxşar olan istənilən fiqura $\overline{F}$ fiqurunun $\vec{p}$ istiqamətində paralel proyeksiyalamada σ müstəvisi üzərindəki **təsviri** deyilir. Fiqurların təsvirlərinin qurulması paralel proyektəndirmənin və afin inikaslarının xassələrinə əsaslanır. Bundan sonra fərz edək ki, müstəvi fiqurların yerləşdiyi müstəvi və təsvir müstəvisi elədir ki, biribiri ilə kəsişirlər və heç biri proyektəndirmə istiqamətinə paralel deyil.

Teorem. Fərz edək ki, $\overline{F}$ və F fiqurları uyğun olaraq kəsişən σ və σ müstəviləri üzərindədirlər. F fiqura onda və

ancaq onda $\overline{F}$ fiqurunun təsviri olar ki, $\overline{F}$ və F afin ekvivalent fiqurlar olsun.

İsbatı. Tutaq ki, F fiquru σ təsvir müstəvisi üzərində τ müstəvisi üzərindəki $\overline{F}$ fiqurunun təsviridir. $\overline{F}$ fiqurunun σ müstəvisi üzərindəki F_0 proyeksiyasına baxaq. Paralel proyektəndirmə afin inikası olduğundan $\overline{F}$ və F_0 fiquruna oxşar olduğundan onlar da afin-ekvivalent olarlar. Beləliklə $\overline{F}$ fiqur F_0 fiquru ilə, F_0 fiquru isə F fiquru ilə afin-ekvivalentdir. Buradan çıxır ki, $\overline{F}$ ilə F afin-ekvivalent fiqurlardır.



Şəkil 73.

İndi tərsinə: fərz edək ki, σ müstəvisi üzərindəki $\overline{F}$ fiquru, σ müstəvisi üzərindəki F fiquru ilə afin-

ekvivalentdirlər. İsbat edək ki, F finuruna $\overline{F}$ fiqurunun təsviri kimi baxmaq olar.

Fərz edək $f: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikası $\overline{F}$ fiqurunun F fiquruna keçirən afin inikasıdır, $f(\overline{F}) = F$. $\overline{\sigma}$ müstəvisi üzərində elə bir $\overline{R} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ reperi götürək ki, $\overline{A}$ və $\overline{B}$ nöqtələri σ və $\overline{\sigma}$ müstəvilərinin kəsişmə xətti üzərində olsunlar (şəkil 73). Bu reperi f inikasındakı obrazını $R = (A, B, C)$ işarə edək.

σ müstəvisi üzərində elə bir C_0 nöqtəsi götürək ki,

$$\Delta ABC \sim \Delta \overline{A}\overline{B}C_0 \text{ olsun.}$$

$\vec{q} = \vec{CC}_0$ vektoru istiqamətində $f_1: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$, paralel proyektəndirməsi $\overline{R} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ reperi $R_0 = (\overline{A}, \overline{B}, C_0)$ reperiə keçirər. R_0 reperi R reperiə keçirən oxşarlıq çevirməsi $f_2: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ olsun. Aydındır ki, $f_2 \cdot f_1: \overline{\sigma} \rightarrow \sigma$ inikası $\overline{R} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ reperi $R = (A, B, C)$ reperiə keçirən afin inikası olar. Bir reperi digərinə keçirən afin inikasının yeganəliyini haqqında teoremə əsasən $f = f_2 \cdot f_1$ olar. Beləliklə $F = f_2 \cdot f_1(\overline{F})$ olar. $f_1(\overline{F}) = F_0$ olsun. F_0 $\overline{F}$ fiqurunun $\vec{q}$ vektoru istiqamətində paralel proyektəndirmədə obrazı olar. F isə F_0 fiquruna oxşardır, çünki $f_2(F_0) = F$ olur və

f_2 oxşarlıq çevirməsidir. Deməli F figuru $\bar{F}$ fiqurunun təsviri olar. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən istifadə edərək bəzi çoxbucaqlıların qurulması qaydasını göstərək:

Üçbucağın təsviri: Afin inikaslarında reperin obrazı haqqında teoremə əsasən $\bar{\sigma}$ müstəvisi üzərində $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ reperini σ müstəvisi üzərində $R = (A, B, C)$ reperinə keçirən yalnız bir afin inikası var. Buradan da çıxır ki, ixtiyari iki $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ və ABC üçbucaqları afin ekvivalent fiqurlardır. Beləliklə aldığımız

$\bar{\sigma}$ müstəvisi üzərində olan ixtiyari $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ üçbucağının təsviri olaraq, $\bar{\sigma}$ müstəvisi ilə kəsişən σ müstəvisi üzərindəki ixtiyari üçbucağ ABC üçbucağını götürmək olar.

Dördbucaqlının təsviri: Üçbucaqlardan fərqli olaraq təsvir müstəvisindəki ixtiyari dördbucaqlı verilən dördbucaqlının təsviri ola bilmir. σ təsvir müstəvisindəki dioqanalların kəsişmə nöqtəsi E olan $ABCD$ dördbucaqlı, σ ilə kəsişən $\bar{\sigma}$ müstəvisi üzərindəki, dioqnallarının kəsişmə nöqtəsi $\bar{E}$ olan $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ dördbucaqlısının təsviri olması üçün

$$(\bar{A}\bar{C}, \bar{E}) = (AC, E) \text{ və } (\bar{B}\bar{D}, \bar{E}) = (BD, E)$$

şərtləri ödənilməlidir (bax §33, teorem 2).

Deməli $\overline{ABCD}$ dördbucaqlısının təsvirini qurmaq üçün təsvir müstəvisində $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ nöqtələrinin təsviri olaraq bir düz xətt üzərində olmayan ixtiyari A, B, C nöqtələrini götürürük. Sonra AC parçası üzərində elə E nöqtəsi götürürük ki, $(AC, E) = (\overline{AC}, \overline{E})$ şərti ödənsin. Bundan sonra BE şüası üzərində elə bir D nöqtəsi götürürük ki, $(BD, E) = (\overline{BD}, \overline{E})$ şərti ödənilir. Alınan $ABCD$ dördbucaqlısı $\overline{ABCD}$ dördbucaqlısının təsviri olar.

Trapesiyanın təsviri. $\overline{ABCD}$ trapesiyasında $(\overline{AC}, \overline{E})$ və $(\overline{BD}, \overline{E})$ nisbətləri bu trapesiyanın oturacaqlarının nisbətlərinə bərabər olur. Buradan da çıxır ki, $\overline{\sigma}$ müstəvisi üzərindəki $\overline{ABCD}$ trapesiyasının $\overline{\sigma}$ ilə kəsişən σ müstəvisi üzərindəki təsviri olaraq oturacaqlarının nisbəti $\overline{ABCD}$ trapesiyasının oturacaqlarının nisbətinə bərabər olan ixtiyari $ABCD$ trapesiyasını götürmək olar.

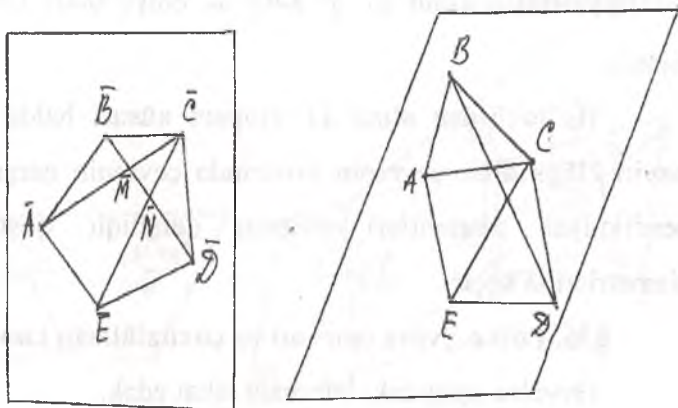
Paraleloqramın təsviri: Paraleloqramın diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarı bölündüyündən, ixtiyari iki paraleloqram afin-ekvivalent fiqur olur. Deməli, təsvir müstəvisində paraleloqramın təsviri olaraq ixtiyari paraleloqramı götürmək olar. Xüsusi halda kvadratın və düzbucaqlının təsviri olaraq ixtiyari paraleloqramı götürmək olar.

Tərəflərinin sayı dördən çox olan çoxbucaqlıların təsviri. Tərəflərinin sayı dördən çox olan ixtiyari çoxbucaqlının təsvirini qurmaq üçün onunla yanaşı duran ixtiyari üç təpəsinin təsviri olaraq bir düz xətt üzərində olmayan ixtiyari üç nöqtə götürülür. qalan təpələrin təsviri isə dördbucaqlıların afin- ekvivalentliyi haqqında teoremə əsasən qurmaqla tapılır.

Tutaq ki, $\overline{ABCD E}$ çoxbucaqlısının təsvirini qurmaq lazımdır. Bir düz xətt üzərində olmayan ixtiyari A, B, C nöqtələri götürürük. $\overline{AC}$ parçası üzərində $\overline{AC}$ və $\overline{BD}$ dioqnallarının kəsişmə nöqtəsi olan $\overline{M}$ nöqtəsi qeyd olunur. AC parçası üzərində isə elə M nöqtəsi tapılır ki, $(AC, M) = (\overline{AC}, \overline{M})$ olsun. Sonra isə BM şüası üzərində elə D nöqtəsi qurulur ki, $(BD, M) = (\overline{BD}, \overline{M})$ olur. Sonrakı mərhələdə $\overline{BD}$ və $\overline{CE}$ dioqnallarının $\overline{N}$ kəsişmə nöqtəsi qeyd olunur. CN şüası üzərində elə E nöqtəsi götürülür ki,

$$(CE, N) = (\overline{CE}, \overline{N})$$

şərti ödənsin. Alınan $ABCDE$ çoxbucaqlısı $\overline{ABCD E}$ çoxbucaqlısının təsviri olar. bu qayda ilə ixtiyari çoxbucaqlının təsvirini qurmaq olar (bax şəkil74).



Şəkil 74.

Çevrənin təsviri. Çevrənin təsviri aşağıdakı təklifə əsasən qurulur.

Təklif. İxtiyari afin inikasında ellips (xüsusi halda çevrə) ellipsə keçir.

İsbatı. Tutaq ki, bizə $\bar{\sigma}$ müstəvisi üzərində $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ ortonormal reperində $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tənliyi ilə $\bar{\gamma}$ ellipsi verilib. $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ afin inikasında $\bar{R}$ reperinin obrazı olan $R = (A, B, C)$ afin reperində də $\bar{\gamma}$ ellipsinin obrazı olan γ xətti də koordinatları eyni tənliyi ödəyən nöqtələrdən ibarət olar. $\frac{1}{a^2 \cdot b^2} > 0$ olduğundan ikitərtibli xətlərin ümumi

nəzəriyyəindən alınır ki, γ xətti də ellips olar. Təklif isbat olundu.

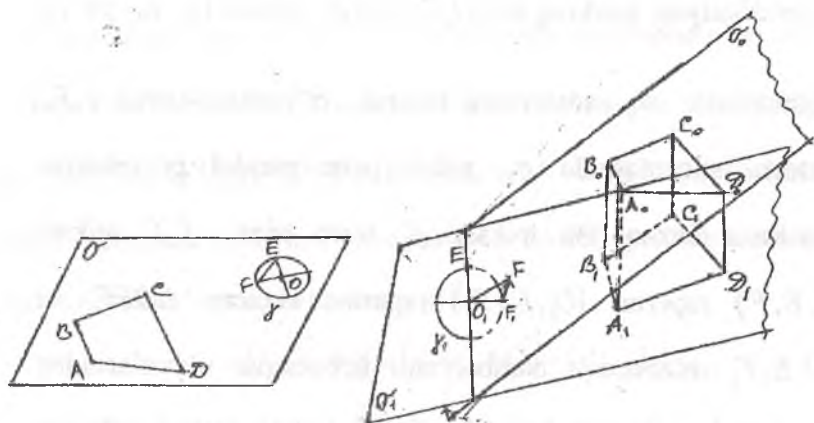
Bu təklifdən alınır ki, ellipsin xüsusi halda çevrənin təsviri ellips olur. çevrənin təsvirində çevrənin qarşılıqlı perpendikulyar diametrləri ellipsin qarşılıqlı qoşma olan diametrlərinə keçir.

§36. Polke-Şvars teoremi və çoxüzlülərin təsviri

Əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Tutaq ki, σ_1 müstəvisi üzərində yerləşən $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısı σ müstəvisi üzərində yerləşən $ABCD$ dördbucaqlısı ilə afin-ekvivalentdir. Onda elə bir σ_0 müstəvisi var ki, bu müstəviyə σ_1 müstəvisini perpendikulyar olan vektor istiqamətində paralel proyeksiyalamada $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısının proyeksiyası $ABCD$ dördbucaqlısına oxşar olacaqdır.

İsbatı: σ müstəvisinin σ_1 müstəvisini $f: \sigma \rightarrow \sigma_1$ afin inikasında $ABCD$ dördbucaqlısının $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısına inikas etdiyini fərz edək.



Şəkil 75.

σ müstəvisi üzərində hər hansı γ çevrəsi götürək. f inikasında γ çevrəsinin obrazı $\gamma_1 = f(\gamma)$ ellipsinə baxaq. Əgər γ_1 -də çevrə olarsa onda afin inikaslarının xassəsinə görə f oxşarlıq inikası olar və $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$ olar. Bu zaman σ_0 müstəvisi olaraq elə σ_1 müstəvisinin özünü, $A_0B_0C_0D_0$ olaraq $A_1B_1C_1D_1$ -i götürmək olar.

İndi γ_1 fiqurunun O_1E_1 və O_1F_1 yarımoxları müxtəlif olan ellips olduğu hala baxaq. O_1, E_1, F_1 nöqtələrinin proobrazlarını O, E_0, F ilə işarə edək. O_1E_1 və O_1F_1 qoşma diametrlər olduqda, OE və OF γ çevrəsinin perpendikulyar radiusları olar. F_1 nöqtəsindən σ_1 müstəvisinə elə bir F_1F_0

perpendikulyarı qaldıraq ki, $O_1F_0 = O_1E_1$ olsun. O_1 , E_1 və F_0 nöqtələrindən σ_0 müstəvisini keçirək. σ_1 müstəvisinin $\overrightarrow{F_1F_0}$ vektoru istiqamətində σ_0 müstəvisinə paralel proyeksiyalanmasına baxaq. Bu inikası f_0 işarə edək. f_0f inikası (O, E, F) reperini (O_1, E_1, F_0) reperinə keçirər. $\triangle OEF$ və $\triangle O_1E_1F_1$ düzbucaqlı bərabəryanlı üçbucaqlar olduqlarından oxşar olurlar. Bu səbəbdən də $f_0 \cdot f$ inikası oxşarlıq inikası olar. Deməli $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısının σ_1 müstəvisinə perpendikulyar olan $\overrightarrow{F_1F_0}$ vektoru istiqamətində σ_0 müstəvisinə paralel proyeksiyalamada obrazı olan $A_0B_0C_0D_0$ dördbucaqlısı $ABCD$ -yə oxşar olar. Lemma isbat olundu.

Teorem. (Polke-Şvars) σ müstəvisinin üzərində olan $ABCD$ dördbucaqlısının müəyyən nizam ilə götürülmüş təpə nöqtələrini fəzada ixtiyari $R^* = (A^*, B^*, C^*, D^*)$ reperinə bərabər olan reperin təsviri kimi götürülə bilər.

İsbatı: A^*C^* parçası üzərində elə N^* nöqtəsi götürək. $(A^*C^*, N^*) = (AC, E)$ və B^*D^* parçası üzərində elə bir M^* nöqtəsi götürək ki, $(B^*D^*, M^*) = (BD, E)$ şərti ödənsin. Burada E $ABCD$ dördbucaqlısının AC və BD diaqonallarının

kəsişmə nöqtəsidir. N^*M^* düz xəttinə perpendikulyar olan σ_1 müstəvisini keçirən R^* reperinin σ_1 müstəvisinə ortoqonal proyeksiyasını $(A_1B_1C_1D_1)$ işarə edək. N^* və M^* nöqtələrinin proyeksiyasını eyni bir F_1 nöqtəsi olar. Dördbucaqlıların afin-ekvivalentliyi haqqında teoremə görə

$$(A_1C_1, E_1) = (A^*C^*, M^*) = (AC, E)$$

və

$$(B_1D_1, E_1) = (B^*D^*, N^*) = (BD, E)$$

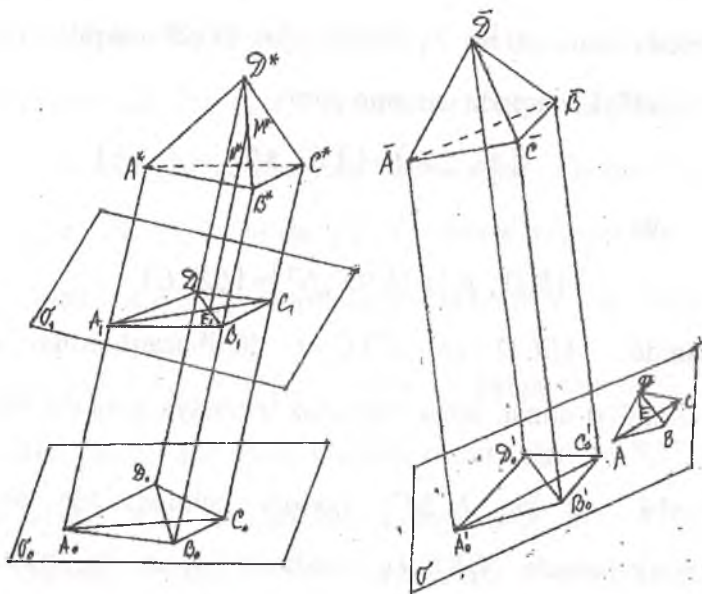
olmasından $ABCD$ və $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlılarının afin-ekvivalentliyi alınar. İsbat etdiyimiz lemmaya görə elə bir σ_0

müstəvisi var ki, $\overrightarrow{N^*M^*}$ vektoru istiqamətində paralel proyeksiyalamada $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısının bu müstəvisi üzərindəki $A_0B_0C_0D_0$ proyeksiyası $ABCD$ -yə oxşar olar.

A^*, A_1, A_0 nöqtələri N^*M^* düz xəttinə paralel olan eyni bir düz

xətt üzərində olduqlarından A_0 nöqtəsi $\overrightarrow{N^*M^*}$ vektoru istiqamətində paralel proyeksiyalamada σ_0 müstəvisi üzərində A^* nöqtəsinin proyeksiyası olar. Eyni qayda ilə OB_0 nöqtəsi B^* nöqtəsinin, C_0 nöqtəsi C^* nöqtəsinin və D_0 nöqtəsi D^*

nöqtəsinin proyeksiyası olar. Beləliklə $A_0B_0C_0D_0$ dördbucaqlısı R^* reperinin proyeksiyası olar (Şəkil 76).



Şəkil 76.

İndi üçölçülü fəzanın σ_0 müstəvisini σ müstəvisinə keçirən hər hansı hərəkətinə baxaq. Bu hərəkətdə $R^* = (A^*, B^*, C^*, D^*)$ reperinin obrazını $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ işarə edək. Bu zaman σ müstəvisi üzərində $A_0B_0C_0D_0$ dördbucaqlısının $A'_0B'_0C'_0D'_0$ obrazı R^* reperinə bərabər olan $\bar{R}$ reperinin proyeksiyası olar.

$$A_0' B_0' C_0' D_0' = A_0 B_0 C_0 D_0 \sim ABCD \text{ olduğundan teorem}$$

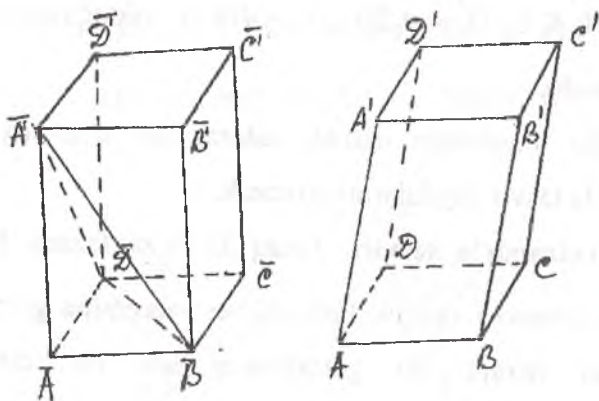
isbat olundu.

Bu teoremdən istifadə edərək bir sıra çoxüzürlərin müstəvidə təsvir qaydalarını göstərək.

Tetraedrin təsviri. Tutaq ki, bizə fəzada hər hansı $\overline{ABCD}$ tetraedri verilib. Polke-Şvars teoreminə görə təpələri müəyyən nizam ilə götürülmüş hər bir dördbucaqlı $\overline{R} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ reperinin təsviri olur. $\overline{R}$ reperi isə $\overline{ABCD}$ tetraedrinin təpələrinin müəyyən nizam ilə verilməsidir. Beləliklə diaqonalları ilə verilən hər bir $ABCD$ dördbucaqlısı $\overline{ABCD}$ tetraedrinin təsviri olur.

Paralelepipedin təsviri. Paralelepipedin bütün üzləri paraleloqram olduğundan təsvirləri də paraleloqram olar.

Tutaq ki, bizə $\overline{ABCD A' B' C' D'}$ paraleloqram-orijinalın təsvirini qurmaq lazımdır. Bunun üçün əvvəlcə təpə nöqtələri $\overline{A}, \overline{B}, \overline{D}, \overline{A'}$ olan tetraedrin təsviri olaraq ixtiyari $ABDA'$ dördbucaqlısını σ müstəvisi üzərində qururuq. Sonra isə həmin dördbucaqlının diaqonalları da nəzərə alınmaqla orda olan üçbucaqların üzərində paraleloqram qurmaqla verilən paralelepipedin təsvirini almış oluruq (Şəkil 77).



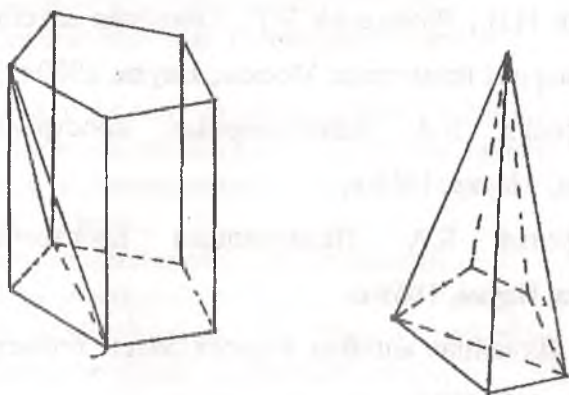
Şəkil 77 .

Prizmanın təsviri. Tutaq ki, bizə hər hansı oturmaqlarının tərəflərinin sayı 4-dən çox olan hər hansı n -bucalı prizmanın təsvirini qurmaq lazımdır. Prizmanın üzləri iki çoxbucalıdan və paraleloqramlardan ibarət olur. Prizmanın oturmaqlarının təsvirini n -bucalıların təsviri kimi qurmaq lazım gəlir. Qalan qurmalar isə paralelepipedin təsvirinin qurulmasına analogi olaraq edilir (Şəkil 78).

Piramidanın təsviri. Piramida oturaçağı çoxbucalı, yan üzləri isə ortaqtəpəli üçbucalar olan çoxüzlüdür.

Piramidanın təsvirini qurmaq üçün əvvəlcə onun oturaçağından üç yanaşı təpə və bir də piramidanın təpə nöqtəsini götürməklə alınan tetraedrin təsviri ixtiyari diaqonalları ilə götürülmüş dördbucalıyı götürürük. Sonra isə oturaçağın çoxbucalıların təsvirini qurmaq qaydası ilə təsviri

qurulur. Təpə nöqtələri piramidanın təpə nöqtəsinin təsviri olan nöqtə ilə birləşdirilir. Beləliklə piramidanın təsviri alınır (Şəkil 78).



Şəkil 78 .

ƏDƏBİYYAT

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Ч. IЫI, Москва, Просвещение 1975 г.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия, Москва, Наука 1978 г.
3. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия, Москва, Наука, 1970 г.
4. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства, Москва, Наука. 1966 г.
5. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства, Москва, Наука, 1969 г.
6. Бер Р. Линейная алгебра и проективная геометрия, Москва, ИЛ, 1955 г.
7. Baxşəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursu, Bakı, «Nurlan» 2008-ci il.
8. Paşayev X.X., Nəcəfov M.A, Analitik həndəsədən müəhazirələr.
9. Сборник задач по геометрии, Под.ред. В.Т.Базылева, Москва, Просвещение.1980 г.
10. Nəsrullayev N.L. Həndəsə məsələləri, Bakı, Maarif, 2004-cü il
11. Певзнер С.Л. Проективная геометрия, Москва, Просвещение, 1980 г.

Mündəricat

Ön söz.....	3
-------------	---

I Fəsil. Müstəvidə həndəsi qurmalar

§1. Xətkeş və pərgar vasitəsi ilə qurma məsələləri. Qurmanın postulatları.....	5
§2. Üç tərəfinə görə üçbucağın qurulması.....	10
§3. Elementar qurmalar. Qurma məsələlərinin həlli sxemi.....	16
§4. Qurma məsələlərinin kəsişmə üsulu ilə həlli.....	23
§5. Qurma məsələlərinin çevirmələr üsulu ilə həlli.....	37
§6. İnversiya. Qurma məsələlərinin inversiya üsulu ilə həlli.....	50
§7. Qurma məsələlərinin cəbri üsulla həlli.....	59
§8. Qurma məsələsinin pərgar və xətkəş vasitəsilə həllinin mümkünlüyü əlaməti. Pərgar və xətkəşlə həll olunmayan klassik qurma məsələləri.....	70

II Fəsil. Proyektiv fəza

§9. Mərkəzi proyektəndirmə.....	77
§10. Proyektiv həndəsənin yaranması.....	79
§11. Proyektiv fəzanın Veyl aksiomları.....	83
§12. Proyektiv müstəvi və proyektiv düz xətt üzərində proyektiv koordinat sistemi.....	88
§13. Proyektiv müstəvidə verilmiş reperin koordinat düz xətləri üzərində əmələ gətirdiyi reperlər.....	98
§14. Proyektiv düz xəttin, proyektiv müstəvinin və proyektiv fəzanın modelləri.....	101
§15. Proyektiv müstəvidə və proyektiv düz xətdə nöqtənin koordinatlarının çevrilməsi.....	110
§16. Proyektiv müstəvidə düz xəttin tənlikləri və düz xəttin koordinatları.....	120
§17. İkilik prinsipi.....	125
§18. Dezarq teoremi.....	130
§19. Düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbəti.....	136

§20. Düz xətlər dəstəsinin dörd düz xəttinin mürəkkəb nisbəti.....	144+
--	------

§21. Müstəvinin proyektiv çevirmələri.....	151
--	-----

§22. Müstəvinin proyektiv çevirmələrinin xassələri.....	159
---	-----

III Fəsil. Proyektiv həndəsənin əsas faktları

§23. Tam dördtəpəli.....	165
--------------------------	-----

§24. Proyektiv müstəvidə qurma məsələləri.....	170
--	-----

§25. Proyektiv düz xətlərin və proyektiv düz xətt dəstələrinin proyektiv inikasları.....	174
--	-----

+ §26. Proyektiv düz xəttin proyektiv çevirmələri.....	182+
--	------

+ §27. Proyektiv müstəvinin xəyali nöqtələri.....	185+
---	------

§28. Proyektiv müstəvidə ikitərtibli xətlər.....	191
--	-----

§29. İkitərtibli xətt ilə düz xəttin kəsişməsi.....	199
---	-----

§30. İkitərtibli xəttə nəzərən qoşma nöqtələr, Polyus və polyar.....	202
--	-----

+ §31. Oval xətlərə aid bəzi konstruktiv məsələlər.....	208+
---	------

§32. Proyektiv nöqtəyi nəzərdən afin həndəsəsi.....	221
---	-----

§33. Proyektiv müstəvinin proyektiv çevirmələr qrupu	
--	--

+ və onun altqrupları.....	231+
----------------------------	------

IV Fəsil. Həndəsi fiqurların təsviri

§34. Müstəvilərin afin inikasları.....	240
--	-----

§35. Paralel proyektəndirmə. Paralel proyektəndirmədə müstəvi fiqurların təsviri.....	248
---	-----

§36. Polke-Şvars teoremi və çoxüzlülərin təsviri.....	258
---	-----

Ədəbiyyat.....	266
----------------	-----

Nəşriyyatın direktoru:
Texniki redaktor:
Korrektorlar:

H.Hacıyev
R.Əliyeva
G.İsmayılova
G.Məmmədova

Çapa imzalanmış 18.01.2010-cu il
Kağız formatı 60x84 1/16, çap vərəqi 17
Sifariş 17, sayı 300, qiyməti sərbəst
ADPU-nun mətbəəsi
Bakı, Ü.Hacıbəyov küçəsi, 34
Tel: 493-74-10