

Y.Ə.Məmmədov, Z.F.Xankişiyev

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

514.2
M-51.
Elmi redaktor: prof. M.H. Yaqubov

Rəy verənlər: AMEA-nm müxbir üzvü, professor
R.V. Hüseynov, dosent N.Ə. Əliyev

YUSİF ƏBÜLFƏT OĞLU MƏMMƏDOV
ZAKİR FƏRMAN OĞLU XANKİŞİYEV

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR. Dərs vəsaiti

Bakı, ADPU nəşriyyatı, 2009, 155 səh.

Dərs vəsaiti Bakı Dövlət Universiteti Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi bakalavr təhsil pilləsinin tədris proqramı əsasında yazılıb. Hər bir fəsildə şərh olunan materialın tələbələr tərəfindən mənimsənilmə-sinə kömək məqsədilə vəsaitə çoxlu sayda misal və məsələlər daxil edilib.

Vəsaitdən riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, mexanika, fizika, kimya, biologiya, informatika, iqtisadiyyat və digər ixtisaslar üzrə təhsil alan tələbələr, eyni zamanda, texniki universitetlərin tələbələri istifadə edə bilərlər.



MÜNDƏRİCAT

Ön/söz	6
I FƏSİL. Birtərtibli adi diferensial tənliklər	7
§1. Əsas anlayışlar və təriflər	7
§2. İnteqrallana bilən bəzi birtərtibli diferensial tənliklər. 11	
1. Dəyişənlərinə ayırıla bilən tənliklər . -8-8	11
2. Bircins tənliklər	13
3. Bircins tənliyə gətirilən tənliklər -3	16
4. Birtərtibli xətti tənliklər	19
5. Bəmulli tənliyi	22
6. Rikkati tənliyi	23
7. Tam diferensiallı tənliklər	25
8. İnteqrallayıcı vuruq	28
MİSALLAR	34
II FƏSİL. Birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələ- sinin həllinin varlığı və yeganəliyi. Məxsusi nöqtələr və məxsusi həllər	37
§1. Həllin varlığı və yeganəliyi	37
§2. Məxsusi nöqtələr	41
§3. Məxsusi həllər	46
MİSALLAR	51
III FƏSİL. Törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli diferensial tənliklər	53
§1. Törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli sadə diferensial tənliklərin həlli -2	53

§2. Ümumi halda parametrlə daxil etmə üsulu . Laqranj və Klero tənlikləri	56
M İ S A L L A R	61
IV FƏSİL. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər və birtərtibli diferensial tənliklər sistemi	63
§1. Koşl məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər	63
§2. İnteqrallana bilən və tərtibi azaldıla bilən bəzi yüksək tərtibli diferensial tənliklər	67
M İ S A L L A R	75
V FƏSİL. Yüksək tərtibli xətti diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsi	77
§1. Təriflər və ümumi xassələr	77
§2. Xətti bircins diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsi	79
§3. Qeyri-bircins xətti tənliklər	86
1.Qeyri-bircins xətti tənliyin ümumi həlli haqqında teoremlər.....	86
2.Sabitin variasiyası usulu	87
M İ S A L L A R	91
VI FƏSİL. Xüsusi şəkilli xətti diferensial tənliklər ...	92
§1. Sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənliklər	92
§2. Sabit əmsallı xətti qeyri-bircins diferensial tənliklər ..	96
§3. Sabit əmsallı tənliklərə gətirilə bilən tənliklər	98
M İ S A L L A R	102

VII FƏSİL. İkitərtibli xətti tənliklər	104
§1. Bircins tənliklərin həllərinin sıfırları	104
§2. Sərhəd məsələsi və sərhəd məsələsinin Qrin funksiyası vasitəsilə həlli	108
MİSALLAR	114
VIII FƏSİL. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər sistemi	115
§1. Xətti bircins sistemlər	115
§2. Xətti qeyri-bircins sistemlər. Sabitin variasiyası üsulu.	118
§3. Sabit əmsalli xətti diferensial tənliklər sistemi	123
MİSALLAR	127
IX FƏSİL. Birtərtibli diferensial tənliklər sisteminin həllinin dayanıqlığı	129
§1. Əsas anlayışlar	129
§2. Xətti sistemin dayanıqlığı	131
§3. Sabit əmsalli xətti sistemin dayanıqlığı. Qurviç meyarı	133
X FƏSİL. Birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər.	137
§1. Əsas anlayışlar	137
§2. Birtərtibli xüsusi törəməli xətti bircins diferensial tənliklər	139
§3. Birtərtibli xüsusi törəməli kvazixətti tənliklər	142
MİSALLAR	144
CAVABLAR	146
ƏDƏBİYYAT	155

ÖN SÖZ

Dərs vəsaitinin yazılmasında əsas səbəblərdən biri-diferensial tənliklər kursu üzrə azərbaycan dilində dərslik və dərs vəsaitlərinin az olmasıdır. Q.Əhmədov, K.Həsənov, M.Yaqubov tərəfindən yazılmış və 1978-ci ildə nəşr olunmuş «Adi diferensial tənliklər» adlı dərslik 30 ildən artıqdır ki, oxucuların istifadəsindədir. Azərbaycan dilində yazılmış və diferensial tənliklər sahəsində ən yaxşı dərslik hesab olunan bu kitab kiril qrafikasında yazılıb və hal-hazırda onun sayı kifayət qədər deyil. Bunu əsas tutaraq biz diferensial tənliklər kursu üzrə dərs vəsaitinin yazılmasını və tələbələrin istifadəsinə verilməsini məqsəda uyğun hesab etdik.

Dərs vəsaiti müəlliflərin Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsində diferensial tənliklər kursu üzrə oxuduqları mühazirələr əsasında yazılıb.

On fəsildən ibarət olan dərs vəsaiti diferensial tənliklər kursunu tam əhatə edir. Burada törəməyə nəzərən həll olunmuş və həll olunmamış birtərtibli diferensial tənliklər və onların həll üsulları, diferensial tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər, məxsusi nöqtələr və məxsusi nöqtələr ətrafında həllin tədqiqi, məxsusi həll və onun tapılması üsulları, yüksək tərtibli diferensial tənliklər və onların birtərtibli diferensial tənliklər sistemində gətirilməsi, yüksək tərtibli xətti diferensial tənliklər və onların ümumi nəzəriyyəsi, sabit əmsallı xətti diferensial tənliklər və onların həll üsulları, birtərtibli xətti diferensial tənliklər sistemi və onların ümumi həlli haqqında teoremlər, sabit əmsallı birtərtibli xətti diferensial tənliklər sistemi və onların həlli, birtərtibli diferensial tənliklər sisteminin həllinin dayanıqlığı, birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər və s. ətraflı şəkildə şərh olunmuşdur. Dərs vəsaitinə daxil edilmiş çoxlu sayda misal və məsələlər onun nəinki universitetlərin əyani və qiyabi şöbələrində təhsil alan tələbələri tərəfindən yaxşı mənimsənilməsinə, eyni zamanda daha geniş oxucu dairəsi üçün asan başa düşülməsinə imkan yaradacaq.

I FƏSİL

BİRTƏRTİBLİ ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

§1. Əsas anlayışlar və təriflər

Tutaq ki, x -sərbəst dəyişən, y - isə bu dəyişənin funksiyasıdır.

Tərif 1. Sərbəst x dəyişənin, məchul $y = y(x)$ funksiyanın və bu funksiyanın birinci tərtib törəməsinin daxil olduğu tənliyə bir tərtibli adi diferensial tənlik deyilir.

Qeyd edək ki, birtərtibli adi diferensial tənliyə sərbəst x dəyişəni və məchul $y = y(x)$ funksiyası aşkar şəkildə daxil olmaya bilər. Lakin bu tənlikdə məchul $y = y(x)$ funksiyasının törəməsi mütləq iştirak etməlidir.

Ümumi şəkildə birtərtibli adi diferensial tənlik

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

şəklində yazılır. Burada $F - x, y, y'$ dəyişənlərinin məlum funksiyasıdır.

(1) tənliyi törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli adi diferensial tənlik adlanır. Əgər bu tənliyi törəməyə nəzərən həll etmək mümkün olarsa, onda onu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənlik törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli adi diferensial tənlik adlanır.

Törəməyə nəzərən həll olunan diferensial tənliyi daha ümumi (və simmetrik) şəkildə

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

kimi də yazmaq olar. Bu yazılışın üstünlüyü ondan ibarətdir ki, tənlikdə iştirak edən x və y dəyişənlərinə eyni hüquqlu dəyişənlər kimi baxmaq olar.

Qeyd edək ki, diferensial tənlikdə məchul funksiya iki və ya daha çox sayda sərbəst dəyişənlərin funksiyası olarsa, onda belə tənlikdə məchul funksiyanın xüsusi törəmələri iştirak edir. Bu halda tənlik xüsusi törəməli diferensial tənlik adlanır. Biz əsasən

adi diferensial tənlikləri öyrənəcəyik və bu tənlikləri sadəcə olaraq diferensial tənliklər adlandıracağıq.

Tərif 2. (1) və ya (2) diferensial tənliyinin həlli elə diferensiallanan $y = \varphi(x)$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiyanı və onun törəməsini (1) və ya (2) tənliyində yerinə yazdıqda tənlik eynilik kimi doğru bərabərliyə çevrilmiş olsun.

Misal 1. $y = ce^{-x} + x - 1$ funksiyası $y' = x - y$ tənliyinin həllidir. Burada c -ixtiyari sabitdir. Doğrudan da, əgər bu funksiyanı və onun törəməsini tənlikdə yerinə yazsaq, tənlik eynilik kimi doğru bərabərliyə çevrilər.

Diferensial tənliyin həllinin tapılması prosesinə tənliyin inteqrallanması, həllinə isə onun inteqralı deyilir. Həllin müstəvi üzərində təyin etdiyi ayrı inteqral əyrisi adlanır.

Diferensial tənliklərin inteqrallanması zamanı həll, bəzi hallarda, qeyri-aşkar $\phi(x, y) = 0$ funksiyası şəklində tapılır. Əgər bu bərabərlikdən qeyri-aşkar funksiya kimi tapılmış $y = \varphi(x)$ funksiyası (1) və ya (2) tənliyini ödəyərsə, onda $\phi(x, y) = 0$ - bu tənliklərin qeyri-aşkar şəkilli həlli adlanır.

Misal 2. Qeyri-aşkar $y^2 - x^2 - 1 = 0$ funksiyası $yy' - x = 0$ tənliyinin həllidir. Doğrudan da, əgər $y^2 - x^2 - 1 = 0$ bərabərliyindən y -i tapsaq, alarıq: $y = \pm\sqrt{1+x^2}$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu funksiya baxılan tənliyi ödəyir.

Tərif 3. Əgər t parametrindən asılı

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha < t < \beta, \quad (3)$$

funksiyasını (2) tənliyində nəzərə aldıqda, bu tənlik eynilik kimi doğru bərabərliyə çevrilərsə, yəni

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = f[x(t), y(t)], \quad \alpha < t < \beta$$

olarsa, onda (3) funksiyası (2) tənliyinin parametrik şəkilli həlli adlanır.

Misal 3. $x = -\ln t$, $y = ct - \ln t - 1$, $t \in (0, \infty)$, funksiyası $y' = x - y$ tənliyinin parametrik şəkilli həllidir. Burada c - ixtiyari sabitdir.

Doğrudan da,

$$y'(t) = c - \frac{1}{t}, \quad x'(t) = -\frac{1}{t}, \quad \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1 - ct, \quad x - y = 1 - ct.$$

Deməli

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \equiv x(t) - y(t).$$

Baxılan misallar göstərir ki, diferensial tənliklərin sonsuz sayda həlləri ola bilər (c sabitinin müxtəlif ədədi qiymətlərində alınan həllər).

Aşağıdakı misala baxaq:

Misal 4.

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $y = x^2 + c$ funksiyası bu diferensial tənliyin həllidir. Burada c - ixtiyari sabitdir. Deməli baxılan diferensial tənliyin doğrudan da sonsuz sayda həlli var.

Bəzi nəzəri və praktiki məsələlərin həlli zamanı diferensial tənliyin bütün həllərini deyil, onun müəyyən əlavə şərtləri ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Belə məsələlərdən biri Koşi məsələsi adlanan məsələdir. (2) tənliyi üçün bu məsələ aşağıdakından ibarətdir:

(2) tənliyinin elə həllini tapmalı ki, bu həll

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

şərtini ödəsin. Burada x_0 və y_0 - qeyd olunmuş ədədlərdir. (4) şərtinə başlanğıc şərt, (2) tənliyinin (4) başlanğıc şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə isə Koşi məsələsi (və ya başlanğıc şərtli məsələ) deyilir.

Axırıncı misalda baxılan tənliyin $y(1) = 2$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapmaq. Bu məqsədlə $y = x^2 + c$ həllinin $y(1) = 2$ şərtini ödəməsinə tələb edək: $y(1) = 1 + c = 2$. Buradan tapırıq ki,

$c = 1$. Tapdığımız bu qiyməti həlldə yerinə yazsaq tənliyin qeyd olunan şərti ödəyən həllini almış olarıq: $y = x^2 + 1$.

Tutaq ki, (2) tənliyinin sağ tərəfi, yəni $f(x, y)$ funksiyası müəyyən D oblastında kəsilməzdir. Növbəti fəsilərdə görəcəyik ki, bu halda (2) tənliyinin integral ayrıləri D oblastını doldurur. Fərz edək ki, D oblastına daxil olan G oblastının hər bir nöqtəsindən (2) tənliyinin yeganə integral ayrısı keçir və bu oblast D -yə daxil olan maksimal oblastdır.

İxtiyari c sabitindən asılı $y = \varphi(x, c)$ funksiyalar ailəsinə baxaq. Fərz edək ki,

a) hər bir $(x, y) \in G$ nöqtəsi üçün $y = \varphi(x, c)$ tənliyi c -yə nəzərən həll olunandır:

$$c = \psi(x, y); \quad (5)$$

b) (x, y) nöqtəsi G oblastında dəyişdikdə, c sabitinin (5) düstur u ilə təyin olunan hər bir qiymətində $y = \varphi(x, c)$ funksiyası (2) tənliyinin həllidir. Onda $y = \varphi(x, c)$ ailəsinə (2) tənliyinin G oblastında ü m u m i h ə l l i deyilir.

Tutaq ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası (a, b) intervalında (2) tənliyinin həllidir. Əgər hər bir $x \in (a, b)$ üçün (2) tənliyinin $(x, \varphi(x))$ nöqtəsindən keçən integral ayrısı yeganə isə, onda $y = \varphi(x)$ həllinə (2) tənliyinin x ü s u s i h ə l l i deyilir.

Tutaq ki, $y = \psi(x)$ funksiyası (2) tənliyinin (a, b) intervalında təyin olunan həllidir. Əgər hər bir $x \in (a, b)$ üçün $(x, \psi(x))$ nöqtəsindən (2) tənliyinin $y = \psi(x)$ həllindən fərqli ən azı bir integral ayrısı keçirsə, onda $y = \psi(x)$ həllinə (2) tənliyinin m ə x s u s i h ə l l i deyilir.

◀ Əgər diferensial tənliyin integrallanması zamanı onun ümumi həlli qeyri-aşkar funksiya şəklində təyin olunarsa, onda ümumi integral terminindən istifadə olunur. Başqa sözlə desək, əgər $\varphi(x, y, c) = 0$ münasibəti (2) tənliyinin ümumi $y = \varphi(x, c)$ həllini təyin edirsə, onda bu münasibət (2) tənliyinin ümumi integralı adlanır.

§2. İnteqrallana bilən bəzi birtərtibli diferensial tənliklər

1. Dəyişənlərinə ayrılaraq bilən tənliklər

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad (1)$$

tənliyinə baxaq. Bu tənlikdə dx -in əmsalı yalnız x -dən, dy -in əmsalı isə yalnız y -dən asılıdır. Belə tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlik adlanır.

Tutaq ki, $A(x)$ və $B(y)$ funksiyaları x və y -in bütün baxılan qiymətlərində kəsilməz funksiyalardır. Onda (1) tənliyini

$$d \left[\int_{x_0}^x A(x)dx + \int_{y_0}^y B(y)dy \right] = 0$$

şəklində yazmaq olar. Bu bərabərlikdən isə

$$\int_{x_0}^x A(x)dx + \int_{y_0}^y B(y)dy = c \quad (2)$$

bərabərliyinin doğruluğu alınır. Burada x_0 və y_0 -uyğun olaraq x və y -in qeyd olunmuş qiymətləri, c -ixtiyari sabitdir. (2) bərabərliyi (1) tənliyinin ümumi inteqralını təyin edir.

(2) bərabərliyində inteqralın sərhədlərini yazmamaq da olar. Çünki ibtidai funksiyaların inteqralların aşağı sərhədlərindəki qiymətlərini c -ixtiyari sabitinə əlavə edə bilərik. Bu zaman (1) tənliyinin ümumi inteqralı

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$$

Bərabərliyi ilə təyin olunur.

Misal 1. $\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{y}dy = 0$ tənliyinin ümumi inteqralını

tapmalı.

(3) bərabərliyinə əsasən yazsa bilərik:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{y}dy = \ln|c|$$

Buradan alırıq:

$$\ln(x^2 + 1) + \ln|y| = \ln|c|$$

və ya

$$y(x^2 + 1) = c. \quad (4)$$

Bu bərabərlik baxılan tənliyin ümumi integralını təyin edir.
Buradan tapılan

$$y = \frac{c}{x^2 + 1}$$

funksiyası tənliyin ümumi həllidir.

Dəyişənlərinə ayrılmış tənliyə

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0 \quad (5)$$

şəkilli tənliklər asanlıqla gətirilir. Burada $a_1(x), b_1(y), a_2(x)$ və $b_2(y)$ funksiyaları məlum, öz arqumentlərinin kəsilməz funksiyalarıdır.

Tutaq ki, (5) tənliyində $b_1(y) \neq 0, a_2(x) \neq 0$. Bu tənliyin hər iki tərəfini

$$\frac{1}{a_2(x)b_1(y)}$$

ifadəsinə vursaq, dəyişənlərinə ayrılmış

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy = 0$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyin və deməli (5) tənliyinin ümumi integralı

$$\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \int \frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy = c$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Tutaq ki, $b_1(y)$ funksiyası y dəyişəninin müəyyən $y = y_1$ qiymətində sıfra çevrilir: $b_1(y_1) = 0$. Bu halda $dy_1 = 0$ olduğundan, asanlıqla yoxlamaq olar ki, $y = y_1$ funksiyası da (5) tənliyinin həllidir.

Fərz edək ki, $a_2(x_1)=0$. Əgər x və y dəyişənlərinə eynihüquqlu dəyişənlər kimi baxsaq, onda $x = x_1$ də tənliyin həlli olar.

Misal 2. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ tənliyinin ümumi inteqralını tapmalı.

Bu tənliyin hər iki tərəfini $\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ ifadəsinə vuraq.

Bu zaman aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\frac{x}{1+x^2} dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0.$$

Bu tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlik olduğundan, onun ümumi inteqralı

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = c$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada c - ixtiyari sabitdir. c - ixtiyari sabit olduqda hər bir k ədədi üçün $k \cdot c$, $\ln|c|$, $k \cdot \ln|c|$ və bu kimi ifadələrə də ixtiyari sabit kimi baxmaq olar. Əgər axırıncı bərabərliyin sağ tərəfində c sabitini $\frac{1}{2} \ln|c|$ ilə əvəz

etmək, alarıq

$$(1+x^2)(1+y^2) = c$$

Bu baxılan tənliyin ümumi inteqralıdır.

Qeyd edək ki, gələcəkdə də c sabitini, lazım gələrsə, bu kimi ifadələrlə əvəz edəcəyik.

2. Bircins tənliklər

Tərif 1. Əgər $f(x, y)$ funksiyası üçün

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \quad (6)$$

şerti ödənərsə, onda $f(x, y)$ funksiyası n dərəcəli bircins funksiya adlanır.

Xüsusi halda, əgər (6) bərabərliyində $n = 0$ olarsa, yəni $f(x, y)$ funksiyası üçün

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad (7)$$

şerti ödənərsə, onda $f(x, y)$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiya adlanır.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (8)$$

diferensial tənliyinə baxaq.

T ə r i f. 2 Əgər $f(x, y)$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiya olarsa, onda (8) tənliyi bircins diferensial tənlik adlanır.

Tutaq ki, (8) tənliyi bircins tənlikdir. Əgər $t = \frac{1}{x}$ götürsək, onda (7) bərabərliyinə əsasən alırıq:

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Bu halda, aydındır ki, (8) tənliyi

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (9)$$

şəklinə düşər.

Bu tənlikdə $\frac{y}{x} = u$ əvəzləməsini edək. Bu halda

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \text{ olar. Bu ifadələri (9) tənliyində nəzərə alsaq}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u)$$

və ya

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad (10)$$

tənliyini alırıq.

Aşağıdakı hallara baxaq.

a) Tutaq ki, $f(1, u) - u \neq 0$. Bu halda (10) tənliyini dəyişənlərinə ayıraraq

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

şəklində yazıb, integralladıqdan sonra alırıq

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + c. \quad (11)$$

Sol tərəfdəki integralı hesabladıqdan sonra u dəyişənini $\frac{y}{x}$ ilə əvəz etsək bircins (8) tənliyinin ümumi integralını almış olarıq.

b) Tutaq ki, $f(1, u) \equiv u$. Bu halda $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$

olar və (9) tənliyi $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ şəklinə düşər ki, bu tənliyin də ümumi həlli $y = cx$ bərabərliyi ilə təyin olunur.

c) Tutaq ki, $f(1, u) - u$ ifadəsi u dəyişəninin $u = u_0$ qiymətində sıfıra çevrilir: $f(1, u_0) = u_0$. Bu halda (10) tənliyinə əsasən alırıq ki, $u = u_0$ və ya $y = u_0 x$ funksiyası da bircins tənliyin həllidir.

Misal 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik bircins tənlikdir. Doğrudan da, əgər $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ götürsək, onda asanlıqla yoxlaya bilərik ki, bu funksiya üçün $f(tx, ty) = f(x, y)$ bərabərliyi ödənilir. Tənliyi həll etmək üçün $\frac{y}{x} = u$ əvəzləməsini edək. Bu zaman $y = xu, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ olar və bunları tənlikdə nəzərə alsaq

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1-3u^2}{2u} \quad (12)$$

tənliyi almiş olarıq.

Bu tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq inteqrallasaq

$$\int \frac{2udu}{1-3u^2} = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{və} \quad \text{ya} \quad \ln|1-3u^2| = -3 \ln|cx|$$

bərabərliyini almiş olarıq. $u = \frac{y}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq, axırmı

bərabərlik aşağıdakı şəkə düşər:

$$(x^2 - 3y^2)x = c. \quad (13)$$

Bu bərabərlik baxılan tənliyin ümumi inteqralını təyin edir.

(12) tənliyinin sağ tərəfi $u = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda sıfıra çevrilir.

Ona görə tənliyin (13) həlli ilə yanaşı $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ həlləri də var.

3. Bircins tənliyə gətirilən tənliklər

Bircins olmayan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (14)$$

tənliyinə baxaq. Burada a, b, c, a_1, b_1, c_1 -həqiqi ədədlərdir. Əgər $c = c_1 = 0$ olarsa, onda bu tənlik bircins tənlikdir. Əks halda, yəni c və c_1 ədədlərindən heç olmazsa biri sıfıra bərabər olmadıqda, (14) tənliyi bircins tənlik deyil. Bu halda (14) tənliyini bircins tənliyə gətirməyə çalışaq. Bu məqsədlə

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta \quad (15)$$

əvəzləməsini edək. Burada ξ və η -yeni dəyişənlər, α və β isə hələlik məlum olmayan ədədlərdir.

(15) əvəzləməsini və $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ bərabərliklərini (14) tənliyində nəzərə alaraq:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1} \quad (16)$$

α və β ədədlərini aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sisteminin həlli kimi təyin edək:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

İki hala baxaq:

a) $ab_1 - a_1b \neq 0$. Bu halda (17) sisteminin yeganə həlli var. Əgər (15) əvəzləməsində iştirak edən α və β ədədlərini bu sistemin həllindən təyin etsək, onda (16) tənliyi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta} \quad (18)$$

şəklinə düşər. Bu tənlik isə bircins tənlikdir. Əgər bu tənliyi həll etsək və alınan həldə $\xi = x - \alpha$, $\eta = y - \beta$ götürsək, onda baxılan halda (14) tənliyinin ümumi inteqralını almış olarıq.

b) $ab_1 - a_1b = 0$. Bu halda $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$ olduğunu nəzərə alsaq

(14) tənliyini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1} \quad (19)$$

şəklində yazı bilərik. Bu tənlikdə $ax + by = z$ əvəzləməsi etsək və

bu zaman $a + b \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ olduğunu nəzərə alsaq (19) tənliyi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b(z + c)}{kz + c_1} + a \quad \text{şəklinə düşər. Bu tənlik isə dəyişənlərinə}$$

ayrılan tənlikdir.

Qeyd. Yuxarıda izah olunan üsulu daha ümumi olan

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

şəkilli tənliklərin həllinə tətbiq etmək olar. Burada f -öz arqumentinin məlum kəsilməz funksiyasıdır.

Misal 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y - 1}{x + y - 3}$ tənliyini həll etməli.

$x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ əvəzləməsini edək. Bu əvəzləmədən sonra tənlik

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3\xi - \eta + 3\alpha - \beta - 1}{\xi + \eta + \alpha + \beta - 3} \quad \text{şəklinə düşər.}$$

Tələb edək ki, α və β ədədləri

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta - 1 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases}$$

sisteminə ödəsin. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\alpha = 1$; $\beta = 2$ - bu sistemin həllidir.

Bu zaman əvəzləmə $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$, axırıncı tənlik isə

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3\xi - \eta}{\xi + \eta}$$

şəklinə düşər. Bu tənlik bircins tənlikdir. $\frac{\eta}{\xi} = u$

əvəzləməsindən sonra axırıncı tənlik $\xi \frac{du}{d\xi} = \frac{3 - 2u - u^2}{1 + u}$

şəklinə düşər. Bu tənlik dəyişənlərinə ayrılı bilən tənlik

olduğundan onu $\frac{(1+u)du}{(u-1)(u+3)} = -\frac{d\xi}{\xi}$ şəklində yazıb

inteqrallasaq alırıq:

$$(u-1)(u+3) = \frac{c}{\xi^2}.$$

Bu bərabərlikdə $u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-2}{x-1}$ olduğunu nəzərə almaqla baxılan tənliyin ümumi inteqrallını $(y-x-1)(y+3x-5) = c$ şəklində tapırıq.

4. Birtərtibli xətti tənliklər

Axtarılan funksiya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə birtərtibli xətti diferensial tənlik deyilir. Ümumi halda bir - tərətibli xətti diferensial tənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = 0.$$

Burada $A(x), B(x), C(x)$ - məlum kəsilməz funksiyalardır.

Tutaq ki, $A(x) \neq 0$. Bu halda tənliyin hər iki tərəfini $A(x)$ əmsalına bölsək, alınan tənliyi aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (20) \quad (1)$$

Bu tənliklə yanaşı

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (21) \quad (2)$$

tənliyinə baxaq. (21) tənliyi bircins, (20) tənliyi isə qeyri-bircins xətti diferensial tənlik adlanır. Bu tənliklərin sol tərəfləri eyni olduğundan, (21) tənliyinə (20) tənliyinə uyğun bircins tənlik deyilir.

Xətti bircins (21) tənliyi dəyişənlərinə ayrılaraq bilən tənlik olduğundan, onu asanlıqla inteqrallamaq olar:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln|c|, \quad (22)$$

$$y = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Bu (21) tənliyinin ümumi həllidir.

(20) tənliyinin ümumi həllini tapmaq üçün sabitin variasiyası adlanan üsuldən istifadə edək:

Bu tənliyin həllini

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (23)$$

şəklində axtaraq. Burada $c(x)$ - ixtiyari diferensiallanan funksiyadır. (23) funksiyası və onun

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

törəməsini (20) tənliyində nəzərə alsaq

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} +$$

$$+ p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

və ya

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

bərabərliyini alırıq. Axıncı bərabərlikdən $c(x)$ funksiyasını tapaq:

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c.$$

Qeyd edək ki, sağ tərəfdə iştirak edən c toplananı- ixtiyari sabitdir.

$c(x)$ -in bu ifadəsini (23) bərabərliyinin sağ tərəfində yerinə yazsaq (20) qeyri-bircins xətti diferensial tənliyinin ümumi həllini

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (24)$$

bərabərliyi ilə təyin etmiş olarıq.

Misal 1. $(x^2 + 1)y' + 2xy = x^2(x^2 + 1)$ tənliyini həll etməli.

Bu tənliyin hər iki tərəfini $x^2 + 1$ -ə bölək:

$$y' + \frac{2x}{x^2 + 1} y = x^2.$$

Aydındır ki, bu tənlikdə $p(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $q(x) = x^2$.

$\int p(x)dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1)$ olduğunu nəzərə alsaq (24) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\ln(x^2 + 1)} \left[c + \int x^2 e^{\ln(x^2 + 1)} dx \right] = \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \left(c + \int x^2 (x^2 + 1) dx \right) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(c + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Beləliklə alırıq:

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(c + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right).$$

Bu baxılan tənliyin ümumi həllidir.

14 5. Bernulli tənliyi

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (25)$$

tənliyi Bernulli tənliyi adlanır. Burada $p(x)$ və $q(x)$ - məlum kəsilməz funksiyalar, n - ixtiyari həqiqi ədəddir. $n = 0$ olduqda Bernulli tənliyi xətti qeyri-bircins diferensial tənliyə, $n = 1$ olduqda isə xətti bircins diferensial tənliyə çevrilir. Ona görə fərz edəcəyik ki, Bernulli tənliyində $n \neq 0, n \neq 1$.

(25) tənliyinin hər iki tərəfini y^{-n} -ə vuraq:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Bu tənlikdə $y^{1-n} = z$ əvəzləməsini etsək,

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \text{ olar. Bunları axırıncı tənlikdə nəzərə alsaq}$$

$z = z(x)$ funksiyasına nəzərən aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x). \quad (26)$$

Bu tənlik bir tərtibli xətti qeyri-bircins diferensial tənlikdir. Əgər (26) tənliyinin ümumi həllində z -i y^{1-n} ilə əvəz etsək, onda Bernulli tənliyinin ümumi inteqralını almış olarıq.

Misal 1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}y = (1+x^2)y^2$ tənliyini həll etməli.

Bu tənliyin hər iki tərəfini y^{-2} -yə vuraq:

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y^{-1} = 1+x^2.$$

$y^{-1} = z$ əvəzləməsi etsək $\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$ olar. Bunları axırıncı

tənlikdə nəzərə alsaq, z dəyişəninə nəzərən

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}z = -(1+x^2) \quad (27)$$

xətti qeyri-bircins diferensial tənliyini alırıq. Bu tənliyin ümumi həllini tapaq:

$$z = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left[c - \int (1+x^2) e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx \right] = e^{\ln(1+x^2)} \times \\ \times \left[c - \int (1+x^2) e^{-\ln(1+x^2)} dx \right] = (1+x^2)(c-x)$$

Deməli $z = (1+x^2)(c-x)$ - (27) tənliyinin ümumi həllidir.

Əgər bu bərabərlikdə $z = y^{-1}$ götürsək, alırıq:

$$y = \frac{1}{(1+x^2)(c-x)}$$

Bu baxılan tənliyin ümumi həlvidir.

(6. Rikkati tənliyi

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (28)$$

tənliyi Rikkati tənliyi adlanır. Burada $p(x), q(x), r(x)$ - məlum kəsilməz funksiyalardır. Aydındır ki, $p(x) \equiv 0$ olduqda Rikkati tənliyi xətti diferensial tənliyə, $r(x) \equiv 0$ olduqda isə Bernulli tənliyinə çevrilir.

Rikkati tənliyinin sadə şəkllə malik olmasına baxmayaraq, bu tənliyi ümumi halda integrallamaq mümkün olmur.

Göstərək ki, Rikkati tənliyinin hər hansı bir xüsusi həlli məlum olarsa, onda onun ümumi həllini tapmaq mümkündür.

Tutaq ki, $y = y_1(x)$ - xüsusi həlvidir. Rikkati tənliyində $y = z + y_1(x)$ əvəzləməsini edək. burada $z = z(x)$ - yeni məchul funksiyadır. Bu zaman z məchul funksiyasına nəzərən

$$\frac{dz}{dx} - (2p(x)y_1(x) + q(x))z = p(x)z^2 \quad (29)$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik Bernulli tənliyidir. Onu həll etmək üçün yuxarıda qeyd olunan üsuldən istifadə edək. Bu tənliyin hər iki tərəfini z^{-2} -yə vuraq:

$$z^{-2} \frac{dz}{dx} - (2p(x)y_1(x) + q(x))z^{-1} = p(x).$$

$z^{-1} = u$ əvəzləməsindən sonra axırmcı tənlik

$$\frac{du}{dx} + (2p(x)y_1(x) + q(x))u = -p(x)$$

şəklinə düşər. Bu tənlik xətti tənlik olduğundan onun ümumi həlli

$$u = e^{-\int p_1(x)dx} \left(c - \int p(x) e^{\int p_1(x)dx} dx \right) \quad (30)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada

$$p_1(x) = 2p(x)y_1(x) + q(x).$$

Aydındır ki, (30) bərabərliyi ilə təyin olunan u funksiyası

$$u = c\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

şəkilli funksiyadır. $z^{-1} = u$ olduğundan alırıq:

$$z = \frac{1}{c\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}.$$

Əgər z -in bu ifadəsini $y = z + y_1(x)$ bərabərliyində nəzərə alsaq Rikkati tənliyinin ümumi həllini tapırıq:

$$y = \frac{c\psi_1(x) + \psi_2(x)}{c\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}. \quad (31)$$

Burada $\psi_1(x) = y_1(x)\varphi_1(x)$, $\psi_2(x) = 1 + y_1(x)\varphi_2(x)$.

(31) bərabərliyindən görünür ki, Rikkati tənliyinin ümumi həlli c sabitinə nəzərən kəsr-xətti funksiyadır.

Bu faktın tərsi də doğrudur. Yəni, əgər diferensial tənliyin ümumi həlli c sabitinə nəzərən kəsr-xətti funksiyadırsa, onda bu tənlik Rikkati tənliyidir (İsbat edin).

Misal 1. $y' = -5xy^2 + \left(20x^2 + \frac{3}{x}\right)y - (20x^3 + 4)$ tənliyini

həll etməli.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $y=2x$ bu tənliyin xüsusi həllidir. Ona görə bu tənlikdə $y = z + 2x$ əvəzləməsini edək. Bu zaman Z -ə nəzərən

$$z' - \frac{3}{x}z = -5xz^2$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik Bernulli tənliyi olduğundan onun hər iki tərəfini z^{-2} -yə vuraq. Bu zaman tənlik

$$z^{-2}z' - \frac{3}{x}z^{-1} = -5x$$

şəklinə düşər.

$z^{-1} = u$ əvəzləməsini etsək $-z^{-2}z' = u'$ olar və u dəyişəninə nəzərən aşağıdakı tənliyi alırıq

$$u' + \frac{3}{x}u = 5x.$$

Bu tənlik xətti tənlik olduğundan, məlum düsturundan istifadə edərək onun ümumi həllini tapa bilərik:

$u = \frac{c}{x^3} + x^2$. Bu zaman $z = \frac{x^3}{c + x^5}$ olar və $y = z + 2x$ olduğundan, baxılan tənliyin ümumi həlli aşağıdakı bərabərlik vasitəsilə təyin olunar:

$$y = \frac{2cx + x^3(1 + 2x^3)}{x^5 + c}.$$

15 7. Tam diferensiallı tənliklər

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (32)$$

diferensial tənliyinə baxaq. Burada $M(x, y)$ və $N(x, y)$ məlum funksiyalardır.

T ə r i f. Əgər (32) tənliyinin sol tərəfi müəyyən $u = u(x, y)$ funksiyasının tam diferensialına bərabər olarsa, onda bu tənlik tam diferensiallı tənlik adlanır.

Tutaq ki, (32) tənliyi tam diferensiallı tənlikdir və onun sol tərəfi müəyyən $u = u(x, y)$ funksiyasının tam diferensialına bərabərdir:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \equiv du \quad (33)$$

Bu zaman (32) tənliyi $du(x, y) = 0$ şəklinə düşər və bu tənliyin ümumi inteqralı

$$u(x, y) = c \quad (34)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Digər tərəfdən (33) bərabərliyindən alırıq:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad (35)$$

Bu bərabərliklərdən birincisinin hər iki tərəfini y dəyişəninə, ikincisinin isə hər iki tərəfini x dəyişəninə görə diferensiallasaq (fərz olunur ki, bu törəmələr var və kəsilməzdirlər) aşağıdakı bərabərlikləri alırıq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Bu iki bərabəriliyin müqayisəsindən alırıq:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (36)$$

Bu, (32) tənliyinin tam diferensiallı tənlik olması üçün zəruri şərtidir.

Göstərək ki, bu şərt eyni zamanda həm də kafi şərtidir. Yəni, (36) şərti ödəndikdə (35) bərabərliklərini ödəyən $u = u(x, y)$ funksiyası var.

Tutaq ki, (36) şərti ödənilir. Əvvəlcə (35)-dəki birinci bərabərliyi ödəyən $u = u(x, y)$ funksiyasını tapmaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y) \quad (37)$$

funksiyası belə bir funksiyadır. Burada $\varphi(y)$ - ixtiyari diferensiallanan funksiyadır. Tələb edək ki, bu funksiya (35)-dəki ikinci şərti də ödəsin:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

olduğundan (35)-dəki ikinci şərtdən alırıq

$$N(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y).$$

(36) şərti ödəndiyindən, bu bərabərliyi aşağıdakı şəkildə yazıb bilərik:

$$N(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y)$$

və ya

$$\varphi'(y) = N(x_0, y).$$

Buradan isə tapırıq ki,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

Bu ifadəni (37) bərabərliyinin sağ tərəfində nəzərə alsaq (35) bərabərliklərini ödəyən $u(x, y)$ funksiyasını tapmış olarıq:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy. \quad (38)$$

Beləliklə aşağıdakı teorem isbat olundu.

T e o r e m . Əgər $\frac{\partial M}{\partial y}$ və $\frac{\partial N}{\partial x}$ törəmələri varsa və

kəsilməzdirsə, onda (32) tənliyinin tam diferensiallı tənlik olması üçün zəruri və kafi şərt (36) bərabərliyinin ödənməsidir.

(32) tənliyi tam diferensiallı tənlik olarsa, onda (34) və (38) bərabərliklərinə əsasən bu tənliyin ümumi inteqralı

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c \quad (39)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Misal 1. $(xy + 2x + 1)ydx + (xy + x + 1)xdy = 0$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlikdə

$$M(x, y) = (xy + 2x + 1)y, \quad N(x, y) = (xy + x + 1)x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 2x + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy + 2x + 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{şərti ödənilir. Deməli, baxılan tənlik tam diferensiallı}$$

tənlikdir. (38) bərabərliyinə əsasən bu tənliyin ümumi inteqralı

$$\int_{x_0}^x (xy + 2x + 1)y dx + \int_{y_0}^y (x_0 y + x_0 + 1)x_0 dy = c \quad \text{bərabərliyi ilə}$$

təyin olunur. Əgər sol tərəfdəki inteqralları hesablasaq, onda baxılan tənliyin ümumi inteqralını aşağıdakı bərabərlik vasitəsilə təyin etmiş olarıq:

$$\frac{x^2 y^2}{2} + x^2 y + xy = c.$$

8. İnteqrallayıcı vuruq

Tam diferensiallı tənlikləri öyrənərkən məlum oldu ki, onları həmişə inteqrallamaq mümkündür. Ona görə belə bir sual meydana çıxır: tam diferensiallı olmayan tənlikləri tam diferensiallı tənliklərə gətirmək olarmı?

Bir çox hallarda bunu etmək mümkündür. Daha dəqiq desək, elə $\mu = \mu(x, y)$ funksiyasını tapmaq olur ki, tam diferensiallı olmayan

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (40)$$

tənliyinin hər iki tərəfini bu funksiya vurduqda alınan tənlik tam diferensiallı tənliyə çevrilir. Belə $\mu = \mu(x, y)$ funksiyası (40) tənliyi üçün inteqrallayıcı vuruq adlanır.

Əgər elə $\omega(x, y)$ diferensiallanan funksiyası varsa ki,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = H(\omega),$$

yəni sol tərəfdəki nisbət yalnız ω dəyişənin funksiyası olsun, onda bu dəyişəndən asılı inteqrallayıcı vuruq var və

$$\mu(\omega) = e^{\int H(\omega) d\omega}$$

düsturu ilə tapılır. Aydındır ki, xüsusi halda, yalnız x -dən asılı inteqrallayıcı vuruğun ($\omega(x, y) \equiv x$) varlığı üçün

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = H(x),$$

yalnız y -dən asılı inteqrallayıcı vuruğun ($\omega(x, y) \equiv y$) varlığı üçün

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = H(y)$$

olmalıdır.

Misal 1. $(xy^2 + 1)dx + ydy = 0$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik tam diferensiallı deyil. Doğrudan da

$$M(x, y) = xy^2 + 1, N(x, y) = y, \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Lakin

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 2x$$

$$\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

inteqrallayıcı vuruqdur. Tənliyi bu vuruğa vuraraq tam diferensiallı tənlik alındığını yoxlamaq və onu həll etmək olar.

Misal 2. $y(1+xy)dx - x(1-xy)dy = 0$ tənliyini həll etməli.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

olduğu üçün tənlik tam diferensiallı deyil və

$$\frac{2}{N} = \frac{2}{-x(1-xy)}, \quad \frac{2}{M} = \frac{2}{y(1+xy)}$$

ifadələrindən görünür ki, yalnız x -dən və yalnız y -dən asılı inteqrallayıcı vuruq yoxdur. Lakin $\omega(x, y) = xy$ funksiyası üçün

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{\omega}$$

olduğundan $\mu = \mu(\omega) = \mu(xy)$ inteqrallayıcı vuruğu var və

$$\mu(\omega) = e^{\int \frac{-1}{\omega} d\omega} = e^{-\ln|\omega|} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}$$

şəklindədir. Tənliyin hər iki tərəfini bu vuruğa vursaq

$$\left(\frac{1}{x} + y\right)dx - \left(\frac{1}{y} - x\right)dy = 0$$

tam diferensiallı tənliyini alarıq. Ona görə

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = \\ &= \ln|x| + xy - \ln|y| + \ln\left|\frac{y_0}{x_0}\right| - x_0 y_0 \end{aligned}$$

və tənliyin ümumi inteqralı

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| + xy = c$$

şəklində olar.

Misal 3. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik üçün

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

olduğundan o tam diferensiallı tənlik deyil. Amma $\omega = x^2 + y^2$ funksiyası üçün

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\omega}$$

olduğundan

$$\mu(\omega) = e^{-\int \frac{1}{\omega} d\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

şəklində inteqrallayıcı vuruq var. Tənliyin hər iki tərəfini

$$\frac{1}{x^2 + y^2} - a \text{ vursaq}$$

$$dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0,$$

buradan isə

$$x + \ln(x^2 + y^2) = c$$

ümumi inteqralını tapırıq.

Qtyd edək ki, inteqrallayıcı vuruğu tapmaq həmişə mümkün olmur. Amma isbat etmək olar ki, əgər (40) tənliyinin diferensiallanan $u(x, y)$ inteqralı varsa, onda mütləq bu tənliyin inteqrallayıcı vuruğu var (İsbat edin).

Bəzi hallarda inteqrallayıcı vuruğu tənliyə daxil olan tam diferensialları ayırmaqla təyin etmək mümkün olur. Bu zaman

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

$$d(x^2) = 2xdx, \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x} \quad \text{və s.}$$

düsturlarından istifadə etmək lazımdır.

Misal 4. $(y - \frac{1}{x})dx + \frac{1}{y}dy = 0$ tənliyini həll etməli.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu tənlik tam diferensiallı tənlik deyil. Doğrudan da,

$$M(x, y) = y - \frac{1}{x}, \quad N(x, y) = \frac{1}{y}$$

olduğundan

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \text{və} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Tənliyi həll etmək üçün, onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$ydx - \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{və ya} \quad ydx - \frac{ydx - xdy}{xy} = 0.$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini $\frac{x}{y}$ -ə vuraq:

$$x dx - \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$$

Alınan axırıncı tənliyi

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) - d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

və ya

$$d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y}\right) = 0$$

şəklində yazaq. Buradan isə alarıq:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} = c.$$

Bu baxılan tənliyin ümumi integralıdır. Deməli tənliyi $\frac{x}{y}$ -ə vurmaqla, onu tam diferensiallı tənliyə gətirdik.

Misal 5. $y^2 dx - (xy + x^3) dy = 0$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik də, asanlıqla yoxlamaq olar ki, tam diferensiallı tənlik deyil. Onu

$$y^2 dx - xy dy - x^3 dy = 0$$

şəklində yazaq. Buradan alarıq:

$$y(y dx - x dy) - x^3 dy = 0.$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini $-\frac{1}{x^3}$ -na vuraq. Bu zaman

$$\frac{y}{x} - \frac{y dx + x dy}{x^2} + dy = 0 \quad \text{və} \quad \text{ya} \quad \frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + dy = 0 \quad \text{və} \quad \text{ya}$$

$$d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y\right] = 0 \quad \text{tənliyini alarıq ki, bu tənliyin də ümumi}$$

integralı

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y = c$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

MİSALLAR

Tənlikləri həll edin.

1. $x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.
2. $x\sqrt{y^2 + 1}dx + y\sqrt{x^2 + 1}dy = 0$.
3. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 0$.
4. $\sin y dx - \cos x dy = 0$.
5. $y' = (y - 2)\operatorname{ctg} x$.
6. $\frac{y'}{2\sqrt{y}} - x^2 = 2x + 1, \quad y(0) = \frac{1}{9}$.
7. $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$.
8. $y' = e^{x-y}$.
9. $xy' - y = y^2$.
10. $y' + x^2y^2 = x^2y$.
11. $y' - 1 = \operatorname{tg}(y - x)$.
12. $y' = 2y - 3x + 5, \quad y(2) = 1$.
13. $(2x + y)y' = 1, \quad y(1) = -2$.
14. $y' + 1 = \sqrt{x + y - 2}$
15. $(xy^2 - x)dx + 2(y + xy)dy = 0$.
16. $(x + y)dx - xdy = 0$.
17. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$.
18. $\sin \frac{y}{x} dx + \cos \frac{y}{x} dy = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} dx$.
19. $xy' - 2xe^{\frac{y}{x}} = y$.
20. $xydy - (x - y)^2 dx = 0$.
21. $(2x + \sqrt{xy})dy - 2ydx = 0$.
22. $xy' - \sqrt{x^2 + y^2} = y$.
23. $2xyy' = 2x^2 + y^2$.

24. $(x - 2y + 1)dx - (y + 2x - 3)dy = 0$.
25. $(x - y - 2)dx - (x - 3y - 1)dy = 0$.
26. $(4x + 8y - 2)dy + (2x + 4y + 1)dx = 0$.
27. $(2x + 2y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.
28. $y' = \frac{x + y - 2}{y - x}$.
29. $y' + 3x = 5\sqrt{y}$.
30. $x(2xy + 1)y' + y = 0$.
31. $xy' - y = 2x^3$.
32. $(x + 2)y' + y = 2x$.
33. $\cos x y' + y \sin x = 1$.
34. $xe^x(y' + y) - 3 = 0$.
35. $y = x(y' - x \sin x)$.
36. $(3e^{2y} - x)dy = dx$.
37. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.
38. $y' - 2y = y^2 e^{-2x}$.
39. $3y^2 y' = x - y^3$.
40. $x^2 y' - 2xy = \sqrt{y}$.
41. $2y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = \frac{x}{y}$.
42. $2xy' - y = y^3 \cos x$.
43. $xy' = xy^2 + y - \frac{x^3}{4}$.
44. $y' - y^2 + 4e^x y = 2e^x + 4e^{2x}$.
45. $y' + y^2 = 2y \sin x + \cos x - \sin^2 x$.
46. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

$$47. x \ln y \, dx + \frac{x^2}{2y} \, dy = 0.$$

$$48. (x^2 y^3 + 2x) \, dx + (x^3 y^2 - 2y) \, dy = 0.$$

$$49. (x + y - y^2) \, dx - x(2y - 1) \, dy = 0.$$

$$50. (3x^2 - y^4 \sin 2x) \, dx - 2(2y^3 \sin^2 x - 1) \, dy = 0.$$

$$51. (x + y)^2 \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0.$$

$$52. (x^2 - y^2 + x) \, dx - y \, dy = 0.$$

$$53. 2x \, dx = (x \, dy + y \, dx) e^{x^2}.$$

$$54. y \, dx - x \, dy = 2x^2 \cos^2 \frac{y}{x} \, dx.$$

$$55. y(x - y) \, dx - (xy + 1) \, dy = 0.$$

II FƏSİL

BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ. MƏXSUSİ NÖQTƏLƏR VƏ MƏXSUSİ HƏLLƏR

§1. Həllin varlığı və yeganəliyi

Tutaq ki,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

diferensial tənliyi verilib və bu tənliyin

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur.

T e o r e m 1 (Koşi -Pikar).Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası qapalı $\bar{D} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ düzbucaqlı oblastında kəsilməzdir və bu oblastda y dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir:

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y})| \leq N|\bar{y} - \tilde{y}|. \quad (3)$$

Onda (1) tənliyinin (2) başlanğıc şərtini ödəyən və $[x_0 - h, x_0 + h]$ parçasında təyin olunan yeganə həlli var.

Burada $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max_D |f(x, y)|$.

Q e y d . Əgər $f(x, y)$ funksiyasının $\bar{D}$ oblastında $\frac{\partial f}{\partial y}$ xüsusi törəməsi varsa və bu törəmə məhduddursa, onda $f(x, y)$ funksiyası baxılan oblastda y dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir. Doğurdan da, Laqranj teoreminə əsasən yaza bilərik:

$$f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y}) = \frac{\partial f((x, \bar{y} + \theta(\tilde{y} - \bar{y})))}{\partial y} |\bar{y} - \tilde{y}|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Əgər $\overline{D}$ oblastında $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$ şərti ödənərsə, onda bu

bərabərlikdən (3) Lipşits şərtinin doğruluğu alınar.

Teoremin isbatı haqqında:

Teoremin Pikar tərəfindən verilmiş isbatını qeyd edək. Bu isbata, demək olar ki, diferensial tənliklər kursu üzrə yazılmış bütün dərsliklərdə rast gəlinir. İsbat prosesində ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə edilir. Bu zaman nəinki həllin varlığı və yeganəliyi isbat edilir, eyni zamanda onun təqribi hesablanma qaydası da verilir.

Teoremin isbatı ona əsaslanır ki, (1)-(2) məsələsi integral tənlik adlanan

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (4)$$

tənliyinə ekvivalentdir. Yəni (1) tənliyinin (2) şərtini ödəyən həlli (4) integral tənliyinin həllidir və tərsinə, (4) integral tənliyinin həlli (1) tənliyini və (2) şərtini ödəyir.

(4) tənliyinin həlli ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə tapılır və n -ci yaxınlaşma

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx, \quad n = 1, 2, \dots, y_0(x) = y_0$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Teoremin şərtləri daxilində isbat edilir ki, bu bərabərliklər vasitəsilə təyin olunan $\{y_n(x)\}$ ardıcılığı müntəzəm yığılır və ardıcılığın limit funksiyası (4) integral tənliyinin həllidir. Daha sonra bu həllin yeganəliyi isbat edilir.

Misal 1. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$ Koşi məsələsinin yeganə

həlli olduğu hər hansı bir parçanı tapmalı və bu həllə ardıcıl y_1 və y_2 yaxınlaşmalarını qurmalı.

$x_0 = 0, y_0 = 0$ olduğundan $\overline{D}$ qapalı oblastı olaraq $\overline{D} = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ düzbucaqlı oblastını götürək.

Baxılan tənliyin sağ tərəfi - $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyası bu oblastda kəsilməz və y dəyişəninə nəzərən Lipsits şərtini ödəyir.

$a = 1, b = 1, \max_D |f(x, y)| = 2$ olduğundan

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) = \frac{1}{2} \text{ olur və deməli baxılan məsələnin } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

parçasında yeganə həlli var.

Həllə yaxınlaşmaları tapaq. $y_0(x) = y_0 = 0$ olduğundan

$$y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında aşağıdakı teoremləri qeyd edək.

✓ **T e o r e m 2** (Peano teoremi). Əgər $f(x, y)$ funksiyası G oblastında məhdud və kəsilməz funksiyadırsa, onda bu oblastın istənilən (x_0, y_0) nöqtəsindən (1) tənliyinin ən azı bir integral əyrisi keçir.

Göründüyü kimi, bu teorem həllin varlığı haqqında teoremdir. Xüsusi halda, əgər G oblastı qapalı oblast olarsa, onda $f(x, y)$ funksiyasının kəsilməzliyi, oblastın hər bir nöqtəsindən keçən integral əyrisinin varlığını təmin edir.

T e o r e m 3 (Osqud teoremi). Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası G oblastının istənilən iki $(x, \bar{y})$ və $(x, \tilde{y})$ nöqtəsi üçün

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y})| \leq \varphi(|\bar{y} - \tilde{y}|) \quad (5)$$

şərtini ödəyir. Burada $\varphi(u) > 0$ və aşağıdakı şərtləri ödəyən funksiyadır.

1) $\varphi(u)$ $0 < u \leq a$ intervalında kəsilməzdir;

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{du}{\varphi(u)} = \infty.$$

Onda G oblastının istənilən (x_0, y_0) nöqtəsindən (1) tənliyinin birdən çox integral əyrisi keçmir.

Bu teorem həllin yeganəliyi haqqında teoremdir. Qeyd edək ki, $K > 0$ olduqda $\varphi(u) = Ku$, $\varphi(u) = Ku|\ln u|$, $\varphi(u) = Ku|\ln u||\ln|\ln u||$ funksiyalarının hər biri Osqud teoreminin şərtlərini ödəyir.

$\varphi(u) = Ku$ olduqda (5) şərti y -ə nəzərən Lipsits şərtini ifadə edir.

Peano və Osqud teoremlərinin isbatları [1], [2] və [3]-də verilmişdir. Burada isə

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

tənliyi üçün $G = \{-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$ düzbucaqlısında bu teoremləri təhlil edək.

Sağ tərəf - $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ funksiyası G -də kəsilməzdir və deməli Peano teoreminin şərtini ödəyir. Tənliyin

$$y = \frac{1}{27}(x+c)^3 \quad (7)$$

şəklində ümumi həlli var və G -nin hər bir (x_0, y_0) nöqtəsindən

$y = \frac{1}{27}(x - x_0 + 3y_0^{\frac{1}{3}})^3$ həlli keçir, yəni Peano teoreminin hökmü də ödənilir.

G düzbucaqlısının $(x, 0)$ və $(x, \tilde{y})$ $(-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b)$ nöqtələri üçün

$$|f(x, 0) - f(x, \tilde{y})| = |\tilde{y}|^{\frac{2}{3}}$$

olduğundan (5) şərtindəki $\varphi(u)$ funksiyası üçün $\varphi(u) \geq |u|^{\frac{2}{3}}$ olar. Onda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{du}{\varphi(u)} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\alpha} u^{-\frac{2}{3}} du = 3\alpha^{\frac{1}{3}} < \infty,$$

yəni Osqud teoreminin 2) şərti ödənmir. G düzbucaqlısının hər bir $(x_0, 0)$ nöqtəsindən (6) tənliyinin iki integral əyrisi keçir:

$$y = 0 \quad \text{və} \quad y = \frac{1}{27}(x - x_0)^3. \quad \text{Buradan həm də } y = 0\text{-ın (6)}$$

tənliyinin məxsusi həlli olması aşkara çıxır.

§2. Məxsusi nöqtələr

Tutaq ki,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

tənliyi verilib. Bu tənliklə yanaşı

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (2)$$

tənliyinə də baxaq.

T ə r i f 1. Əgər (x_0, y_0) nöqtəsinin istənilən kafi qədər kiçik ətrafında (1) və (2) tənliklərinin sağ tərəfləri varlıq və yeganəlik haqqında teoremin şərtlərini ödəmirsə, onda bu nöqtə (1) tənliyinin məxsusi nöqtəsi adlanır.

T ə r i f 2. Əgər (x_0, y_0) məxsusi nöqtəsinin kafi qədər kiçik ətrafında digər məxsusi nöqtə yoxdursa, onda bu nöqtə izole (təcrid) edilmiş məxsusi nöqtə adlanır.

Məsələn,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (3)$$

tənliyinə baxaq. Burada a, b, c, d - həqiqi ədədlərdir. Fərz edəcəyik ki, bu ədədlər $ad - bc \neq 0$ şərtini ödəyir. Əks halda (3) tənliyinin sağ tərəfi sabitə bərabər olar. Doğrudan da, əgər

$ad - bc = 0$ olarsa, onda $a = kc$, $b = kd$ olar və bu zaman (3) tənliyinin sağ tərəfi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{k(cx + dy)}{cx + dy} = k.$$

Baxılan (3) tənliyi üçün $x = 0, y = 0$ nöqtəsi yeganə izolə edilmiş məxsusi nöqtədir (İsbat edin).

Bizim məqsədimiz tənliyin həllərinin məxsusi nöqtə ətrafında özlərini necə aparmasını tədqiq etməkdir. Sadəlik üçün bu işi (3) tənliyi üçün edək.

(3) tənliyinin integral ayrılarını məxsusi nöqtə ətrafında tədqiq etmək üçün bu tənliyi

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y.\end{aligned}\tag{4}$$

əvəzləməsi vasitəsilə sadələşdirməyə çalışaq. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - müəyyən ədədlərdir və fərz edəcəyik ki, bu ədədlər $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ şərtini ödəyir.

Ayındır ki, (4) əvəzləməsi $x = 0, y = 0$ məxsusi nöqtəsinin yaxın ətrafını $\xi = 0, \eta = 0$ nöqtəsinin yaxın ətrafına keçirir. Bu əvəzləmədə iştirak edən $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ədədlərini elə seçək ki, nəticədə ξ və η dəyişənlərinə nəzərən alınan tənlik

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}\tag{5}$$

şəklinə düşsün. Burada λ_1 və λ_2 - müəyyən sabitlərdir.

(4) bərabərliklərinin hər iki tərəfini diferensiallayaq:

$$d\xi = \alpha dx + \beta dy,$$

$$d\eta = \gamma dx + \delta dy.$$

Bu bərabərliklərdən alırıq:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy}.$$

Əgər bu bərabərliyin sağ tərəfinin surət və məxrəcini dx -a bölüb, $\frac{dy}{dx}$ -in yerinə (3) tənliyinə əsasən $\frac{ax+by}{cx+dy}$ -i yazsaq, onda

sadə çevirmələrdən sonra

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)} \quad (6)$$

bərabərliyini alırıq. α, β, γ və δ ədədlərini elə seçək ki, bu

bərabərliyin sağ tərəfi $\frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}$ -yə bərabər olsun:

$$\frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi} = \frac{\lambda_1 (\gamma x + \delta y)}{\lambda_2 (\alpha x + \beta y)}$$

Əgər

$$\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by) = \lambda_1 (\gamma x + \delta y),$$

$$\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by) = \lambda_2 (\alpha x + \beta y).$$

bərabərlikləri ödənersə, onda aydındır ki, axırıncı bərabərlik də ödənər. Bu iki bərabərlik isə x və y məchullarının ixtiyari qiymətlərində aşağıdakı şərtlər ödəndikdə doğru olar:

$$\begin{cases} (c - \lambda_1)\gamma + a\delta = 0, \\ d\gamma + (b - \lambda_1)\delta = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (c - \lambda_2)\alpha + a\beta = 0, \\ d\alpha + (b - \lambda_2)\beta = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Cəbr kursundan məlumdur ki, əgər λ_1 və λ_2 ədədləri

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & a \\ d & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

və ya

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0 \quad (9)$$

tənliyinin kökləri olarsa, onda (7) və (8) sistemlərinin trivial olmayan həlləri var.

(9) tənliyini (3) tənliyinə uyğun xarakteristik tənlik, onun köklərini isə xarakteristik ədədlər adlandırırlar.

Tutaq ki, (9) xarakteristik tənliyinin iki müxtəlif λ_1 və λ_2 kökü var. λ_1 və λ_2 -nin bu qiymətlərində (7) və (8) sistemlərini həll edərək α, β, γ və δ ədədlərini təyin edə bilərik. Bu zaman tapılmış α, β, γ və δ -lar üçün $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ şərti ödənər.

Deməli α, β, γ və δ -nın tapılmış qiymətlərində (4) əvəzləməsindən sonra (3) tənliyi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi} \quad (5)$$

şəklinə düşər.

Bu tənliyin integral ayrılarının $\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtə ətrafında özlərini aparması, xarakteristik tənliyin köklərindən asılıdır.

(5) tənliyini integrallayaq:

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{d\xi}{\xi},$$

$$\eta = c \left| \xi \right|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \quad (10)$$

Burada c -ixtiyari sabitdir.

Aşağıdakı hallara baxaq:

1) Tutaq ki, λ_1 və λ_2 eyni işarəli müxtəlif həqiqi köklərdir. Ümumiliyi pozmadan fərz edə bilərik ki, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Bu halda (10) bərabərliyi ilə təyin olunan bütün integral ayrıları $\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtəsindən keçir.

Əgər (5) tənliyini

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_2 \xi}{\lambda_1 \eta}$$

şəklində yazsaq, onda aydın olar ki, $\xi = 0$ xətti də bu tənliyin integral ayrısıdır və bu əyri də $\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtəsindən keçir.

$$\eta'(\xi) = c \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left| \xi \right|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \quad \text{və} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$$

olduğundan, $\eta'(0) = 0$. Bu o deməkdir ki, (10) bərabərlikləri ilə təyin olunan inteqral əyriləri $\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtəsində $O\xi$ oxuna toxunurlar. Belə məxsusi nöqtə düyün nöqtəsi adlanır.

2) Tutaq ki, λ_1 və λ_2 əks işarəli həqiqi köklərdir. Bu halda $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ olduğundan yalnız $\eta = 0$ və $\xi = 0$ inteqral əyriləri

$\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtəsindən keçir. Digər inteqral əyriləri isə məxsusi nöqtədən keçmir. Belə məxsusi nöqtə yəhərvari nöqtə adlanır.

λ_1 və λ_2 kökləri kompleks qoşma ədədlər olduqda məxsusi nöqtə fokus, xüsusi halda, köklər sırf xəyali ədədlər olduqda məxsusi nöqtə mərkəz adlanır. Bu hallarda və köklər üst-üstə düşdükdə, baxılan tənliyin inteqral əyrilərini məxsusi nöqtə ətrafında müvafiq qaydada tədqiq etmək mümkündür.

Misal 1. Məxsusi nöqtə ətrafında $\frac{dy}{dx} = \frac{x+4y}{x-2y}$ tənliyinin

inteqral əyrilərini tədqiq etməli.

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y \quad (11)$$

əvəzləməsini edək. $a=1, b=4, c=1, d=-2$ olduğundan λ -ya nəzərən

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

tənliyini alırıq. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ bu tənliyin kökləridir. Deməli məxsusi nöqtə düyün nöqtəsidir. λ_1 və λ_2 -nin bu qiymətlərində (7) və (8) sistemlərini yazaq:

$$\begin{cases} -2\gamma + \delta = 0, \\ -2\gamma + \delta = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + 2\beta = 0. \end{cases}$$

$\gamma = 1; \delta = 2$ və $\alpha = \beta = 1$, uyğun olaraq bu sistemlərin həllidir.

α, β və γ, δ -nın bu qiymətlərində (11) əvəzləməsi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\xi = x + y, \quad \eta = x + 2y.$$

$$d\xi = dx + dy, d\eta = dx + 2dy$$

olduğundan alırıq:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dx + 2dy}{dx + dy}$$

Yuxarıda qeyd olunan əməlləri yerinə yetirsək bu tənlik

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3\eta}{2\xi}$$

şəklinə düşər.

Bu tənliyi inteqrallasaq, alırıq:

$$\eta = c|\xi|^{\frac{3}{2}}$$

Burada c - ixtiyari sabitdir. Bütün inteqral əyriləri $\xi = 0$, $\eta = 0$ məxsusi nöqtəsindən keçir.

§3. Məxsusi həllər

Həllin varlığı və yeganəliyi teoremindən bilirik ki, əgər

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

diferensial tənliyinin sağ tərəfi müəyyən bir oblastda kəsilməz funksiya olub, bu oblastda y dəyişəninə nəzərən məhdud xüsusi törəməyə malik olarsa, onda oblastın ixtiyari (x_0, y_0) nöqtəsindən bu tənliyin yeganə inteqral əyrisi keçər (həllin yeganəlik xassəsi).

T ə r i f 1. Hər bir nöqtəsində yeganəlik xassəsi pozulan həllə diferensial tənliyin məxsusi həlli deyilir.

Tərifdən aydın olur ki, diferensial tənliyin məxsusi həlli onun elə həllidir ki, bu həllin hər bir (x, y) nöqtəsindən tənliyin ən azı iki inteqral əyrisi (yəni onun özündən başqa daha bir inteqral əyrisi) keçmiş olsun.

Həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem baxılan oblastda məxsusi həllin olmaması üçün kafi şərtləri təyin edir.

Deməli, məxsusi həllin olması üçün zəruridir ki, bu teoremin şərtləri ödənməsin. Əgər $f(x, y)$ funksiyası baxılan oblastda kəsilməzdirsə, onda məxsusi həll oblastın o nöqtələrindən keçə bilər ki, bu nöqtələr də Lipsits şərti ödənməsin.

Aşağıdakı misala baxaq:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}. \quad (2)$$

Bu misalda $f(x, y) = \sqrt{y}$. Aydındır ki, $y \geq 0$ olduqda bu funksiya kəsilməzdir. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ olduğundan $y = 0$ xətti

üzərində Lipsits şərti ödənmir. Ona görə (2) tənliyinin məxsusi həlli yalnız $y = 0$ ola bilər. Aydındır ki, bu funksiya (2) tənliyinin həllidir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$y = \frac{1}{4}(x + c)^2 \quad (3)$$

funksiyası (2) tənliyinin ümumi həllini təyin edir.

$y = 0$ xətti üzərində ixtiyari $(x_0, 0)$ nöqtəsini qeyd edək. bu nöqtədən, aydındır ki, (3) həllər ailəsinə daxil olan bir integral

əyrisi də keçir. Bu əyri $y = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$ əyrisidir. Ona görə $y = 0$

(2) tənliyinin məxsusi həllidir. Çünki bu əyrinin hər bir nöqtəsindən (2) tənliyinin iki integral əyrisi keçir: $y = 0$ xəttinin özü və (3) həllər ailəsinə daxil olan əyri.

Bu sadə misal göstərir ki, (1) şəkilli diferensial tənliyin sağ tərəfi kəsilməz olduqda, onun məxsusi həllini aşağıdakı qayda ilə tapmaq olar:

1. Oblastda $f(x, y)$ funksiyasının y -ə görə Lipsits şərtini ödəmədiyi nöqtələri çoxluğunu, yəni praktiki olaraq, sonlu $\frac{\partial f}{\partial y}$ törəməsinin olmadığı nöqtələr çoxluğunu tapmalı;

2. Alınan nöqtələr çoxluğunun hər hansı bir əyri təyin etdiyini və bu əyrinin integral əyrisi olduğunu yoxlamalı;

3. Tapılan əyri tənliyin integral əyrisi olduqda, onun hər bir nöqtəsində həllin yeganəlik xassəsinin pozulduğunu yoxlamaq.

Əgər bu sonuncu şərt ödənərsə, onda tapılan integral əyrisi tənliyin məxsusi həllini təyin edir. Əks halda tənliyin məxsusi həlli yoxdur.

Tutaq ki, törəməyə nəzərən həll olunmamış

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4)$$

diferensial tənliyi verilib. Əgər bu tənlik y' -ə nəzərən həll olunsaydı, yəni (1) şəklinə gətirilə bilsəydi, yuxarıda gördüyümüz kimi, məxsusi həll $\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ sonlu törəməsinin

olmadığı nöqtələr çoxluğundan axtarılmalı idi. Ona görə də (4)-dən y -ə nəzərən törəmə alsaq

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0,$$

buradan isə

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

alındığından, bu nəticəyə gəlirik ki, F diferensiallanan funksiya dırsa sonlu $\frac{\partial y'}{\partial y}$ törəməsinin olmaması üçün

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (5)$$

şərtinin ödənməsi zəruridir. (4) və (5) bərabərliklərindən y' -i yox etməklə alınan $\phi(x, y) = 0$ tənliyinin təyin etdiyi əyriyə (və ya əyrilərə) funksiyalar nəzəriyyəsində (4) tənliyinin diskriminant əyrisi deyilir. Aydındır ki, (4) tənliyinin məxsusi həlli varsa o diskriminant əyriləri içərisindədir, yəni sonuncu bərabərlikdən təyin olunan $y = \phi(x)$ funksiyaları içərisindədir. Əgər belə

funksiya (4) tənliyini ödəyirsə, o məxsusi həlldir. Məxsusi həllin tapılmasının bu üsuluna diskriminant üsulu deyilir.

Diferensial tənliyin ümumi inteqralını bilməklə də, onun məxsusi həllini tapmaq olar.

Tutaq ki,

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad (6)$$

(4) tənliyinin ümumi inteqralıdır. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini c -yə nəzərən diferensiallayaq:

$$\frac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial c} = 0. \quad (7)$$

(6) və (7) tənliklərindən c -ni yox etsək

$$\psi(x, y) = 0$$

münasibətini alırıq. Diferensial həndəsə kursundan məlumdur ki, sonuncu bərabərliklə təyin olunan əyri (6) ayrılar ailəsinin qurşayanıdır, yəni elə ayrıdır ki, hər bir nöqtəsində (6) ailəsinin bir əyrisinə toxunur (ortaq toxunana malikdir). Onda aydındır ki, həmin əyrinin hər bir nöqtəsində $(x; y; y')$ üçlüyü (6) ailəsinin bir əyrisinin müvafiq üçlüyü ilə üst-üstə düşür. Deməli bu əyri (4) tənliyinin məxsusi həllini təyin edir. Məxsusi həllin tapılmasının bu üsuluna qurşayan üsulu deyilir.

Misal 1. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ tənliyinin ümumi və məxsusi həllərini tapmalı.

Tənliyin əvvəlcə ümumi həllini tapaq. Bu məqsədlə onu y' -ə nəzərən həll edək:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}.$$

Bu tənlik bircins tənlik olduğundan, onu həll etmək üçün $y = xu$ əvəzləməsini edək. Bu əvəzləmədən sonra u dəyişəninə nəzərən

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm \frac{dx}{x}$$

tənliyini alırıq. Əgər bu tənliyin hər iki tərəfini inteqrallasaq, bu zaman aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| = \pm \ln|x| + \ln|c|.$$

$u = \frac{y}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq, bu bərabərlik

$$\ln\left|\frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}\right| = \pm \ln|x| + \ln|c| \quad (8)$$

şəklinə düşər. Əgər bu bərabərlikdə $\ln|x|$ toplananını müsbət işarə ilə götürsək, onda elementar çevrilmələrdən sonra alarıq:

$$2cy = x^2 + c^2. \quad (9)$$

Əgər (8) bərabərliyində $\ln|x|$ toplananını mənfi işarə ilə götürsək, onda yenə də (9) bərabərliyini almış olarıq (yoxlamalı).

(9) bərabərliyi baxılan tənliyin ümumi inteqralını təyin edir. Bu inteqraldan istifadə edərək qurşayan üsulu ilə tənliyin məxsusi həllini tapaq:

$$\phi(x, y, c) = x^2 + c^2 - 2cy \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 2c - 2y \text{ olar və (7) bərabərliyinə əsasən alarıq: } c = y.$$

Əgər c -nin bu ifadəsini (9)-da nəzərə alsaq, taparıq:

$$y = \pm x.$$

Bu bərabərlik tənliyin məxsusi həllərini təyin edir.

İndi verilmiş tənliyin məxsusi həllini diskriminant üsulu ilə axtaraq:

$$F(x, y, y') = xy'^2 - 2yy' + x$$

olduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2xy' - 2y.$$

$$F = 0 \text{ və } \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ bərabərliklərindən } y' \text{-i yox etmək üçün ikinci}$$

bərabərlikdən y' -i tapıb, birincidə yerinə qoysaq

$$x^2 - y^2 = 0$$

diskriminant tənliyini alırıq. Buradan tapılan $y = \pm x$ funksiyalarının hər biri verilmiş tənliyi ödədiyindən, onlar məxsusi həllərdir.

MİSALLAR

Aşağıdakı məsələlərin həllərinə y_1, y_2, y_3 ardıcıl yaxınlaşmalarını qurmali.

56. $y' = x + y$, $y(0) = 0$.

57. $y' = \sin x + 2y$, $y(0) = 1$.

Aşağıdakı diferensial tənliklərin verilmiş başlanğıc şərtləri ödəyən yeganə həllərinin olduğu hər hansı bir parçanı təyin etməli.

58. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

59. $y' = x^2 + 2y^2 - 7$, $y(0) = 1$.

60. $y' = x^2 + y^2 - 2x$, $y(1) = 1$.

Aşağıdakı tənliklərdə məxsusi nöqtələri tədqiq etməli.

61. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y}{x + y}$.

62. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{2x + y}$.

Aşağıdakı tənlikləri həll etməli və eyni zamanda onların məxsusi həllərini tapmalı.

$$63. y'^3 = 8y.$$

$$64. y'^2 - y^2 + 1 = 0.$$

$$65. y^2(4 - y'^2) = 1.$$

III FƏSİL

TÖRƏMƏYƏ NƏZƏRƏN HƏLL OLUNMAMIŞ BİR TƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

§1. Törəməyə nəzərən həll olunmamış bir tərtibli sadə diferensial tənliklərin həlli

Əvvəlki fəsillərdə qeyd etmişdik ki, törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli diferensial tənliyi ümumi halda

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

şəklində yazmaq olar. Burada F -öz arqumentlərinin məlum funksiyasıdır. Bu paragrafda biz (1) şəkilli tənliyin elə xüsusi hallarına baxacağıq ki, onları integrallamaq mümkün olsun.

1. Əvvəlcə

$$a_0(x, y)y'^n + a_1(x, y)y'^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \quad (2)$$

tənliyinə baxaq. Burada $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \dots, n$ - müəyyən oblastda kəsilməz funksiyalardır. Bu tənlik bir tərtibli, n dərəcəli diferensial tənlik adlanır.

Fərz edək ki, baxılan oblastda $a_0(x, y) \neq 0$. Bu halda (2) tənliyi hər bir qeyd olunmuş (x, y) üçün, cəbrin əsas teoreminə əsasən, y' -in n sayda qiymətini təyin edir. Bu qiymətlər icərisindən kompleks qiymətləri atsaq, $m(m \leq n)$ sayda

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

şəkilli diferensial tənlik alırıq.

Tutaq ki, $y = \varphi_k(x, c)$, $k = 1, 2, \dots, m$, (3) tənliklərinin ümumi həlləridir. Onda bu həllərin hər biri, eyni zamanda, (2) tənliyinin də həlli olar.

Qeyd edək ki, II fəslin sonunda baxdığımız misaldakı diferensial tənlik (2) şəkilli diferensial tənlik idi.

2. Tutaq ki, (1) tənliyində y dəyişəni aşkar şəkildə iştirak etmir. Bu halda tənlik

$$F(x, y') = 0 \quad (4)$$

şəklinə düşər. Əgər bu tənliyi y' -ə nəzərən həll etmək mümkün olarsa, onda bir və ya bir neçə $y' = f(x)$ şəkilli tənlik alarıq ki, bu tənliyi də asanlıqla integrallayıb (4) tənliyinin ümumi integralını taparıq.

Tutaq ki, (4) tənliyini y' -ə nəzərən həll etmək mümkün deyil, lakin onu x dəyişəninə nəzərən həll etmək olur. Fərz edək ki, bu zaman

$$x = \varphi(y') \quad (5)$$

şəkilli tənlik alınıb. Bu tənliyi parametr daxil etmə üsulu adlanan üsulla həll edək. Bu məqsədlə $y' = p$ götürək. Bu halda $x = \varphi(p)$, $dy = p dx$ olar. $dx = \varphi'(p) dp$ olduğundan, alarıq:

$$dy = p \varphi'(p) dp \text{ və ya } y = \int p \varphi'(p) dp + c.$$

Deməli,

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p \varphi'(p) dp + c. \quad (6)$$

Bu (5) tənliyinin parametrik şəkilli ümumi həllidir.

Əgər (6) tənliklərindən p parametrini yox etmək mümkün olarsa, onda (4) tənliyinin $\phi(x, y, c) = 0$ şəkilli ümumi integralını almış olarıq.

3. Tutaq ki, (1) tənliyində x dəyişəni aşkar şəkildə iştirak etmir. bu halda tənlik

$$F(y, y') = 0 \quad (7)$$

şəklinə düşər. Əgər bu tənliyi y' -ə nəzərən həll etmək mümkün olarsa, onda bir və ya bir neçə $y' = f(y)$ şəkilli tənlik alarıq. $f(y) \neq 0$ olduqda axırıncı tənliyi

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

şəklində yazıb, integrallasaq, bu tənliyin ümumi integralını aşağıdakı bərabərlik vasitəsilə təyin etmiş olarıq:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c.$$

Qeyd edək ki, əgər $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, ədədləri $f(y) = 0$ tənliyinin kökləri olarsa, onda $y = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, funksiyaları da $y' = f(y)$ tənliyinin həlləri olar.

Tutaq ki, (7) tənliyini y' -ə nəzərən həll etmək mümkün deyil, lakin onu y -ə nəzərən həll etmək mümkündür və bu zaman (7) tənliyi

$$y = \varphi(y') \quad (8)$$

şəklinə düşür. Bu tənliyi də parametrlə daxil etmə üsulu ilə həll edək:

$$y' = p, y = \varphi(p); dy = p dx, dy = \varphi'(p) dp;$$

$$p dx = \varphi'(p) dp, dx = \frac{\varphi'(p)}{p} dp.$$

Axırıncı bərabərlikdən alırıq:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + c$$

Əgər bu bərabərliyə $y = \varphi(p)$ bərabərliyini qoşsaq, onda (7) tənliyinin parametrik şəkilli

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + c, \quad y = \varphi(p)$$

ümumi həllini alırıq.

Misal 1. $e^{y'} + y' - x = 0$ tənliyini həll etməli.

Bu tənliyi x -ə nəzərən həll etsək, alırıq:

$$x = e^{y'} + y'.$$

$y' = p$ götürək. Onda $dy = p dx$ və $x = e^p + p$ olar. Axırıncı bərabərlikdən alırıq:

$$dx = (e^p + 1) dp. \quad dx\text{-in bu ifadəsini } dy = p dx$$

bərabərliyində nəzərə alsaq

$$dy = p(e^p + 1)dp \text{ və ya } y = \int p(e^p + 1)dp + c$$

və ya $y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c$ bərabərliyini alırıq. Deməli

$$x = e^p + p, y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c$$

baxılan tənliyin parametrik şəkilli həlildir.

§ 2. Ümumi halda parametr daxil etmə üsulu Laqranj və Klero tənlikləri

Əvvəlki paraqrafda törəməyə nəzərən həll olunmamış bezi tənlikləri parametr daxil etmə üsulu ilə həll etdik. İndi isə yenidən

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

tənliyinə baxaq və bu tənliyi də parametr daxil etmə üsulu ilə həll etməyə çalışaq.

Tutaq ki, (1) tənliyini y -ə nəzərən həll etmək mümkündür:

$$y = f(x, y'). \quad (9)$$

$y' = p$ götürsək (9) tənliyi

$$y = f(x, p) \quad (10)$$

şəklinə düşər.

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp \text{ və } dy = p dx$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = p dx$$

olar və buradan törəməyə nəzərən həll olunmuş

$$\frac{dp}{dx} = \left(p - \frac{\partial f}{\partial x} \right) / \frac{\partial f}{\partial p} \quad (11).$$

tənliyini alırıq.

Tutaq ki, $p = \varphi(x, c)$ bu tənliyin ümumi inteqralıdır. Onda p -nin bu ifadəsini (10) bərabərliyində nəzərə alsaq (9) və ya (1) tənliyinin ümumi həllərini

$$y = f(x, \varphi(x, c))$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin etmiş olarıq.

İndi isə fərz edək ki, (1) tənliyini x dəyişəninə nəzərən həll etmək mümkündür.

$$x = f(y, y') \quad (12)$$

$y' = p$ götürsək (12) tənliyi

$$x = f(y, p) \quad (13)$$

şəklinə düşər və

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \quad dx = \frac{dy}{p}$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = \frac{dy}{p}$$

olar və buradan isə törəməyə nəzərən həll olunmuş

$$\frac{dp}{dy} = \left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) / \frac{\partial f}{\partial p} \quad (14)$$

tənliyi alınar.

Tutaq ki, $p = \varphi(y, c)$ bu tənliyin ümumi həllidir. Onda

$$x = f(y, \varphi(y, c)) -$$

(12) və ya (1) tənliyinin ümumi inteqralı olar.

Törəməyə nəzərən həll olunmamış (9) və ya (12) tənliklərinin həllinə parametr daxil etmə üsulunu tətbiq etdikdə, törəməyə nəzərən həll olunmuş (11) və ya (14) tənliklərini aldığımız. Bu tənlikləri, ümumiyyətlə, inteqrallamaq mümkün olmur. Lakin, törəməyə nəzərən həll olunmamış elə tənliklər var ki, onları parametr daxil etmə üsulu ilə həll etdikdə həmişə inteqrallana bilən diferensial tənliklər alınır. Belə tənliklərə misal olaraq Laqranj və Klero tənliklərini aid etmək olar.

↓ **Laqranj tənliyi.** Asılı olmayan x dəyişəni və məchul $y = y(x)$ funksiyasına nəzərən xətti olan

$$A(y')y + B(y')x = C(y')$$

tənliyinə Laqranj tənliyi deyilir. Burada A, B və C -məlum funksiyalardır.

Tutaq ki, $A(y') \neq 0$. Onda, tənliyi y dəyişəninə nəzərən həll etsək, alırıq:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \quad (15)$$

Bu tənlikdə $y' = p$ götürsək

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad (16)$$

və

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp$$

olar. Digər tərəfdən $dy = pdx$ olduğundan, alırıq:

$$[p - \varphi(p)]dx = (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp. \quad (17)$$

Tutaq ki, $\varphi(p) \neq p$. Bu halda axırıncı tənliyin hər iki tərəfini

$[p - \varphi(p)]dp$ -yə bölsək, xətti

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

tənliyini alırıq. Aydındır ki, bu birtərtibli xətti tənlikdir və bildiyimiz kimi onun ümumi həlli

$$x = \omega_1(p)c + \omega_2(p) \quad (18)$$

şəkilli funksiyadır. Burada c -ixtiyari sabitdir.

Əgər x -in bu ifadəsini (16) bərabərliyində nəzərə alsaq, onda

$$y = [\omega_1(p)c + \omega_2(p)]\varphi(p) + \psi(p) \quad (19)$$

olar və (18), (19) bərabərlikləri birlikdə Laqranj tənliyinin parametrik şəkilli həllini təyin edir.

Tutaq ki, p parametrinin müəyyən $p = p_0$ qiymətində $\varphi(p_0) = p_0$. Bu halda, aydındır ki, $p = p_0$ (17) tənliyini ödəyər

və (16) bərabərliyində $p = p_0$ götürsək, onda Laqranj tənliyinin daha bir həllini almış olarıq:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Klero tənliyi. Klero tənliyi Laqranj tənliyinin xüsusi halıdır. Əgər (15) Laqranj tənliyində $\varphi(y') = y'$ olarsa, onda alınan tənlik Klero tənliyi adlanır. Deməli

$$y = xy' + \psi(y') \quad (20)$$

tənliyi Klero tənliyidir.

Bu tənlikdə $y' = p$ götürsək Klero tənliyi

$$y = xp + \psi(p) \quad (21)$$

şəklinə düşər.

$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$ və $dy = pdx$ olduğundan alarıq:

$$\left[x + \psi'(p) \right] \frac{dp}{dx} = 0$$

Bu bərabərlik isə

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad x + \psi'(p) = 0 \quad (22)$$

olduqda ödəyir.

$$\frac{dp}{dx} = 0 - \text{dan alırıq ki, } p = c. \quad p - \text{nin bu qiymətini}$$

(21)-də nəzərə alsaq

$$y = cx + \psi(c) \quad (23)$$

həllini alarıq. Bu Klero tənliyini ümumi həllidir.

$x + \psi'(p) = 0$ tənliyinə baxaq. Tutaq ki, bu tənliyi p -yə nəzərən həll etmək mümkündür və bu zaman $p = \omega(x)$ alınır. Əgər p -nin bu ifadəsini (21)-də nəzərə alsaq, Klero tənliyinin daha bir həllini tapmış olarıq:

$$y = x\omega(x) + \psi[\omega(x)]$$

Bu həll Klero tənliyinin məxsusi həllidir (İsbat edin).

Misal 1. $y = 2xy' - \ln y'$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik Laqranj tənliyidir. $y' = p$ götürsək

$$y = 2xp - \ln p \quad (24)$$

olar. $dy = 2pdx + 2xdp - \frac{1}{p}dp$ və $dy = pdx$ olduğundan, alarıq:

$$2pdx + 2xdp - \frac{1}{p}dp = pdx$$

və ya

$$pdx + 2xdp = \frac{1}{p}dp.$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini pdp -yə bölək ($p \neq 0$ olduqda):

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^2}.$$

Bu tənlik xətti tənlik olduğundan, onun həllini məlum düsturdan istifadə etməklə tapmaq olar:

$$x = \frac{1}{p^2}(c + p).$$

Tapdığımız bu ifadəni (24) bərabərliyinin sağ tərəfində nəzərə alsaq y üçün

$$y = \frac{2}{p}(c + p) - \ln p$$

ifadəsini alarıq. Deməli

$$x = \frac{1}{p^2}(c + p), \quad y = \frac{2}{p}(c + p) - \ln p$$

baxılan tənliyin parametrik şəkilli ümumi həllidir. $p = 0$ -dan isə $y' = 0$ və $y = c$ alınır. Bunu tənlikdə yerinə yazsaq $c = 0$ olur. Yəni $y = 0$ daha bir həldir. Yoxlaya bilərik ki, bu məxsusi həldir.

Misal 2. $y = xy' - e^{y'}$ tənliyini həll etməli.

Bu tənlik Klero tənliyidir. $y' = p$ götürsək

$$y = xp - e^p \quad (25)$$

olar. $dy = p dx + x dp - e^p dp$ və $dy = p dx$ olduğundan, alarıq:

$$p dx + x dp - e^p dp = p dx$$

və ya

$$(x - e^p) dp = 0.$$

$dp = 0$ olarsa, $p = c$ olar və (25) bərabərliyinə əsasən yazı bilərik:

$$y = cx - e^c.$$

Bu funksiya baxılan Klero tənliyinin ümumi həllidir.

$x - e^p = 0$ olarsa, $e^p = x$ və $p = \ln x$ olar. Onda (25) bərabərliyindən alarıq:

$$y = x \ln x - x.$$

Bu isə Klero tənliyinin məxsusi həllidir.

MİSALLAR

Aşağıdakı tənlikləri törəməyə nəzərən həll edib, daha sonra adi üsullarla tənliyin ümumi həllini tapmalı.

66. $y'^2 - 4y' + 4 = 0.$

67. $y'^2 - xy' - 2x^2 = 0.$

68. $y'^2 + yy' - e^{2x}(y' + y) = 0.$

69. $xy'(xy' - 4y) + 3y^2 = 0.$

70. $y(xy' - y) = y - 2xy'.$

Aşağıdakı tənlikləri parametr daxil etmə üsulu ilə həll etməli.

71. $x = 2y'^3 - 3y'$.

72. $x(y'^2 + 1) = y'$.

73. $y = \sqrt{1 + y'^2}$.

74. $xy' = y \ln y'$.

75. $y = xy' + x^2 y'^2$.

Aşağıdakı Laqranj və Klero tənliklərini həll etməli.

76. $y = 2xy' + y'^2$.

77. $yy' = xy'^2 + 1$.

78. $y'(y - 3xy') = 2$.

79. $y = -xy' + \ln y'$.

80. $y = xy' - e^{y'}$.

IV FƏSİL

YÜKSƏKTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§1. Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem

Tutaq ki, x -i asılı olmayan dəyişən, $y = y(x)$ - məchul funksiyadır.

T ə r i f 1. Asılı olmayan x dəyişənini, məchul $y = y(x)$ funksiyasını və onun $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ($n \geq 2$) törəmələrini özündə saxlayan tənliyə n tərtibli diferensial tənlik deyilir.

Ümumi halda n tərtibli diferensial tənliyi

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şəklində yazmaq olar. Burada F -öz argumentlərinin məlum funksiyasıdır. Bu tənlikdə $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ -lər aşkar şəkildə iştirak etməyə bilər, lakin $y^{(n)}$ törəməsi tənlikdə mütləq iştirak etməlidir.

Tutaq ki, (1) tənliyini $y^{(n)}$ törəməsinə nəzərən həll etmək mümkündür. Bu halda tənliyi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

şəklində yazaq.

Fərz edək ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası müəyyən (a, b) intervalında təyin olunmuş və bu intervalda n -ci tərtibədək törəməsi olan funksiyadır.

T ə r i f 2. Əgər $y = \varphi(x)$ funksiyasını və onun törəmələrini (1) və ya (2) tənliyində yerinə yazdıqda bu tənlik (a, b) intervalında eynilik kimi doğru bərabərliklərə çevrilirsə, onda $y = \varphi(x)$ funksiyası (a, b) intervalında (1) və ya (2) tənliyinin həlli adlanır.

(2) tənliyinin

$$y(x_0) = y_1^{(0)}, y'(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)} \quad (3)$$

başlangıç şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsi Koşi məsələsi adlanır. Burada $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ -məlum həqiqi adədlərdir.

Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyini tədqiq etmək üçün (2) tənliyini n məchullu, n sayda birtərtibli diferensial tənliklərdən ibarət sistemə gətirmək məqsəduyğundur. Bunu aşağıdakı qaydada etmək olar:

$y_1 = y$ işarə edib, $y_2, y_3, \dots, y_n$ məchullarını aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin edək:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n.$$

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}, y_3 = \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

olduğundan

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

olar.

Beləliklə $y_1, y_2, \dots, y_n$ məchullarına nəzərən

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (4)$$

diferensial tənliklər sistemini alırıq.

$y = y_1(x)$ funksiyası (2) tənliyinin (3) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllidir.

T e o r e m 1. Tutaq ki, $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ funksiyaları qapalı $\bar{D} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_i^{(0)} - b \leq y_i \leq y_i^{(0)} + b, i = 1, 2, \dots, n\}$ oblastında kəsilməzdirilər və bu oblastda $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyirlər:

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| \leq N(|\bar{y}_1 - \tilde{y}_1| + |\bar{y}_2 - \tilde{y}_2| + \dots + |\bar{y}_n - \tilde{y}_n|), i = 1, 2, \dots, n.$$

Onda, (6) sisteminin (5) başlanğıc şərtlərini ödəyən və $[x_0 - h, x_0 + h]$ parçasında təyin olunan yeganə $y_1 = y_1(x)$,

$y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ həlli var. Burada $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$,

$$M = \max_D |f_i|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Q e y d . Əgər $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ funksiyalarının $\bar{D}$ oblastında $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənlərinə nəzərən məhdud xüsusi törəmələri varsa, onda bu funksiyalar həmin oblastda $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyirlər.

Nəzərə alsaq ki, (2) tənliyinin (3) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsi (4) diferensial tənliklər sisteminin (5) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə gətirilir, onda yuxarıda qeyd olunan teoremdən istifadə edərək (2) tənliyinin (3) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında aşağıdakı teoremin doğruluğunu alırıq:

T e o r e m 2. Yüksək tərtibli törəməyə nəzərən həll olunmuş n tərtibli (2) diferensial tənliyinin sağ tərəfi bütün

argumentlərə nəzərən kəsilməz və $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}$

arqumentlərinə nəzərən Lipsits şərtlərini ödəyirsə, onda bu tənliyin (3) başlanğıc şərtlərini ödəyən yeganə həlli var.

Bu teoremdən istifadə etməklə (2) tənliyinin ümumi həlli haqqında məlumat almaq olar. Doğrudan da, əgər $x = x_0$ -a qeyd olunmuş ədəd, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ -lara isə müxtəlif qiymətlər ala bilən parametrlər kimi baxsaq, onda (2) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən həllini

$$y = \varphi(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \quad (7)$$

bərabərliyi vasitəsilə ifadə edə bilərik.

$y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ başlanğıc qiymətlərini, uyğun olaraq $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitləri ilə əvəz etsək, onda (7) bərabərliyi

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (8)$$

şəklinə düşər. Bu (2) tənliyinin ümumi həllidir. Deməli, n tərtibli (2) tənliyinin ümumi həlli özündə n sayda ixtiyari sabit saxlayır.

Qeyd edək ki, ümumi həldən $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlərinin hər bir konkret qiymətlərində alınan həllə (2) tənliyinin xüsusi həlli deyilir.

İnteqrallana bilən və tərtibi azaldıla bilən bəzi yüksək tərtibli diferensial tənliklər

Bu paragrafda biz inteqrallana bilən bəzi yüksək tərtibli diferensial tənlikləri nəzərdən keçirəcək və tərtibi azaldıla bilən bir sıra tənliklərlə tanış olacağıq.

1. İlk olaraq aşağıdakı n tərtibli diferensial tənliyə baxaq:

$$y^{(n)} = f(x) \quad (1)$$

Burada $f(x)$ müəyyən (a, b) intervalında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır.

Bu tənliyin ümumi integralını tapmaq üçün onu ardıcıl olaraq n dəfə integrallayaq:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x)dx + c_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x)dx + c_1(x - x_0) + c_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x)dx + \frac{c_1(x - x_0)^2}{2!} +$$

$$c_2(x - x_0) + c_3, \dots,$$

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ dəfə}} f(x)dx + \frac{c_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \quad (2)$$

$$+ \frac{c_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1}(x - x_0) + c_n.$$

Burada $x_0 - (a, b)$ intervalına daxil olan ixtiyari nöqtə, $c_1, c_2, \dots, c_n$ - ixtiyari sabitlərdir.

(2) bərabərliyi (1) tənliyinin ümumi həllini təyin edir. bu bərabərliyin sağ tərəfində duran birinci toplanan

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ dəfə}} f(x)dx \quad (3)$$

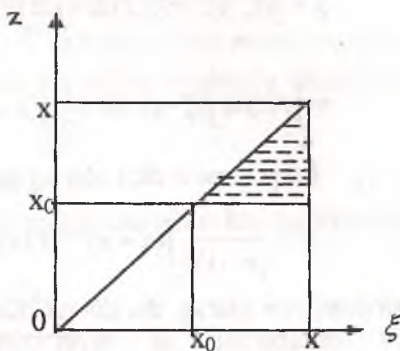
funksiyası, aydındır ki, (1) tənliyinin xüsusi həllidir. Çünki o, ümumi həldən $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olduqda alınır.

Bu xüsusi həll özündə n qat integral saxlayır. Göstərək ki, bu həlli elə çevirmək olar ki, o yalnız bir integral vasitəsilə ifadə olunar.

Əvvəlcə $n = 2$ halına baxaq. Bu halda integrallama dəyişənlərini müxtəlif hərflərlə işarə edərək (3) həllini

$$y = \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} f(z) dz$$

şəklində yazaq. Bu integrala ikiqat integral kimi baxsaq görərik ki, integrallama oblası üçbucaq şəkildə qeyd olunan üçbucaqdır. İntegrallama növbəsini dəyişsək alarıq:



$$\begin{aligned} y &= \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} f(z) dz = \int_{x_0}^x dz \int_z^x f(z) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^x f(z) dz \int_z^x d\xi = \int_{x_0}^x (x - z) f(z) dz; \end{aligned} \quad (4)$$

$n = 3$ halında

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx \quad (5)$$

olduğundan, (4) bərabərliyinə əsasən yazı bilərik:

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x (x - z) f(z) dz. \quad (6)$$

Burada da, integrallama dəyişənlərini müxtəlif hərflərlə işarə etsək və analogi qaydada, integrallama növbəsini dəyişsək, alarıq:

$$y = \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} f(z) dz = \int_{x_0}^x dz \int_z^x f(z) d\xi =$$

$$= \int_{x_0}^x f(z) dz \int_z^x d\xi = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-z)^2 f(z) dz. \quad (7)$$

Bu prosesi ardıcıl olaraq davam etdirsək, ixtiyari n üçün:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz. \quad (8)$$

bərabərliyini alırıq. Bu düstur Koşi düsturudur. Qeyd edək ki, (8) bərabərliyi ifə təyin olunan həll (1) tənliyinin $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ şərtlərini ödəyən həllidir.

2. Göstərək ki, n tərtibli

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \quad (9)$$

şəkilli diferensial tənliyi də həmişə integrallamaq mümkündür. Burada F - öz argumentinin məlum funksiyasıdır.

Əvvəlcə fərz edək ki, (9) tənliyini $y^{(n)}$ törəməsinə nəzərən həll etmək mümkündür və bu zaman

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \quad (10)$$

tənliyi alınır. Əgər bu tənlikdə $y^{(n-1)} = z$ əvəzləməsini etsək, onda tənlik

$$z' = f(z)$$

şəklinə düşər və bu tənliyi integrallasaq, alırıq:

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + c_1.$$

c_1 - burada ixtiyari sabitdir.

Tutaq ki, aldığımız bu bərabərliyi z -ə nəzərən həll edib $z = \varphi(x, c_1)$ bərabərliyini almışıq. $z = y^{(n-1)}$ olduğundan bu bərabərlik

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1)$$

şəklinə düşər ki, bu tənliyi də ardıcıl olaraq $n-1$ dəfə inteqrallasaq (10) tənliyinin ümumi inteqralını tapırıq.

Tutaq ki, (9) tənliyini $y^{(n)}$ -ə nəzərən həll etmək mümkün deyil. Bu zaman parametrik şəkilli tənliyə keçməklə tənliyi həll edək.

Tutaq ki,

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t) \quad (11)$$

(9) tənliyinə uyğun parametrik şəkilli tənlikdir. Bu tənliklərdən alırıq:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(t), \quad dx = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + c_1.$$

Daha sonra ardıcıl olaraq, tapırıq:

$$dy^{(n-2)} = \psi(t)dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + c_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, \dots, dy = y'dx, y = \int y'dx + c_n.$$

Beləliklə x və y dəyişənlərini t parametrindən asılı funksiyalar kimi təyin edə bildik. x dəyişəni özündə bir ixtiyari sabit, y dəyişəni isə $n-1$ sayda ixtiyari sabit saxlayır. Deməli, tapdığımız həll tənliyin ümumi həllidir.

İndi isə tərtibi azaldıla bilən bəzi yüksək tərtibli diferensial tənliklərə baxaq.

1. Tutaq ki, n tərtibli diferensial tənlik məchul $y = y(x)$ funksiyasını və onun $k-1$ -ci tərtibə qədər törəmələrini özündə saxlamır. Belə lənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (12)$$

Bu tənlikdə $y^{(k)} = z$ əvəzləməsini etsək, tənlik

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (13)$$

şəklinə düşər. Bu tənlik $n - k$ tərtibli diferensial tənlikdir. Deməli $y^{(k)} = z$ əvəzləməsi etməklə biz (12) tənliyinin tərtibini k vahid azaltdıq.

Tutaq ki,

$$z = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) \quad (14)$$

(13) tənliyinin ümumi həllidir. Onda (12) tənliyinin ümumi həllini tapmaq üçün

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

tənliyini alarıq ki, bu tənliyi də yuxarıda izah olunan qaydada integrallamaq olar.

Əgər (13) tənliyinin (14) ümumi həlli əvəzinə onun

$$\omega(x, z, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) = 0$$

ümumi inteqralı tapılırsa, onda (12) tənliyinin ümumi inteqralının tapılması

$$\omega(x, y^{(k)}, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) = 0$$

tənliyinin həllinə gətirilər.

2. Asılı olmayan x dəyişənini aşkar şəkildə özündə saxlamayan n tərtibli

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (15)$$

tənliyinə baxaq. Bu tənlikdə $y' = p$ əvəzləməsini edək. bu zaman fərz olunur ki, p məchulu y dəyişəninin funksiyasıdır:

$p = p(y)$. $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ törəmələrini p və onun törəmələri vasitəsilə ifadə edək:

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = \left[p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right] p$$

Bu ifadələrdən görünür ki, $y' = p(y)$ əvəzləməsindən sonra hər bir $y^{(k)}$ törəməsi, p və onun $k-1$ -ci tərtib törəmələri vasitəsilə ifadə olunur. Ona görə bu əvəzləmə nəticəsində (15) tənliyi $n-1$ tərtibli tənliyə çevrilir, yəni $y' = p(y)$ əvəzləməsi (15) tənliyinin tərtibini bir vahid azaldır.

3. Aşağıdakı n tərtibli diferensial tənliyə baxaq:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (16)$$

Tutaq ki, bu tənliyin sol tərəfi $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ dəyişənlərinə nəzərən bircins funksiyadır. Bu o deməkdir ki, ixtiyari t ədədi üçün

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \quad (17)$$

şərti ödənilir.

Bu halda (16) tənliyi məchul funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins tənlik adlanır.

Göstərək ki, bu halda da tənliyin tərtibini bir vahid azaltmaq mümkündür. Bu məqsədlə

$$y' = yz \quad (18)$$

əvəzləməsini edək. Burada $z = z(x)$ - yeni məchul funksiyasıdır.

Bu zaman

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''), \dots, y^{(n)} = y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

olduğundan (10) tənliyi

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), y(z^3 + 3zz' + z''), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

şəklinə düşər. Bu tənliyi isə F funksiyasının (17) bircinslik xəssələrindən istifadə etsək aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$F(x, 1, z, z^2 + z', z^3 + 3zz' + z'', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Bu $n-1$ tərtibli diferensial tənlikdir.

Misal 1. $y^{IV} = \frac{3}{x}$ tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

(2) həll düsturundan istifadə etsək və bu zaman xüsusi həllin (8) ifadəsini nəzərə alsaq, baxılan tənliyin ümumi həllini

$$y = \frac{1}{3!} \int_1^x (x-z)^3 \frac{3}{z} dz + \frac{c_1(x-1)^3}{3!} + \frac{c_2(x-1)^2}{2!} + c_3(x-1) + c_4,$$

şəklində yazı bilərik. Əgər bu həldə iştirak edən inteqralı hesablasaq, onda ümumi həll aşağıdakı şəkllə düşər:

$$y = \frac{x^3}{2} \ln|x| + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

Misal 2. $xy''' = y'' - 2xy''$ tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

$y'' = z$ əvəzləməsini etsək, z -ə nəzərən aşağıdakı bir tərtili

$$xz' = (1 - 2x)z$$

tənliyini alarıq. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırır, inteqrallasaq, alarıq

$$z = c_1 x e^{-2x}.$$

$y'' = z$ olduğundan baxılan tənliyin həllini tapmaq üçün

$$y'' = c_1 x e^{-2x}$$

diferensial tənliyini inteqrallamaq lazımdır. Bu tənliyi bir dəfə inteqrallasaq

$$y' = -\frac{c_1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} + c_2,$$

ikinci dəfə inteqrallasaq

$$y = \frac{c_1}{4} (x+1) e^{-2x} + c_2 x + c_3$$

həllini alarıq. Bu baxılan tənliyin ümumi həllidir.

Misal 3. $2y'^2 + yy'' = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

Tənlikdə asılı olmayan x dəyişəni aşkar şəkildə iştirak etmədiyindən $y' = p(y)$ əvəzləməsini edək. Bu halda $y'' = pp'$ olduğundan, baxılan tənlik $2p^2 + ypp' = 0$ və ya $p(2p + yp') = 0$ şəklinə düşər. Buradan alırıq:

$$1) p = 0, y' = 0, y = c.$$

$$2) 2p + yp' = 0, y \frac{dp}{dy} = -2p, \frac{dp}{p} = -2 \frac{dy}{y},$$

$$\ln|p| = -2 \ln|y| + \ln|c_1|, p = \frac{c_1}{y^2}, y' = \frac{c_1}{y^2},$$

$$y^2 dy = c_1 dx, \frac{y^3}{3} = c_1 x + c_2, y^3 = c_1 x + c_2.$$

Bu, baxılan tənliyin ümumi inteqralıdır.

MİSALLAR

Aşağıdakı tənlikləri həll etməli.

$$81. y^3 y'' = 1.$$

$$82. y'' + y'^2 = 2e^{-y}.$$

$$83. xy''' + y'' = x.$$

$$84. yy'' + y'^2 = 1.$$

$$85. y'' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} + 1.$$

$$86. xy y'' + xy'^2 - 2yy'' = 0.$$

$$87. x^2 yy'' = (y - xy')^2.$$

Aşağıdaki tənliklərin verilmiş başlanğıc şərtləri ödəyən həllərini tapmalı.

88. $yy'' - y'^2 = y^2 y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

89. $2y''' - 3y'^2 = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

90. $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

YÜKSƏK TƏRTİBLİ XƏTTİ DİFERENSIAL TƏNLİKLƏRİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ

§1. Təriflər və ümumi xassələr

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F(x).$$

Burada $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ və $F(x)$ funksiyaları müəyyən (a, b) intervalında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalardır. Bu tənlik n tərtibli xətti diferensial tənlik adlanır. Fərz edək ki, baxılan intervalda $a_0(x)$ funksiyası sıfırdan fərqlidir: $a_0(x) \neq 0$. Bu halda tənliyin hər iki tərəfini $a_0(x)$ əmsalına bölərək, onu aşağıdakı şəkllə gətirək:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = f(x). \quad (1)$$

Burada aydındır ki,

$$p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}.$$

Bu tənliklə yanaşı

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0. \quad (2)$$

tənliyinə də baxaq.

(1) tənliyi (eləcə də bu şəkllə gətirilən ilkin tənlik) qeyri-bircins, (2) tənliyi isə bircins xətti diferensial tənlik adlanır. (1) və (2) tənliklərinin sol tərəfləri üst-üstə düşdüündən, (2) tənliyinə (1) tənliyinə uyğun bircins tənlik deyilir.

Xətti diferensial tənliklərin aşağıdakı iki xassəsini qeyd edək:

1) Asılı olmayan x dəyişəninin istənilən $x = \varphi(\xi)$ əvəzləməsi zamanı xətti tənlik öz şəklini dəyişmir (xətti tənlik

olaraq qalır). Burada $\varphi(\xi)$ funksiyası $\varphi'(\xi) \neq 0$ şərtini ödəyən və n -ci tərtibə qədər törəməsi olan ixtiyari funksiyadır.

2) Məchul funksiyanın istənilən $y = \alpha(x)u + \beta(x)$ xətti çevrilməsi zamanı xətti tənlik öz şəklini dəyişmir. Burada $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ - n -ci tərtibə qədər törəmələri olan ixtiyari funksiyalar, $u = u(x)$ isə yeni məchul funksiyadır.

Bu xassələrin doğruluğuna birbaşa yoxlama vasitəsilə inanmaq olar (Yoxlayın).

(1) və ya (2) tənliyinin sol tərəfini $L[y]$ ilə işarə edək:

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x)y \quad (3)$$

Bu bərabərlik vasitəsilə təyin olunan $L[y]$ -ə xətti diferensial ifadə və ya xətti operator deyilir. $L[y]$ -in aşağıdakı iki mühüm xassəsini qeyd edək (İsbat edin):

$$1) L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]; \quad (4)$$

$$2) L[cy] = cL[y]. \quad (5)$$

Qeyd edək ki, axırıncı bərabərlikdə iştirak edən c - ixtiyari sabitdir.

Xətti diferensial tənliklər nəzəriyyəsində funksiyaların xətti asılılığı anlayışı mühüm rol oynayır. Məsələn, xətti diferensial tənliklərin ümumi həllinin tapılması məsələsi bu anlayışdan istifadə etməklə həll olunur.

Tutaq ki, (a, b) intervalında təyin olunmuş $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyaları üçün, heç olmazsa biri sıfırdan fərqli elə $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərini tapmaq mümkündür ki, bu intervalda

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (6)$$

bərabərliyi ödənilir. Onda deyirlər ki, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyaları (a, b) intervalında xətti asılıdır. Əks halda, yəni (6) bərabərliyi yalnız və yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ olduqda ödənersə, onda bu funksiyalar xətti asılı olmayan funksiyalar adlanır.

Aşağıdakı misallara baxaq:

1) $1, x, x^2, \dots, x^n$ funksiyaları istənilən intervalda xətti asılı olmayan funksiyalardır.

Doğrudan da, əgər bu funksiyalar müəyyən bir (a, b) intervalında xətti asılı olarsa, onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli elə $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərini tapmaq olar ki, $\forall x \in (a, b)$ üçün

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad (7)$$

bərabərliyi ödəyir. Bu isə mümkün deyil. Çünki (7) bərabərliyi x dəyişəninə n -dən çox sayda qiymətlərində ödəmə bilməz.

2) $\varphi_1(x) = ch^2 x$, $\varphi_2(x) = sh^2 x$, $\varphi_3(x) = 1$ funksiyaları ixtiyari intervalda xətti asılıdır. Doğrudan da, əgər $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$ götürsək

$$ch^2 x - sh^2 x - 1 = 0$$

eyniliyini alarıq.

§2. Xətti bircins diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsi

36 -

Yenidən n tərtibli xətti bircins

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0 \quad (1)$$

tənliyinə baxaq. Fərz edəcəyik ki, bu tənliyin $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, əmsalları müəyyən (a, b) intervalında kəsilməz funksiyalardır.

Bu tənliyin həlləri haqqında aşağıdakı teoremləri qeyd edək:

T e o r e m 1. Əgər $y_1 = y_1(x)$ və $y_2 = y_2(x)$ - (1) xətti bircins diferensial tənliyinin həlləridirsə, onda $y_1 + y_2$ cəmi də bu tənliyin həllidir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, y_1 və y_2 funksiyaları (1) tənliyinin həlləridir. $L[y_1]=0$ və $L[y_2]=0$. Bu bərabərliklərə və xətti operatorun yuxarıda qeyd olunan birinci xassəsinə əsasən alırıq:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0.$$

T e o r e m 2. Əgər $y_1 = y_1(x)$ -(1) xətti bircins diferensial tənliyinin həllidirsə, onda cy_1 -də bu tənliyin həllidir. Burada c -ixtiyari sabitdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, y_1 funksiyası (1) tənliyinin həllidir: $L[y_1]=0$. Onda xətti operatorun ikinci xassəsinə əsasən yaza bilərik:

$$L[cy_1] = cL[y_1] = 0.$$

T ə r i f. Tutaq ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - $(n-1)$ -ci tərtibədək kəsilməz törəmələri olan funksiyalardır. Bu funksiyalar və onların törəmələrindən təşkil olunmuş aşağıdakı determinanta baxaq:

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Bu determinant $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarının Vronski determinantı adlanır.

T e o r e m 3. Əgər $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları xətti asılı olarsa onda bu funksiyaların Vronski determinantı eynilik kimi sıfıra bərabərdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları xətti asılıdır. Onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli elə $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri var ki,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Ümumiliyi pozmadan fərz etmək olar ki, $\alpha_n \neq 0$. Bu halda axırıncı bərabərlikdən alarıq:

$$y_n(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}(x) \quad (2)$$

Burada $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Əgər (2) bərabərliyini ardıcıl olaraq $n-1$ dəfə diferensiallasaq və alınan ifadələri $y_n(x)$ -in ifadəsi ilə birlikdə Vronski determinantının axırıncı sütununda nəzərə alsaq, onda determinantın məlum xassələrindən istifadə etməklə asanlıqla alarıq ki, $W(x) \equiv 0$.

Qeyd edək ki, xətti asılı olmayan funksiyaların da Vronski determinantı eynilik kimi sıfıra bərabər ola bilər. Məsələn, $(-\infty, +\infty)$ intervalında diferensiallanan $x|x|$ və x^2 funksiyalarının Vronski determinantı

$$W(x) = \begin{vmatrix} x|x| & x^2 \\ 2|x| & 2x \end{vmatrix} \equiv 0$$

olsa da bu funksiyalar həmin intervalda xətti asılı deyillər. Doğrudan da

$$\alpha_1 x|x| + \alpha_2 x^2 = 0$$

bərabərliyindən $x < 0$ olduqda $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $x > 0$ olduqda isə $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ alınır ki, bu iki münasibətdən $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ olduğu, yəni funksiyaların xətti asılı olmamaları ortaya çıxır.

Aşağıda göstərəcəyik ki, xətti bircins tənliyin, yəni (1) şəkilli tənliyin həlləri olan funksiyaların Vronski determinantı sıfırdırsa, bu funksiyalar xətti asılıdırlar. Bu məqsədlə əvvəlcə (1) tənliyinin həlləri olan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarının Vronski determinantı üçün Liuvill düsturu adlanan

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx} \quad (3)$$

düsturunun doğruluğunu isbat edək. Burada x_0 - (1) tənliyinin baxıldığı intervalın hər hansı qeyd olunmuş nöqtəsidir. Determinantdan törəmə alma qaydasından və iki sətiri eyni olan determinantın sifıra bərabər olması xassəsindən istifadə etməklə tapırıq:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Burada , $y_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, funksiyaalarının (1) tənliyinin həlli olmalarını, yəni

$$y_i^{(n)}(x) = -p_1(x)y_i^{(n-1)}(x) - \dots - p_n(x)y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bərabərliklərini, sonuncu sətirdə nəzərə alsaq, yenə də determinantın xassələrindən istifadə etməklə

$$W'(x) = -p_1(x)W(x)$$

bərabərliyini alırıq. Bu dəyişənləri ayrılan diferensial tənlikdir. Onu həll edərək (3) Liuvill düsturunu alırıq. Bu düsturdan çıxan maraqlı bir faktı qeyd edək:

Xətti bircins diferensial tənliyin həllərinin Vronski determinantı ya eynilik kimi sıfırdır (bu determinant hər hansı bir nöqtədə sıfıra bərabərdirsə), ya da heç bir nöqtədə sıfıra çevrilmiş.

T e o r e m 4. Xətti bircins (1) tənliyinin $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ həllərinin (a, b) intervalında xətti asılı olmaları üçün zəruri və kafi şərt onların Vronski determinantının bu intervalda eynilik kimi sıfır olmasıdır.

İ s b a t ı. Zəruriliyin, yəni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları xətti asılıdırsa $W(x) \equiv 0$ - dır faktının isbatına

ehtiyac yoxdur. Çünki bu fakt 3-cü teoremdə istənilən $n-1$ -ci tərtibə qədər törəmələri olan funksiyalar üçün isbat olunmuşdu.

K a f i l i k. Tutaq ki, $W(x) \equiv 0$. İsbat edək ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ həlləri xətti asılıdırlar. İxtiyari $x_0 \in (a, b)$ nöqtəsində

$$W'(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x_0) & y_2^{(n)}(x_0) & \dots & y_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, bu determinantın sütunları xətti asılı vektorlardır, yəni hamısı sıfır olmayan elə $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ədədləri var ki,

$$\beta_1 y_1^{(k)}(x_0) + \beta_2 y_2^{(k)}(x_0) + \dots + \beta_n y_n^{(k)}(x_0) = 0, \\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$y_0(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x)$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya (1) tənliyinin həllidir

(Teorem 1 və 2-yə görə) və yuxarıdakı bərabərliklərə əsasən

$$y_0^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Varlıq və yeganəlik haqqında teoremə görə (bax: IV fəsil, §1, Teorem 2) (1), (4) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və aydındır ki, bu həll $y_0(x) \equiv 0$ -dir. Onda

$$\beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x) \equiv 0.$$

Bu isə $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarının xətti asılı olmaları deməkdir. Teorem isbat olundu.

T ə r i f 2. Xətti bircins (1) tənliyinin n sayda xətti asılı olmayan həllərinə bu tənliyin fundamental həllər sistemi deyilir.

T e o r e m 5. Əmsalları müəyyən (a, b) intervalında kəsilməz olan istənilən xətti bircins diferensial tənliyin bu intervalda fundamental həllər sistemi var.

İ s b a t ı. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - larla (1) tənliyinin, uyğun olaraq

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = y_1''(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$y_n(x_0) = y_n'(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

şərtlərini ödəyən həllərini işarə edək. Varlıq və yeganəlik haqqında teoremə görə belə həllər var və yeganədirlər. Belə həllərə uyğun Vronski determinantı üçün

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan $W(x) \neq 0$. Deməli həllər xətti asılı deyillər və fundamental sistem təşkil edirlər.

42 İndi isə xətti bircins diferensial tənliyin ümumi həlli haqqında aşağıdakı teoremi qeyd edək.

T e o r e m 6. Əgər $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları (1) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edirsə, onda bu tənliyin ümumi həlli

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ - ixtiyari sabitlərdir.

İ s b a t ı. Aydındır ki, ixtiyari $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitləri üçün (3) bərabərliyi ilə təyin olunan y funksiyası (1) tənliyinin həllidir. (1) tənliyinin ümumi həlli özündə n sayda ixtiyari sabit saxlayan elə həldir ki, bu həldən sabitlərin müəyyən ədədi qiymətlərində onun istənilən xüsusi həlli alınır. Digər tərəfdən varlıq və yeganəlik teoreminə əsasən hər bir xüsusi həll

$$y(x_0) = y_1^{(0)}, y'(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)} \quad (4)$$

başlangıç şərtləri ilə birqiymətli təyin olunur.

Axırıncı iki teoremin isbatıyla, məsələn, [2]-də tanış olmaq olar.

47

§3. Qeyri - bircins xətti tənliklər

1. Qeyri-bircins xətti tənliyin ümumi həlli haqqında teorem

Aşağıdakı n tərtibli xətti qeyri-bircins diferensial tənliyə baxaq:

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Bircins

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

tənliyi, yuxarıda qeyd olunduğu kimi, (1) tənliyinə uyğun bircins tənlik adlanır.

Fərz edəcəyik ki, bu tənliklərin $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ əmsalları və (1) tənliyinin sağ tərəfi- $f(x)$ funksiyası müəyyən (a, b) intervalmda kəsilməz funksiyalardır.

T e o r e m. Qeyri-bircins (1) tənliyinin ümumi həlli bu tənliyin hər hansı bir xüsusi həlli ilə uyğun (2) bircins tənliyinin ümumi həllinin cəminə bərabərdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $Y = Y(x)$ funksiyası (1) tənliyinin hər hansı bir xüsusi həllidir. Bu tənlikdə

$$y = z + Y(x) \quad (3)$$

əvəzləməsini edək. Burada $z = z(x)$ -yeni məchul funksiyasıdır. Bu əvəzləməni (1) tənliyində nəzərə alsaq, $L[y]$ xətti operatorunun xassəsinə əsasən (§1, (4)) yaza bilərik:

$$L[z] + L[Y] = f(x).$$

$Y = Y(x)$ funksiyası (1) tənliyinin həlli olduğundan, axırıncı bərabərlik

$$L[z] = 0 \quad (4)$$

şəklinə düşür. Bu (1) tənliyinə uyğun bircins tənlikdir.

Tutaq ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - (2) (və deməli (4)) tənliyinin fundamental həllər sistemidir. Onda

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

ifadəsi (2) bircins tənliyinin (və deməli (4) tənliyinin) ümumi həllini təyin edir. Əgər bu ifadəni (3) bərabərliyində z -in yerinə yazsaq, onda (1) tənliyinin həllini

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + Y(x) \quad (5)$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin etmiş olarıq. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ - ixtiyari sabitlərdir.

Əvvəlki paraqrafda isbat olunmuş teorem 6-dakı üsuldən istifadə etməklə asanlıqla göstərmək olar ki, bu həll (1) tənliyinin ümumi həllidir.

2. Sabitin variasiyası üsulu.

Qeyri-bircins xətti tənliyin ümumi həlli haqqında teoremə əsasən belə tənliyin ümumi həllini tapmaq üçün onun hər hansı bir xüsusi həllini və uyğun bircins tənliyin fundamental həllər sistemini bilmək lazımdır. Göstərək ki, yalnız bircins tənliyin fundamental həllər sistemi məlum olduqda, qeyri-bircins tənliyin ümumi həllini tapmaq mümkündür. Bunun üçün Lagranja məxsus olan və sabitin variasiyası adlanan üsuldən istifadə edəcəyik.

Tutaq ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları (2) bircins diferensial tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir. Onda bu tənliyin ümumi həlli, məlumdur ki,

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (6)$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin olunur. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ - ixtiyari sabitlərdir. Aydınır ki, (6) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiya $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlərinin heç bir qiymətində qeyri-bircins (1) tənliyini ödəmir. Lakin $c_1, c_2, \dots, c_n$ -lərə x dəyişəninin funksiyaları kimi baxaraq (1) tənliyinin həllini

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x) \quad (7)$$

şəklində axtaracağıq.

Tələb edək ki, (7) bərabərliyi ilə təyin olunan y funksiyası (1) tənliyini ödəsin. Bu məqsədlə (7) bərabərliyini ardıcıl olaraq n dəfə diferensiallayaq və hər bir diferensiallamadan sonra $c_1, c_2, \dots, c_n$ funksiyalarını təyin etmək üçün müəyyən münasibət almağa çalışaq:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(x) \frac{dy_1}{dx} + c_2(x) \frac{dy_2}{dx} + \dots + c_n(x) \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dc_n}{dx}$$

Tələb edək ki,

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dc_n}{dx} = 0 \quad (8_1)$$

bərabərliyi ödənsin. Bu halda $\frac{dy}{dx}$ törəməsi aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(x) \frac{dy_1}{dx} + c_2(x) \frac{dy_2}{dx} + \dots + c_n(x) \frac{dy_n}{dx}. \quad (7_1)$$

Yenidən bu bərabərliyi diferensiallayaq və $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ funksiyalarının törəmələrinin iştirak etdiyi hədlərin cəmini sıfıra bərabər edək. Bu halda alarıq:

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dc_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dc_2}{dx} + \dots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dc_n}{dx} = 0, \quad (8_2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = c_1(x) \frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \dots + c_n(x) \frac{d^2 y_n}{dx^2}. \quad (7_2)$$

Bu prosesi ardıcıl olaraq davam etdirsək, $n-1$ -ci addımda alarıq:

$$\frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} \frac{dc_1}{dx} + \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} \frac{dc_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \frac{dc_n}{dx} = 0, \quad (8_{n-1})$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = c_1(x) \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + c_2(x) \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + c_n(x) \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \quad (7n-1)$$

Nəhayət, məchul funksiyanın n -ci tərtib törəməsini tapaq:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= c_1(x) \frac{d^n y_1}{dx^n} + c_2(x) \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + c_n(x) \frac{d^n y_n}{dx^n} + \\ &+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dc_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx} \end{aligned} \quad (7_n)$$

Məchul $y(x)$ funksiyanın və onun törəmələrinin

(7), (7₁), ..., (7_n) bərabərlikləri ilə təyin olunan ifadələrini (1)

tənliyində nəzərə alsaq, sadə çevirmələrdən sonra alarıq:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dc_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx} = f(x). \quad (8_n)$$

(8₁), (8₂), ..., (8_n) tənlikləri $\frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx}, \dots, \frac{dc_n}{dx}$ məchullarına nəzərən

n xətti cəbri tənlikdən ibarət sistem təşkil edir. bu sistemin determinantı fundamental həllər sisteminin Vronski determinantı olduğundan, o sıfırdan fərqlidir.

Ona görə bu sistemin yeganə həlli var və Kramer qaydası ilə asanlıqla tapıla bilər. Tutaq ki,

$$\frac{dc_i}{dx} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(8₁)-(8_n) tənliklər sisteminin həllidir. onda

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

olar. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyari sabitlərdir.

Əgər $c_i(x)$ -ların tapdığımız axırıncı ifadələrini (7)-də yerinə yazsaq, onda qeyri-bircins (1) tənliyinin həllini taparıq:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + \sum_{i=1}^n y_i(x) \int \varphi_i(x) dx.$$

Bu (1) tənliyinin ümumi həllidir.

Misal. $y'' + \frac{x-1}{x} y' - \frac{1}{x} y = x$, $x \neq 0$, tənliyinin ümumi

həllini tapmalı.

Uyğun bircins tənliyə baxaq:

$$y'' + \frac{x-1}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $y_1 = x - 1$ və $y_2 = e^{-x}$ bu tənliyin xətti asılı olmayan həlləridir. Ona görə axırıncı tənliyin ümumi həlli

$$y = c_1(x-1) + c_2 e^{-x}$$

bərabərliyi idə təyin olunur.

Qeyri-bircins tənliyin həllini

$$y = c_1(x)(x-1) + c_2(x)e^{-x} \quad (9)$$

şəklində axtaraq. Sabitin variasiyası üsulunun sxeminə əsasən alarıq:

$$y' = c_1(x) - c_2(x)e^{-x} + c_1'(x)(x-1) + c_2'(x)e^{-x}$$

$$c_1'(x)(x-1) + c_2'(x)e^{-x} = 0 \quad \text{qəbul etsək}$$

$$y' = c_1(x) - c_2(x)e^{-x} \quad \text{olar. Bu halda}$$

$$y'' = c_1'(x) - c_2'(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-x}.$$

y , y' və y'' -in ifadələrini tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$c_1'(x) - c_2'(x)e^{-x} = x.$$

Deməli, $c_1'(x)$ və $c_2'(x)$ tötəmələrinə nəzərən aşağıdakı cəbri tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases} c_1'(x)(x-1) + c_2'(x)e^{-x} = 0, \\ c_1'(x) - c_2'(x)e^{-x} = x. \end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$c_1'(x) = 1 \text{ və } c_2'(x) = (1-x)e^x$$

bu sistemin həllidir. Bu bərabərlikləri integrallasaq, alarıq:

$$c_1(x) = x + c_1, \quad c_2(x) = e^x(2 - x) + c_2.$$

$c_1(x)$ və $c_2(x)$ -in bu ifadələrini (9) bərabərliyində nəzərə alsaq, sadə çevirmələrdən sonra baxılan tənliyin ümumi həllini tapmış olarıq:

$$y = c_1(x - 1) + c_2 e^{-x} + x^2.$$

MISALLAR

Aşağıdakı funksiyaların xətti asılılığını tədqiq etməli.

91. $x + 1, x - 3$.

92. $4x - 2, 6x - 3$.

93. $1 - x, 3 + 2x, x + 2$.

94. $1, \cos^2 x, \cos 2x$.

95. $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, e^x$.

Aşağıdakı tənliklərin xüsusi həllərini tapmalı. Belə həlləri ya cəbri çoxhədli, ya üstlü funksiya, ya da digər münasib şəkildə axtarmalı.

96. $(x + 3)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

97. $xy'' - (3x + 1)y' + (2x + 1)y = 0$.

98. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$.

VI FƏSİL

XÜSUSİ ŞƏKİLLİ XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

§1. Sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənliklər

Aşağıdakı n tərtibli xətti bircins diferensial tənliyə baxaq:

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \quad (1)$$

Burada $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ - həqiqi ədədlərdir. Bu halda (1) tənliyi sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənlik adlanır.

Göstərəcəyik ki, heç bir inteqrallama əməliyyatı aparmadan, yalnız cəbri əməliyyatlardan istifadə etməklə (1) tənliyinin həllini həmişə tapmaq mümkündür.

Sabit əmsallı (1) tənliyinin həllini

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

şəklində axtaraq. Burada k -sabitdir. Əgər bu funksiyanın n -ci tərtibədək törəmələrini tapıb (1) tənliyində yerinə yazsaq, alırıq:

$$L[e^{kx}] \equiv e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n) = 0.$$

Bu bərabərlikdən görünür ki, əgər k ədədi

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (3)$$

tənliyinin kökü olarsa, onda $y = e^{kx}$ funksiyası (1) tənliyinin həlli olar.

Qeyd edək ki, n dərəcəli (3) cəbri tənliyi (1) tənliyinə uyğun xarakteristik tənlik adlanır.

Aşağıdakı hallara baxaq.

1. Tutaq ki, (3) xarakteristik tənliyinin n sayda müxtəlif kökü var. Bu kökləri

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

ilə işarə edək. Onda (1) tənliyinin n sayda

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x} \quad (4)$$

xüsusi həllərini almış olarıq. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu həllər (1) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir. Bunun üçün (4) həllərinin Vronski determinantının sıfırdan fərqli olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tapılan həllər fundamental həllər sistemini təşkil etdiyindən, baxılan halda, (1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x} \quad (5)$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin olunur. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ -ixtiyari sabitlərdir.

Misal 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ tənliyinə baxaq.
 $k^2 - 3k + 2 = 0$ tənliyi uyğun xarakteristik tənlikdir. Xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = 1, k_2 = 2$ olduğundan $y_1 = e^x$ və $y_2 = e^{2x}$ xüsusi həllər, $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ isə baxılan tənliyin ümumi həllidir.

Tutaq ki, (3) xarakteristik tənliyinin kökləri içərisində kompleks köklər var. Fərz edək ki, $k_1 = \alpha + \beta i$ -xarakteristik tənliyin kompleks köküdür. (1) tənliyinin əmsalları həqiqi ədədlər olduğundan (3) xarakteristik tənliyi də həqiqi əmsallı tənlikdir. Ona görə $k_1 = \alpha + \beta i$ kökünə kompleks qoşma olan $k_2 = \alpha - \beta i$ ədədi də xarakteristik tənliyin köküdür.

Aydındır ki, bu köklərə uyğun həllər

$$y = e^{(\alpha + \beta i)x} \quad \text{və} \quad y = e^{(\alpha - \beta i)x}$$

funksiyalarıdır. Xətti bircins tənliyin məlum xassəsinə görə bu həllərin ixtiyari xətti kombinasiyası da (1) tənliyinin həllidir:

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0.$$

Əgər $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ götürüb Eyler düsturundan istifadə etsək

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 = \frac{1}{2} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) +$$

$$+\frac{1}{2}e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$c_1 = \frac{1}{2i}, c_2 = -\frac{1}{2i} \text{ götürsək,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2 &= \frac{1}{2i} y_1 - \frac{1}{2i} y_2 = \frac{1}{2} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) - \\ &- \frac{1}{2i} e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

həqiqi həllərini alırıq. Bu həllər xətti asılı deyillər. Çünki

$$c_1 \tilde{y}_1(x) + c_2 \tilde{y}_2(x) \equiv 0$$

eyniliyindən

$$e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \equiv 0,$$

buradan isə $c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x \equiv 0$ alınır ki, $\cos \beta x$ və $\sin \beta x$ funksiyaları xətti asılı olmadıqları üçün (göstərin!) $c_1 = c_2 = 0$ olar.

Beləliklə, (3) xarakteristik tənliyinin hər bir cüt kompleks qoşma $\alpha_m + i\beta_m$ və $\alpha_m - i\beta_m$ kökünə bir cüt xətti asılı olmayan $e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x$, $e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x$ həqiqi həlli uyğun olur. Bu qayda ilə düzələn n sayda xüsusi həll xətti asılı olmayan həllərdir. (Bunu isbat edin).

Misal 2. $y'' - 2y' + 5y = 0$ tənliyinə baxaq. Xarakteristik tənlik $k^2 - 2k + 5 = 0$, onun kökləri isə $k_1 = 1 + 2i$ və $k_2 = 1 - 2i$ - dir.

$$y = e^{k_1 x} = e^{(1+2i)x} = e^x \cos 2x + ie^x \sin 2x$$

olduğundan, $y_1 = e^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$ funksiyaları baxılan tənliyin xətti asılı olmayan xüsusi həlləridir. Ümumi həll

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Misal 3. $y''' - 4y'' + y' + 26y = 0$ tənliyinə baxaq. Xarakteristik tənlik $k^3 - 4k^2 + k + 26 = 0$, onun kökləri isə $k_1 = 3 + 2i$, $k_2 = 3 - 2i$, $k_3 = -2$ -dir. Xətti asılı olmayan həqiqi xüsusi həllər

$$e^{3x} \cos 2x, e^{3x} \sin 2x, e^{-2x},$$

ümumi həll isə

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + c_3 e^{-2x} \text{ -dir.}$$

2. Tutaq ki, xarakteristik tənliyin kökləri içərisində təkrarlanan köklər var. Fərz edək ki, $k = k_1$ - xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan həqiqi köküdür. İsbat olunub ki, bu halda $k = k_1$ kökünə uyğun m sayda xətti asılı olmayan həll var və bu həllər

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, y_2(x) = x e^{k_1 x}, \dots, y_m(x) = x^{m-1} e^{k_1 x} \quad (9)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunurlar.

Misal 4. $y'' - 4y' + 4y = 0$ tənliyinə baxaq. Bu tənliyə uyğun xarakteristik tənlik $k^2 - 4k + 4 = 0$, onun kökləri isə $k_1 = k_2 = 2$ -dir. $y_1 = e^{2x}$ və $y_2 = x e^{2x}$ - xətti asılı olmayan həllər, $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$ - ümumi həldir.

Əgər $k_1 = \alpha + \beta i$ - xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan kompleks kökü olarsa, onda (9) bərabərliklərinə əsasən bu kökə m sayda

$$y_1(x) = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2(x) = x e^{(\alpha + \beta i)x}, \dots, y_m(x) = x^{m-1} e^{(\alpha + \beta i)x}$$

həlləri uyğun olar. Bu həllər, aydındır ki, kompleks qiymətli həllərdir. Əgər bu həllərin həqiqi və xəyali hissələrini ayırsaq, onda $k_1 = \alpha + \beta i$ kökünə uyğun $2m$ sayda həqiqi

$$y_1^{(1)}(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2^{(1)}(x) = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots,$$

$$y_m^{(1)}(x) = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_1^{(2)}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_2^{(2)}(x) = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots,$$

$$y_m^{(2)}(x) = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

həllərini almış olarıq.

Misal 5. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ tənliyinə baxaq. uyğun xarakteristik tənlik $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$, onun kökləri isə $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$ -dir. $k = 2i$ kökünə

$$y_1(x) = e^{2ix}, y_2(x) = xe^{2ix}$$

həlləri uyğundur. Xətti asılı olmayan həqiqi həllər

$$y_1^{(1)}(x) = \cos 2x, y_2^{(1)}(x) = x \cos 2x,$$

$$y_1^{(2)}(x) = \sin 2x, y_2^{(2)}(x) = x \sin 2x,$$

bərabərlikləri ilə təyin olunduğundan, baxılan tənliyin ümumi həlli aşağıdakı şəkllə malikdir:

$$y = (c_1 + c_2x) \cos 2x + (c_3 + c_4x) \sin 2x.$$

Burada c_1, c_2, c_3, c_4 - ixtiyari sabitlərdir.



§2. Sabit əmsallı xətti qeyri-bircins diferensial tənliklər

Sabit əmsallı n tərtibli xətti qeyri-bircins diferensial tənliyə baxaq:

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Əvvəlki paraqrafda göstərdik ki, bu tənliyə uyğun bircins tənliyin ümumi həllini həmişə tapmaq mümkündür. Əgər (1) tənliyinin hər hansı bir xüsusi həlli məlum olarsa, onda ümumi nəzəriyyəyə əsasən, bu tənliyin ümumi həllini də yazı bilərik. Digər tərəfdən, əgər uyğun bircins tənliyin ümumi həlli məlum olarsa, onda sabitin variasiyası üsulundan istifadə etməklə də (1) tənliyinin ümumi həllini tapmaq olar.

Bəzi hallarda (1) tənliyinin xüsusi həllini heç bir inteqrallama əməliyyatı aparmadan tapmaq mümkün olur. Bu paraqrafda məqsədimiz belə halları nəzərdən keçirməkdən ibarətdir.

Əvvəlcə aşağıdakı faktı qeyd edək.

Tutaq ki, (1) tənliyinin sağ tərəfi iki funksiyanın cəminə bərabərdir: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Fərz edək ki, $y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaları, uyğun olaraq

$$L[y] = f_1(x) \text{ və } L[y] = f_2(x)$$

tənliklərinin həllidir. Onda $y = y_1(x) + y_2(x)$ funksiyası (1) tənliyinin həllidir.

Bu faktın doğruluğuna bilavasitə yoxlamaqla inanmaq olar.

Tutaq ki, (1) tənliyinin sağ tərəfi müəyyən bir çoxhədli ilə üstlü funksiyanın hasilinə bərabərdir:

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}. \quad (2)$$

Burada $P_m(x)$ — m dərəcəli çoxhədli, α isə ədəddir.

Belə olduqda xüsusi həlli qurmaq üçün iki hala baxaq:

1. α ədədi (1) tənliyinə uyğun

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (3)$$

xarakteristik tənliyinin kökü deyil.

Bu halda (1) tənliyinin xüsusi həllini

$$y(x) = Q_m(x)e^{\alpha x} \quad (4)$$

şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $Q_m(x)$ — m dərəcəli çoxhədlidir:

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m. \quad (5)$$

Bu çoxhədlinin əmsalları qeyri-müəyyəndir. Xüsusi həllin (4)-dəki ifadəsini (1) tənliyinin sol tərəfində nəzərə alıb, $e^{\alpha x}$ vuruğunu yox etdikdən sonra, sağ və sol tərəflərin eyni dərəcəli hədlərinin əmsallarını bir-birinə bərabər etməklə bu əmsalları tapmaq olar.

2. α ədədi (3) xarakteristik tənliyinin s dəfə təkrarlanan köküdür.

Bu halda (1) tənliyinin xüsusi həllini

$$y(x) = x^s Q_m(x)e^{\alpha x} \quad (6)$$

şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $Q_m(x)$ - (5) şəkilli, qeyri – müəyyən əmsallı çoxhədlidir. Bu çoxhədlinin əmsalları da yuxarıda izah olunan qayda ilə tapılır.

Əgər (1) tənliyinin sağ tərəfi (2) şəkilli bir neçə funksiyanın cəminə bərabər olarsa, onda yuxarıda qeyd olunan fakta əsasən (1) tənliyinin sağ tərəfindəki hər bir toplanana uyğun xüsusi həllini tapıb, onları toplamaq lazımdır.

Tutaq ki, (1) tənliyinin sağ tərəfi aşağıdakı şəkllə malikdir:

$$f(x) = e^{\alpha} [p_m^{(1)}(x) \cos \beta x + p_m^{(2)}(x) \sin \beta x]. \quad (7)$$

Burada α və β - həqiqi ədədlər, $p_m^{(1)}(x)$ və $p_m^{(2)}(x)$ isə dərəcələri m -i aşmayan çoxhədlilərdir. Fərz olunur ki, bu çoxhədlilərdən heç olmazsa birinin dərəcəsi m -ə bərabərdir.

İki hala baxaq:

1. Tutaq ki, $\alpha + i\beta$ ədədi (3) xarakteristik tənliyinin kökü deyil. Bu halda (1) tənliyinin xüsusi həllini

$$y = e^{\alpha} [Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$$

şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $Q_m^{(1)}$ və $Q_m^{(2)}$ – m dərəcəli, qeyri-müəyyən əmsallı çoxhədlilərdir.

2. Tutaq ki, $\alpha + i\beta$ ədədi (3) xarakteristik tənliyinin s dəfə təkrarlanan köküdür. Bu halda (1) tənliyinin xüsusi həllini

$$y = x^s e^{\alpha} [Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$$

şəklində axtarmaq lazımdır. $Q_m^{(1)}$ və $Q_m^{(2)}$ birinci halda olduğu kimi m -dərəcəli, qeyri-müəyyən əmsallı çoxhədlilərdir.

§3. Sabit əmsallı tənliklərə gətirilə bilən tənliklər

Əgər dəyişən əmsallı xətti diferensial tənliyi əvəzləmə vasitəsilə sabit əmsallı xətti tənliyə gətirmək mümkün olarsa, onda bu tənliyi həll etdikdən sonra ilkin tənliyin də həllini tapmaq olar.

Sabit əmsallı xətti tənliklərə gətirilə bilən aşağıdakı tənliklərə baxaq:

$$1. (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0. \quad (1)$$

Bu tənliyi sabit əmsallı tənliyə gətirmək üçün iki halı nəzərdən keçirək.

a) $|x| \leq 1$. Bu halda (1) tənliyində $x = \cos \varphi$ əvəzləməsini edək. Onda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{dy}{d\varphi}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d^2 y}{d\varphi^2} - \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \frac{dy}{d\varphi}.$$

Bu ifadələri tənlikdə nəzərə alsaq, sabit əmsallı

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + n^2 y = 0$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyin xətti asılı olmayan həlləri $y_1 = \cos n\varphi$ və $y_2 = \sin n\varphi$ olduğundan

$$y_1 = \cos(n \arccos x) \quad \text{və} \quad y_2 = \sin(n \arccos x)$$

funksiyaları (1) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir. n - müsbət tam ədəd olduqda $y_1 = \cos(n \arccos x)$ həlli n dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədli Çebişev çoxhədlisi adlanır və $T_n(x)$ ilə işarə edilir:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

b) $|x| \geq 1$. Bu halda (1) tənliyində $x = \cosh t$ əvəzləməsini edək.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\sinh t}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1}{\sinh^2 t} - \frac{dy}{dt} \frac{\cosh t}{\sinh^3 t}$$

olduğundan, bu əvəzləmədən sonra (1) tənliyi

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - n^2 y = 0$$

şəklinə düşür. Bu tənliyin xətti asılı olmayan həlləri $y_1 = e^n$ və $y_2 = e^{-n}$ olduğundan, asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$y_1 = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \quad \text{və} \quad y_2 = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-n} \quad \text{funksiyaları}$$

(1) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir. n -in tam qiymətlərində

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-n}}{2}$$

funksiyası n dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədli də Çebişev çoxhədlisi adlanır.

$$2. \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (2)$$

Bu tənlik Bessel tənliyi adlanır. $n = \pm \frac{1}{2}$ olduqda (2) tənliyi

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad (3)$$

şəklinə düşür. Göstərək ki, bu halda Bessel tənliyini sabit əmsallı tənliyə gətirmək mümkündür.

$y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ əvəzləməsini edək. Bu halda alarıq:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} z' - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = x^{-\frac{1}{2}} z'' - x^{-\frac{3}{2}} z' + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} z$$

Bu ifadələri (3) tənliyində nəzərə alsaq, sadə çevirmələrdən sonra, sabit əmsallı

$$z'' + z = 0.$$

tənliyini alarıq. $z_1 = \cos x$ və $z_2 = \sin x$ -bu tənliyin xətti asılı olmayan həlləri olduğundan

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad \text{və} \quad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

(3) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir.

$$3. \quad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \quad (4)$$

Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ -həqiqi ədədlərdir. Bu tənlik Eyler tənliyi adlanır.

Eyler tənliyini sabit əmsallı tənliyə gətirmək üçün, bu tənlikdə

$x = e^t$ ($x < 0$ olduqda $x = -e^t$) əvəzləməsini edək. Bu zaman alırıq:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right);$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left[e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] =$$

$$e^{-3t} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right);$$

.....

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left(\frac{d^k y}{dt^k} - \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right).$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ -tam ədədlərdir.

Əgər törəmələrin bu ifadələrini (4) tənliyində nəzərə alsaq,

k -nin hər bir qiymətində $\frac{d^k y}{dx^k}$ törəmələri $a_k x^k = a_k e^{kt}$ -lərə vurulduğundan, üstlü ifadələrin hasili vahidə bərabər olacaq və nəticədə sabit əmsallı xətti tənlik alınacaq.

Misal 1. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$ tənliyinə baxaq. Aydındır

ki, bu tənlik Eyler tənliyidir. Əgər bu tənlikdə $x = e^t$ əvəzləməsini

ətsək, törəmələrin yuxarıda tapdığımız ifadələrini nəzərə almaqla, aşağıdakı sabit əmsallı xətti tənliyə gəlirik:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Bu tənliyə uyğun xarakteristik tənlik $k^2 - 2k + 1 = 0$ olduğundan, bu tənliyin kökləri $k_1 = k_2 = 1$ və xətti asılı olmayan həllər $y_1 = e^t$ və $y_2 = te^t$ -dir. Ona görə baxılan tənliyin xətti asılı olmayan həlləri

$y_1 = x$ və $y_2 = x \ln x$
bərabərlikləri ilə təyin olunur.

MİSALLAR

Aşağıdakı tənliklərin ümumi həllərini tapmalı.

99. $y'' - 3y' + 2y = 0.$

100. $y''' + y'' - 2y' = 0.$

101. $y''' + y = 0.$

102. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$

103. $y''' + y'' - y' - y = 0.$

104. $y'' + 4y' - 5y = 5x^2 - 8x - 2.$

105. $y'' - 2y' - 3y = 5e^{4x}.$

106. $y'' + 4y = 5xe^x.$

107. $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x.$

108. $y'' + y = \sin x.$

Aşağıdakı tənliklərin xüsusi həllərini qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə tapmalı.

109. $y'' + 3y' - 4y = (x + 2)e^{3x}.$

110. $y'' + 3y' - 4y = xe^{-4x}.$

$$111. y'' + 4y = (2x - 1) \sin 2x.$$

$$112. y''' - y' = e^x \sin 3x.$$

$$113. y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Eyler tənliklərini həll etməli.

$$114. x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0.$$

$$115. x^2 y'' - xy' - 3y = 0.$$

$$116. x^2 y''' - 2y' = 0.$$

$$117. x^2 y'' - xy' + y = 2x.$$

$$118. x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x.$$

VII FƏSİL

İKİ TƏRTİBLİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR

§1. Bircins tənliklərin həllərinin sıfırları

Aşağıdakı sabit əmsallı xətti tənliklərə baxaq:

$$y'' - a^2 y = 0, \quad (1)$$

$$y'' + a^2 y = 0. \quad (2)$$

(1) tənliyinin xətti asılı olmayan həlləri $y_1 = e^{ax}$ və $y = e^{-ax}$ olduğundan, onun ümumi həlli

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} \quad (3)$$

bərabərliyi, (2) tənliyinin xətti asılı olmayan həlləri isə $y_1 = \cos ax$ və $y_2 = \sin ax$ olduğundan, onun ümumi həlli

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax \quad (4)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (1) tənliyinin istənilən həllinin ya sıfırı yoxdur, ya da ən çoxu bir sıfırı var. Lakin (2) tənliyinin hər bir həllinin sonsuz sayda sıfırları var. Buna inanmaq üçün (4) həllində $c_1 = A \sin \alpha$, $c_2 = A \cos \alpha$ götürüb, bu həlli $y = A \sin(ax + \alpha)$ şəklində yazmaq kifayətdir. Həllin bu ifadələrindən istifadə etməklə, eyni zamanda, göstərmək olar ki, onun iki qonşu sıfırı arasındakı məsafə $\frac{\pi}{a}$ -ya bərabərdir.

T ə r i f. Əgər diferensial tənliyin həllinin müəyyən intervalda birdən çox sıfırı yoxdursa, onda bu həll baxılan intervalda rəqs etməyən həll, əks halda isə rəqs edən həll adlanır.

Yuxarıdakı iki misaldan görünür ki, $y'' + qy = 0$ tənliyinin $q \leq 0$ olduqda hər bir həlli istənilən intervalda rəqs etməyəndir, $q > 0$ olduqda isə hər bir həlli uzunluğu $\frac{\pi}{\sqrt{q}}$ -dən

böyük olan istənilən intervalda rəqs edəndir.

Bu nəticəni dəyişən əmsallı iki tərtibli xətti diferensial tənliklər üçün ümumiləşdirək. Bu məqsədlə

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (5)$$

tənliyinə baxaq.

T e o r e m. Əgər (a, b) intervalında $Q(x) \leq 0$ şərti ödənirsə, onda (5) tənliyinin istənilən həlli bu intervalda rəqs etməyən həldir.

İ s b a t 1. Teoremi əksini fərz etməklə isbat edək. Fərz edək ki, (5) tənliyinin müəyyən bir $y(x)$ həllinin (a, b) intervalında iki sıfırı var: $y(x_1) = 0, y(x_2) = 0, x_1 < x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$. Eyni zamanda fərz edək ki, (x_1, x_2) intervalında bu həllin digər sıfırı yoxdur. Bu halda $y(x)$ həlli (x_1, x_2) intervalında öz işarəsini dəyişmir və ümumiliyi pozadan fərz edə bilərik ki, $y(x) > 0, x \in (x_1, x_2)$. Onda aydındır ki, $y'(x_1) > 0$. $Q(x) \leq 0$ olduğundan (5) tənliyindən $y''(x) \leq -Q(x)$, $x \in (x_1, x_2)$ bərabərsizliyinin doğruluğunu alırıq. Bu əo deməkdir ki, $y'(x)$ törəməsi (x_1, x_2) intervalında azalayan funksiyaadır: $y'(x) < y'(x_1), x \in (x_1, x_2)$. Bu bərabərsizliyi əzərə almaqla, sonlu artım teoreminə əsasən yazı bilərik:

$$y(x_2) \geq y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) = y'(x_1)(x_2 - x_1) > 0$$

Bu isə $y(x_2) = 0$ şərtinə ziddir.

Teorem isbat olundu.

T e o r e m (Ş t u r m). Əgər x_1 və x_2 - (5) tənliyinin $y_1(x)$ həllinin iki ardıcıl sıfırlarıdırsa, onda bu tənliyin $y_1(x)$ ilə xətti asılı olmayan istənilən $y_2(x)$ həllinin x_1 və x_2 arasında yalnız və yalnız bir sıfırı var.

İ s b a t 1. Əksini fərz edək. Öncə tutaq ki, (5) tənliyinin $y_1(x)$ həlli ilə xətti asılı olmayan $y_2(x)$ həllinin (x_1, x_2) intervalında sıfırı yoxdur. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaasının Wronski determinantına baxaq:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = W(x). \quad (6)$$

$y_2(x)$ həlli $y_1(x)$ həlli ilə xətti asılı olmayan həll olduğundan bu həll $[x_1, x_2]$ parçasının uc nöqtələrində də sıfıra bərabər ola bilməz. Əks halda $W(x)$ determinantı bu nöqtələrdə sıfıra çevrilərdi. $W(x) \neq 0$ olduğundan, o öz işarəsini dəyişmir. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $W(x) > 0$. (6) bərabərliyinin hər iki tərəfini $y_2^2(x)$ -a bölsək

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_2^2(x)} = \frac{W(x)}{y_2^2(x)}$$

və ya

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \right) = - \frac{W(x)}{y_2^2(x)}$$

bərabərliklərini alırıq. Axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini x_1 -dən x_2 -dək integrallayaq:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{W(x)}{y_2^2(x)} dx$$

$y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ olduğundan bu bərabərliyin sol tərəfi sıfıra bərabərdir. Sağ tərəf isə, aydındır ki, mənfidir. Bu ziddiyyət göstərir ki, $y_1(x)$ həllinin iki ardıcıl sıfırı arasında $y_2(x)$ həllinin heç olmazsa bir sıfırı var.

İndi tutaq ki, $y_2(x)$ həllinin (x_1, x_2) intervalında iki sıfırı var: $\bar{x}_1$ və $\bar{x}_2$: $y_2(\bar{x}_1) = y_2(\bar{x}_2) = 0$, $x_1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < x_2$. Bu halda $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həllərinin rollarını dəyişsək, alırıq ki, $y_1(x)$ həllinin $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ intervalında heç olmazsa bir sıfırı var. Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Belə ki, teoremin şərtinə görə x_1 və x_2 - $y_1(x)$ həllinin iki ardıcıl sıfırlarıdır.

Teorem isbat olundu.

Q e y d. Şturm teoreminin hökmü (5) tənliyindən daha ümumi şəkllə malik olan iki tərtibli xətti

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

bircins diferensial tənlik üçün də doğrudur.

Aşağıdakı iki tərtibli xətti diferensial tənliklərə baxaq:

$$y'' + Q_1(x)y = 0, \quad z'' + Q_2(x)z = 0 \quad (7)$$

T e o r e m (M ü q a y i s ə t e o r e m i). Tutaq ki, (7) tənliklərinin əmsalları (a, b) intervalında $Q_2(x) \geq Q_1(x)$ şərtini ödəyir. Onda birinci tənliyin istənilən $y(x)$ həllinin bu intervalındakı iki sıfırı arasında ikinci tənliyin istənilən $z(x)$ həllinin ən azı bir sıfırı yerləşir.

İ s b a t 1. Tutaq ki, x_1 və x_2 - $y(x)$ həllinin iki ardıcıl sıfırındır. Fərz edək ki, bu sıfırlar arasında $z(x)$ həllinin sıfırı yoxdur. Ümumili pozmadan fərz edə bilərik ki, (x_1, x_2) intervalında $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Bu halda, aydındır ki, $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$ bərabərsizlikləri ödənəcək.

Bu həlləri (7)-dəki uyğun tənliklərdə yerinə yazıb, sadə çevirmələridən sonra alırıq:

$$y''(x)z(x) - z''(x)y(x) = [Q_2(x) - Q_1(x)]y(x)z(x)$$

Sol tərəf $y'(x)z(x) - z'(x)y(x)$ fərqlərinin törəməsinə bərabər olduğundan, bu bərabərliyi x_1 -dən x_2 -yə qədər inteqrallasaq, alırıq:

$$[y'(x)z(x) - z'(x)y(x)]_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [Q_2(x) - Q_1(x)]y(x)z(x)dx.$$

$y(x_1) = y(x_2) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq bu bərabərlik aşağıdakı şəkəldə düşər:

$$y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [Q_2(x) - Q_1(x)]y(x)z(x)dx.$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfi müsbət, sol tərəfi isə mənfidir. Deməli fərziyyəimiz doğru deyil.

Teorem isbat olundu.

§ 2. Sərhəd məsələsi və sərhəd məsələsinin Qr in funksiyası vasitəsilə həlli

İki tərtibli xətti

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

tənliyinə baxaq. Burada $p(x)$, $q(x)$ və $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalardır.

Tutaq ki, (1) tənliyinin

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{dy(a)}{dx} + \alpha_1 y(a) &= \alpha_2, \\ \beta_0 \frac{dy(b)}{dx} + \beta_1 y(b) &= \beta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Burada $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ və β_2 - həqiqi ədədlərdir.

(2) şərtlərinə sərhəd şərtləri, (1) tənliyinin (2) şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə isə sərhəd məsələsi deyilir.

Sərhəd şərtləri $y(x)$ həllinin və onun $\frac{dy}{dx}$ törəməsinin nə $x=a$ -da, nə də $x=b$ -də qiymətlərini tapmağa imkan vermir. Ona görə sərhəd məsələsini Koşi məsələsinə gətirmək mümkün deyil.

Sərhəd məsələsi üçün aşağıdakı halların hər biri mümkündür.

- a) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var;
- b) sərhəd məsələsinin sonsuz sayda həlli var;
- c) sərhəd məsələsinin həlli yoxdur.

Misal 1. İki tərtibli xətti

$$y'' + y = 0 \quad (3)$$

tənliyi üçün üç sərhəd məsələsinə baxaq:

1. (3) tənliyinin

$$y(0) = 1, \quad y'(\pi) = -1 \quad (4)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Baxılan tənliyin ümumi həlli

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (5)$$

olduğundan, tələb edək ki, bu həll (4) şərtlərini ödəsin. Bu zaman alarıq:

$$y(0) = c_1 = 1, \quad y'(\pi) = -c_2 = -1, \quad \text{və ya } c_2 = 1$$

c_1 və c_2 -nin bu qiymətlərini (5)-də yerinə yazsaq (3) tənliyinin (4) sərhəd şərtlərini ödəyən həllini alarıq:

$$y = \cos x + \sin x.$$

Deməli, (3)-(4) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var.

2. (3) tənliyinin

$$y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = -1 \quad (6)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Tələb edək ki, (5) həlli bu şərtləri ödəsin:

$$y'(0) = c_2 = 1, \quad y'(\pi) = -c_2 = -1 \quad \text{və ya } c_2 = 1.$$

Beləliklə alırıq ki, c_1 sabitinin ixtiyari qiymətində

$$y = c_1 \cos x + \sin x$$

(3) tənliyinin (6) sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir. Deməli, (3), (6) sərhəd məsələsinin sonsuz sayda həlli var.

3. (3) tənliyinin

$$y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 1 \quad (7)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmalı. Bu zaman alırıq:

$$y'(0) = c_2 = 1, y'(\pi) = -c_2 = 1 \text{ və ya } c_2 = -1.$$

Deməli, (3) tənliyinin (7) sərhəd şərtlərini ödəyən həlli yoxdur.

Qrin funksiyası vasitəsilə sərhəd məsələsinin həllinin tapılması üsulu ilə tanış olaq.

Tutaq ki, (1) tənliyinin bircins

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{dy(a)}{dx} + \alpha_1 y(a) &= 0, \\ \beta_0 \frac{dy(b)}{dx} + \beta_1 y(b) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Fərz edəcəyik ki, bu məsələnin yeganə həlli var.

Qeyri-bircins (1) tənliyi ilə yanaşı, uyğun bircins

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0 \quad (9)$$

tənliyinə də baxaq.

Aydındır ki, (1), (8) məsələsinin yeganə həlli varsa, (9), (8) məsələsinin yalnız trivial (sıfır) həlli var. Doğrudan da. Əgər $y(x)$ - (1), (8)-in həlli və $y_0(x)$ - (9), (8)-in trivial olmayan həllidirsə, onda (1), (8)-in $y(x)$ -dən başqa $y(x) + y_0(x)$ həlli də olardı.

Tutaq ki, $y = y_1(x)$ və $y = y_2(x)$ (9) tənliyinin hər hansı iki xətti asılı olmayan həlləridir. Onda həmin tənliyin ümumi həlli

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şəklindədir. Bu həllin (8) şərtlərini ödəməsini tələb etsək

$$c_1 [\alpha_0 \frac{dy_1(a)}{dx} + \alpha_1 y_1(a)] + c_2 [\alpha_0 \frac{dy_2(a)}{dx} + \alpha_1 y_2(a)] = 0,$$

$$c_1[\beta_0 \frac{dy_1(b)}{dx} + \beta_1 y_1(b)] + c_2[\beta_0 \frac{dy_2(b)}{dx} + \beta_1 y_2(b)] = 0$$

cəbri tənliklər sistemini alırıq. Bu bircins sistemin yalnız trivial həllinin olması üçün

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 \frac{dy_1(a)}{dx} + \alpha_1 y_1(a) & \alpha_0 \frac{dy_2(a)}{dx} + \alpha_1 y_2(a) \\ \beta_0 \frac{dy_1(b)}{dx} + \beta_1 y_1(b) & \beta_0 \frac{dy_2(b)}{dx} + \beta_1 y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

olması zəruri və kifədir. Deməli, bizim fərziyyəmiz, yəni (1), (8) məsələsinin yeganə həllinin olması şərti daxilində $\Delta \neq 0$ - r.

İndi (1) tənliyinin həllini sabitin variasiyası üsulu ilə quraq.

Həlli

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (10)$$

şəklində axtararaq, bu üsulun sxeminə görə alırıq:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{w(x)} f(x), \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)}{w(x)} f(x).$$

Burada $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ həllərinin Vronski determinantıdır. Bu bərabərlikləri inteqrallamaqla

$$c_1(x) = c_{11} - \int_a^x \frac{y_2(t)}{w(t)} f(t) dt, \quad c_2(x) = c_{12} + \int_a^x \frac{y_1(t)}{w(t)} f(t) dt$$

və ya

$$c_1(x) = c_{21} - \int_b^x \frac{y_2(t)}{w(t)} f(t) dt, \quad c_2(x) = c_{22} + \int_b^x \frac{y_1(t)}{w(t)} f(t) dt$$

ifadələrini tapırıq. Bunları (10)-da yerinə yazmaqla (1) nliyinin ümumi həllini

$$y(x) = c_{11}y_1(x) + c_{12}y_2(x) - \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)}{w(t)} f(t) dt$$

və ya

$$y(x) = c_{21}y_1(x) + c_{22}y_2(x) - \int_b^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)}{w(t)} f(t) dt$$

şəkində ifadə edirik. Burada $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ - ixtiyari sabitlərdir. Bu ifadələri toplayıb yarıya bölsək və

$$c_1 = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{21}), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{22})$$

işarə etsək, alarıq:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_a^b P(x, t) f(t) dt \quad (11)$$

Burada

$$P(x, t) = \begin{cases} -\frac{y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)}{2w(t)}, & a \leq t \leq x, \\ \frac{y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)}{2w(t)}, & x \leq t \leq b. \end{cases}$$

Qeyri-bircins (1) tənliyinin (11) ümumi həllinin (8) şərtlərini ödəməsini tələb etsək c_1 və c_2 əmsalları üçün aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{aligned} c_1 \left[\alpha_0 \frac{dy_1(a)}{dx} + \alpha_1 y_1(a) \right] + c_2 \left[\alpha_0 \frac{dy_2(a)}{dx} + \alpha_1 y_2(a) \right] &= \\ = \int_a^b \left[\alpha_0 \frac{dP(a, t)}{dx} + \alpha_1 P(a, t) \right] f(t) dt, \\ c_2 \left[\beta_0 \frac{dy_1(b)}{dx} + \beta_1 y_1(b) \right] + c_1 \left[\beta_0 \frac{dy_2(b)}{dx} + \beta_1 y_2(b) \right] &= \\ = \int_a^b \left[\beta_0 \frac{dP(b, t)}{dx} + \beta_1 P(b, t) \right] f(t) dt. \end{aligned}$$

$\Delta \neq 0$ olduğu üçün bu sistemin yeganə həlli var və bu həlli Kramər qaydası ilə tapmaq olar. Əgər bu sistemdən c_1 və c_2 -ni tapıb (11)-də yerinə yazsaq, sadə çevirmələrdən sonra

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (12)$$

düsturunu alarıq ki, burada $G(x, t)$ funksiyası baxılan məsələnin Qrin funksiyası adlanır və

$$G(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} P(x, t) & y_1(x) & y_2(x) \\ \alpha_0 \frac{dP(a, t)}{dx} + \alpha_1 P(a, t) & My_1(a) & My_2(a) \\ \beta_0 \frac{dP(b, t)}{dx} + \beta_1 P(b, t) & My_1(b) & My_2(b) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

düsturu ilə hesablanır. Burada

$$My_k(a) = \alpha_0 \frac{dy_k(a)}{dx} + \alpha_1 y_k(a),$$

$$My_k(b) = \beta_0 \frac{dy_k(b)}{dx} + \beta_1 y_k(b), \quad k = 1, 2.$$

Eyni qayda ilə (11)-in (2) sərhəd şərtlərini ödəməsini tələb etsək, (1)-(2) məsələsinin həlli üçün

$$\begin{aligned} y(x) = & \int_a^b G(x, t) f(t) dt + \frac{1}{\Delta} \{ \alpha_2 [\beta_0 \frac{dy_2(b)}{dx} + \beta_1 y_2(b)] - \\ & - \beta_2 [\alpha_0 \frac{dy_2(a)}{dx} + \alpha_1 y_2(a)] \} y_1(x) + \frac{1}{\Delta} \{ \beta_2 [\alpha_0 \frac{dy_1(a)}{dx} + \\ & + \alpha_1 y_1(a)] - \alpha_2 [\beta_0 \frac{dy_1(b)}{dx} + \beta_1 y_1(b)] \} y_2(x) \end{aligned}$$

düsturunu alarıq.

Qrin funksiyasının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1. $x \neq t$ olduqda $G(x, t)$ funksiyası bircins (9) tənliyini ödəyir;
2. $G(x, t)$ funksiyası (8) sərhəd şərtlərini ödəyir;
3. $G(x, t)$ funksiyası $x = t$ olduqda kəsilməzdir;
4. $G'_x(x, t)$ funksiyası $x = t$ -də birinci növ kəsilməyə malikdir və $G'_x(t + 0, t) - G'_x(t - 0, t) = 1$.

MISALLAR

Aşağıdakı tənliklərin verilmiş sərhəd şərtlərini ödəyən həllərini tapmalı.

119. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

120. $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = -1$.

121. $y'' + 9y = 3x$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = \frac{1}{3}$.

Aşağıdakı sərhəd məsələlərinin Qrin funksiyasını qurmalı.

122. $y'' = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

123. $y'' + y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

124. $y'' - y' = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

§ 1. Xətti bircins sistemlər

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n &= 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n = 0$$

Tutaq ki, $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x)$ funksiyaları (1) sisteminin hər hansı bir xüsusi həllidir. Onda asanlıqla yoxlamaq olar ki, $cy_1^{(1)}(x), cy_2^{(1)}(x), \dots, cy_n^{(1)}(x)$ funksiyaları da bu sistemin həllidir. Burada c -ixtiyari sabitdir. Əgər $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x)$ funksiyaları ilə yanaşı $y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x), \dots, y_n^{(2)}(x)$ funksiyaları da (1) sisteminin xüsusi həllidirsə, onda $y_1^{(1)}(x) + y_1^{(2)}(x), y_2^{(1)}(x) + y_2^{(2)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x) + y_n^{(2)}(x)$ funksiyaları da bu sistemin həllidir.

115

$$\begin{array}{cccc}
 y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \dots, & y_n^{(1)}, \\
 y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \dots, & y_n^{(2)}, \\
 \hline
 y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \dots, & y_n^{(n)}
 \end{array}
 \quad (2)$$

(1) sisteminin n sayda xüsusi həllərindən təşkil olunmuş sistemdir.

Əgər bu həllər sistemindən təşkil olunmuş

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (3)$$

determinantı (a, b) intervalında eynilik kimi sıfıra bərabər deyilsə, onda (2) həllər sistemi fundamental həllər sistemi adlanır.

Aşağıdakı teoremi isbat edək:

T e o r e m. Tutaq ki, $x_0 \in (a, b)$ nöqtəsində $D(x_0) \neq 0$.

Onda (a, b) intervalının heç bir nöqtəsində $D(x)$ determinantı sıfıra bərabər deyil.

İ s b a t ı. Teoremi isbat etmək üçün $D(x)$ determinantının törəməsini tapaq və bu zaman diferensiallanmanı sütunlar üzrə aparaq. Onda, sadə çevirmələrədən sonra alarıq:

$$D'(x) = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})D(x)$$

və ya

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$

Əgər bu bərabərliyin hər iki tərəfini x_0 -dan x -a qədər inteqrallasaq, onda

$$D(x) = D(x_0) e^{-\int_{x_0}^x (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) dx} \quad (4)$$

olar. Bu bərabərlikdən görünür ki, əgər $D(x_0) \neq 0$ olarsa, onda (a, b) intervalının istənilən x nöqtəsində $D(x) \neq 0$.

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, (4) düstur u Ostroqradski – Liuvill -Yakobi düstur u adlanır.

Bu teoremdən nəticə kimi çıxır ki, (1)-in fundamental həllər sistemi var. Doğrudan da, hər hansı cırlaşmayan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisini götursək, birtərtibli diferensial tənliklər sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremə əsasən (bax. IV fəsil, §1) (1) sisteminin

$$y_j^{(k)}(x_0) = a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

şərtlərini ödəyən $y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \dots, y_n^{(k)}(x)$ həlli var və yeganədir. $k = 1, 2, \dots, n$ qiymətlərinə uyğun bu n sayda həll üçün (3)-lə təyin olunan $D(x)$ determinanı

$$D(x_0) = \det A \neq 0$$

olduğundan, teoremə əsasən (a, b) intervalının heç bir nöqtəsində sıfıra çevrilmir. Deməli, qurduğumuz n sayda həll fundamental həllər sistemini təşkil edir.

T e o r e m. Əgər (2) funksiyalar sistemi (1) sisteminin fundamental həllər sistemini təşkil edirsə, onda bu sistemin ümumi həlli aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunur:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1y_1^{(1)} + c_2y_1^{(2)} + \dots + c_ny_1^{(n)}, \\ y_2 &= c_1y_2^{(1)} + c_2y_2^{(2)} + \dots + c_ny_2^{(n)}, \\ &\vdots \\ y_n &= c_1y_n^{(1)} + c_2y_n^{(2)} + \dots + c_ny_n^{(n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyari sabitlərdir.

İ s b a t 1. Paragrafin əvvəlində qeyd olunan fakta əsasən (5) bərabərlikləri ilə təyin olunan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları (1) sisteminin həllidir. Bu həllin ümumi həll olduğunu isbat etmək üçün göstərmək kifayətdir ki, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlərini elə seçmək olar ki, (5) həlli $x = x_0$ olduqda

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, y_n(x_0) = y_n^{(0)} \quad (6)$$

başlangıç şərtlərini ödəyir. Burada $x_0 \in (a, b)$ ixtiyari qeyd olunmuş nöqtə, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ isə ixtiyari ədədlərdir.

(5) həllinin (6) başlangıç şərtlərini ödəməsini tələb etsək bu zaman $c_1, c_2, \dots, c_n$ -lərə nəzərən n xətti cəbri tənlikdən ibarət sistem alırıq ki, bu sistemin əsas determinantı $D(x_0)$ -a bərabər olar. $D(x_0) \neq 0$ olduğundan bu sistemin yeganə həlli var. Əgər sabitlərin bu sistemdən tapılmış qiymətlərini (5) bərabərliklərində nəzərə alsaq, onda (6) başlangıç şərtlərini ödəyən xüsusi həlli alırıq.

Teorem is bat olundu.

§ 2. Xətti qeyri-bircins sistemlər. Sabitin variasiyası üsulu

Aşağıdakı bir tərtibli xətti qeyri-bircins diferensial tənliklər sistemə baxaq:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n &= f_1(x), \\
\frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n &= f_2(x), \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n &= f_n(x)
\end{aligned} \tag{1}$$

Bu sistemdə $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$ götürsək, onda

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n &= 0, \\
\frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

tənliklər sistemini alarıq. Bu sistem (1) sisteminə uyğun bircins sistem adlanır.

T e o r e m. Qeyri-bircins (1) sisteminin ümumi həlli bu sistemin hər hansı bir xüsusi həlli ilə uyğun bircins (2) sisteminin ümumi həllinin cəminə bərabərdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ - qeyri-bircins (1) sisteminin hər hansı bir xüsusi həllidir. Bu sistemdə

$$y_1 = z_1 + Y_1(x), \quad y_2 = z_2 + Y_2(x), \dots, \quad y_n = z_n + Y_n(x) \tag{3}$$

əvəzləməsini edək. Burada $z_1, z_2, \dots, z_n$ - yeni məchul funksiyalar dir.

(3) əvəzləməsindən sonra $z_1, z_2, \dots, z_n$ dəyişənlərinə nəzərən bircins

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} + a_{11}(x)z_1 + a_{12}(x)z_2 + \dots + a_{1n}(x)z_n &= 0, \\ \frac{dz_2}{dx} + a_{21}(x)z_1 + a_{22}(x)z_2 + \dots + a_{2n}(x)z_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_n}{dx} + a_{n1}(x)z_1 + a_{n2}(x)z_2 + \dots + a_{nn}(x)z_n &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

sistemini alır. Görüldüyü kimi bu sistem (1) sistemə uyğun bir cins sistemidir.

Tutaq ki,

$$\begin{aligned} & y_1^{(1)}, \quad y_2^{(1)}, \quad \dots, \quad y_n^{(1)}, \\ & y_1^{(2)}, \quad y_2^{(2)}, \quad \dots, \quad y_n^{(2)}, \\ & \dots\dots\dots \\ & y_1^{(n)}, \quad y_2^{(n)}, \quad \dots, \quad y_n^{(n)} \end{aligned} \tag{5}$$

(2) birçins sisteminin fundamental həllər sistemini təşkil edir. Onda (4) sisteminin ümumi həlli

$$z_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + \dots + c_n y_n^{(n)},$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur. Əgər bu ifadələri (3)-də nəzərə
alsaq, onda alarıq:

$$y_1 = c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} + \dots + c_n y_1^{(n)} + Y_1(x),$$

$$y_2 = c_1 y_2^{(1)} + c_2 y_2^{(2)} + \dots + c_n y_2^{(n)} + Y_2(x),$$

$$y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + Y_n(x)$$

Bu qeyri bircins (1) sisteminin həllidir.

Bircins sistemin ümumi həlli haqqında teoremin isbatında istifadə olunan analogi üsulla isbat etmək olar ki, bu həll (1) sisteminin ümumi həllidir.

Teorem isbat olundu.

Bu teoremin hökmünə əsasən, əgər qeyri-bircins (1) sisteminin hər hansı bir xüsusi həlli və uyğun (2) bircins sisteminin fundamental həllər sistemi məlum olarsa, onda bu sistemin ümumi həllini qurmaq olar. Göstərək ki, yalnız uyğun bircins sistemin fundamental həllər sistemini bilməklə, qeyri-bircins sistemin ümumi həllini tapmaq mümkündür. Bunun üçün sabitlərin variasiya üsulundan istifadə edək.

Tutaq ki, (5) funksiyaları (2) bircins sisteminin fundamental həllər sistemini təşkil edir. Onda, bildiyimiz kimi, bu sistemin ümumi həlli

$$y_i = c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} + \dots + c_n y_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyari sabitlərdir.

Qeyri-bircins (1) sisteminin həllini də (6) şəklində axtaraq. Lakin, bu zaman $c_1, c_2, \dots, c_n$ -lərə sabitlər kimi deyil, x dəyişəninin funksiyaları kimi baxaq:

$$y_i = c_1(x) y_i^{(1)} + c_2(x) y_i^{(2)} + \dots + c_n(x) y_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

Bu bərabərlikləri diferensiallasaq, alarıq:

$$\frac{dy_i}{dx} = c_1(x) \frac{dy_i^{(1)}}{dx} + c_2(x) \frac{dy_i^{(2)}}{dx} + \dots + c_n(x) \frac{dy_i^{(n)}}{dx} + c'_1(x)y_i^{(1)} + c'_2(x)y_i^{(2)} + \dots + c'_n(x)y_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Qeyri-bircins (1) sistemini

$$\frac{dy_i}{dx} + a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

şəklində yazıb, (7) və (8) ifadələrini bu tənliklərdə nəzərə alsaq, sadə çevirmələrdən sonra alarıq:

$$y_i^{(1)} \cdot c'_1(x) + y_i^{(2)} \cdot c'_2(x) + \dots + y_i^{(n)} \cdot c'_n(x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$c'_1(x), c'_2(x), \dots, c'_n(x)$ törəmələrinə nəzərən aldığımız bu xətti qeyri-bircins cəbri tənliklər sisteminin əsas determinantı $D(x) \neq 0$ olduğundan, onun yeganə həlli var.

Tutaq ki, $c'_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ -bu sistemin həllidir. Onda, bu bərabərliklərin hər birini integrallamaqla alarıq:

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu bərabərliklərin sağ tərəflərində iştirak edən $c_1, c_2, \dots, c_n$ -lər ixtiyari sabitlərdir. Əgər $c_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ funksiyaları üçün aldığımız axırncı ifadələri (7) bərabərliklərində nəzərə alsaq, onda (1) sisteminin ümumi həllini aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin etmiş olarıq:

$$y_i = c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} + \dots + c_n y_i^{(n)} + \sum_{k=1}^n y_i^{(k)} \int \varphi_k(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

§3 Sabit əmsallı xətti diferensial tənliklər sistemi

Aşağıdakı xətti bircins diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &= 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Burada $a_{ik}, i, k = 1, 2, \dots, n$, əmsalları həqiqi ədədlərdir.
Bu sistemin həllini

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \quad (2)$$

şəklində axtaraq. Burada $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ və λ sabitlərdir.

Əgər $y_1, y_2, \dots, y_n$ -in bu ifadələrini (1) sistemində nəzərə alsaq və alınan bərabərliklərin hər tərəfini $e^{\lambda x}$ -ə bölsək, onda aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alarıq:

[illegible]

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ -lərə nəzərən xətti bircins olan bu sistemin trivial olmayan həlli yalnız və yalnız onun determinantı sıfıra bərabər olduqda var. Ona görə tələb edək ki, bu determinant sıfıra bərabər olsun

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Bu determinantın elementlərindən təşkil olunmuş aşağıdakı matrisə də baxaq:

$$M(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) tənliyi λ -ya nəzərən n dərəcəli cəbri tənlikdir. Bu tənlik (1) sisteminə uyğun xarakteristik tənlik adlanır. Yuxarıdakı mülahizələrdən aydındır ki, (1) sisteminin (2) şəkilli trivial olmayan həlli yalnız və yalnız λ ədədi (4) xarakteristik tənliyinin kökü olduqda ola bilər.

Aşağıdakı iki hala baxaq:

1. Tutaq ki, (4) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri müxtəlifdir. Bu kökləri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ilə işarə edək: $\Delta(\lambda_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$. Baxılan halda asanlıqla göstərmək olar ki, $\Delta(\lambda_k)$ determinantının $n-1$ tərtibli minorlarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Bunun üçün $\Delta'(\lambda_k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$, olduğunu isbat etmək kifayətdir. Bu faktın doğruluğu isə $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklərinin sadə köklər olması şərtindən asanlıqla alınır.

Xətti bircins (3) sistemində $\lambda = \lambda_k$ götürsək, $\Delta(\lambda_k) = 0$ olduğundan, bu sistemin trivial olmayan həlli var. Tutaq ki, $\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \dots, \gamma_n^{(k)}$ -bələ həllərdən biridir. $M(\lambda_k)$ matrisinin rəngi $n-1$ -ə bərabər olduğundan (3) sisteminin $\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \dots, \gamma_n^{(k)}$ həlli bir sabit vuruc dəqiqliyi ilə təyin olunur.

Beləliklə baxılan halda xarakteristik tənliyin hər bir $\lambda = \lambda_k$ kökünə (1) sisteminin

$y_1^{(k)} = \gamma_1^{(k)} e^{\lambda_k x}, y_2^{(k)} = \gamma_2^{(k)} e^{\lambda_k x}, \dots, y_n^{(k)} = \gamma_n^{(k)} e^{\lambda_k x}, k = 1, 2, \dots, n$ xüsusi həlli uyğun olur və bu sistemin ümumi həlli aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin olunur:

$$y_1 = c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} + \dots + c_n y_1^{(n)},$$

$$y_2 = c_1 y_2^{(1)} + c_2 y_2^{(2)} + \dots + c_n y_2^{(n)},$$

.....

$$y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + \dots + c_n y_n^{(n)}.$$

Tutaq ki, xarakteristik tənliyin kökləri içərisində kompleks köklər var. Fərz edək ki, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ bu tənliyin kompleks köküdür. Xarakteristik tənlik həqiqi əmsallı tənlik olduğundan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ədədi də bu tənliyin kökü olar.

Əgər (3) sisteminin $\lambda = \lambda_1 = \alpha + \beta i$ -yə uyğun trival olmayan həllini $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ilə işarə etsək, onda $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n$ bu sistemin $\lambda = \lambda_2 = \alpha - \beta i$ -yə uyğun həlli olar. Burada $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n$ ədədləri $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ədədlərinə kompleks qoşma ədədləridir. Bu halda λ_1 və λ_2 köklərinə uyğun həlləri

$$\tilde{y}_j^{(1)} = \gamma_j e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad \tilde{y}_j^{(2)} = \gamma_j e^{(\alpha - \beta i)x}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

şəklində ifadə edə bilərik.

Tutaq ki, $\gamma_j = \delta_j + i\varepsilon_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Bu halda

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x} (\delta_j \cos \beta x - \varepsilon_j \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (\delta_j \sin \beta x + \varepsilon_j \cos \beta x),$$

$$\tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x} (\delta_j \cos \beta x - \varepsilon_j \sin \beta x) - i e^{\alpha x} (\delta_j \sin \beta x + \varepsilon_j \cos \beta x),$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

olar və asanlıqla göstərmək olar ki, bu həllərin həm həqiqi, həm də xəyali hissəsi həldir. Deməli, xarakteristik tənliyin $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ və $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ köklərinə (1) sisteminin

$$y_j^{(1)} = e^{\alpha} (\delta_j \cos \beta x - \varepsilon_j \sin \beta x), \quad j=1,2,\dots,n,$$

və

$$y_j^{(2)} = e^{\alpha} (\delta_j \sin \beta x + \varepsilon_j \cos \beta x), \quad j=1,2,\dots,n,$$

həlləri uyğundur.

2. Tutaq ki, xarakteristik tənliyin kökləri içərisində təkrar köklər var. Fərz edək ki, $\lambda = \lambda_1$ xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan köküdür. Bu halda $\Delta(\lambda_1) = \Delta'(\lambda_1) = \dots = \Delta^{(m-1)}(\lambda_1) = 0$, $\Delta^{(m)}(\lambda_1) \neq 0$ və $\Delta(\lambda_1)$ determinantının $n-m$ tərtibli minorlarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olar. Əgər $\text{rank } M(\lambda_1) = r$ işarə etsək, onda $r \geq n-m$ münasibəti ödənər və (3) cəbri tənliklər sistemi $\lambda = \lambda_1$ olduqda r sayda asılı olmayan tənliklərdən ibarət sistemə çevrilir. Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, bu halda $n-r$ sayda dəyişən ixtiyari qiymət ala bilər. Əgər $r = n-m$ və yaxud $n-r = m$ olarsa onda (3) sisteminin m sayda xətti asılı olmayan həlli olar. Bu halda xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan λ_1 kökünə (1) sisteminin də m sayda xətti asılı olmayan həlli uyğun olar.

Əgər $r > n-m$ və yaxud $n-r < m$ olarsa, onda (1) sisteminin λ_1 kökünə uyğun həllərinin sayı m -dən az olar. Bu halda çatışmayan həlləri $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$ funksiyalarının xətti kombinasiyası şəklində axtarmaq olar.

Misal 1. Aşağıdakı sistemin ümumi həllini tapmalı.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= 3y_1 + 4y_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Həlli $y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}$, $y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}$ şəklində axtaraq. Bu ifadələri sistemdə nəzərə alsaq, γ_1 və γ_2 -yə nəzərən aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} (\lambda - 2)\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -3\gamma_1 + (\lambda - 4)\gamma_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistemin trivial olmayan həllini tapaq. Bu məqsədlə xarakteristik tənliyi yazmaq və onun köklərini tapmaq:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0$$

Mötərizələri açsaq bu tənlik $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ şəklinə düşər. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ bu tənliyin kökləridir.

(6) sistemində $\lambda = 1$ götürsək, alarıq: $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

Aydındır ki, $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$ bu tənliyi ödəyir. Ona görə

$$y_1 = e^x, y_2 = -e^x$$

(5) sisteminin həllidir.

(6) sistemində $\lambda = 5$ götürsək, ana oji qaydada alarıq

$$3\gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 3$ bu tənliyin həlli olduğundan

$$y_1 = e^{5x}, y_2 = 3e^{5x}$$

(5) sisteminin həllidir.

Bunları nəzərə alsaq, (5) sisteminin ümumi həllini

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{5x},$$

$$y_2 = -c_1 e^x + 3c_2 e^{5x}$$

şəklində yazı bilərik.

MİSALLAR

Aşağıdakı xətti diferensial tənliklər sistemini həll etməli.

$$125. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$126. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + 8y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$127. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

$$128. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$129. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 5y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases}$$

IX FƏSİL

BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİNİN DAYANIQLIĞI

§ 1. Əsas anlayışlar

Aşağıdakı bir tərətli diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\text{-----} \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{1}$$

Tutaq ki, $T = \{t_0 \leq t < \infty\}$, X isə $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənləri fəzasının məhdud oblastıdır. Fərz edəcəyik ki, $f_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, funksiyaları $D = T \times X$ oblastında kəsilməz və məhdud $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $k, j = 1, 2, \dots, n$, xüsusi törəmələri olan funksiyalardır. Bu halda həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremə əsasən (1) sisteminin

$$x_k(t_0) = x_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

başlangıç şərtlərini ödəyən yeganə həlli var. Burada $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in X$ ixtiyari nöqtədir.

(1) diferensial tənliklər sisteminin (2) başlangıç şərtlərini ödəyən həllini $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, bu sistemin ixtiyari başqa həllini isə $x_k = \bar{x}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ilə işarə edək.

T ə r i f 1. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki,

$$|x_k(t_0) - \bar{x}_k(t_0)| < \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

olduqda

$$|x_k(t) - \bar{x}_k(t)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 \leq t < \infty \quad (4)$$

şerti ödənilir. Onda (1) sisteminin $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, həlli Lyapunov mənasında dayanıqlı həll adlanır.

T ə r i f 2. (1) sisteminin $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, həlli dayanıqlı həll olub, (3) şərtlərini ödəyən istənilən $x_k = \bar{x}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, həlli üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_k(t) - \bar{x}_k(t)| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

münasibətini ödəyirsə, onda bu həll Lyapunov mənasında asimptotik dayanıqlı həll adlanır.

(1) sisteminin dayanıqlı olmayan həlli bu sistemin dayanıqsız həlli adlanır. Bu o deməkdir ki, əgər $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, həlli (1) sisteminin dayanıqsız həllidirsə, onda elə $\varepsilon > 0$ ədədi var ki, ixtiyari kafi qədər kiçik $\delta > 0$ ədədi üçün, bu sistemin (3) şərtini ödəyən həlləri içərisində elə həll tapmaq olar ki, bu həll t -nin müəyyən $\bar{t} > t_0$ qiymətində (4) bərabərsizliyini ödəmir.

(1) sisteminin sıfırdan fərqli həllinin dayanıqlılığının tədqiqini digər sistemin sıfır həllinin dayanıqlılığının tədqiqinə gətirmək olar. Bu məqsədlə, əvvəlcə (1) sistemini aşağıdakı şəkildə yazaq.

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Tutaq ki, $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, bu sisteminin hər hansı bir həllidir. Bu sistemdə

$$x_k = y_k + x_k(t), \quad k=1,2,\dots,n \quad (6)$$

Fərz edəcəyik ki, $a_{ik}(t)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ funksiyaları $t_0 \leq t \leq \infty$ yarımxunda kəsilməz funksiyalardır.

Tutaq ki, $x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)$ funksiyaları (1) sisteminin

$$x_1^{(k)}(t_0) = 0, \dots, x_{k-1}^{(k)}(t_0) = 0, x_k^{(k)}(t_0) = 1, x_{k+1}^{(k)}(t_0) = 0, \dots,$$

$$x_n^{(k)}(t_0) = 0, k = 1, 2, \dots, n,$$

şərtlərini ödəyən n sayda xətti asılı olmayan həllərdir.

Sütunları bu həllər olan matrisi $V(t, t_0)$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki, (1) sisteminin fundamental həllər sistemindən təşkil olunmuş $V(t, t_0)$ matrisi bu sistemin fundamental matrisi adlanır. Aydındır ki, $V(t_0, t_0) = E$. Burada E -vahid matrisdir.

(1) sistemini

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2)$$

şəklində yazaq. Burada $A(t)$ - (1) sisteminin $a_{ik}(t)$ əmsallarından düzəldilmiş kvadrat matris, $x = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^T$ isə sütun vektorudur.

Tutaq ki, $x = x(t)$ - (2) sisteminin $x(t_0) = x_0$ şərtini ödəyən həllidir. Burada $x_0 = \|x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\|^T$ qeyd olunmuş vektordur. Bu halda $x = x(t)$ həllini $V(t, t_0)$ matrisindən istifadə etməklə

$$x(t) = V(t, t_0)x_0$$

şəklində yazmaq olar.

Eyni qayda ilə (2) sisteminin $y(t_0) = y_0$ şərtini ödəyən həllini

$$y(t) = V(t, t_0)y_0$$

şəklində yaza bilərik. Bu halda

$$x(t) - y(t) = V(t, t_0)(x_0 - y_0) \quad (3)$$

Aşağıdakı hallara baxaq.

1) Tutaq ki, $V(t, t_0)$ matrisi məhduddur. Yəni elə M ədədi var ki,

$$|V(t, t_0)| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}(t)| \leq M, \quad t \geq t_0 \text{ olduqda.}$$

Bu halda (3) bərabərliyinə əsasən yazı bilərik:

$$|x(t) - y(t)| \leq |V(t, t_0)| \cdot |x_0 - y_0| \leq M|x_0 - y_0|$$

Bu bərabərsizlikdən görünür ki, əgər

$$|x_0 - y_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

olarsa, onda aşağıdakı bərabərsizlik ödəyir:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \text{ olduqda.}$$

Deməli baxılan halda, (1) və ya (2) sisteminin $x = x(t)$ həlli dayanıqlıdır.

2) Tutaq ki, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, t_0) = 0$.

Bu halda $V(t, t_0)$ matrisi $t \geq t_0$ olduqda məhduddur və deməli $x = x(t)$ həlli dayanıqlıdır. Bundan başqa (3) bərabərliyinə əsasən ixtiyari $y = y(t)$ həlli üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

Deməli $x = x(t)$ həlli həm də asimptotik dayanıqlı həllidir.

§ 3 Sabit əmsallı xətti sistemin dayanıqlığı. Qurviç meyarı

Əvvəlki paraqrafda xətti diferensial tənliklər sisteminin dayanıqlığı üçün kafi şərt aldıq. Bu şərt fundamental matrisin

məhdudluq şərtidir. Xətti diferensial tənliklər sisteminin fundamental matrisini qurmaq mümkün olduqda bu şərtdən istifadə etməklə dayanıqlığı tədqiq etmək effektiv olur. Sabit əmsallı xətti diferensial tənliklər sistemi belə sistemlərdəndir.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots t \geq t_0 \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

sisteminə baxaq. Burada a_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, n$ - həqiqi ədədlərdir.

Sadəlik üçün fərz edək ki, bu sistemin bütün xarakteristik ədədləri müxtəlif və həqiqi hissələri mənfi olan ədədlərdir. Bu ədədləri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ilə işarə edək. Onda (1) sisteminə uyğun fundamental $V(t, t_0)$ matrisini yazsaq, məxsusi ədədlərin həqiqi hissələri mənfi ədədlər olduğundan bu matris üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, t_0) = 0$$

bərabərliyi doğru olar.

Deməli baxılan halda (1) sisteminin bütün həlləri asimptotik dayanıqlıdır.

Bu nəticə göstərir ki, sabit əmsallı xətti birinci diferensial tənliklər sisteminin həllərinin dayanıqlığı uyğun xarakteristik tənliyin köklərinin tədqiqini tələb edir. Daha dəqiq desək, bu məsələnin həlli xarakteristik tənliyinin bütün köklərinin həqiqi hissələrinin mənfi işarəyə malik olmasını təmin edən şərtlərin tapılmasına gətirilir. Belə şərtlər Qurviç teoremi adlanan teoremdə öz əksini tapıb.

Tutaq ki, dərəcəsi n -ə bərabər olan

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\tag{2}$$

cəbri tənliyi verilib. Bu tənliyin əmsallarından düzəldilmiş aşağıdakı determinantlara baxaq:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_n \cdot \Delta_{n-1} \quad (3)$$

Teorem (Qurviç teoremi). Cəbri (2) tənliyinin bütün köklərinin mənfi həqiqi hissəyə malik olması üçün zəruri və kifayət (3) determinantlarının müsbət olmasıdır:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Misal. Qurviç teoremindən istifadə etməklə aşağıdakı diferensial tənliklər sisteminin dayanıqlığını tədqiq etməli:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -3y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Baxılan sistemin həllini

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \quad y_3 = \gamma_3 e^{\lambda x}$$

şəklində axtarsaq γ_1, γ_2 və γ_3 -ə nəzərən

$$(\lambda + 3)\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0,$$

$$3\gamma_1 + (\lambda + 1)\gamma_2 - \gamma_3 = 0,$$

$$\gamma_1 - 2\gamma_2 + \lambda\gamma_3 = 0$$

xətti cəbri tənliklər sistemini alırıq. Məlumdur ki, bu sistemin trivial olmayan həlli yalnız və yalnız onun determinantı sıfıra bərabər olduqda var:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 & -2 \\ 3 & \lambda + 1 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

determinantı açsaq λ -ya nəzərən üç dərəcəli

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10 = 0 \quad (5)$$

tənliyini alırıq. Bu (4) sisteminə uyğun xarakteristik tənlikdir.

Qurviç teoreminin şərtlərini yoxlayaq.

Alınan (5) xarakteristik tənliyi üçün

$a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 9, a_3 = 10$ olduğundan

$$\Delta_1 = a_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 10 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 260 > 0$$

Deməli (5) xarakteristik tənliyi üçün Qurviç teoreminin şərtləri ödənilir. Ona görə (4) sisteminin həlləri dayanıqlıdır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (5) xarakteristik tənliyinin kökləri $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1 + 2i$ və $\lambda_3 = -1 - 2i$ bərabərlikləri ilə təyin olunurlar. Ona görə baxılan diferensial tənliklər sisteminin həlləri, həm də asimptotik dayanıqlıdır.

X FƏSİL

BİR TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSIAL TƏNLİKLƏR

§ 1. Əsas anlayışlar

Tutaq ki, məchul z funksiyası $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$)
sərbəst dəyişənlərindən asılıdır.

T ə r i f. Sərbəst $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərini, məchul z
funksiyasını və onun $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələrini özündə
saxlayan tənliyə birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik
deyilir.

Birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliyi ümumi
şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1)$$

Burada F - öz arqumentlərinin məlum funksiyasıdır.

T ə r i f. Əgər n ölçülü fəzanın müəyyən D oblastında
təyin olunmuş $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasının bu oblastda
kəsilməz $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələri varsa və bu funksiya

və onun xüsusi törəmələrini (1) tənliyində yerinə yazdıqda bu
tənlik eynilik kimi doğru bərabərliyə çevrilərsə, onda
 $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasına (1) tənliyinin həlli deyilir.

T ə r i f. Əgər məchul z funksiyası və onun
 $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələri (1) tənliyinə xətti daxil
olarsa, onda belə tənlik xətti tənlik adlanır.

Birtərtibli xüsusi törəməli xətti diferensial tənliyi ümumi
şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} + q(x_1, x_2, \dots, x_n)z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

Tutaq ki, bu tənlikdə $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$. Onda (2) tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər.

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} + q(x_1, x_2, \dots, x_n)z = 0 \quad (3)$$

Bu tənlik birtərtibli xüsusi törəməli xətti bircins tənlik adlanır.

T ə r i f. Yalnız z məchul funksiyasının törəmələrinə nəzərən xətti olan tənliyə kvazixətti diferensial tənlik deyilir.

Birtərtibli xüsusi törəməli kvazixətti tənliyi ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z). \quad (4)$$

Tutaq ki, (1) tənliyini, məsələn, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ xüsusi törəməsinə

nəzərən həll etmək mümkündür:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = g\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (5)$$

Aşağıdakı məsələyə baxaq:

(5) tənliyinin

$$z(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (6)$$

şərtini ödəyən həllini tapmalı. Burada x_1^0 verilmiş ədəd $\varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$ məlum funksiyadır.

(5) tənliyinin (6) şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə Koşi məsələsi deyilir.

§ 2. Birtərtibli xüsusi törəməli xətti bircins diferensial tənliklər

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Bu tənlik, bildiyimiz kimi, birtərtibli xüsusi törəməli xətti bircins tənlikdir.

(1) tənliyi ilə yanaşı

$$\frac{dx_1}{p_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{p_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (2)$$

adi diferensial tənliklər sisteminə də baxaq. Bu sistemi (1) tənliyinə uyğun adi diferensial tənliklər sistemi adlandıracağıq.

Tutaq ki,

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2,$$

.....

$$\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{n-1}$$

(2) sisteminin ümumi inteqralıdır. Bu halda (3)-ə daxil olan hər bir bərabərlik (2) sisteminin birinci inteqralı adlanır.

T e o r e m. Əgər $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ -(2) sisteminin istənilən birinci inteqralıdırsa, onda $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası (1) tənliyinin həllidir və tərsinə, əgər $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -(1) tənliyinin həllidirsə, onda $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ -(2) sisteminin birinci inteqralıdır.

Bu teoremdən istifadə etməklə isbat edilib ki, əgər (3) bərabərlikləri (2) sisteminin ümumi inteqralıdırsa, onda

$$z = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (4)$$

funksiyası (1) tənliyinin ümumi həllidir. Burada F öz argumentlərinə nəzərən diferensiallanan ixtiyari funksiyadır.

Misal 1. $x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$

tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

Bu tənliyə uyğun adı diferensial tənliklər sistemini yazaq:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

Bu sistemin ümumi inteqralını tapaq. Bu məqsədlə

$$\frac{dx_i}{x_i} = \frac{dx_n}{x_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

tənliklərinin hər birini inteqrallayaq. Bu zaman

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}$$

ümumi inteqralını alırıq.

Deməli baxılan tənliyin ümumi həlli

$$z = F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Misal 2. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tənliyinin $z(x, 1) = 1 + x$

şərtini ödəyən həllini tapmalı.

Əvvəlcə tənliyin ümumi həllini tapaq. Bu məqsədlə

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{dy}{y^2}$$

tənliyinin ümumi inteqralını tapaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\frac{x+y}{xy} = c$$

bu tənliyin ümumi inteqralıdır. Ona görə

$$z = F\left(\frac{x+y}{xy}\right) \quad (5)$$

baxılan tənliyin ümumi həllidir.

Tələb edək ki, bu həll $z(x, 1) = 1 + x$ şərtini ödəsin:

$$z(x, 1) = F\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 + x$$

Bu bərabərlikdən asanlıqla alarıq ki,

$$F(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Deməli, (5) bərabərliyinə əsasən baxılan məsələnin həlli

$$z = \frac{x+y}{x+y-xy}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

§ 3. Bir tərtibli xüsusi törəməli kvazixətti tənliklər

Əvvəlki paraqrafda qeyd olunduğu kimi

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \quad (1)$$

tənliyi bir tərtibli xüsusi törəməli kvazixətti diferensial tənlik adlanır. Burada $p_1, p_2, \dots, p_n$ və f funksiyaları məlum kəsilməz funksiyalardır.

Əvvəlki paraqrafda baxdığımız xətti bircins tənlik bu tənliyin xüsusi halıdır. Doğrudan da, əgər bu tənlikdə $f = 0$ götürsək və fərz etsək ki, $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, əmsalları z -dən asılı deyil, onda bu tənlik bir tərtibli xətti bircins diferensial tənliyə çevrilir.

(1) tənliyinin həllini

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2)$$

şəklində axtaraq. Burada V -məchul funksiyadır.

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini x_k dəyişəninə nəzərən diferensiallayaq:

$$\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Bu bərabərlikdən alırıq:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = - \frac{\partial V}{\partial x_k} / \frac{\partial V}{\partial z}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Əgər (3) bərabərliklərini (1) tənliyində nəzərə alsaq və alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini $\frac{\partial V}{\partial z}$ -ə vursaq, onda V məchuluna nəzərən aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial V}{\partial x_1} + p_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial V}{\partial x_n} + f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Bu birtərətli xüsusi törəməli xətti bircins tənlikdir. Uyğun adi diferensial tənliklər sistemini yazaq

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \dots = \frac{dx_n}{p_n} = \frac{dz}{f} \quad (5)$$

Tutaq ki,

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_1,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_2,$$

$$-----$$

$$\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_n$$

bu sistemin ümumi inteqralıdır. Onda (4) tənliyinin ümumi həlli

$$V = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

bərabərliyi ilə təyin olunar. Burada F ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

Əgər V -nin tapdığımız ifadəsini (2) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (6)$$

münasibətini almış olarıq. z və $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənləri arasında münasibət təyin edən (6) bərabərliyi (1) tənliyini ödəyir.

Misal. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$ tənliyinin həllini tapmalı.

Bu tənliyə uyğun adi diferensial tənliklər sistemini yazaq. (5)-ə əsasən

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$$

sistemi baxılan tənliyə uyğun adi diferensial tənliklər sistemidir. Bu sistemin ümumi inteqralları tapmaq üçün əvvəlcə

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2}$$

tənliyinə baxaq. Bu tənliyin hər iki tərəfini

$x^2 y$ -ə vurub, inteqrallasaq, alarıq:

$$x^2 + y^2 = c_1$$

İndi isə

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}$$

tənliyinə baxaq. Bu tənliyin hər iki tərəfini y -ə vurub, inteqrallasaq, alarıq:

$$\frac{z}{x} = c_2$$

Deməli, baxılan tənliyin həlli

$$F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada F -ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

MİSALLAR

Aşağıdakı tənliklərin ümumi həllərini tapın.

$$130. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$131. \quad (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$132. x \frac{\partial z}{\partial x} + (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$133. (x - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$134. y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$135. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

$$136. 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

$$137. xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

$$138. (z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

$$139. y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

CAVABLAR

$$1. (x^2 + 1)(y^2 + 1) = c;$$

$$2. \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = c;$$

$$3. y = \frac{c}{x^2 + 1};$$

$$4. \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} = c;$$

$$5. y = 2 + c \sin x;$$

$$6. y = \frac{(x+1)^6}{9};$$

$$7. y = (x+c)^5;$$

$$8. y = x;$$

$$9. y = \frac{cx}{1 - cx};$$

$$10. y = 2e^{\frac{x^3}{3}};$$

$$11. \sin(y - x) = ce^x;$$

$$12. 4y = 6x - 7 - e^{2(x-2)};$$

$$13. \ln|4x + 2y + 1| = 2y + 4;$$

$$14. y = \frac{(x+c)^2}{4} - x + 2;$$

$$15. y^2 = 1 + c(x+1)e^{-x};$$

$$16. y = x \ln |cx|;$$

$$17. 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) + c;$$

$$18. x \sin \frac{y}{x} = c;$$

$$19. e^{-\frac{y}{x}} + 2 \ln |cx| = 0;$$

$$20. x \ln |x - 2y| + 2y = -3x \ln |cx|;$$

$$21. 4 \sqrt{\frac{x}{y}} = \ln \left| \frac{cy}{x^2} \right|;$$

$$22. y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2;$$

$$23. y^2 = x(c + 2x);$$

$$24. y^2 + 4xy - x^2 - 2x - 6y = c;$$

$$25. x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 2y = c;$$

$$26. (x + 2y)^2 + (x - 2y) = c;$$

$$27. (x + y)^2 + (x - y) = c;$$

$$28. y^2 - 2xy - x^2 + 4x = c;$$

$$29. (2\sqrt{y} - 3x)^3 = c(\sqrt{y} - x)^2;$$

$$30. y^2 e^{\frac{1}{xy}} = c;$$

$$31. y = x(c + x^2);$$

$$32. y = \frac{1}{x+2}(c+x^2);$$

$$33. y = c \cos x + \sin x;$$

$$34. y = e^{-x}(c + 3 \ln|x|);$$

$$35. y = cx - x \cos x;$$

$$36. x = ce^{-y} + e^{2y};$$

$$37. y = c \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$38. y(c-x) = e^{2x};$$

$$39. y = \frac{1}{ce^{-x} + x - 1};$$

$$40. y = \frac{(cx^2 + 1)^2}{16x^2};$$

$$41. y^2 = c\sqrt{|x^2 - 1|} + x^2 - 1;$$

$$42. y^2 (\sin x + c) = x;$$

$$43. y = \frac{c + e^{\frac{x^2}{2}}}{2(c - e^{\frac{x^2}{2}})};$$

$$44. y = 2e^x - \frac{1}{x+c};$$

$$45. y = \sin x + \frac{1}{x+c};$$

$$46. x^3 + 3xy^2 = c;$$

$$47. x^2 \ln|y| = c;$$

$$48. x^3 y^3 + 3(x^2 - y^2) = c;$$

$$49. x^2 + 2x(y - y^2) = c;$$

$$50. x^3 - y^4 \sin^2 x + 2y = c;$$

$$51. x^2 - y^2 + 2xy = c;$$

$$52. x + \frac{1}{2} \ln|x^2 - y^2| = c;$$

$$53. xy + e^{-x^2} = c;$$

$$54. \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2x = c;$$

$$55. \frac{x^2}{2} - xy - \ln|y| = c;$$

$$56. y_1 = \frac{x^2}{2}; y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}; y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24};$$

$$57. y_1 = 2 + 2x - \cos x; y_2 = 2x^2 + 4x + 2 - \cos x - 2 \sin x;$$

$$y_3 = \frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 4x - 2 + 3 \cos x - 2 \sin x;$$

$$58. \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right];$$

$$59. \left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7} \right];$$

$$60. \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right];$$

$$61. \text{Yehərvari nöqtə};$$

$$62. \text{Düyün nöqtəsi};$$

$$63. 27y^2 = 8(2x+c)^3; y=0;$$

$$64. \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm x + c; y = \pm 1;$$

$$65. 4y^2 - 1 = 16(x+c)^2; y = \pm \frac{1}{2};$$

$$66. y = 2x + c;$$

$$67. y = x^2 + c; y = -\frac{x^2}{2} + c;$$

$$68. y = \frac{1}{2}e^{2x} + c; y = ce^{-x};$$

$$69. y = cx^3; y = cx;$$

$$70. (cx+1)^2 = 1 - y^2;$$

$$71. \begin{cases} x = 2p^3 - 3p, \\ y = \frac{3}{2}p^2(p^2 - 1) + c; \end{cases}$$

$$72. x = \frac{p}{p^2 + 1}; y = \frac{3}{2} \ln(p^2 + 1) + \frac{1}{p^2 + 1} + c;$$

$$73. x = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + c, y = \sqrt{1 + p^2};$$

$$74. cx = \ln cy, y = e^x;$$

$$75. x = \frac{1}{2p}(c - \ln p), y = \frac{1}{2}(c - \ln p) + \frac{1}{4}(c - \ln p)^2;$$

$$76. x = \frac{c}{p^2} - \frac{2}{3}p; y = \frac{2c}{p} - \frac{1}{3}p^2;$$

$$77. y = cx + \frac{1}{c}; y^2 = 4x;$$

$$78. x = \frac{c}{p\sqrt{p}} - \frac{2}{p^2}; y = \frac{3c}{\sqrt{p}} - \frac{4}{p};$$

$$79. x = \frac{c}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p}; y = \ln p + 1 - c\sqrt{p};$$

$$80. y = cx - e^c; y = x(\ln x - 1);$$

$$81. c_1 y^2 - 1 = (c_1 x + c_2)^2;$$

$$82. e^y + c_1 = (x + c_2)^2;$$

$$83. y = \frac{x^3}{12} + c_1 x(\ln x - 1) + c_2 x + c_3;$$

$$84. y^2 = x^2 + c_1 x + c_2;$$

$$85. y = x(x + c_1 \ln x + c_2);$$

$$86. y^2 = c_1 x^3 + c_2;$$

$$87. y = c_2 x e^{\frac{c_1}{x}};$$

$$88. y = \frac{1}{1-x};$$

$$89. y(x+2) = -x-6;$$

$$90. e^{\frac{y}{2}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} x;$$

91. Xətti asılı deyil;

92. Xətti asılıdır;

93. Xətti asılıdır ;

94. Xətti asılıdır;

95. Xətti asılıdır;

96. $y = kx$;

97. $y = e^x$;

98. $y = e^x - 1$;

99. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$;

100. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-2x}$;

101. $y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x)$;

102. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$;

103. $y = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 + c_3 x)$;

104. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - x^2$;

105. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + e^{4x}$;

106. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (x - \frac{2}{5}) e^x$;

107. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + x(x - \frac{1}{2}) e^x$;

$$108. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x;$$

$$114. y = x^3(c_1 + c_2 x^4);$$

$$115. y = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x};$$

$$116. y = c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 x^3;$$

$$117. y = x(c_1 + c_2 \ln|x| + \ln^2|x|);$$

$$118. y = x \ln|x| + c_1 x + c_2 x^2 + x^3;$$

$$119. y = \frac{e^3}{3+2e^5}(e^{2x} - e^{-3x});$$

$$120. y = \cos x + \sin x;$$

$$121. y = \cos 3x + \frac{x}{3};$$

$$122. G(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t, \\ (x-1)t, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$123. G(x, t) = \begin{cases} -\sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t, \\ -\cos x \sin t, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$124. G(x, t) = \begin{cases} 1 - e^x, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{e^x(1 - e^t)}{e^t}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$125. y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad y_2 = 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{3x};$$

$$126. y_1 = 2c_1 e^{3x} - 4c_2 e^{-3x}, \quad y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x};$$

$$127. \begin{aligned} y_1 &= e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \\ y_2 &= e^{2x}[(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x]; \end{aligned}$$

$$128. \begin{aligned} y_1 &= e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \\ y_2 &= e^x(c_1 \sin 3x - c_2 \cos 3x); \end{aligned}$$

$$129. \begin{aligned} y_1 &= (2c_2 - c_1) \cos 2x - (2c_1 + c_2) \sin 2x, \\ y_2 &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x; \end{aligned}$$

$$130. z = F(x^2 - y^2);$$

$$131. z = F((x+y)y);$$

$$132. z = F\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right);$$

$$133. u = F\left(\frac{(x-y)^2}{z}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right);$$

$$134. u = F\left(x^2 - y^2, \frac{x+y+z}{z}\right);$$

$$135. F(x^2 - y^2, x + y - z) = 0;$$

$$136. F\left(\frac{(x+y)^2}{x}, \frac{x^2}{2} - 4z\right) = 0;$$

$$137. F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0;$$

$$138. F(y^2 - z^2, x^2 + (y-z)^2) = 0;$$

$$139. F(z - \ln|x|, 2x(1-z) + y^2) = 0.$$

ƏDƏBİYYAT

1. Q.Əhmədov, K.Nəsənov, M.Yaqubov. Adi diferensial tənliklər. Bakı, «Maarif», 1978, 444 səh.
2. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград, 1950, 468 стр.
3. Н. М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, «Высшая школа», 1963, 546 стр.
4. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, «Наука», 1970, 280 стр.
5. Н. П. Еругин, И. З. Штокало и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев, «Вища школа», 1974, 472стр.
6. Zafar Ahsan. Differential Equations and Their Applications. Second Edition. New Delhi-110001, 2005, 514 pp.
7. А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва-Ижевск, 2004, 176 стр.