

Aliyeva Susanna Mirzalı

Ali riyaziyyatın əsasları

*Orta ixtisas təhsili müəssisələrinin
tələbələri üçün dərslik*

*Azərbaycan Respublikası
Təhsil Nazirinin F-11
saylı 13 yanvar 2022-ci il
tarixli əmri ilə dərslik
kimi təsdiq edilmişdir.*

BAKİ – 2022

Rəyçilər: **Hüseynov Heydər Müseyib oğlu**
Azərbaycan Pedoqoji Universitetinin
“Cəbr və Həndəsə” kafedrasının dosenti,
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Əfəndiyev Məqsəd Yusif oğlu
Azərbaycan Kooperasiya Universitetinin
“Riyaziyyat” kafedrasının dosenti,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Budaqov Ramiz Mürsəl oğlu
Azərbaycan Texniki Universiteti nəzdində
Bakı Dövlət Rabitə və Nəqliyyat Kollecinin
“Ümumtəhsil” fənn birləşməsinin müəllimi

Redaktor: **Salayev Oktay Ağacan oğlu**
Azərbaycan Texniki Universiteti nəzdində
Bakı Dövlət Rabitə və Nəqliyyat Kollecinin
müəllimi

Susanna Alıyeva «Ali riyaziyyatın əsasları»:
Orta ixtisas təhsili müəssisələrinin tələbələri
üçün dərslik. Birinci nəşr. Bakı–2022, «MSV
NƏŞR» nəşriyyatı, 154 səhifə

GİRİŞ

Bu dərslik Ali riyaziyyat üçün istifadə olunan proqramın əsasında orta ixtisas təhsili müəsisələri üçün yazılmışdır. Nəzəri material mümkün qədər sadə, başa düşülən şəkildə yazılmışdır. Vəsait bütün proqramı əhatə edir. Burada matrislər, determinantlar, xətti tənliklər, iki tərtibli əyrilər, funksiyaların limiti, Lopital qaydası, törəmə, qeyri müəyyən və müəyyən inteqrallar, inteqrallama üsulları, diferensial tənliklər və s. bu kimi mövzular ardıcılıqla və oxunaqlı şəkildə şərh edilmişdir.

Kitabda təriflər, teoremlər, qaydalar səlis şərh edilmiş, müəyyən anlayışların fiziki mənası ilə yanaşı, həndəsi izahı da əyani olaraq şəkillərlə verilmişdir.

Orta ixtisas təhsil sisteminin yenidən qurulması tələbə kontingentindən dərin və möhkəm riyazi biliyə malik olmağı, riyaziyyatı müasir elmi məsələlərin həllinə tətbiq etmə bacarığı və müstəqil işləmə vərdişi tələb edir. Gələcək texniki kadrların hazırlandığı orta ixtisas təhsil müəsisələrində öyrənilən fənlər arasında Ali riyaziyyatın xüsusi əhəmiyyəti vardır. Ən müxtəlif sahələrdə riyazi metodlar geniş tətbiq edilir.

Tələbələrin riyazi biliyini yüksəltmək, onların yaradıcı təfəkkürünü, şəxsiyyətini, məntiqi və fərdi düşünmə qabiliyyətini və istedadlarını inkişaf etdirmək, müstəqil işləmə və hesablama aparmaq vərdişlərini artırmaq üçün “Ali riyaziyyat” kursu mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Azərbaycan Texniki Universiteti nəzdində Bakı Dövlət Rabitə və Nəqliyyat Kollecinin tələbələri üçün yazılmış “Ali riyaziyyat” proqramı yeddi fəsildən ibarətdir. Hər bir paraqrafda nümunə kimi məsələlər həll edilib və hər bir

mövzu və ya fəslin sonunda nəzəri materialların tələbələr tərəfindən daha yaxşı qavranılması məqsədi ilə sərbəst həll etmək üçün məsələ və misallar verilmişdir. “Ali riyaziyyat” orta ixtisas təhsil müəssisələrində riyaziyyatın mühəndislik və başqa texniki ixtisaslar üçün riyazi əsasını öyrədən hissəsidir. Sırf riyaziyyat ixtisası üzrə təhsil alanlardan fərqli olaraq burada mühəndislər riyaziyyatın praktikada tətbiqi üzrə məlumat alırlar.

Ali riyaziyyat kursu texniki və bəzi digər ixtisas məktəblərində tədris edilir. Ali riyaziyyat kursuna, əsasən, analitik həndəsə, diferensial və integral hesabı və ali cəbrin elementləri daxildir. Elmi tərəqqinin tələbləri ilə əlaqədar olaraq Ali riyaziyyat genişlənir və ona digər riyazi fənlər əlavə edilir.

	Giriş	
	Fəsil 1 . Matrislər və determinantlar.	3
1	Matris anlayışı. Matrislər üzərində əməllər. İki və üç tərtibli determinantlar. Determinantların hesablanması	7
2	Determinantın xassələri. Minor və cəbri tamamlayıcı. Tərs matris və onun tapılması. Matrisin minoru və rəngi	18
	Fəsil 2. Xətti tənliklər sistemi	
1	Xətti tənliklər sisteminə aid əsas anlayışlar. Xətti tənliklər sisteminin Kramer qaydası ilə həlli	35
2	Xətti tənliklər sisteminin Matris üsulu ilə həlli	45
3	İxtiyari xətti tənliklər sistemi üçün Qauss (ardıcıl yoxetmə) üsulu və bu üsulun ümumi sxemi	48
	Fəsil 3. İki tərtibli ayrılar	
1	Çevrə, Ellips və onların kanonik (sadə) tənlikləri	57
2	Hiperbola, Parabola və onların kanonik (sadə) tənlikləri	62
	Fəsil 4. Funksiyanın limiti.	
1	Funksiyanın limiti. Limiti olan funksiyanın xassələri. Limitlərin hesablanması. Qeyri müəyyənliklərin açılışı , Lopital qaydası	69

	Fəsil 5. Törəmə. Diferensial.	
1	Törəmənin fiziki və həndəsi mənası. Törəmə haqqında əsas teoremlər. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi. İkinci tərtib törəmə	78
2	Diferensialın həndəsi və mexaniki mənası. Diferensialın tərifı. Diferensialın əsas xassələri	94
	Fəsil 6. Müəyyən inteqral.	
1	Müəyyən inteqralın əsas xassələri. Nyuton-Leybnis düsturu. Müəyyən inteqralın həndəsi mənası	101
2	Müəyyən inteqralda dəyişəni əvəz etmə üsulu. Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama üsulu	107
	Fəsil 7. Diferensial tənliklər.	
1	Adi diferensial tənliklər. Dəyişənlərinə ayrıla bilən adi diferensial tənliklər	117
2	Birtərtibli, bircins diferensial tənliklər. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər	121
3	Yüksək tərtibli diferensial tənliklər. İkitərtibli diferensial tənliklərin həlli	127
	İzahlı lüğət	141
	İstifadə olunan ədəbiyyat	153

Matrislər və determinantlar

I FƏSİL

Matrislər və determinantlar.

§ 1. Matris anlayışı. Matrislər üzərində əməllər. İki və üç tərtibli determinantlar. Determinantların hesablanması

Matris anlayışı

Matris anlayışı cədvəl mənasında hələ b. e. ə. III əsrlə b. e.-nin III əsri arasında naməlum Çin riyaziyyatçısı tərəfindən daxil olunmuşdur.

Matris və ya Matriks — Xətti cəbr anlayışı olub, m sayda sıra və n sayda sütundan ibarət olan rəqəmlər cədvəlidir.

Tutaq ki, m və n natural ədədlərdir, $m \cdot n$ sayda ədəddən düzbucaqlı şəkildə düzəldilmiş m sayda sətri və n sayda sütunu olan cədvəl $(m \times n)$ – ölçülü matris deyilir. Matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

şəkildə yazırlar. Bəzən qısa olmaq üçün matrisi böyük hərflə ($A, B, C, X, Y, \dots$) və ya a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) şəkildə işarə edirlər.

Matrisi təşkil edən a_{ij} ədədlərinə onun **elementləri** deyilir. Elementin aşağısında yazılan iki (ij) indekstdən birincisi (i) həmin elementin yerləşdiyi sətrin nömrəsini, ikincisi (j) isə onun yerləşdiyi sütunun nömrəsini göstərir.

Məsələn: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (2×4) ölçülü matris

Matrislər və determinantlar

$(m \times n)$ – ölçülü (1) matrisinin sətir və sütunlarının sayı bərabər olduqda ($m = n$) ona **kvadrat matris** deyilir. Bu halda n ədədinə **kvadrat matrisin tərtibi** deyilir. Məsələn,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \text{ikitetibbli matris,}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \text{üçtərtiblimatris.}$$

Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.

Bir elementdən ibarət olan matrisə birtərtibli matris deyilir.

$$A = (8)$$

Ancaq bir sətiri olan matrisə sətir-matris

$$A = (2 \ 7 \ 8 \ 9),$$

ancaq bir sütunu olan matrisə isə sütun-matris deyilir

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

n tərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Matrislər və determinantlar

kvadrat matrisinin yuxarı sol küncündə yerləşən a_{11} elementi ilə aşağı sağ küncündəki a_{nn} elementini birləşdirən düz xətt parçası

üzərində yerləşən $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementləri çoxluğu həmin matrisin baş diaqonalı adlanır. Yalnız baş diaqonal elementləri sıfırdan fərqli olan kvadrat matrisə **diaqonal matris** deyilir. Bütün elementləri vahidə bərabər olan diaqonal matris **vahid matris** adlanır:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bütün elementləri sıfıra bərabər olan kvadrat matrisə **sıfır matris** deyilir və O ilə işarə olunur. Məsələn,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrislər üzərində əməllər və onların xassələri.

1. Matrislərin cəmi. Eyni $(m \times n)$ – ölçülü $A=(a_{ij})$ və

$B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) matrislərinin cəmi həmin ölçülü və hədləri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

(1)

kimi təyin olunan $C = (c_{ij})$ matrisinə deyilir və $C = A + B$ ilə işarə olunur.

Matrislər və determinantlar

Məsələn:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 & 11 \\ 5 & 7 & 13 & 8 \\ 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tərifdən aydındır ki, matrislərin toplanması yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrinə malikdir, yəni eyniölçülü A , B və C matrisləri üçün

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

münasibətləri doğrudur. Eyniölçülü A matrisi və O sıfır matrisi üçün həmişə $A + O = A$ münasibəti doğrudur.

2. Matrislərin fərqi. Eyniölçülü A və B matrislərinin fərqi həmin ölçülü elə C matrisinə deyilir ki, onu B ilə topladıqda A -ya bərabər olsun: $A = C + B$. A və B matrislərinin fərqi $A - B = C$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$) ilə işarə edirlər. Aydındır ki, həmişə $A - A = 0$.

Misal:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & -5 & -6 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matrisin ədədə vurulması. Verilmiş $A = (a_{ij})$

($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) matrisinin həqiqi λ ədədinə hasili hədləri $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) kimi təyin olunan $B = (\lambda a_{ij})$ matrisinə deyilir və $B = \lambda A$ ilə işarə olunur.

Məsələn:
$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 25 & 45 \\ 10 & 35 & 20 & 5 \\ 30 & 25 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

Aydındır ki, ixtiyari A, B matrisləri və λ, μ ədədləri üçün

$$(\lambda \mu)A = \lambda (\mu A), \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

xassələri doğrudur. Bundan başqa

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\lambda A)^* = \lambda A^*.$$

4. İki matrisin hasili. $(m \times n)$ ölçülü $A = (a_{ij})$

$(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ matrisinin $(n \times k)$ ölçülü $B = (b_{ij})$

$(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k})$ matrisinə hasili hədləri

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}$$

$(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k})$

kimi təyin olunan $(m \times p)$ ölçülü $C = (c_{ij})$ $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k})$ matrisinə iki matrisin hasili deyilir və $C = A B$ ilə işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, ixtiyari ölçülü iki matrisi vurmaq olmaz.

A matrisini o zaman B matrisinə vurmaq olar ki, A -nın sütunlarının sayı B -nin sətirlərinin sayına bərabər olsun.

Xüsusi halda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}$$

Məsələn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

Qeyd edək ki, matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi doğru deyil: $AB \neq BA$. Lakin istənilən A kvadrat matrisi ilə eynitərtibli olan I vahid və O sıfır matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi həmişə doğrudur

$$IA = AI = A, \\ OA = AO = O.$$

Matrislərin hasilinin bir sıra başqa xassələri də vardır. Məsələn, ixtiyari A, B, C matrisləri və həqiqi λ ədədi üçün

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB), \\ (A+B)C = AC + BC, \\ C(A+B) = CA + CB, \\ A(BC) = (AB)C, \\ (AB)^* = B^* A^*$$

bərabərlikləri doğrudur.

Matrisin transponirə olunması.

Verilmiş A matrisinin bütün uyğun sətir və sütunlarının yerinin dəyişdirilməsinə (nömrəsi saxlanmaqla) həmin matrisin çevrilməsi və ya transponirə edilməsi deyilir və A^* ilə işarə olunur. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aydındır ki, $(A^*)^* = A$. $A = A^*$ olduqda A matrisinə simmetrik matris deyilir. (2) matrisinin simmetrik olması şərtini $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$) kimi yazmaq olar. $a_{ij} = -a_{ji}$ olduqda A matrisinə **çəpsimmetrik matris** deyilir.

Matrislər və determinantlar

2. İki və üç tərtibli determinantlar. Determinantların hesablanması.

Tərif: Kvadrat matrisin ədədi xarakteristikası onun determinantı adlanır.

Əvvəlcə ikitərtibli

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(1)

matrisinə baxaq. Bu matrisin elementlərindən düzəldilmiş determinant

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

kimi işarə olunur. (1) matrisinin (2) determinantını $\Delta(A_2)$ və ya $\det A_2$ ilə işarə edirlər.

Məsələn: $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8$

Üçtərtibli

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

matrisinin elementlərindən düzəldilmiş.

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \quad (4)$$

ifadəsinə həmin matrisin determinantı (və ya üçtərtibli determinant) deyilir və

$$\Delta(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

ilə işarə olunur. Beləliklə,

Matrislər və determinantlar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki (4) ifadəsinə (5) determinantını açılışı (və ya *qiyməti*) deyilir. Verilmiş determinantın qiymətini tapmaq üçün onun bərabər olduğu (4) ifadəsini hesablamaq lazımdır.

Məsələn:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot$$

$$0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 + 8 + 6 - 8 - 0 - 1 = 5$$

Üç tərtibli determinantların hesablanması başqa bir qaydası da vardır. Bu qayda Sarrius qaydası adlanır. Fərz edək ki, üçtərtibli determinant verilmişdir.

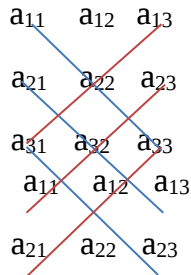
$$\Delta(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sarrius qaydası aşağıdakı kimidir. Determinanta dördüncü və beşinci sütun (sətr) olaraq birinci və ikinci sütunu (sətiri) əlavə edərək alınan üç sol diaqonal elementlərinin hasilini müsbət işarə ilə alınan üç sağ diaqonal elementlərinin hasilini isə mənfi işarə ilə götürməklə determinantın qiymətini hesablamaq olaraq ilk iki sütun əlavə edilib.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Matrislər və determinantlar

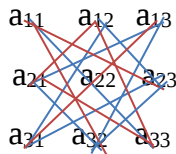
edilib



ilk iki sətir əlavə

Pierre Frederik Sarrius –fransız riyaziyyatçısı (1798 - 1861). Üç tərtibli determinantların hesablanması üçün sadə qayda tapdı və variasiyaların hesablanmasında əsas köməkçi teoremi sübut etdi.

Ücbucaq qaydası.



Sarrius qaydasına aid misal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 5 & 9 & 2 & 5 & & \\
 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 9 \cdot 0 \cdot 7 - 9 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 7 - 5 \cdot 0 \cdot 3 = & \\
 1 & 7 & 3 & 1 & 7 & & -18 \\
 5 & 2 & 0 & & & & \\
 2 & 0 & 8 & & & & \\
 7 & 5 & 1 & = 5 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 7 \cdot 2 \cdot 8 - 0 \cdot 0 \cdot 7 - 8 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 92 & & & \\
 5 & 2 & 0 & & & & \\
 2 & 0 & 8 & & & &
 \end{array}$$

Matrislər və determinantlar

Matrislər kimi determinantlar da sətir və sütunlardan ibarətdir. İkitərtibli determinantın iki sətiri və iki sütunu, üçtərtibli determinantın isə üç sətiri və üç sütunu vardır. Determinantı təşkil edən a_{ij} ədədləri onun **elementləri** adlanır.

**QEYD. determinant ədəddir və ya cəbri cəmdir ,
matris isə cədvəldir.**

Çalışmalar:

Matrislər üzərində əməlləri yerinə yetirin.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}:$$

$$A \cdot B - 2C = ?$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}:$$

$$A \cdot B + 3C = ?$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}:$$

$$2A + 3B - 5C = ?$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}: \quad 3A + 2B = ?$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}: \quad 2A \cdot B = ?$$

Matrislər və determinantlar

6. Hesablayın: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$

7. Matrislərin hasilini hesablayın :

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad 2) (4 \ 0 \ 1 \ 2 \ -5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

8. İki tərtibli determinantları hesablayın:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

9. Üç tərtibli determinantları hesablayın:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Matrislər və determinantlar

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

10. Tənliyi həll edin:

$$1) \begin{vmatrix} x & x+1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

§ 2. Determinantın xassələri. Minor və cəbri tamamlayıcı. Tərs matris və onun tapılması. Matrisin minoru və rəngi

Minor və cəbri tamamlayıcı.

Matris kimi determinantlar da sətir və sütunlardan ibarətdir. n tərtibli determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütunu sildikdən sonra yerdə qalan elementlər (nisbi vəziyyətlərini dəişmədən) $n-1$ tərtibli (tərtibi verilmiş determinantın tərtibindən bir vahid az olan) determinant əmələ gətirir. Bu determinantla həmin elementin minoru deyilir. a_{ij} elementinin minorunu M_{ij} ilə işarə edirlər. M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ vuruğu ilə hasilinə a^{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı deyilir və

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ilə işarə olunur.

Matrislər və determinantlar

İkitərtibli determinantının a_{11} elementinin minoru $M_{11} = a_{22}$ cəbri tamamlayıcısı isə $A_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22}$; üçtərtibli determinantının a_{13} və a_{23} elementlərinin minoru uyğun olaraq

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{və} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

cəbri tamamlayıcıları isə

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{və} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Məsələn: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} a_{11}=1 & M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4-1=3 & A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \\ a_{12}=2 & M_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 7-5=2 & A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ a_{13}=5 & M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7-20=-14 & A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14 \end{array}$$

14

Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı.

T e o r e m 1. Hər bir determinant hər hansı bir sətir və ya sütun elementlərinin öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasilələrinin cəminə bərabərdir.

Teorem üçtərtibli determinantı ikitərtibli determinantlar vasitəsilə, ikitərtibli determinantı isə birtərtibli determinantlar vasitəsilə təyin etməyə imkan verir. Bu qayda

Matrislər və determinantlar

ilə dörd, beş və s. tərtibli determinantları da ardıcıl olaraq təyin etmək olar.

Məsələn, dördtərtibli

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

matrisinin $\Delta(A_4)$ determinantını (dördtərtibli determinantı)

$$(6) \quad \Delta(A_4) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

kimi təyin etmək olar. Burada A_{11} , A_{12} , A_{13} və A_{14} kəmiyyətləri dördtərtibli

$$(7) \quad \Delta(A_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

determinantının 1-ci sətir elementlərinin üçtərtibli determinantlar vasitəsilə ifadə olunan uyğun cəbri tamamlayıcılarıdır. (7) determinantını başqa sətir və ya sütun elementləri üzrə ayrılışlar vasitəsilə də təyin etmək mümkündür.

$$\text{Məsələn: } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}$$

$$\cdot M_{31}$$

$$\Delta A = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} = 51$$

Matrislər və determinantlar

Bu mülahizələr əsasən n -tərtibli determinanta aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

T ə r i f. ($n > 1$) – **tərtibli**

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin

$$\Delta(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı (n -tərtibli determinant)

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$$

və ya

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

ədədinə deyilir. Burada M_{1k} ilə A_n matrisinin 1 -ci sətrini və k - nömrəli sütunu pozmaqla alınan $(1-n)$ - tərtibli matrisin determinantı işarə olunmuşdur.

Yuxarıda isbat olunan teorem göstərir ki, iki və üçtərtibli determinantlara əvvəlcə verdiyimiz təriflər bu təriflə $n=2$ və $n=3$ olduqda ekvivalentdir. Həmin teorem n -tərtibli determinantlar üçün də doğrudur:

T e o r e m 2. n -tərtibli $\Delta(A_n)$ determinantı və istənilən i ($1 \leq i \leq n$) və j ($1 \leq j \leq n$) üçün

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (8)$$

və

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \quad (9)$$

bərabərlikləri deyilir.

Matrislər və determinantlar

(8) bərabərliyinə $\Delta(A_n)$ determinantının i – nömrəli sətir elementləri üzrə ayrılışı, (9) bərabərliyinə isə onun j – nömrəli sütun elementləri üzrə *ayrılışı* deyilir.

Misal 1. Vahid matrisin determinantı vahidə bərabərdir.

Doğrudan da,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ olduqda} \quad \Delta(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ olduqda} \quad \Delta(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

olduqda $\Delta(I_n) = \Delta(I_{n-1}) = \Delta(I_{n-2}) = \dots = \Delta(I_2) = 1$.

Determinantın əsas xassələri.

Determinantın tərtibi artdıqca onun elementlərinin və hədlərinin sayı artır.

Determinantlarının hesablanmasını asanlaşdıran bir sıra xassələr vardır. İstənilən tərtibli determinantlara aid olan bu xassələri biz ancaq üçtərtibli determinantlar üçün burada söyləməklə kifayətlənirik.

X a s s ə 1. Determinantın bütün sətirləri ilə sütunlarının uyğun olaraq yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz:

Matrislər və determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Bu bərabərliyin doğruluğunu isbat etmək üçün sol tərəfdəki determinantı Δ ilə, sağ tərəfdəki determinantı isə Δ^* ilə işarə edək. Δ determinantının birinci sətir elementləri üzrə ayrılışını və Δ^* determinantının birinci sütun elementləri üzrə ayrılışını yazaq:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ \Delta^* &= a_{11}A_{11}^* + a_{12}A_{12}^* + a_{13}A_{13}^*. \end{aligned}$$

$$\text{Məsələn: } \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \qquad \Delta^* = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$A_{11} = A_{11}^*$, $A_{12} = A_{12}^*$ və $A_{13} = A_{13}^*$ olduqda $\Delta = \Delta^*$.

Determinantın bütün sətirləri ilə sütunlarının uyğun olaraq yerini dəyişməsinə onun *çevrilməsi* və ya *transponirə* edilməsi deyilir. Isbat etdiyimiz xassə göstərir ki, determinantın çevrilməsi zamanı onun qiyməti dəyişmir, yəni A matrisi ilə onun A^* çevrilməsinin determinantları həmişə bərabərdir:

$$\Delta(A) = \Delta(A^*) \quad (2)$$

N ə t i c ə. Hər bir determinantın sətirləri ilə sütunları eyni hüquqludur. Buna görə də determinantın bundan sonraki xassələrini ancaq sətirləri və ya ancaq sütunları üçün söyləmək kifayətdir.

X a s s ə 2. Determinantın iki sətirinin (və ya sütununun) bir-biri ilə yerini dəyişdikdə determinantın ancaq işarəsi dəyişər:

Matrislər və determinantlar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Doğrudan da, sol tərəfdəki determinantın birinci sətir elementləri üzrə ayrılışını:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

və sağ tərəfdəki determinantın ikinci sətir elementləri üzrə ayrılışını:

$$\Delta' = a_{11}A_{11}' + a_{12}A_{12}' + a_{13}A_{13}'$$

yazıb, $A_{11} = -A_{11}'$, $A_{12} = -A_{12}'$, $A_{13} = -A_{13}'$ olduğunu nəzərə alsaq, onda (3) bərabərliyinin doğruluğu aydın olar.

Məsələn: $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -28 \quad \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 28$

X a s s ə 3. İki sətiri eyni olan determinant sıfıra bərabərdir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Doğrudan da, Δ determinantında birinci və ikinci sətirlərin bir-biri ilə yerini dəyişsək, onda $\Delta = -\Delta$. Buradan $2\Delta = 0$, $\Delta = 0$

Məsələn: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Matrislər və determinantlar

X a s s ə 4. Determinantın hər hansı bir sətir elementlərinin ortaqları olarsa, onda həmin vuruğu determinantın xaricinə çıxarmaq olar.

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu bərabərliyin sol tərəfindəki determinantı

$$\Delta_1 = \lambda a_{21}A_{21} + \lambda a_{22}A_{22} + \lambda a_{23}A_{23} = \lambda(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = \lambda\Delta.$$

Məsələn:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -84$$

N ə t i c ə 1. Determinantın hər hansı bir sətirinin bütün elementləri sıfır olduqda determinant sıfıra bərabər olar.

Nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün (4) bərabərliyində $\lambda=0$ götürmək kifayətdir.

Məsələn:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

N ə t i c ə 2. Determinantı bir ədədə vurmaq üçün determinantın hər hansı bir sətirini həmin ədədə vurmaq kifayətdir.

Bu nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün (4) bərabərliyini sağdan sola oxumaq kifayətdir.

X a s s ə 5. Determinantın hər hansı bir sətirinin bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar, bu

Matrislər və determinantlar

determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar, o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a'_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Doğrudan da, bərabərliyin sol tərəfindəki determinantı Δ_1 , sağ tərəfdəki determinantları isə uyğun olaraq Δ və Δ' ilə işarə edərək, Δ_1 determinantını birinci sətir elementləri üzrə ayırsaq:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (a_{11}+a'_{11})A_{11} + (a_{12}+a'_{12})A_{12} + (a_{13}+a'_{13})A_{13} = \\ &= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + (a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13}) = \Delta + \Delta' \end{aligned}$$

və ya tələb olunan

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta' \quad \text{bərabərliyini alırıq.}$$

Məsələn:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8+2 & 1+5 & 0+3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 - 52 = -62$$

X a s s ə 6. Determinantın hər hansı sətrinin bütün elementlərini bir ədədə vurub onun başqa bir sətrinin uyğun elementləri üzərinə əlavə etsək, determinant dəyişməz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Matrislər və determinantlar

Bu təklifin doğruluğu 3, 4 və 5 xassələrdən aydındır.

X a s s ə 7. Determinantın iki sətiri (sütunu) mütənasib olarsa, onda determinant sıfıra bərabər olar.

$$\begin{vmatrix} 25 & 10 & 45 \\ 10 & 4 & 18 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

X a s s ə 8. Determinantın hər hansı bir sətir və ya sütun elementlərinin başqa bir sətir və ya sütunun uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəmi sıfıra bərabərdir.

Tərs matris anlayışı.

Tutaq ki, A hər hansı tərtibli kvadrat matris və I həmin tərtibli vahid matrisidir. Bu halda

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (1)$$

bərabərliyini ödəyən A^{-1} matrisinin A matrisinin tərsi deyilir. (1) bərabərliyi göstərir ki, A^{-1} matrisi A matrisinin tərsidirsə, onda A matrisi də A^{-1} matrisinin tərsidir:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (2)$$

yəni A və A^{-1} matrisləri qarşılıqlı tərs matrislərdir.

A matrisinin tərsi varsa, bu ancaq yeganə ola bilər. Doğrudan da, A matrisinin A^{-1}_1 və A^{-1}_2 kimi iki tərs matris olarsa, onda

$$A(A^{-1}_1 - A^{-1}_2) = I - I = 0.$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini soldan A^{-1}_1 matrisinə vursaq:

Matrislər və determinantlar

$$A^{-1}_1 A(A^{-1}_1 - A^{-1}_2) = I(A^{-1}_1 - A^{-1}_2) = A^{-1}_1 - A^{-1}_2 = 0$$

və yaxud

$$A^{-1}_1 = A^{-1}_2$$

A matrisinin determinanı $\Delta(A)$ olsun. $\Delta(I)=1$ olduğundan (1) bərabərliyinə əsasən

$$\Delta(AA^{-1}) = \Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1$$

və yaxud

$$\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1, \quad \Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta(A)} \quad (3)$$

münasibəti doğrudur. Buradan aydındır ki, verilmiş A matrisinin A^{-1} tərsi olması üçün $\Delta(A) \neq 0$ olmalıdır. Bu təklifin tərsi də doğrudur. Deməli, verilmiş A matrisinin tərs A^{-1} matrisi olması üçün onun $\Delta(A)$ determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtidir.

Determinantı sıfıra bərabər, yəni $\Delta(A)=0$ olan kvadrat A matrisinə cırlaşmış (və ya məxsusi) matris deyilir. Determinantı sıfıra bərabər olmayan kvadrat A matrisinə isə cırlaşmamış (və ya qeyri-məxsusi) matris deyilir. Dediklərimizdən aydındır ki, cırlaşmamış matrisin tərsi vardır.

Verilmiş matrisin tərsini necə tapmaq olar?

Tutaq ki, ikitərtibli cırlaşmamış

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi verilmişdir. Bu matrisin tərsi:

$$A^{-1}_2 = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta A_2} & \frac{A_{21}}{\Delta A_2} \\ \frac{A_{12}}{\Delta A_2} & \frac{A_{22}}{\Delta A_2} \end{bmatrix} \quad \text{və ya} \quad A^{-1}_2 = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

Bunun doğruluğuna inanmaq üçün $A_2 A^{-1}_2 = I$ olduğunu yoxlamaq kifayətdir.

İndi üçtərtibli cırılşmamış ($\Delta(A_3) \neq 0$)

$$(4) \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & = & a_{21} \\ & & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad a_{22} \quad a_{23}$$

matrisini götürək. Bu matrisin tərsi:

$$A^{-1}_3 = \frac{1}{\Delta A_3} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Doğrudan da, burada $A_{i k}$ ilə $a_{i k}$ elementinin cəbri tamamlayıcısı işarə olunduğunu və determinantların xassəssini nəzərə alsaq:

$$A^{-1}_3 A_3 = \frac{1}{\Delta A_3} \begin{bmatrix} \Delta(A_3) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(A_3) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(A_3) \end{bmatrix}$$

və yaxud tələb olunan

$$A^{-1}_3 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

bərabərliyini alırıq.

Üçtərtibli (4) kvadrat matrisinin (5) tərsinin qurulma sxemi çox sadədir: (4) matrisinin $a_{i k}$ elementi onun uyğun $A_{i k}$ cəbri tamamlayıcısının ΔA_3 ədədinə nisbəti ilə əvəz olunur. Alınan matrisin çevrilməsi (baş diaqonala nəzərən çevrilməsi) (5) matrisinə bərabərdir. həmin qayda ilə n -tərtibli cırılşmayan kvadrat

Matrislər və determinantlar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} (\Delta A) \neq 0$$

matrisinin

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

tərs matrisini qurmaq olar.

Misal 2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(A) = -15$$

matrisinin tərs matrisi:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ 1 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisin rəngi

Tutaq ki, $(m \cdot n)$ – ölçülü

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

matrisi verilmişdir. Bu matrisin ixtiyari k sayda sətirinin ixtiyari k sayda sütunu ilə kəsişdiyi elementlər k -tərtibli bir kvadrat matris təşkil edir. Bu k -tərtibli matrisin determinantına A matrisinin k -tərtibli minoru deyilir. Burada k ədədi m və n ədədlərinin kiçiyindən böyük ola bilməz.

A matrisinin heç olmasa bir elementi sıfırdan, fərqlidirsə, onda onun sıfırdan fərqli minorları içərisində elə birisi vardır ki, onun tərtibi ən böyükdür. A matrisinin sıfırdan fərqli minorları tərtiblərinin ən böyüyünə həmin matrisin rəngi deyilir.

A matrisinin rəngini $r(A)$ ilə işarə etsək, onun üçün

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n) \quad (1)$$

bərabərsizliyi doğru olar.

Aydın ki, A matrisinin rəngi r olarsa, onda onun sıfırdan fərqli r -tərtibli minoru vardır və tərtibi r -dən böyük olan bütün minorları sıfıra bərabərdir.

Rəngi r olan A matrisinin sıfırdan fərqli olan r -tərtibli minoruna onun bazis minoru deyilir. A matrisinin sıfırdan fərqli bir neçə r -tərtibli minoru ola bilər. Bu halda, həmin minorların hər biri həmin matrisin bazis minoru olur.

A matrisinin kəsişmələrində bazis minorun elementləri yerləşən sətir və sütunlarına bazis sətirləri və bazis sütunları deyilir. Bazis minoru, bazis sətir və sütunları haqqında aşağıdakı kimi təklif vardır:

Teorem (bazis minoru haqqında teorem). Bazis sətirləri (sütunları) xətti asılı deyildir. A matrisinin istənilən sətiri (sütunu) onun bazis sətirlərinin (sütunlarının) xətti kombinasiyasıdır.

Bu teoremdən istifadə edərək göstərmək olar ki, A matrisinin xətti asılı olmayan sətirlərinin sayı (əlbəttə, maksimal sayı) onun rənginə bərabərdir.

Misal 1.

Matrislər və determinantlar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantı $\Delta(A) = -15 \neq 0$ olduğundan onun rəngi:

$$r(A) = 3.$$

Misal 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

matrisinin bütün üçtərtibli minorları sıfıra bərabərdir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \dots$$

=0

Lakin onun ikitərtibli

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

minoru sıfırdan fərqlidir. Deməli, matrisin rəngi: $r(A) = 2$.

Çalışmalar:

1. Determinantın xassələrindən istifadə edərək hesablayın :

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

2. Cəbri tamamlayıcıların köməyi ilə determinantı hesablayın.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Determinantın xassələrindən istifadə edərək, determinantı hesablayın

$$\begin{pmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matrisin rəngini tapın:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 4 \\ 5 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

5. İki tərtibli matrislərin tərs matrislərini tapın :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Üç tərtibli matrislərin tərs matrislərini tapın :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

7. Matris tənlikləri həll edin:

$$1) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2) Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrislər və determinantlar

8. Cəbri tamamlayıcıları tapmaqla verilmiş matrisin tərsini tapın.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

II FƏSİL

Xətti tənliklər sistemi

Xətti tənliklər sistemi haqqında anlayış.

[illegible]

şəklində olan sistem n məchullu m xətti tənliklər sistemi və ya xətti sistem adlanır, burada a_{ij} , b_i ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) – ədədlərdir. Tənliklərin sağ tərəflərindəki $b_1, b_2, \dots, b_m$ ədədlərinin hamısı sıfıra bərabər olarsa, onda həmin sistemə bircins xətti tənliklər sistemi deyilir. $b_1, b_2, \dots, b_m$ ədədlərinin heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircins olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir. Sistemə daxil olan tənliklərin hər birini ödəyən $X_1 = C_1, X_2 = C_2, \dots, X_n = C_n$ qiymətlər çoxluğuna həmin sistemin həlli deyilir.

Verilmiş sistemin həlli ola da bilər, olmaya da bilər; sistemin həlli varsa, ona uyşan və ya bircə sistem, əks halda isə uyşmayan və ya bircə olmayan sistem deyilir. Tənliklər sistemi uyşan olduqda onun bir və ya birdən çox həlli ola bilər. Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olanda sistemə kvadrat sistem deyilir.

Xətti tənliklər sistemi

(1) xətti tənliklər sistemini matris tənliyi şəklində yazmaq olar.

Məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A , sağ tərəfdəki məlum ədədlərdən düzəlmiş sütun-matrisi B , axtarılan məchullardan düzəlmiş sütun-matrisi isə X ilə işarə edək:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A matrisin sütunlarının sayı X matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olduğdan, AX hasilini tapa bilərik

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

(1) tənliklər sisteminin sağ tərəfi B sütun-matrisin elementləridir və buna görə də matrislərin bərabərliyi şərtinə əsasən

$$AX = B \quad (2)$$

yazmaq olar. (2) tənliyinə matris-tənlik deyilir.

İkiməchullu iki xətti tənliklər sistemi.

Tutaq ki, ikiməchullu iki xətti tənlik sistemi verilmişdir:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Tənliklərin sağ tərəfi olan b_1 və b_2 ədədlərinin ikisi də sıfıra bərabər, yəni $b_1=b_2=0$ olarsa, onda həmin sistemə

Xətti tənliklər sistemi

bircinsli xətti tənliklər sistemi deyilir. b_1 və b_2 ədədlərinin heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircinsli olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir. Sistemə daxil olan tənliklərin hər birini ödəyən $x=x_0$, $y=y_0$ qiymətlər çoxluğuna həmin sistemin həlli deyilir.

Orta məktəbin riyaziyyat kursundan məlumdur ki, verilmiş tənliklər sistemi əvəzetmə üsulunu, məchulların yox edilməsi üsulunu, xətti çevirmə üsulunu və s.tətbiq etməklə həll olunur. Bu zaman verilmiş tənliklər sistemi onunla eynigüclü (və ya ekvivalent) olan sadə tənliklər sisteminə gətirilir və sonra da həmin sistemi həll etməklə verilmiş tənliklər sisteminin həlli tapılır.

Tənliklər sistemini xətti çevirmə üsulu ilə həll edərkən bəzən səhv mühakimə aparıldığından həmin üsul haqqında əvvəlcə əlavə məlumat verməyi lazım bilirik.

Tutaq ki,

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

sisteminin tənliklərini verilmiş λ_1 , λ_2 , μ_1 və μ_2 ədədlərinə növbə ilə vurub toplamaqla

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y) &= 0, \\ \mu_1 f_1(x,y) + \mu_2 f_2(x,y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

tənliklər sistemi alınmışdır. Bu halda deyirlər ki, (3) sistemi (2) tənliklər sistemindən xətti çevirmə vasitəsilə alınmışdır.

$$d = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$$

Xətti tənliklər sistemi

ədədinə həmin xətti çevirmənin determinantı deyilir.

Təbii bir sual qarşıya çıxır: (2) və (3) sistemləri eynigüclüdürmü?

T e o r e m.

$$d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

olarsa, onda (2) sistemi (3) sistemi ilə eynigüclüdür.

İ s b a t ı. (2) sisteminin həlli (x_0, y_0) olsun. Onda

$$f_1(x_0, y_0) = 0, f_2(x_0, y_0) = 0$$

doğru ədədi bərabərliklərdir. buradan, ixtiyari $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ və μ_2 ədədləri üçün doğru olan.

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \lambda_2 f_2(x_0, y_0) = 0,$$

$$\mu_1 f_1(x_0, y_0) + \mu_2 f_2(x_0, y_0) = 0$$

bərabərlikləri alınır ki, bu da (x_0, y_0) ədədləri cütünün (3) sisteminin həlli olduğunu göstərir.

Eyni qayda ilə də (4) şərti ödənildikdə (3) sisteminin hər bir (x_0, y_0) həlli (2) sisteminin də həlli olduğunu isbat etmək olar.

Anoloji teorem n məchullu n tənlikl sistemi haqqında da doğrudur.

Q e y d. (4) şərti ödənilmədikdə (2) və (3) sistemləri eynigüclü olmaya da bilər. Məsələn,

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 10 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

tənliklər sistemi, ondan determinantı

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

olan xətti çevirmə ilə alınan

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y - 8 = 0, \end{array} \right\} \quad (6)$$

Xətti tənliklər sistemi

$$10x + 2y - 16 = 0$$

tənliklər sistemi ilə eynigüclü deyildir. (5) sisteminin yeganə (1, 3) həlli (6) sisteminin də həllidir. Lakin (6) sisteminin (2, -2), (3, -7) və s. kimi çox (sonsuz sayda) həlləri var ki, onlar (5) sisteminin həlli deyildir.

2. Kramer üsulunun mahiyyəti.

(1) sistemini $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ olduqda həll etmək üçün onun birinci tənliyinin hər iki tərəfinə a_{22} , ikinci tənliyin hər iki tərəfini isə $(-a_{12})$ ədədinə vurub toplamaq, sonlara birinci tənliyin hər iki tərəfini (a_{21}) , ikinci tənliyin isə hər iki tərəfini a_{11} ədədinə vurub toplamaq lazımdır. Onda

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) x &= b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) x &= a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{aligned} \right\}$$

və yaxud

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y &= \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

sistemini alırıq. Buradakı ikitərtibli determinantları

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

ilə işarə etsək, sonuncu sistemi

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_1 \\ \Delta \cdot y &= \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

kimi yazmaq olar. $\Delta \neq 0$ olduğundan (1) və (7) sistemləri ekvivalentdir.

Xətti tənliklər sistemi

Qabriel Kramer — İsveçrəli riyaziyyatçı Qabriel Kramer, 1704-ci ildə Cenevrədə anadan olmuşdur. Cenevrədə riyaziyyat və fəlsəfə professoru olmuşdur.

Buna görə də, (7) sisteminin yeganə

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (8)$$

həlli (1) sisteminin də yeganə həlli olur.

(8) düsturlarına Kramer düsturları, Δ determinantına isə

(1) sisteminin determinantı deyilir.

Beləliklə, isbat etmiş oluruq ki, (1) sisteminin Δ determinantı sıfırdan fərqli olduqda həmin sistemin yeganə həlli var və bu həll (8) Kramer düsturları vasitəsilə tapılır.

Buna **Kramer qaydası** deyilir.

İndi (1) sisteminin Δ determinantı sıfır olan hala baxaq.

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Olduqda məlum teoremə görə:

$$a_{21} = \lambda a_{11}, \quad a_{22} = \lambda a_{12} \quad (9)$$

Onda (1) sisteminin ikinci tənliyinin sol tərəfi birinci tənliyin sol tərəfini λ ədədinə vurmaqla alınar:

$$a_{21}x + a_{22}y = \lambda (a_{11}x + a_{12}y). \quad (10)$$

Buradan aşağıdakı kimi nəticələr alırıq:

1. Əgər (1) sisteminin sağ tərəfindəli b_1 və b_2 ədədləri (9) münasibətinə uyğun

$$b_2 = \lambda b_1 \quad (11)$$

münasibətini ödəyərsə, onda (1) sisteminin ikinci tənliyi birinci tənliyindən λ ədədinə vurulmaqla alınar. Bu halda sistemin birinci tənliyinin hər bir həlli ikinci tənliyinin və buna görə də (1) sisteminin həlli olar.

Sistemin birinci

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (12)$$

Xətti tənliklər sistemi

tənliyinin isə sonsuz sayda həlli var: dəyişənin birinə ixtiyari qiymətlər verərək (12) tənliyindən ikinci dəyişənin qiymətlərini tapsaq, onda tapılan ədədlər (12) tənliyinin həlli olar.

Deməli, bu halda (1) sisteminin sonsuz sayda həlli var.

2. Əgər b_1 və b_2 ədədləri (11) münasibətini ödəməzsə, yəni $b_2 \neq \lambda b_1$ olarsa, onda (1) sisteminin həlli olmaz. Çünki, bu halda, sistemin birinci

$$a_{11}x + a_{12}y \equiv b_1$$

tənliyini ödəyən heç bir $x = x_0$ və $y = y_0$ ədədləri ikinci tənliyini ödəyə bilməz:

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \equiv \lambda b_1 \neq b_2.$$

dediklərimizə əsasən belə bir nəticə alırıq: (1) sisteminin determinantı sıfırdan fərqli ($\Delta \neq 0$) olduqda həmin sistemin yeganə həlli var, sistemin determinantı sıfır olduqda isə həmin sistemin ya sonsuz sayda həlli var, ya da heç bir həlli yoxdur.

Nəticə. $\Delta \neq 0$ olduqda

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

bircinsli xətti tənliklər sisteminin yeganə $x=0, y=0$ həlli (sıfır həlli) var. $\Delta=0$ olduqda isə (13) sisteminin sonsuz sayda sıfır olmayan həlli olar.

Üçməchullu üç xətti tənliklər sistemi.

Üçməchullu üç xətti tənlik sistemi

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

şəklində yazıla bilər. $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ olduqda (1) sistemindən bircinsli xətti tənliklər sistemi alınır. b_1, b_2, b_3

Xətti tənliklər sistemi

ədədlərinin heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircinsli olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir.

(1) sisteminin hər bir tənliyini doğru ədədi bərabərliyə (eyniliyə) çevirən $x=0$, $y=0$, $z=0$ qiymətlər çoxluğu həmin sistemin həlli adlanır. Sistemin həlli varsa, ona uyuşan, heç bir həlli olmadıqda isə ona uyuşmayan (uyuşan olmayan) sistem deyilir.

Verilmiş (1) sistemini həll etmək üçün həmin sistemin determinantını

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ilə, determinantın a_{ik} elementinin cəbri tamamlayıcısını isə A_{ik} ilə işarə edək. (1) sisteminin birinci tənliyini A_{11} -ə ikinci tənliyini A_{21} -ə, üçüncü tənliyini A_{31} -ə vurub, alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) \cdot x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) \cdot y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) \cdot z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

(2)

bərabərliyini alırıq. Determinantların sətir və sütun elementləri üzrə ayrılması xassəsinə görə:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$0 = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31},$$

$$0 = a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}.$$

Onda (2) bərabərliyi

$$\Delta \cdot x = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

şəklində yazılar.

Eyni qayda ilə də (1) sisteminin tənliklərini əvvəlcə uyğun olaraq A_{12} , A_{22} , A_{32} ədədlərinə, sonra da A_{13} , A_{23} , A_{33} ədədlərini vurub alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

Xətti tənliklər sistemi

$$\Delta \cdot y = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}$$

və

$$\Delta \cdot z = b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33}$$

Bərabərliklərini alırıq. Beləliklə, (1) sistemi əvəzinə

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}, \\ \Delta y &= b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}, \\ \Delta z &= b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

sistemi alınır.

Misal:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 14 \\ 10 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 60$$

$$x = \frac{20}{20} = 1; \quad y = \frac{40}{20} = 2; \quad z = \frac{60}{20} = 3$$

Xətti tənliklər sistemi

Çalışmalar:

Verilmiş xətti tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həll edin.

$$1. \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 7 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ x + y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ x + 5y - 6z = 6 \\ x + 4y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -x + 3y + 5z = 1 \\ 3x + y + 3z = 2 \\ 5x + 3y - z = -3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 4y = 5 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

Xətti tənliklər sistemi

Buradan üç matrisin hasilinin xassəsini və $A^{-1}A = I$ (burada I vahid matrisdir) olduğunu nəzərə alsaq onda

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X$$

Nəticədə, (4) düsturundan alırıq ki,

$$X = A^{-1}B \quad (5)$$

Beləliklə, isbat etdik ki, (3) matris tənliyinin həlli varsa, onda o (5) münasibəti ilə birqiymətli təyin edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (5) münasibəti ilə təyin edilən X sütunu doğrudan da (3) matris tənliyinin həllidir, yəni bu tənliyi eyniliyə çevirir. Doğrudan da, əgər X matrisi (5) münasibəti ilə təyin edilsə, onda

$$AX = A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = IB = B.$$

Deməli, əgər A matrisinin determinantı sıfırdan fərqli olarsa, onda (5) münasibəti ilə təyin edilən (3) matris tənliyinin yeganə həlli vardır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) \\ x_2 &= \frac{1}{\Delta} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) \\ &\dots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta} (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) \end{aligned} \right\}$$

Xətti tənliklər sistemi

Burada A_{ij} a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

Misal:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \quad A \cdot X = B$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$A_{11} = 3 \quad A_{21} = -1$$

$$A_{12} = -1 \quad A_{22} = 2$$

$$x = \frac{1}{5} (3 \cdot 3 - 4) = 1 \quad y = \frac{1}{5} (-1 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 1$$

Çalışmalar:

Verilmiş xətti tənliklər sistemini Matris üsulu ilə həll edin.

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = -14 \\ x + 4y = 5 \\ 5x - 3z = -12 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = -5 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 3y + 2z = 10 \\ 2x + y + z - 7 = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + y - 6z = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Xətti tənliklər sistemi

tənliyini sistemin ikinci tənliyindən tərəf-tərəfə çıxaraq. Aldığımız tənlikdə x_1 məchulu iştirak etmir:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

Yohan Karl Fridrih Qauss

(30 aprel 1777 – 23fevral 1855 Göttingen Hannover krallığı) — görkəmli alman riyaziyyatçısı, astronom və fiziki, bütün dövrlərin ən yaxşı riyaziyyatçılarından biri, "riyaziyyatın kralı" hesab olunur.

$$a_{31}$$

Sonra sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini a_{11} ədədinə vuraraq alınan tənliyi sistemin üçüncü tənliyindən tərəf-tərəfə çıxaraq. Bu mühakiməni ardıcıl tətbiq etməklə (1) sistemini

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{array} \right. \quad (2)$$

şəklində sistemə gətirmək olar. Aldığımız yeni sistemin 2-ci, 3-cü və s. tənzimləmələrindən istifadə etməklə yuxarıda göstərdiyimiz üsulla X_2 məchulunu da yox etmək olar. Bu mühakiməni ardıcıl olaraq tətbiq etməklə (1) sistemini ona ekvivalent olan

Xətti tənliklər sistemi

tənliklər sisteminə gətirmək olar. (3) sisteminə pilləvari (və ya pillələr şəklində) sistem deyilir. Sonuncu tənlikdən X_n məchulu tapılır, sonra yuxarı qalxaraq X_{n-1} və bu qayda ilə davam edərək birinci tənlikdən X_1 məchulunu tapırıq. (1) sistemini Qauss üsulu ilə həll edərkən tənliklər üzərində aparılan əməlləri bəzən onların əmsallarından düzəlmiş

matrisi üzərində aparmaq daha münasib olur. Belə matris genişlənmiş matris adlanır.

[illegible]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1) sistemində məchulların və tənliklərin sayı üst-üstə düşür. Qauss üsulu daha ümumi halda tətbiq edilə bilər. Məchulların sayı sətirlərin sayından fərqli olduqda da Qauss üsulu tətbiq edilə bilər. Sistemin matrisi A ilə işarə edilir, məchulların əmsallarından ibarətdir. (3) münasibətinə sistemin matris şəkilində ifadəsi deyilir. Ümumiliyi azaltmadan fərz edək ki, $a_{11} \neq 0$ əks halda hansı sətirdə x_1 in əmsalı sıfırdan fərqlidirsə, həmin sətirlə birinci sətirin yerini dəyişməliyik. Birinci sətiri

– $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ədədinə vurub, 2-ci sətir üzərinə əlavə etsək, 2-ci sətirdə x_1 -in əmsalı 0 olar. 2-cidən sonra gələn bütün sətirlərdə x_1 -in əmsalını 0-a çevirə bilərik, nəticədə aşağıdakı sistemi alırıq.

Sonuncu sistemdən görünür ki, x məchulu yalnız 1 sətirdə iştirak edir. Deməli sətirlərdə $n-1$ sayda məchul vardır. Ona

Xətti tənliklər sistemi

görədə $n-1$ sayda məchullu sitemə əvvəlki əməliyyatı analoji qaydada tətbiq edə bilir. Başqa sözlə $a_{22}' \neq 0$ qəbul etməklə 11-dən sonra gələn sətirlərin hamısından x_2 məchulunu yox edə bilərik.

[illegible]

Analoji qaydada 4-cü sətirdən başlayaraq x_3 məchulunu yox edə bilərik və s. Sonuncu sətirə deyilənləri tətbiq etsək nəticədə aşağıdakı sistemi alırıq.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 ... + a^{(n)}_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (6)$$

Bura qədərki əməliyyat Qauss üsulunun düz gedişi adlanır. Bu üsulda məchullar növbə ilə yox edildiyindən həmin üsula həm

Xətti tənliklər sistemi

də məchulu yox etmə üsulu deyilir. (6) üçün aşağıdakı variantlar ola bilər.

1. $0 \cdot x_n = 0$ ola bilər. Bu halda sistemin sonuncu həlli var. əgər sistemin determinantı sıfıra bərabərdirsə, onda (6)-nın axırıncı sətirində x_n -in əmsalı sıfıra bərabər alınır.

2. $0 \cdot x_n = 1$ Bu halda (1)sitemin həlli yoxdur (1) (6) sistemləri bir-birilə ekvivalentdir

3. $a_{nn}^{(n)} \neq 0$ Bu halda sistemin həlli yeganədir. Həmin yeganə həlli tapmaq üçün (6)-nın sonuncu sətirlərindən başlayaraq məchulları tərs nizamla tapmaq lazımdır. Bundan sonra gələn əməliyyatları birlikdə Qauss üsulunun tərs gedişi deyilir.

$x_n = \frac{b_n^k}{a_{nn}^k}$ x_n -in tapılmış əvvəlki sətirlərdə yazmaqla x_{n-1} tapırıq. Onun qiymətin əvvəlki sətirlərdə nəzərə alsaq $x_{n-1}, x_{n-2}, x_4, x_3, x_2, x_1$ tapırıq.

Qeyd 1: Qauss üsulu üçün yazılmış alqoritmdə yuxarıda təsvir etdiyimiz kimidir. Məchulların sayı az olanda həmin alqoritmədən istifadə etmədikdə sistemin əmsallarına asılı olaraq əməliyyat ardıcılığı dəyişə bilər. Bu halda da məchullar bir-bir tapılır (hər hansı müvafiq nizamla).

Qeyd 2: (6) sisteminin matrisinin dioqanal elementlərdən iştirak edən Qauss üsulu ilə həm də (1) sisteminin baş determinantı hesablamaq mümkündür. Qauss üsulunun tərs gedişinə qədər yəni (6) sistemini alana qədər sətirlər üzərində

Xətti tənliklər sistemi

elə elementar çevirmələr aparmışıq ki, sistemin baş determinantının ədədi qiyməti sabit qalıb yəni

$$D = a_{11} + a_{22}' + a_{33}'' + \dots + a_{nn}^{(n)}$$

Misal:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 7 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ən əvvəl tərs matrisinin düzgün olduğunu yoxlayaq

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin matrisinin tapılmasına görə həmin sistemin həllini tərs matris vasitəsilə yazı bilərik.

$$x = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & -6 \\ -7 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = y = z$$

İndi isə sistemi Qauss üsulu ilə həll edək

Xətti tənliklər sistemi

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 7 \\ x - y = 0 \\ 0 + y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3z = 7 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot y - z = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Sonuncu sistemin birinci sətirində z tapılır. $z=1$ $x=y=1$. verilmiş misalı Kramer üsulu ilə həll edək

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 3 - 2 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = 1$$

Qeyd 3: XCTS-nin tərs matris üsulu ilə həlli, Kramer üsulu, Qauss üsulu dəqiq üsullardır. Lakin məchulların sayı çox olduqda hesablama xətasının mövcud olması üçün dəqiq həll tapılmaz. Ona görə də həmin üsullarla tapılan həlli elə təqribi həll qəbul edərək dəqiq həllə kafi qədər yaxın düşmək üçün üsullar təklif olunmuşdur. Kramer $n \geq 4$

Xətti tənliklər sistemi

olduqda əlverişli deyil. Qauss üsulu dəqiq üsulu olsa da hesablama xətasının olması nəticəsində dəqiq həll tapılmaz. Digər tərəfdən praktiki məsələlərdə sistemin əmsalları dəqiq məlum olmur. Ona görə də məchulların sayı çox olduqda sistemin dəqiq həllinin axtarmağın mənası olmur.

Çalışmalar:

Verilmiş xətti tənliklər sistemini Qaus üsulu ilə həll edin.

$$1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 5x - y = 3 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3y - 5z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - 4z = -11 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - y - 2z = 7 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ x + y - 5z = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 4x + y - 4z = 5 \\ 2x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 5y + 4z + 3k = 1 \\ 2x - y + 2z - k = 0 \\ 5x + 3y + 8z + k = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

İkitərtibli ayrılar

III FƏSİL

İki tərtibli ayrılar

§ 1. Çevrə, Ellips və onların kanonik (sadə) tənlikləri

Çevrə

Müstəvi üzərində mərkəz adlanan nöqtədən bərabər uzaqlıqda yerləşən nöqtələrin həndəsi yeri **çevrə** adlanır.

Çevrənin tənliyini çıxarmaq üçün düzbucaqlı Oxy koordinat sistemində mərkəzi koordinat başlanğıcında olan r radiuslu çevrə üzərində ixtiyari bir $M(x;y)$ nöqtəsi götürək (şəkil.1). Onda iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən

$$OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Və ya hər iki tərəfi kvadrata yüksəltsek $x^2 + y^2 = r^2$ (1)

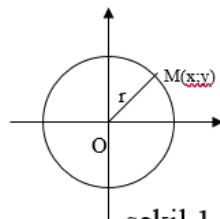
bərabərliyini alırıq. M nöqtəsi çevrə üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtə olduğundan deyə bilərik ki, çevrə üzərindəki bütün nöqtələrin koordinatları (1) tənliyini ödəyir. (1) tənliyi mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrə tənliyi adlanır.

Mərkəzi $O_1(a;b)$ nöqtəsində yerləşən çevrənin tənliyini çıxarmaq üçün koordinat başlanğıcını,

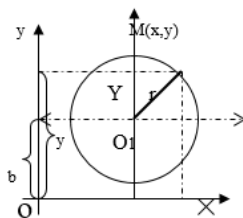
oxlar üzərindəki istiqaməti dəyişmədən, paralel olaraq O_1 nöqtəsinə köçürək (şəkil.2). Alınan yeni O_1XY koordinat

sisteminə nəzərən verilən çevrənin mərkəzi O_1 koordinat başlanğıcında olduğuna görə onun tənliyini

$$X^2 + Y^2 = r^2 \quad (2)$$



şəkil.1.



şəkil.2.

İkitərtibli ayrılar

kimi yazmaq olar. Burada $X = x - a$, $Y = y - b$ yazsaq, alarıq:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (3)$$

Buna mərkəzi $O_1(a, b)$ nöqtəsində olan çevrə tənliyi deyilir.

(3) tənliyindəki mötərizələri açıb

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

ifadəsində $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$ işarələrini qəbul etsək, alarıq:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4)$$

göründüyü kimi çevrə tənliyi cari (x, y) koordinatlarına nəzərən ikidərəcəli tənlikdir. (x, y) koordinatlarından asılı ikidərəcəli tənliklər isə ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

(4) və (5) tənliklərinin müqayisəsindən görünür ki, (5) tənliyinin çevrə tənliyi olması üçün $A = C$ və $B = 0$ olmalıdır.

Deməli, (5) tənliyinin çevrə tənliyi olması üçün, oradakı x^2 və y^2 -nin əmsalları eyni, xy qarışıq hasilinin əmsalı isə sıfıra bərabər olmalıdır.

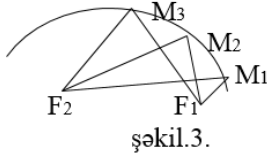
Ellips və onun tənliyi.

Fokus adlanan F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri cəmi sabit kəmiyyət olan nöqtələrin həndəsi yerinə **ellips** deyilir.

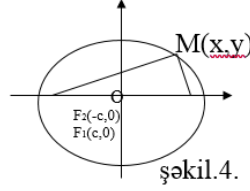
Ellips üzərində M_1, M_2, M_3 və s. nöqtələrini götürsək (şəkil.3) tərifə görə

$|F_1M_1| + |F_2M_1| = |F_1M_2| + |F_2M_2| = |F_1M_3| + |F_2M_3| = \dots = \text{const}$ yazmaq olar.

İkitərtibli əyrilər



şəkil.3.



şəkil.4.

Ellipsin tənliyini çıxarmaq üçün düzbucaqlı Oxy koordinat sistemini aşağıdakı kimi seçək.

F_1 və F_2 fokus nöqtələrindən keçən düz xətti Ox oxu kimi, $F_2 F_1$ parçasının orta nöqtəsindən ona perpendikulyar keçən düz xətti isə Oy oxu kimi götürək (şəkil.4). Onda,

$F_2 F_1 = 2c$ ilə işarə etsək, fokus nöqtələrinin koordinatları $F_2 (-c,0)$ və $F_1 (c,0)$ olar. Ellips üzərində ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsi götürüb, tərifdə göstərilən sabit kəmiyyəti $2a$ ilə işarə etsək

$$|F_1 M| + |F_2 M| = 2a$$

və ya iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

(1)

yazmaq olar. Bu seçilmiş koordinat sistemində axtarılan ellipsin tənliyidir. (1) bərabərliyində irriasionalıqdan azad olub, alınan ifadəni sadələşdirsək

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada $a > c$ olduğuna görə $b^2 = a^2 - c^2$ ilə işarə edilmişdir.

(2) tənliyinə ellipsin kanonik tənliyi deyilir. Bu tənliyə əsasən ellipsin formasını araşdıraraq. (2) tənliyindən

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

bərabərsizliklərinə əsasən alırıq:

$$-a < x < a, \quad -b < y < b \quad (3)$$

İkitərtibli ayrılar

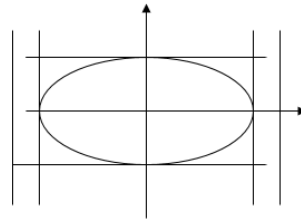
Bu o deməkdir ki, ellips (3) bərabərsizlikləri ilə təyin olunan düzbucaqlı daxilində yerləşir (şəkil.5). Digər tərəfdən (2)

tənliyinə cari koordinatların yalnız kvadratları daxil olduğundan, aydındır ki, $M(x,y)$ nöqtəsi ellips üzərində olduqda $(-x,y)$ $(-x,-y)$ və $(x,-y)$ nöqtələri də ellips üzərində olar. Deməli, ellips koordinat oxlarına nəzərən simmetrik əyridir. Buna görə də onun birinci rübdə yerləşən hissəsini, yəni (2) tənliyindən alınan

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (4)$$

funksiyanın qrafikini qurmaq kifayətdir. (4) ifadəsindən görünür ki, $x = a$ olduqda $y = 0$, $x = 0$ olduqda isə $y = b$ olur və x dəyişəni sıfırdan a -ya kimi artırdıqda y dəyişəni b -dən sıfıra kimi azalır.

Bunlara əsasən əvvəlcə ellipsin birinci rübdə yerləşən A_1B_1 qövsü, sonra isə koordinat oxlarının simmetriya oxları olduğunu nəzərə almaqla bütün ellips qurulur (şəkil.5).



şəkil.5.

Simmetriya oxlarının kəsişdiyi O nöqtəsi ellipsin mərkəzi, fokus nöqtələrindən keçən simmetriya oxu isə ellipsin fokal oxu adlanır.

Ellipsin simmetriya oxları ilə kəsişdiyi A_1, A_2, B_1 və B_2 nöqtələri ellipsin təpələri, A_1A_2 və B_1B_2 parçaları isə, uyğun olaraq, ellipsin böyük və kiçik oxları adlanır. Böyük oxun uzunluğu $2a$ kiçik oxun uzunluğu $2b$ -dir. a və b ədədləri, uyğun olaraq, ellipsin böyük və kiçik yarımoxları adlanır.

Ellipsin forması $\frac{b}{a}$ nisbətindən və ya ellipsin ekssentrisiteti adlanan

İkitərtibli əyrilər

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (5)$$

kəmiyyətindən asılıdır. $0 < c < a$ olduğundan $0 < e < 1$ olur. (2) tənliyi $b = a$ (yəni $e = 0$) olduqda

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (6) \text{ çevrə}$$

tənliyinə çevrilir. Deməli, çevrə ellipsin xüsusi halıdır. $b = 0$ (yəni $e = 1$) olduqda isə ellips böyük oxa çevrilir. Ellipsin fokal oxuna perpendikulyar olan $x = \frac{a}{e}$ və $x = -\frac{a}{e}$ düz xətləri onun direktrisləri adlanır. $0 < e < 1$ olduğundan $\frac{a}{e} > a$ olur. Deməli, ellipsin direktrislərinin biri A_1 təpəsinin sağından, digəri isə A_2 təpəsinin solundan keçir və ellipsi kəsmirlər.

İki tərtibli əyrilər. Çevrə, Ellips və onların kanonik (sadə) tənlikləri:

1. $x^2 + y^2 + 4y = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzinin koordinatlarını tapın.
2. Mərkəzi $C(2; -3)$ nöqtəsində, radiusu $r = 7$ olan çevrənin kanonik tənliyini yazın.
3. $M(2; 6)$ nöqtəsi, mərkəzi $C(-1; 2)$ nöqtəsində olan çevrə üzərindədir. Bu çevrənin kanonik tənliyini yazın.
4. Aşağıdakı verilənlərə görə ellipsin kanonik tənliyini

yazın:

a) böyük yarımox $a = 5$, fokus nöqtələri arasındakı məsafə 8-ə bərabərdir.

b) fokus nöqtələri arasındakı məsafə 6-ya eksentristeti $\frac{3}{5}$ -ə bərabərdir.

5. $9x^2 + 25y^2 = 225$; Ellipsin oxlarını və eksentristetini tapın.

6. $x^2 + 4y^2 = 1$ ellipsinin yarımoxlarını, fokus nöqtələrinin koordinatlarını və eksentristetini tapın.

7. $16x^2 + 25y^2 = 400$; Ellipsin yarımoxlarını, eksentristetini və fokus nöqtələrini tapın.

İkitərtibli ayrılar

8 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; Ellipsin foks nöqtələrini və direktrisinin tənliklərini tapın .

9 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; Ellipsin oxlarını və eksentristetini tapın .

10. Direktrisləri arasındakı məsafə foks nöqtələri arasındakı məsafədən 3 dəfə böyük olan ellipsin eksentristetini tapın.

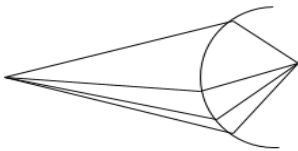
§ 2. Hiperbola, Parabola və onların kanonik (sadə) tənlikləri

Hiperbola və onun tənliyi.

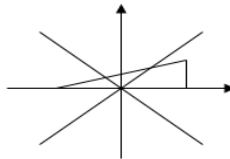
Fokus adlanan F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri fərqi mütləq qiymətcə sabit kəmiyyət olan nöqtələrin həndəsi yerinə hiperbola deyilir.

Hiperbola üzərində M_1 , M_2 , M_3 və s. nöqtələrini götürsək (şəkil.6.) , onda tərifə görə

$$\begin{aligned} |F_1 M_1 - F_2 M_1| &= |F_1 M_2 - F_2 M_2| = |F_1 M_3 - F_2 M_3| \\ &= \dots = \text{const yazmaq olar.} \end{aligned}$$



şəkil.6.



şəkil.7.

Hiperbolanın tənliyini çıxarmaq üçün koordinat sistemini Ellips və onun tənliyində olduğu kimi seçib $F_2F_1 = 2c$ ilə işarə etsək, fokus nöqtələrinin koordinatları $F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$ olar (şəkil.7.). Burada da hiperbola ixtiyari $M(x,y)$

İkitərtibli ayrılar

nöqtəsi götürüb, tərifi göstərilən sabit kəmiyyəti $2a$ ilə işarə etsək

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

və ya iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad (1)$$

yazmaq olar. Bu seçilmiş koordinat sistemində axtarılan hiperbolanın tənliyidir. (1) bərabərliyində irriasionallıqdan azad olub alınan ifadəni sadələşdirsək

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada $c > a$ olduğundan $b^2 = c^2 - a^2$ ilə işarə edilmişdir.

(2) tənliyinə hiperbolanın kanonik tənliyi deyilir. İndi bu tənliyə əsasən hiperbolanın formasını araşdıraraq.

(2) tənliyindən görünür ki, $y = 0$ olduqda $x = \pm a$ olur, yəni hiperbola absis oxunu $A_1(a, 0)$ və $A_2(-a, 0)$ nöqtələrində kəsir. Bu nöqtələrə hiperbolanın təpələri deyilir. $x = 0$ olduqda isə

$y^2 = -b^2$ ($b \in \mathbb{R}$, $y = \pm bi \in \mathbb{R}$) olur, yəni hiperbola ordinat oxunu heç bir nöqtədə kəsmir.

Ellips kimi hiperbola da koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olduğundan onun birinci rübdə yerləşən hissəsini qurmaq kifayətdir.

(1) tənliyindən aydındır ki,

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1, \quad x^2 \geq a^2, \quad |x| \geq a,$$

yəni şaquli $x = -a$ və $x = a$ düz xətləri arasındakı zolaqda hiperbolanın heç bir nöqtəsi yerləşmir. (2) bərabərliyindən

$$y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{b}{a} \cdot x = Y$$

bərabərsizliyini yazıb x -i qeyri məhdud olaraq artırısaq hiperbola əyrisi $Y = \frac{b}{a} \cdot x$ düz xəttinə yaxınlaşar. Bu

İkitərtibli ayrılar

$Y = \frac{b}{a} \cdot x$ düz xəttinə hiperbolanın asimptotu deyilir.

Doğurdan da

$$Y - y = \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

bərabərliyindən x -i qeyri-məhdud olaraq artırısaq ($Y - y$) fərqi sıfıra yaxınlaşır.

Deyilənlərə əsasən əvvəlcə hiperbolanın birinci rübdə yerləşən hissəsi, sonra isə, koordinat oxlarının simmetriya oxları olduğunu nəzərə almaqla, bütün hiperbola qurulur (şəkil.8).

Simmetriya oxlarının O nöqtəsinə hiperbolanın mərkəzi, fokus nöqtələrindən keçən simmetriya oxuna isə hiperbolanın fokal oxu deyilir.

8-ci şəkildən görünür ki, hiperbola əyrisi ortaq nöqtəsi olmayan iki hissədən ibarətdir və onun tənlikləri

$$y = \frac{b}{a} \cdot x, y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

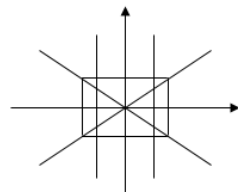
olan iki asimptotu vardır. Uzunluqları $2a$ və $2b$ -yə bərabər olan A_1A_2 və B_1B_2 parçalarına, uyğun olaraq, hiperbolanın həqiqi və xəyali oxları deyilir. a və b ədədləri uyğun olaraq hiperbolanın həqiqi və xəyali yarımoxları adlanır. Tərəfləri

$2a$ və $2b$ -yə bərabər olan $C_1C_2C_3C_4$ düzbucaqlısına hiperbolanın

(şəkil.8).

düzbucaqlısı deyilir 8-ci şəkildən görünür

ki, hiperbola A_1 və A_2 təpə nöqtələrində əsas düzbucalının C_1C_4 və C_2C_3 qarşı tərəflərinə toxunur və onun asimptotları əsas düzbucaqlının diaqonalları üzrə yönəlir. Əsas düzbucaqlı qurulduqdan sonra hiperbolanın qurulması asanlaşır.



əsas

İkitərtibli ayrılar

Hiperbolanın forması b/a nisbətindən və a onun eksentrisiteti adlanan

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (3)$$

kəmiyyətindən asılıdır $c > a$ olduğundan $e > 1$ olur. $b = a$ olduqda (2) tənliyi

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (4)$$

bərabərtərəfli hiperbola tənliyinə çevrilir. Bərabərtərəfli hiperbolanın asimptotları bir-birinə perpendikulyar olub, simmetriya oxları arasındakı bucaqları yarıya bölür.

Hiperbolanın fokal oxuna perpendikulyar olan $x = -a/e$ və $x = a/e$ düz xətləri onun direktrisləri adlanır. $e > 1$ olduğundan $a/e < a$ olur. Deməli hiperbolanın direktrisləri onun təpə nöqtələri ilə koordinat başlanğıcı arasından keçir.

Tənlikləri

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{və} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

olan hiperbolalar qoşma hiperbolalar adlanır. Bu hiperbolaların asimptotları üst-üstə düşməklə bərabər birinin həqiqi oxu digərinin xəyali oxu, xəyali oxu isə həqiqi oxu olur.

Parabola

Parabola (yun. παραβολή, tətbiq) — kvadratik funksiyanın ($y = x^2$) qrafikinə verilən addır. Parabola Hiperbolanın tərsidir. Parabola dedikdə müstəvinin elə nöqtələrinin həndəsi yeri başa düşülür ki, bu nöqtələrin müstəvinin verilmiş düz xəttindən və verilmiş nöqtəsində olan məsafələri bir-birinə bərabər olsun. Müstəvinin verilmiş bu düz xəttinə parabolanın direktirisi, verilmiş nöqtəsinə isə

İkitərtibli ayrılar

parabolanın fokusu deyilir. Parabolanın fokusunu adətən F ilə işarə edirlər.

Parabolanın tənliyini çıxarmaq üçün F fokusunun absis oxu üzərində yerləşdiyini və d direktrisinin həmin oxa $\perp$ olduğunu qəbul edək. Fokusla direktris arasındakı məsafə $FD=p$ olsun. Fərz edək ki, koordinat başlanğıcı FD parçasının orta nöqtəsində yerləşir. Onda

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad D\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$$

və parabolun $\forall M(x, y)$ nöqtəsi üçün ;

$$MF=MN$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Buradan

$$x^2 - xp + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + xp + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

və yaxud

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

P kəmiyyəti parabolun parametri adlanır. Parabola əyrisi absis oxuna nəzərən simmetrikdir. Parabola əyrisinin 1 simmetriya oxu var. O nöqtəsi onun təpə nöqtəsi, OX oxu isə onun fakal oxu adlanır.

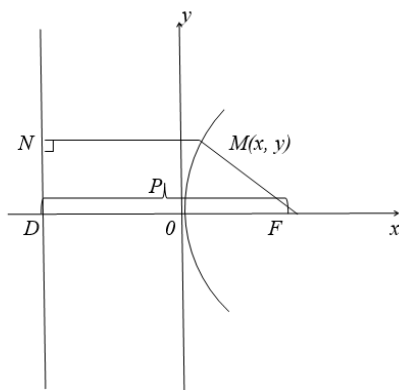
Bir parabolası ilə ordinat oxuna nəzərən simmetrik olan parabola

$$y^2 = -2px$$

tənliyi ilə təyin olunur.

İkitərtibli əyrilər

(1) tənliyinə **parabolanın kanonik tənliyi** deyilir.



İki tərtibli əyrilər. Hiperbola, Parabola və onların kanonik (sadə) tənlikləri:

1. $y = \pm 2x$ düz xətləri hiperbolanın asimptotlarıdır. $(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2})$ nöqtəsi isə həmin hiperbola üzərindədir. Bu hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.
2. Aşağıdakı verilənlərə görə hiperbolanın kanonik tənliyini yazın:
 - a) fokuslar arasındakı məsafə $2c=10$, təpə nöqtələri arasındakı məsafə isə $2a=8$ -dir.
 - b) həqiqi yarımoxu $a=2\sqrt{5}$ -ə, eksentristeti $e=\sqrt{1,2}$ -yə bərabərdir.
3. $9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbolası üzərində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtədən sol fokusa qədər olan məsafə, sağ fokusa qədər olan məsafədən 2 dəfə kiçik olsun.
4. Aşağıdakı verilənlərə görə parabolanın kanonik tənliyini yazın:

İkitərtibli ayrılar

- a) $(0;0)$, $(1;-3)$ nöqtələrindən keçir və absis oxuna nəzərən simmetrikdir.
- b) $(0;0)$, $(2;-4)$ nöqtələrindən keçir və ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.
- c) təpəsi koordinat başlanğıcında , fokus nöqtəsi isə $F(0;-3)$ nöqtəsindədir.
5. $y^2=8x$ parabolası üzərində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtədən həmin parabolanın direktisinə qədər olan məsafə 4-ə bərabər olsun.
6. $16x^2 - 9y^2 = 144$; Hiperbolanın oxlarını və eksentristetini tapın .
7. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; Hiperbolanın yarımoxlarını və foks nöqtələrini tapın .
8. $y^2 = 20x$; Parabolanın direktisinin tənliyini və foks nöqrəsini tapın.
9. Foks nöqtəsi $F(4;0)$ nöqtəsi və təpəsi koordinat başlanğıcında olan parabolanın tənliyini yazın.
10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; Hiperbolanın yarımoxlarını, eksentristetini və foks nöqtələrini tapın .
11. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; Hiperbolanın oxlarını və foks nöqtələrini tapın .
12. $24x^2 - 25y^2 = 600$. Hiperbolanın yarımoxlarını və eksentristetini tapın .
13. Fokus nöqtələri absis oxu üzərində koordinat başlanğıcına simmetrik , foks nöqtələri arasındakı məsafə $2c=6$ və eksentristeti $e=\frac{3}{2}$ olan hiperbolanın tənliyini tapın.

Funksiyanın limiti

IV FƏSİL

Funksiyanın limiti.

§ 1. Funksiyanın limiti. Limiti olan funksiyanın xassələri. Limitlərin hesablanması. Qeyri müəyyənliklərin açılışı, Lopital qaydası.

Funksiyanın limiti

Tərif 1. X çoxluğunun a -ya yığılan istənilən

$$\{x_n\} (x_n \neq a, n = 1, 2, \dots)$$

nöqtələri ardıcılığına $f(x)$ funksiyanının uyğun olan

$$\{f(x_n)\}$$

qiymətləri ardıcılığının hamısı eyni bir A ədədinə yığıldıqda, həmin A ədədinə $x \rightarrow a$ şərtində $f(x)$ funksiyanının limiti deyilir.

Aydınır ki, a -ya yığılan heç olmazsa iki

$$\{x'_n\} \quad \{x''_n\}$$

ardıcılığına $f(x)$ funksiyanının

$$\{f(x'_n)\} \quad \vee \quad \{f(x''_n)\}$$

uyğun qiymətləri ardıcılıqları müxtəlif limitlərə yığılarsa, onda $f(x)$ funksiyanının $x=a$ nöqtəsində limiti yoxdur. Funksiyanın nöqtədə limitinin başqa tərfi də vardır.

Məşhur fransız riyaziyyatçısı olan **Augusto Luis Koşi** Bastiliyanın işğalından sonra Parisdə 21 avqust 1789-cu ildə anadan olub. Limit anlayışının sisteməlik tətbiqinə əsaslanan riyazi analizin klassik kursunun müəllifidir.

Funksiyanın limiti

Analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin əsasını qoyanlardan biridir.

Tərif 2. Tutaq ki, sonlu a və A ədədləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi varki, x -in X çoxluğundan götürülmüş və

$$0 < |x - a| < \delta \quad (1)$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (2)$$

münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə $x \rightarrow a$ şərtində $f(x)$ **funksiyanın limiti** deyilir.

Qeyd edək ki, A ədədi $x \rightarrow a$ şərtində $f(x)$ funksiyasının limiti olduqda (2) bərabərsizliyinin $x=a$ qiymətində ödənilib ödənilməməsinin heç bir əhəmiyyəti yoxdur. $f(x)$ funksiyası $x=a$ nöqtəsində təyin olunduqda isə onun həmin nöqtədə limiti xüsusi $f(x)$ qiymətinə bərabər olada bilər, olmayada bilər.

Funksiya limitinin birinci tərifinə “ limitin ardıcılıq dilində tərfi ” (və ya Heyns mənada tərfi) , ikinci tərifinə isə

“ limitin ε, δ dilində tərfi ” (və ya **Koşi** mənada tərfi) deyilir.

Limitlər haqqında əsas teoremlər.

Teorem 1. Sonlu limitləri olan sonlu sayda $f_k(x)$ ($k=1,2,...,n$) funksiyalarının cəminin limiti onların limitləri cəminə bərabərdir. (1)

Teorem 2. Sonlu limitləri olan sonlu sayda $f_k(x)$ ($k=1,2,...,n$) funksiyalarının hasilinin limiti onların limitləri hasilinə bərabərdir. (2)

Funksiyanın limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \prod_{k=1}^n f_k(x) = \prod_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \quad (2)$$

Sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]$$

Teorem 3. $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyanlarının sonlu limitləri varsa və $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$ olarsa, onların nisbətinin limiti limitlərinin nisbətinə bərabərdir;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)}$$

Məşhur limitlər.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{ədədi.}$$

Tərif . $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dəyişən kəmiyyətinin $n \rightarrow \infty$ şərtində limitinə e ədədi deyilir.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e ədədi bərabərsizliyini ödəyir.

e ədədi $2 \leq e \leq 3$

$e \approx 2,7182818284$

Funksiyanın kəsilməzliyi. Nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyi.

Funksiyanın limiti

Tərif 1. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x -in $|x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu halda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir.

Parçada kəsilməz funksiyanın bəzi xassələri.

Xassə 1. (Veyerştrasın birinci teoremi) Sonlu $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçada məhduddur.

Xassə 2. (Veyerştrasın ikinci teoremi) Sonlu $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası bu parçanın heç olmasa bir α nöqtəsində özünün həmin parçadakı dəqiq aşağı sərhəddini, heç olmasa bir β nöqtəsində isə dəqiq yuxarı sərhəddini alır, yəni

$$f(a) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m_0, \quad f(b) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M_0$$

(1)

Xassə 3. $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $y = f(x)$ funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda a və b nöqtələri arasında yerləşən ən azı bir $C(a < c < b)$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $f(x)$ funksiyası sıfıra çevrilir; $f(c) = 0$

Xassə 4. $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $y = f(x)$ funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində bərabər olmayan $A = f(a) \neq B = f(b)$ qiymətlərini alırsa, onda həmin A və B ədədləri arasında yerləşən hər bir c ədədi üçün $[a, b]$ parçasında yerləşən ən azı bir ξ nöqtəsi var ki, $f(\xi) = c$ olar.

Funksiyanın limiti

Karl Teodor Vilhelm Veyerştrass (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 31 oktyabr 1815 – 10 fevral 1897)—
alman riyaziyyatçısı. "Müasir analizin atası" hesab olunur.
Onun funksiyanın kəsilməzliyi haqda Veyerştrass teoremi vardır.

Xəssə 5. Məhdud və qapalı X çoxluğunda kəsilməyən

$f(x)$ funksiyaının $f(x)$ qiymətləri çoxluğu məhdud və qapalı çoxluqdur, yəni məhdud və qapalı X çoxluğunda kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin çoxluğu məhdud və qapalı $f(X)$ çoxluğuna inikas etdirir.

Tərs funksiyanın kəsilməzliyi.

Teorem . $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməyən və artan (ya da azalan) $y=f(x)$ funksiyaının tərs funksiyası olan $x=\varphi(y)$ funksiyası $[c, d]$ ($c=f(a), d=f(b)$) parçasında kəsilməyəndir .

Kantor teoreminin söylənilməsi və izah edilməsi.

Teorem . Parçada kəsilməyən funksiya həmin parçada müntəzəm kəsilməyəndir.

Deməli funksiyanın parçada kəsilməzliyi anlayışı ilə parçada müntəzəm kəsilməzliyi anlayışı eynidir. Lakin bu xəssə interval və yarıminterval üçün doğru deyildir.

Məsələn; $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyası $(0,1)$ intervalında kəsilməyəndir, lakin həmin intervalında müntəzəm kəsilməyən deyildir.

Teorem 2. Əgər $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$ ($x \rightarrow a$), $\beta(x) \approx \beta_1(x)$ ($x \rightarrow a$) və $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A$ ($x \rightarrow a$) olarsa, onda

Funksiyanın limiti

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \rightarrow A \quad (x \rightarrow a).$$

Doğrudan da, $x \rightarrow a$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \log_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = 1 \cdot A \cdot 1 = A.$$

Bu teorem göstərir ki, iki funksiya nisbətinin limitini hesabladığımızda, onları uyğun olaraq ekvivalent funksiyalarla əvəz etsək limitin qiyməti dəyişməz.

Qeyri-müəyyənliklərin açılışı, Lopital qaydası.

$\frac{0}{0}$ şəkildə qeyri-müəyyənliyin açılışı.

Teorem 1. (Lopital qaydası.) Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $x=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsini müstəsna olmaqla) təyin olunmuş, diferensiallanan,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

və $\varphi'(x) \neq 0$ (a nöqtəsi həmin ətrafında) şərtlərini ödəyən funksiyalardır. Əgər funksiyaların törəmələri nisbətinin

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (2)$$

Limiti varsa, onda funksiyalarının özlərinin də nisbətinin limiti var və həmin ədədə bərabərdir;

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (3)$$

Lopital qaydası (teoremi) (həmçinin Bernulli — Lopital qaydası) — funksiyaların limitinin tapılması metodudur. Bu metod ən çox və qeyri-müəyyənliklərinin tapılmasında istifadə olunur. Metodu əsaslandıran teorem

Funksiyanın limiti

iddia edir ki, bəzi şərtlərdə funksiyaların əlaqəsinin limiti onların törəmələri limitinə bərabərdir. Qeyri-müəyyənliklərin bu cür açılış üsulu 1696-cı ildə müəllifi Giyom Lopital olan "Analyse des Infiniment Petits" dərsliyində dərc edilmişdi. Metodu ilk kəşf edən İohan Bernulli məktubunda Lopitala bu haqda bildirmişdi.

$\frac{\infty}{\infty}$

şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı.

Teorem 2. (Lopital qaydası.) Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $x=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsi müstəsna olmaqla) təyin olunmuş, diferensiallanan və $\varphi'(x) \neq 0$ (a nöqtəsi həmin ətrafında) şərtlərini ödəyən funksiyalardır;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty \quad (4)$$

Əgər funksiyaların törəmələri nisbətinin

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (5)$$

limiti varsa, onda funksiyaların özlərinin də nisbətinin limiti var və həmin ədədə bərabərdir ;

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (6)$$

Taylor düsturu.

Tutaq ki,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0) \quad (1)$$

n dərəcəli çoxhədli və a hər hansı həqiqi ədəddir. $P(x)$ çoxhədlisini həmişə $x-a$ fərqlinin qüvvətlərinə görə yazmaq olar.

Taylor teoremi — riyaziyyatda törəməsi bilinən bir funksiya bir nöqtə ətrafında, əmsalları sadəcə funksiyanın

Funksiyanın limiti

o nöqtədəki törəməsinə bağlı olan polinom şəklində ardıcılıq əmələ gətirən nəticədir. Teorem yaxınlaşdırma hesablamalarındakı xəta payına baxmayaraq, dəqiq nəticələr də verə bilər. Brook Teylor adlı riyaziyyatçının 1712-ci ildə etdiyi çalışmaları səbəbilə adı bu şəkildə adlanan teoremin həqiqətdə bundan 41 il əvvəl (1671-ci ildə) Ceyms Qreqori (James Gregory) tərəfindən kəşf edildiyi bilinir.

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (2)$$

bərabərliyinə çoxhədli üçün Teylor düsturu deyilir $a=0$ olduqda Teylor düsturunun xüsusi halını alırıq ;

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (3)$$

Bu düstura çoxhədli üçün **Makloren düsturu** deyilir.

Funksiyanın limiti. Limiti olan funksiyanın xassələri. Limitlərin hesablanması. Qeyri- müəyyənliklərin açılışı , Lopital qaydası.

Limitləri həll edin:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{tg^2 x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{x^2}$$

Funksiyanin limiti

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x + 1}{3x + 2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

§ 1. Törəmənin fiziki və həndəsi mənası. Törəmə haqqında əsas teoremlər. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi. İkinci tərtib törəmə
Funksiyanın törəməsi.

Tərif 1. Əgər $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

nisbətinin sonlu limiti varsa, onda həmin limitə $y=f(x)$ funksiyanın x nöqtəsində törəməsi deyilir.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx}$$

Verilmiş x nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyilir. (a, b) intervalının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin intervalda diferensiallanan funksiya adlanır.

Funksiyanın törəməsini tapmaq əməlinə həmin **funksiyanın diferensiallanması** deyilir.

Misal 1. $f(x)=x$ funksiyanın törəməsi vahidə bərabərdir.

Bunu isbat etmək üçün arqumentin verilmiş Δx artımına funksiyanın uyğun artımını tapaq;

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$$

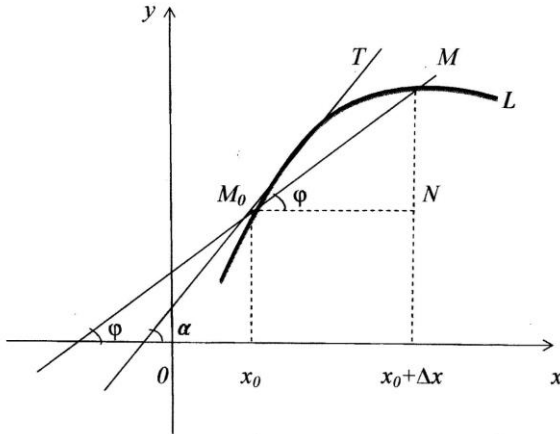
Buradan;

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Törəmə. Diferensial

Törəmənin həndəsi və mexaniki mənası.



Törəmənin həndəsi mənasının tərifı. İxtiyari L əyrisi və onun üzərində M_0 nöqtəsini götürək. L əyrisinin ixtiyari M və M_0 nöqtəsindən bir kəsən çəkək. M nöqtəsi L əyrisi boyunca öz yerini dəyişdikdə M_0M kəsəni də ümumiyyətlə M_0 nöqtəsi ətrafında öz vəziyyətini dəyişər və nəticədə M_0 nöqtəsinə yaxınlaşdıqda M_0M kəsəni müəyyən M_0T limit vəziyyətinə yaxınlaşarsa, kəsənin həmin limit vəziyyətinə M_0 nöqtəsində L əyrisinə toxunan deyilir.

Deməli törəmənin həndəsi mənası belədir: $y=f(x)$ funksiyanın x_0 nöqtəsində

$f'(x_0)$ funksiyanın qrafiki olan əyriyə $M_0(x_0, f(x_0))$ nöqtəsində çəkilmiş bucaq əmsalına bərabərdir:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \quad (1)$$

İndi isə həmin L əyrisinə M_0 nöqtəsində çəkilmiş M_0T toxunanın tənliyini yazaq. Məlumdur ki verilmiş nöqtədən keçən və bucaq əmsalı $k = f'(x_0)$ olan M_0T düzxəttinin tənliyi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

Törəmə. Diferensial

şəklində yazılır. $y_0=f(x_0)$ olduğundan toxunanın tənliyini

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

L əyrisinə M_0 nöqtəsində çəkilmiş toxunana həmin nöqtədə perpendikulyar olan düzxəttə əyrinin normalı deyilir. Həmin normalın tənliyi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (4)$$

şəklində yazılır.

Törəmənin mexaniki mənasının tərfi. Hər hansı cismin dəyişənsürətli düzxətli hərəkətinə baxsaq, həmin cismin ölçülərini və şəklini nəzərə almayaraq, onun fiziki baximindən maddi nöqtə hesab etmək olar. məlumdur ki, hərəkət edən nöqtənin getdiyi yolu zamandan asılıdır: $s = s(t)$ nöqtənin t zaman əslində getdiyi yol $s(t)$, $t+\Delta t$ zamanında isə getdiyi yol $s(t+\Delta t) = s(t) + \Delta s$ olarsa, onda baxılan nöqtə Δt zamanı ərzində Δs məsafəni getmiş olar. Belə olan halda

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (5)$$

nisbəti nöqtənin hərəkətinin orta sürətinə bərabər olar. Həmin nisbətdə $\Delta t \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək nəticədə alırıq ki,

$$v(t) = s'(t) \quad (6)$$

Buradan törəmənin mexaniki mənası alınır: hərəkət edən nöqtənin sürəti gedilən məsafənin zamana görə törəməsinə bərabərdir.

Törəmənin iqtisadi mənası. Təbiətdə baş verən istənilən prosesləri öyrənərlən bir-biri ilə bağlı olan kəmiyyətlər arasındakı deyişmə sürətini törəmənin köməyi ilə

Törəmə. Diferensial

qiymətləndirmək olar. buna əsasən, törəmə iqtisadiyyatda geniş tətbiq olunur.

Misal. Tutaq ki, eyni adlı məhsulların istehsal xərcləri – u , məhsulun miqdarı – x olsun. Onda, xərcləri miqdarın $u = u(x)$ funksiyası kimi qəbul edə bilərik. Aydındır ki, məhsulun miqdarı Δx gədər artsa, ona xərclənən qiymət Δu gədər artar. Belə olan halda $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ - istehsal xərcinin orta artımı olar. Onda orta artımın limiti istehsal xərclərinin limiti adlanır və $u'(x)$ ilə işarə olunur:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x) \quad (7)$$

Mürəkkəb funksiyanın törəməsi.

Teorem. $x = \varphi(t)$ funksiyası t_0 nöqtəsində və $y = f(x)$ funksiyası uyğun $x_0 = \varphi(t_0)$ nöqtəsində diferensiallanan olduqda $y = f[\varphi(t)]$ mürəkkəb funksiyası t_0 nöqtəsində diferensiallanırdır və onun törəməsi

$$(f[\varphi(t)])' = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. Sərbəst dəyişənin müəyyən bir x qiymətində $u = \varphi(x)$ və $y = F(u)$ və onun $x + \Delta x$ qiymətində isə

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u)$$

olar. Beləliklə, Δx artıma Δu , ΔF -ə isə Δy artımı uyğundur; bundan başqa $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində, $\Delta u \rightarrow 0$ olduqda isə $\Delta y \rightarrow 0$.

Şərtə görə, y'_u törəməsi vardır:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$$

Funksiya limitinin xassəsinə görə, bu münasibətdən

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \quad (1)$$

alınır.

Elementar funksiyların törəmələri.

$f(x) = c$	$c' = 0$, rəde c — const
$f(x) = x^a$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$f(x) = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Burada $\alpha \rightarrow 0$ şərtinə görə (1) bərabərliyini

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyinin hər tərəfini Δx atırmasına bölək:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (3)$$

Şərtə əsasən

Törəmə. Diferensial

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \quad (4)$$

Üçüncü bərabərliyində $\Delta x \rightarrow 0$ şəklində limitə keçərək:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (5)$$

Tərs funksiyanın törəməsi.

Teorem. $y=f(x)$ funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində diferensiallanırsa və $f'(x_0) \neq 0$ olarsa, onda onun tərs funksiyası $x=\varphi(t)$ uyğun y_0 nöqtəsində $y_0=f(x_0)$ diferensiallanıdır və onun törəməsi

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki, tərs funksiyanın tərifinə əsasən:

$$y = f(x),$$

$$x = \varphi(y),$$

$$y_0 = f(x_0),$$

$$\varphi(y_0) = x_0.$$

Onda tərs funksiya üçün:

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

bərabərliyini yazmaq olar.

Tərs funksiya kəsilməz olduğundan $y \rightarrow y_0$ şərtində $x \rightarrow x_0$ olur. Buna görə də:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(2)

Bu düsuru

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (3)$$

şəklində yazmaq olar. 3 Parametrik və qeyri-aşkar funksiyaların törəməsi.

Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi.

Teorem. Əgər $x = \varphi(t)$ və $y = \psi(t)$ funksiyalarının törəmələri varsa və $\varphi'(t) \neq 0$ olarsa, onda $y = f(x)$ funksiyası diferensiallanandır və onun törəməsi

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{və ya} \quad y'_k = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. Həqiqətən də $y = \psi(t)$ bərabərliyini x nəzərən diferensiallasaq və sağ tərəfi x -in mürəkkəb funksiyası hesab etsək alırıq:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \quad (2)$$

kəmiyyətini tərs funksiyanın diferensiallanması qaydasına əsasən $x = \varphi(t)$ funksiyasından tapmaq olar:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \left(= \frac{1}{\varphi'(t)} \right) \quad (3)$$

Tapdığımız qiyməti (2) bərabərliyinə yerinə yazsaq tələb olunan

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

düsturunu alırıq.

Qeyri-aşkar funksiyanın törəməsi.

Tutaq ki, $y = y(x)$ qeyri-aşkar funksiyası

Törəmə. Diferensial

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

tənliyi vasitəsi ilə verilmişdir. Bu funksiyanın analitik ifadəsini aşkar şəkildə tapmadan onun müxtəlif tərtibli törəmələrini tapmaq bəzən mümkün olur. Bu məqsədlə (1) bərabərliyinin hər iki tərəfini x -ə görə diferensiallayırlar və y dəyişəni x dəyişəninin funksiyası olduğunu nəzərə alırlar. Alınan bərabərliyi y' törəməyə nəzərən həll edərək y' törəməsini tapırlar.

Bu prosesi davam etdirməklə funksiyanın iki, üç və s. tərtibli törəmələrini tapmaq olar.

Misal.

$$ax^2 + by^2 = 2 \quad (2)$$

tənliyi ilə təyin olunan $y = y(x)$ funksiyanının birinci törəməsini tapın.

Qaydaya uyğun olaraq tənliyin hər iki tərəfini x dəyişəninə nəzərən törəməsini alaraq (unutmuruk ki, y dəyişən x -in funksiyasıdır):

$$2ax + 2by \cdot y' = 0, \quad (3)$$

$$y' = -\frac{ax}{by} \quad (4)$$

II tərtib xətti diferensial tənliklər

II tərtib xətti diferensial tənliklərə fizikanın, mexanikanın və digər sahələrin bir sıra məsələlərinin həllində tez-tez rast gəlinir. Ona görə də belə tənliklər xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Məlumdur ki, $n(n \geq 1)$ tərtibli tənliyin ümumi həlli n ixtiyari sabitdən asılıdır. Ona görə də deyirlər ki n tərtibli adi diferensial tənliyin sərbəstlik dərəcəsi n -dir.

İndiyə qədər ümumi həlldən tənliyin müəyyən xüsusi həllərini almaq üçün başlanğıc şərtlərdən istifadə olunur. Yəni axtarılan funksiya və onun törəmələri sərbəst dəyişənin

Törəmə. Diferensial

eyni bir qiymətində verilirdi. Lakin bir çox məsələlərdə alınan tənliyin elə həllini tapmaq tələb olunur ki, bu həll sərbəst dəyişənin müxtəlif qiymətlərində verilmiş şərtləri ödəmiş olsun. Bu isə sərhəd məsələsi ilə bağlıdır.

Sərhəd məsələsinin qoyuluşu və onun həlli üsulu.

Tutaq ki,

$$p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0 \quad (1)$$

tənliyinin

$$x(\alpha) = a_1, x(\beta) = a_2 (\alpha < \beta) \quad (2)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılması tələb olunur; burada α, β, a_1, a_2 verilmiş ədədlərdir.

Bu məsələyə sərhəd məsələsi, (2) şərtlərinə isə sərhəd şərtləri deyilir.

Ayındır ki, (1), (2) sərhəd məsələsini həll etmək, həndəsi olaraq, (1) tənliyinin $(\alpha, a_1), (\beta, a_2)$ nöqtələrindən keçən integral əyrisini tapmaq deməkdir.

(1) tənliyi üçün (2)-dən ümumi olan

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}x(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}x(\beta) = \alpha_1, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}x(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}x(\beta) = \alpha_2 \end{cases} \quad (3)$$

sərhəd şərtləri də vermək olar.

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}x(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}x(\beta) = 0, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}x(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}x(\beta) = 0 \end{cases} \quad (3')$$

sərhəd şərtlərinə bircins sərhəd şərtləri, (1) tənliyinin bircins sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə isə bircins sərhəd məsələsi deyilir.

Sadə misallar göstərir ki, (1) tənliyinin əmsalları müəyyən şərtləri ödədikdə Kosi məsələsinin yeganə həlli var, lakin sərhəd məsələsinin həlli yoxdur və ya sonsuz

Törəmə. Diferensial

saydadır.

Misal 1. $x + x = 0$ tənliyinin $x(0) = 0, x(\pi) = 1$ sərhəd şərtlərini ödəyən həlli yoxdur. Doğrudan da, tənliyin ümumi həlli

$$x = A \sin t + B \cos t$$

Şəklində, $x(0) = 0$ şərtini ödəyən həlləri isə $x = A \sin t$ şəklindədir. Aydındır ki, bu həllər içərisində $x(\pi) = 1$ şərtini ödəyəni yoxdur.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, ixtiyari A üçün $x = A \sin t$ funksiyası baxılan tənliyin $x(0) = 0$ və $x(\pi) = 1$ şərtlərini

ödəyən həllidir. Lakin tənliyin $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$ şərtini ödəyən yeganə $x = \sin t$ həlli var.

Məlumdur ki, $x_1(t), x_2(t)$ funksiyaları (1) tənliyinin xətti asılı olmayan həlləri isə, onun ümumi həlli

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (4)$$

şəklindədir və deməli, (3) şərtlərini ödəyən həll də (əgər varsa) bu həllər içərisindədir, burada c_1, c_2 ixtiyari sabitlərdir. Bu sabitləri elə seçək ki, (4) həlli (3) şərtlərini ödəsin. Onda c_1, c_2 məçhullarına nəzərən

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = a_1, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = a_2 \end{cases} \quad (5)$$

cəbri tənliklər sistemi alınır; burada

$$A_{i1} = a_{i1}x_1(\alpha) + a_{i2}x_1(\alpha) + b_{i1}x_1(\beta) + b_{i2}x_1(\beta),$$

$$A_{i2} = a_{i1}x_2(\alpha) + a_{i2}x_2(\alpha) + b_{i1}x_2(\beta) + b_{i2}x_2(\beta) \quad , i=1,2$$

Sadəlik üçün

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

Törəmə. Diferensial

işarə edək. Cəbrdən məlum olan **Kroneker-Kapelli** teoreminə əsasən (19) sisteminin uyuşan olub-olmaması ilə əlaqədar olaraq alırıq ki,

a) $\det A \neq 0$ isə, (19) sisteminin yeganə həlli var və deməli, (1) tənliyinin (ixtiyari a_1, a_2 ədədləri üçün), (3) şərtlərini ödəyən yeganə həll var.

Buradan həm də alınır ki, $\det A \neq 0$ isə, bircins sərhəd məsələsinin yeganə trivial həlli varsa, $\det A \neq 0$. Yəni (1) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən yeganə həlli var;

b) $\det A = 0$ və a_1, a_2 ədədlərinin hər ikisi sıfır deyil.

Onda A matrisinin rangı $\bar{A}$ matrisinin rangına bərabər olduqda (5) sisteminin sonsuz sayda həlli var və deməli (1) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən sonsuz sayda həlli var; A

matrisinin rangı $\bar{A}$ matrisinin rangına bərabər olmadıqda isə (5) sistemi uyuşan deyil və deməli (1) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən həlli yoxdur.

c) $\det A = 0$ olduqda (1) tənliyinin (3') bircins sərhəd şərtlərini ödəyən sonsuz sayda trivial olmayan həlli var.

Bircins olmayan

$$p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = f(t) \quad (6)$$

tənliyinə baxaq. Bu tənliyinin (3') bircins sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin qurulmasında Qrin funksiyası mühüm rol oynayır. Ona görə də əvvəlcə Qrin funksiyasına tərif verək.

Tutaq ki, $R = \{\alpha \leq t \leq \beta; \alpha \leq \tau \leq \beta\}$ kvadratında təyin olunmuş $G(t, \tau)$ funksiyası aşağıdakı şərtlətri ödəyir:

1. $G(t, \tau)$ funksiyası R kvadratında kəsilməzdir, hər bir $\tau \in (\alpha, \beta)$ üçün $(\alpha, \tau), (\tau, \beta)$ intervallarında t -yə nəzərən iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var və bu intervallarda (1)

tənliyini ödəyir;

2. $G_t(t, \tau)$ törəməsi $t = \tau$ nöqtəsində birinci növ kəsilməyə malikdir və

$$G_t(\tau + 0, \tau) - G_t(\tau - 0, \tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}; \quad (7)$$

3. $G(t, \tau)$ funksiyası t -yə nəzərən (3') bircins sərhəd şərtlərini ödəyir.

Belə $G(t, \tau)$ funksiyasına (1), (3') sərhəd məsələsinin və ya $L(x) = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x$ diferensial operatorunun (3') şərtlərini ödəyən Qrin funksiyası deyilir.

Qrin funksiyasının varlığı haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. Tutaq ki, (1)tənliyinin (3') bircins şərtlərini ödəyən ancaq trivial həlli var. Onda (1), (3') məsələsinin Qrin funksiyası var.

İsbatı. Tutaq ki, $x_1(t), x_2(t)$ funksiyaları (1) tənliyinin $[\alpha, \beta]$ parçasında xətti asılı olmayan həlləridir.

Tərifə görə Qrin funksiyası hər bir $\tau \in (\alpha, \beta)$ üçün $(\alpha, \tau), (\tau, \beta)$ intervalllarında (1) tənliyinin həlli olduğundan ,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), & t \in [\alpha, \tau] \\ \bar{c}_1 x_1(t) + \bar{c}_2 x_2(t), & t \in [\tau, \beta] \end{cases}$$

olmalıdır; burada $c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ həlölük naməlum sabitlərdir.

Şərtə görə $G(t, \tau)$ funksiyası R kvadratında kəsilməz olduğundan,

$$c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau) = \bar{c}_1 x_1(\tau) + \bar{c}_2 x_2(\tau)$$

olar. Digər tərəfdən, (7) şərtinə əsasən

$$\bar{c}_1 x_1'(\tau) + \bar{c}_2 x_2'(\tau) - c_1 x_1'(\tau) - c_2 x_2'(\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}$$

Aydındır ki, $\bar{c}_1 - c_1 = \gamma_1, \bar{c}_2 - c_2 = \gamma_2$ işarə etsək, sonuncu iki münasibətindən γ_1, γ_2 məchullarına nəzərən xətti, bircins olmayan

$$\begin{cases} x_1(\tau)\gamma_1 + x_2(\tau)\gamma_2 = 0, \\ x_1(\tau)\gamma_1 + x_2(\tau)\gamma_2 = \frac{1}{p_0(\tau)} \end{cases} \quad (8)$$

cəbri tənliklər sistemini alarıq.

Bu sistemin əmsallarından düzəldilmiş determinant (1) tənliyinin xətti asılı olmayan $x_1(t), x_2(t)$ həllərindən düzəldilmiş $W(t)$ Vronski determinantının $t = \tau$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabər olduğundan, sıfırdan fərqlidir. Odur ki, (8) sisteminin yeganə

$$\gamma_1(\tau) = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)} \quad \gamma_2(\tau) = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}$$

həlli var.

Onada $\bar{c}_1 = c_1 + \gamma_1(\tau), \bar{c}_2 = c_2 + \gamma_2(\tau)$. Deməli,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), & t \in [\alpha, \tau] \\ (c_1 + \gamma_1(\tau))x_1(t) + (c_2 + \gamma_2(\tau))x_2(t), & t \in [\tau, \beta] \end{cases}$$

Tərifə görə $G(t, \tau)$ funksiyası sərhəd şərtlərini ödəməlidir. Bu şərtlərə əsasən c_1, c_2 məchullarına nəzərən

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} = -[b_{11}x_1(\beta) + b_{12}x_2(\beta)]\gamma_1 - [b_{11}x_2(\beta) + b_{12}x_1(\beta)]\gamma_2 \\ A_{21} + A_{22} = -[b_{21}x_1(\beta) + b_{22}x_2(\beta)]\gamma_1 - [b_{21}x_2(\beta) + b_{22}x_1(\beta)]\gamma_2 \end{cases}$$

sistemini alırıq.

Teoremin şərtinə görə bircins sərhəd məsələsinin yeganə trivial həlli var. Deməli $\det A \neq 0$. Odur ki, sonuncu sistemdən $c_1(\tau), c_2(\tau)$ yeganə qayda ilə təyin olunur. Bu

qiymətləri yuxarıda nəzərə alsaq, $\bar{c}_1(\tau), \bar{c}_2(\tau)$

məchulları da təyin olunur və beləliklə,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} c_1(\tau)x_1(t) + c_2(\tau)x_2(t), & t \in [\alpha, \tau], \\ \bar{c}_1(\tau)x_1(t) + \bar{c}_2(\tau)x_2(t), & t \in [\tau, \beta] \end{cases}$$

funksiyası (1), (3') məsələsinin Qrin funksiyası olur. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Tutaq ki, $G(t, \tau)$ funksiyası (1), (3') məsələsinin Qrin funksiyasıdır və $f(t)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməzdir. Onda

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (9)$$

Düsturu ilə təyin olunan $x(t)$ funksiyası (6) tənliyinin (3') şərtlərini ödəyən həllidir.

Bu düstur Qrin düsturu adlanır.

İsbatı. Qrin düsturu ilə təyin olunan $x(t)$ funksiyası (3') şərtlərini ödəməsi $G(t, \tau)$ funksiyasının t arqumentinə nəzərən həmin şərtləri ödəməsindən aydındır.

Göstərək ki, $x(t)$ funksiyası həm də (6) tənliyini ödəyir. Bunun üçün Qrin düsturunu

$$x(t) = \int_{\alpha}^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^{\beta} G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

şəkində yazaraq və $x'(t), x''(t)$ törəmələrini hesablayaq:

Törəmə. Diferensial

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= G(t, t)f(t) + \int_{\alpha}^t G_t(t, \tau)f(\tau)d\tau - G(t, t)f(t) + \int_t^{\beta} G_t(t, \tau)f(\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} G_t(t, \tau)f(\tau)d\tau, \\
 x''(t) &= G_t(t, t-0)f(t) + \int_{\alpha}^t G_{tt}(t, \tau)f(\tau)d\tau - G_t(t, t+0)f(t) + \int_t^{\beta} G_{tt}(t, \tau)f(\tau)d\tau = \\
 &= [G_t(t, t-0) - G_t(t, t+0)]f(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G_{tt}(t, \tau)f(\tau)d\tau.
 \end{aligned}$$

Burada $G_t(t, t-0) = G_t(t+0, t)$ və $G_t(t, t+0) = G_t(t-0, t)$ olduğunu nəzərə alsaq, (7) şərtinə əsasən alırıq ki,

$$x''(t) = \frac{1}{p_0(t)} f(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G_{tt}(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Odur ki, Qrin düsturu ilə təyin olunan $x(t)$ funksiyası üçün

$$\begin{aligned}
 L[x(t)] &\equiv p_0(t)x''(t) + p_1(t)x'(t) + p_2(t)x(t) = f(t) + \\
 &+ \int_{\alpha}^{\beta} [p_0(t)G_{tt}(t, \tau) + p_1(t)G_t(t, \tau) + p_2(t)G(t, \tau)]f(\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

münasibətini alırıq.

Şərtə görə ixtiyari $t \in (\alpha, \beta)$ üçün $G(t, \tau)$ funksiyası (α, τ) , (τ, β) intervallarında (1) tənliyinin həlli olduğundan, buradan

$$L[x(t)] \equiv f(t)$$

eyniliyini alırıq. Beləliklə teorem isbat olundu.

Misal 2. $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = f(t)$ tənliyinin

$x(0) - e^2 x(1) = 0$, $x(0) = 0$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapaq.

Bunun üçün əvvəlcə $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = 0$ bircins tənliyinin xətti asılı olmayan həllərini tapaq. Tənliyin bir xüsusi həllini

$$x = at^n + bt^{n-1} + \dots$$

Törəmə. Diferensial

şəkilində axtaraq. Onu tənlikdə yazıb t -nin eyni dərəcələrinin əmsallarını tutuşdursaq, alırıq ki, $n=1$, yəni tənliyin

$$x = at + b$$

şəkilində həlli var. Həllin bu ifadəsini tənlikdə yazıb. əmsalları tutuşdurmaqla a, b -ni təyin edirik: $a=1$, $b=0$. Deməli $x_1(t) = t$ bircins tənliyin həllidir.

Tapılan $x_1(t) = t$ həllinin köməyi ilə tənliyin tərtibini azaldaraq onun $x_2(t) = e^{-2t}$ həllini də qura bilərik. Aydındır ki, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^{-2t}$ həlləri xətti asılı deyillər. Ona görə də baxılan məsələnin Qrin funksiyasını

$$G(t, \tau) = \begin{cases} c_1 t + c_2 e^{-2t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 e^{-2t}, & \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şəkilində axtarmaq lazımdır.

$p_0(t) = 2t + 1$, $W(t) = -(2t + 1)e^{-2t}$ olduğundan alırıq ki,

$$\bar{c}_1 - c_1 = \gamma_1 = \frac{1}{(2\tau + 1)^2}, \quad \bar{c}_2 - c_2 = \gamma_2 = -\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau + 1)^2}$$

Buradan

$$\bar{c}_1 = c_1 + \frac{1}{(2\tau + 1)^2}, \quad \bar{c}_2 = c_2 - \frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau + 1)^2}.$$

Bu qiymətləri Qrin funksiyasının ifadəsində yerinə yazıb sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq, c_1, c_2 məchullarına nəzərən

$$\begin{cases} c_1 - \frac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau + 1)^2} + \frac{1}{(2\tau + 1)^2} = 0, \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

Törəmə. Diferensial

sistemi alırıq. Buradan c_1, c_2 məchullarını təyin edib ümumi nəzəriyyədəki qayda ilə

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau e^{2(\tau-1)} - 1}{(2\tau + 1)^2} t + \frac{\tau e^{2(\tau-1)} - 1}{2(2\tau + 1)^2} e^{-2t}, & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau + 1)^2} t + \frac{\tau (e^{-2} - 2)e^{2\tau} - 1}{2(2\tau + 1)^2} e^{-2t}, & \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Qrin funksiyasını qura bilərik. Onda teoremə əsasən

$$x(t) = \int_0^1 G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

funksiyası baxılan məsələnin həlli

olar.

§2. Diferensialın həndəsi və mexaniki mənası.

Diferensialın tərif. Diferensialın əsas xassələri

Diferensialın tərif.

$y = f(x)$ funksiyası (a, b) intervalında diferensiallanandır.

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$$

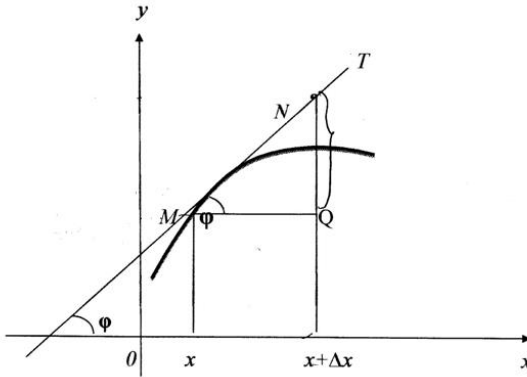
Tərif. Diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində ki, artımının baş hissəsinə yəni Δx -dən xətti asılı olan $f'(x) \Delta x$ ifadəsinə onun x nöqtəsində diferensialı deyilir. $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində diferensialı dy və ya $df(x)$ ilə işarə olunur.

$$df(x) = f'(x) \Delta x \quad \text{və} \quad y \text{ yaxud}$$

$$dy = f'(x) \Delta x$$

2. Diferensialın həndəsi mənası.

$M(x, y)$ nöqtəsi götürək. Bu nöqtədə funksiya qrafikinə çəkilən toxunan MT düz xətti olsun. Absis oxu üzərindəki, $x + \Delta x$ nöqtəsindən ordinat oxuna paralel qaldırılan düz xətt MT toxunanını M nöqtəsində kəsər.



Düzbucaqlı NMQ Δ -da

$$\frac{NQ}{MQ} = \operatorname{tg} \varphi, \quad NQ = MQ \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$MQ = \Delta x$ törəmənin həndəsi mənasına görə $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$ olduğundan ;

$$NQ = f'(x) \cdot \Delta x = df(x) \quad (1)$$

NQ kəmiyyəti, x absisi Δx artımını aldıqda MT toxunanı ordinatı-

nın aldığı artımdır. (1) bərabərliyindən funksiya diferensialının

həndəsi mənası alınır.

$f(x)$ funksiyanın x nöqtəsində diferensialı , funksiyanın qra-

Törəmə. Diferensial

fikində $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın toxunma nöqtəsinin

absisi Δx artımı aldığıda ordinatının aldığı artıma bərabərdir

3. Diferensialın mexaniki mənası.

Tutaq ki, hər hansı cisim düz xətt boyunca hərəkət edir və diferensiallanan $S = S(t)$ funksiyası onun hərəkət qanunudur. Aydındır ki, cisim t anından $t + \Delta t$ anına qədər olan müddətdə

$$\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$$

qədər yol gedər. Hərəkətin t anında sürətinin $v(t) = S'(t)$ olması məlumdur. Deməli əgər hərəkət edən cismin bütün Δt zaman fasiləsində sürəti sabit olub t anındakı, $v(t) = S'(t)$ sürətinə bərabər olsa idi, onda cisim həmin müddətdə

$$ds(t) = S'(t) \cdot \Delta t \tag{1}$$

qədər məsafə getmiş olardı. Bu, $s(t)$ funksiyası diferensialının mexaniki mənasını ifadə edir.

4. Diferensialların hesablanma düsturları.

Həm törəmə alma və həm də diferensialı tapma əməllərinə diferensiallama əməli deyilir. Tutaq ki, diferensiallanan $u = f(x)$ və $v = \varphi(x)$ funksiyaları verilmişdir. Onların diferensialı

$$du = f'(x)dx = u'dx, \quad dv = \varphi'(x)dx = v'dx$$

şəklində olduğundan funksiyanın cəminin, fərqinin, hasilinin və nisbətinin diferensialını hesablamaq üçün

Törəmə. Diferensial

$$d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$$

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v du + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

düsturlarını alarıq.

$$1. \quad d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1} du$$

$$2. \quad d(a) = a' \ln a \, du$$

$$d(e) = e' du$$

$$3. \quad d(\log_a u) = \frac{du}{u} \cdot \log_a e = \frac{du}{u \cdot \ln a}$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

$$4. \quad d(\sin u) = \cos u \, du$$

$$d(\cos u) = -\sin u \, du$$

$$d(\operatorname{tgu}) = \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$d(\operatorname{ctgu}) = -\frac{du}{\sin^2 u}$$

$$5. \quad d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\operatorname{shu}) = chu \cdot du$$

Törəmə. Diferensial

$$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad d(\operatorname{arsh} u) = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2} \quad d(\operatorname{arth} u) = \frac{du}{sh^2 u}$$

$$d(\operatorname{arctg} u) = -\frac{du}{1+u^2} \quad d(\operatorname{arth} u) = -\frac{du}{sh^2 u}$$

Yüksək tərtibli diferensiallar.

Tutaq ki, $y = f(x)$ diferensiallanan funksiyalardır və x argumenti sərbəst dəyişəndir. Onda funksiyanın diferensialı

$$dy = f'(x)dx \quad (1)$$

olar.

Funksiya diferensialının diferensialına həmin funksiyanın ikitərtibli və yaxud ikinci diferensialı deyilir və d^2y , $d^2f(x)$ və s. işarə olunur.

$$d^2y = d(dy) \quad \text{və ya} \quad d^2f(x) = d(df(x))$$

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2$$

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)(dx)^2] = [f''(x)(dx)^2]' dx = f'''(x)(dx)^3$$

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}] = [f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]' dx = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Deməli ;

$$dy = f'(x)dx$$

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3$$

.....

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

Çalışmalar:

Funksiyaların törəməsini tapın.

- 1) $f(x) = x^2 - 5x - 7$
- 2) $f(x) = (7x + 3)^5 + 7x$
- 3) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 - x + 4)^9$
- 4) $f(x) = \cos^2(3x - 1)$
- 5) $f(x) = \cos^4 2x - \sin^4 2x$
- 6) $f(x) = \log_3(x^2 - 4x + 3)$

Funksiyaların ikinci tərtib törəməsini tapın.

- 1) $f(x) = 3x^6 + 7x^4 + 6x^2 + 5$
- 2) $f(x) = x^3 + 5x^2$
- 3) $f(x) = 2x - \frac{1}{2x^2}$
- 4) $f(x) = 5^x + 12$
- 5) $f(x) = x^2 \ln x$

Funksiyanın törəməsinin verilmiş nöqtədə qiymətini tapın:

- | | | |
|----|---------------------------------------|---------|
| 1. | $f(x) = 3x + 2\sqrt{x}$ | $x = 4$ |
| 2. | $f(x) = x^2 - 5x - 7$ | $x = 0$ |
| 3. | $f(x) = 5 \cdot \ln x + 3^x \log_3 e$ | $x = 1$ |
| 4. | $f(x) = \frac{4x - 1}{3x + 2}$ | $x = 0$ |
| 5. | $f(x) = \log_3(4x + 5)$ | $x = 2$ |

Misal. Törəmələri hesablayın:

Törəmə. Diferensial

$$a) (\sin 5x)' = \cos 5x \cdot (5x)' = 5\cos 5x$$

Misal. $y = x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$ funksiyasının birinci, ikinci, üçüncü və dördüncü tərtib törəmələrini tapın:

$$y' = 4x^3 + 9x^2 - 2x + 5,$$

$$y' = 12x^2 + 18x - 2$$

$$y'' = 24x + 18,$$

$$y^{(iv)} = 24$$

Misal 1. $y = (x-1)^2$ funksiyasını $x=t+1$ və $y=t^2$ parametrik şəkildə vermək olar.

Misal 1. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^2$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli. Verilən funksiya $y=z^2$ və $z=x^2+3x+5$ funksiyalarından düzəldilmiş mürəkkəb funksiya.

$$\begin{aligned} f'(x) &= y'z \cdot z'_x = (z^2)'(x^2 + 3x + 5)' = 2z(2x + 3) = \\ &= 2(x^2 + 3x + 5)(2x + 3) \end{aligned}$$

Misal 1. $f(x)=C$, $x \in \mathbb{R}$ (C - müəyyən bir sabit ədəddir) funksiyasının törəməsini tapmalı.

Həlli.

$$f'(x) = (C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Deməli, sabitin törəməsi sıfıra bərabərdir, yəni $(C)'=0$.

Müəyyən integral

VI FƏSİL

Müəyyən integral

§ 1. Müəyyən integralın əsas xassələri. Nyuton-Leybnis düsturu. Müəyyən integralın həndəsi mənası

Müəyyən integral

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında kəsilməz $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu parçanı $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ bölgü nöqtələri ilə n ixti-yari hissələrə bölək, belə ki,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

işarələrini qəbul edək. $[x_{i-1}, x_i]$ parçalarının hər birində bir ξ_i nöqtəsi götürək ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) və aşağıdakı cəmi düzəldək

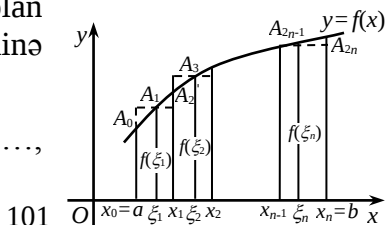
$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(1)

Bu cəmi $[a, b]$ -nin xüsusi parçalara verilmiş bölgüsünə və ξ_i aralıq nöqtələrinin verilmiş seçiminə uyğun olan $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyası üçün integral cəmi adlandıracağıq.

$f(x) \geq 0$ olduqda σ integral cəminin həndəsi mənası aydındır: o oturacaqları $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ və hündürlükləri $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ olan düzbucaqların sahələri cəminə bərabərdir (şəkil 1).

İndi, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots,$



Müəyyən integral

$[x_{n-1}, x_n]$ parçaları içərisində ən böyük olanının uzunluğunu

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

ilə işarə edək.

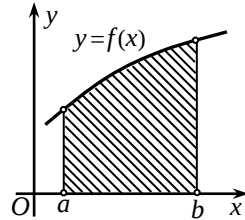
Tərif. Əgər $\lambda \rightarrow 0$ şərtində (1) integral cəminin sonlu I limiti varsa, onda bu limit $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında müəyyən integralı adlanır və aşağıdakı kimi işarə edilir

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Bu halda $f(x)$ funksiyasına $[a, b]$ parçasında integrallanan funksiya deyilir. $f(x)$ – integralaltı funksiya, a və b ədədləri uyğun olaraq integralın aşağı və yuxarı sərhədləri, x isə integrallama dəyişəni adlanır.

$$f(x) \geq 0 \quad \text{olduqda} \quad \int_a^b f(x) dx$$

integralı ədədi qiymətcə əyrixətli trapesiya adlanan fiqurun sahəsinə bərabər olur. Əyrixətli trapesiya (şəkil 2) yuxarıdan $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki, aşağıdan Ox oxu və yanlardan $x=a$, $x=b$ düz xətləri ilə hüdudlanan fiqura deyilir.



Şəkil 2

Teorem. Əgər $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda həmin parçada integrallananıdır.

2. Müəyyən integralın əsas xassələri

1. Müəyyən integral yalnız $f(x)$ funksiyasının şəklindən və integralın sərhədlərindən asılı olur, integrallama

Müəyyən integral

dəyişənindən isə asılı olmur. Ona görə də integrallama dəyişənini istənilən hərflə işarə etmək olar:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(z)dz$$

2. Əgər yuxarı və aşağı sərhədlər üst-üstə düşərsə, onda integral sıfıra bərabərdir:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Yuxarı və aşağı sərhədlərin yerini dəyişəndə integral öz qiymətini əksinə dəyişər

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. a, b, c ədədlərinin neçə olmalarından asılı olmayaraq aşağıdakı bərabərlik doğrudur

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Sabit vuruğu müəyyən integral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar, yəni $A = \text{const}$ olduqda

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

6. Bir neçə funksiyanın cəbri cəminin müəyyən integralı toplananların integrallarının cəbri cəminə bərabərdir

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

7. Əgər $[a, b]$ parçasında $f(x) \geq 0$ olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Müəyyən integral

8. $[a, b]$ parçasında $f(x) \leq g(x)$ olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

9. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

10. Əgər m və M ədədləri $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətləri və $a \leq b$ olarsa, onda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

11. Orta qiymət haqqında teorem. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda bu parçada elə ξ nöqtəsi tapmaq olar ki, aşağıdakı bərabərlik doğru olsun:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Müəyyən və qeyri-müəyyən integrallar arasında əlaqə

$$\int_a^b f(x)dx$$

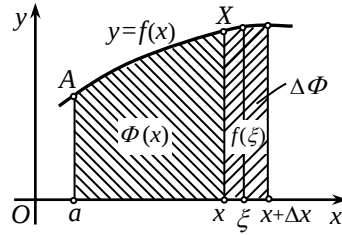
Tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx$ integralının aşağı sərhədi həmişəki kimi sabit ədəddir, lakin yuxarı sərhədi – b dəyişir. Onda integralın qiyməti də dəyişər, yəni integral yuxarı sərhədin funksiyasıdır.

Yuxarı sərhədi x ilə işarə edək və bunu integrallama dəyişəni ilə qarışdırmamaq üçün sonuncunu t ilə işarə edək

Müəyyən integral

$$\int_a^x f(t)dt.$$

a sabit olduğundan bu integral yuxarı sərhədin, yəni x -in funksiyasını təyin edir. Bu funksiyanı $\Phi(x)$ ilə işarə edək



Şəkil 3

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

(1)

Əgər $f(x)$ mənfi deyilsə, $\Phi(x)$ funksiyası ədədi qiymətə a və x arasında trapesiyanın sahəsinə bərabərdir (şəkil 3). Aydındır ki, həmin sahə x -dən asılı olaraq dəyişir.

Teorem. Əgər $f(x)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda yuxarı sərhədi dəyişən olan müəyyən integralin törəməsi vardır və integralaltı funksiyanın yuxarı sərhəddə aldığı qiymətə bərabərdir, yəni

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

(2)

İsbatı. x -in ixtiyari $x \in [a, b]$ qiymətini götürək və ona $\Delta x \neq 0$ artımı verək ki, $a \leq x + \Delta x \leq b$. Onda müəyyən integralin 4-cü xassəsinə əsasən alırıq:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Buradan $\Phi(x)$ funksiyasının artımını tapaq:

Müəyyən integral

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Orta qiymət haqqında teoremi (11-ci xassə) tətbiq etsək, alarıq

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(\xi)\Delta x,$$

burada ξ ədədi x ilə $x + \Delta x$ arasındadır. Bərabərliyin iki tərəfini də Δx bölək

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi)$$

Əgər indi $\Delta x \rightarrow 0$, onda $\xi \rightarrow x$ və $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğu üçün $f(\xi) \rightarrow f(x)$. Onda axırıncı bərabərlikdə $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək alarıq

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

və ya $\Phi'(x) = f(x)$. Teorem isbat olundu.

Beləliklə, müəyyən edilib ki, istənilən $[a, b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyasının bu parçada ibtidai funksiyası var və $\Phi(x)$ funksiyası – yuxarı sərhədi dəyişən olan müəyyən inteqral – $f(x)$ üçün ibtidai funksiyadır. $f(x)$ funksiyası üçün başqa ibtidai funksiya $\Phi(x)$ -dan yalnız C sabitinə fərqləndiyindən biz müəyyən və qeyri-müəyyən inteqral arasında olan əlaqəni müəyyən etmiş oluruq:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Müəyyən inteqral

§ 2. Müəyyən inteqralda dəyişəni əvəzetmə və hissə-hissə inteqrallama.

Teorem. Əgər $F(x)$ funksiyası verilmiş $f(x)$ -in ibtidai funksiyalarından biri olarsa, onda

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (1)$$

düsturu doğrudur. Bu düstura **Nyuton-Leybnis düsturu** deyilir.

İsbatı. Tutaq ki, $F(x)$ funksiyası $f(x)$ -in hər hansı bir ibtidai funksiyasıdır.

Yuxarıda isbat olunan teoremə görə $\int_a^x f(t)dt$ funksiyası da $f(x)$ üçün ibtidaidir. Verilən funksiyanın iki ibtidaisi bir-birindən C sabiti qədər fərqləndiyindən aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \quad (2)$$

C sabiti düzgün seçildikdə bu bərabərlik istənilən x üçün doğrudur, yəni eynilikdir.

Ser İsaak Nyuton — ingilis fiziki, riyaziyyatçısı, astronomu, fəlsəfəçisi və kimyaçı alimdir. Tarixdəki ən böyük riyaziyyatçı və alimlərdən biridir. İlk dəfə olaraq elmə Yerin cazibə qüvvəsi anlayışını daxil etmişdir

Qotfrid Vilhelmfon Leybnits (1 iyul 1646 – 14 noyabr 1716) — alman filosof, riyaziyyatçısı, fiziki və hüquqşünas, ikilik say sistemi layihəsinin müəllifi. İnteqral hesabının yaradıcılarından

Müəyyən integral

biridir. Adı tarixdə 100 ən çox öyrənilmiş şəxsiyyətlər siyahısına daxil edilib.

Bu C sabitini tapmaq üçün bu eynilikdə $x = a$ götürək, onda

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

yaxud $0 = F(a) + C$; və buradan $C = -F(a)$.

Deməli,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Burada $x = b$ götürməklə Nyuton-Leybnis düsturunu alırıq

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

və yaxud inteqrallama dəyişəni x götürərək

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Əgər fərqi simvolik olaraq

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

şəklində işarə etsək, onda (1) düsturunu belə yazmaq olar

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

İnteqraltı funksiyanın ibtidai funksiyası məlum olduqda Nyuton-Leybnis düsturu müəyyən inteqralı hesablamaq üçün əlverişli üsul verir.

1. Qövsün uzunluğu.

Müstəvi əyrinin gövsünün uzunluğunu tapmaq üçün həmin əyri xətti ya $y = f(x)$, ya $x = f(y)$, və ya $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik şəklində yazmaq lazımdır. Onda həmin

Müəyyən integral

gövsün diferensialı funksiyanın verilməsinə uyğun olaraq:

$$y = f(x) \Rightarrow dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$x = f(y) \Rightarrow dl = \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

Bütöv qövsün $\overline{AB}$ uzunluğu isə uyğun olaraq aşağıdakı kimi hesablanır:

$$y = f(x) \Rightarrow L_{\overline{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_A^B dl$$

$$x = f(y) \Rightarrow L_{\overline{AB}} = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_A^B dl$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow L_{\overline{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

burada x_A, x_B – nöqtələrin absisləri, y_A, y_B – ordinatlarıdır.

Əgər hamar əyrinin tənliyi polyar koordinatlarda $\rho = \rho(\theta)$ tənliyi ilə verilsə ($\alpha \leq \theta \leq \beta$), onda qövsün uzunluğu

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = l$$

düsturu ilə hesablanır.

2. Fırlanmadan alınan cismin həcmi.

Burada iki variant mövcuddur.

1) Əgər figur əyrixətli trapesiyanın və ya hər hansı əyrinin OX oxu ətrafında fırlanmadan alınsa, onda cismin

Müəyyən integral

$[x_1, x_2]$ parçasından götürülmüş istənilən x nöqtəsindən şaquli istiqamətində aparılan kəsik $R = f(x)$ radiuslu bir dairədir. Buna görə də, həmin kəsiyin sahəsi $S(x) = \pi \cdot y^2$ kimi hesablanır. Nəticədə fırlanma cismin həcmi:

$$V_{OX} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx \quad (x_1 < x_2) \quad (1)$$

düstura əsasən hesablanır.

2) Əgər fırlanma cismi əyri xəttin OY oxu ətrafında fırlanmadan əmələ gələrsə, onda onun həmin parçadan götürülmüş istənilən x nöqtəsindən şaquli istiqamətində aparılan kəsik $R = X$ radiuslu dairədir və həmin kəsiyin

sahəsi indi artıq $S(y) = \pi \cdot x^2$ kimi hesablanır. Nəticədə alınan fırlanma cismin bütöv həcmi:

$$V_{OY} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad (y_1 < y_2) \quad (2)$$

Misal 1. Verilmiş $y^2 = 2px$ və $x = a$ xətlərin müstəvi figurunun OX oxu ətrafında fırlanma nəticəsində alınan fəza cisminin həcmi tapın.

Həlli. Fırlanma nəticəsində alınan cismin adı parabolik seqmentdir. Fırlanma OX oxu ətrafında aparıldığına görə (1) düsturundan istifadə edək. Burada

$$x_1 = 0, x_2 = a$$

$$V_{OX} = \pi \int_0^a (2px) dx = 2p\pi \int_0^a x dx = 2p\pi \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a$$

$$V_{OX} = p\pi a^2$$

Müəyyən integral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b < a)$$

Misal 2. Ellipsin OY oxu ətrafında fırlanma nəticəsində alınan cismin həcmi tap.

Həlli. Fırlanma nəticəsində alınan cismin adı ellipsoiddir. Fırlanma OY oxuna görə aparıldığından (2) düsturdan istifadə edək, amma əvvəlcə x^2 üçün ifadəni alaq.

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

(2) düstura görə alırıq:

$$V_{OY} = \pi a^2 \int_{-b}^b \left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right] dy = \pi a^2 \left[\int_{-b}^b dy - \frac{1}{b^2} \int_{-b}^b y^2 dy \right]$$

Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etdikdə alırıq:

$$V_{OY} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

3. Fırlanmadan alınan səthin sahəsi.

Əgər cismin səthi $\overline{AB}$ qövsün OX oxu ətrafında fırlanmadan əmələ gələrsə, onda onun sahəsinin diferensialı oturaqlarının radiusları uyğun olaraq

$$r = y; \quad R = y + \Delta y$$

və doğuranı dl olan kəsik konusun yan səthinin sahəsinə bərabərdir.

$$ds = \frac{2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)}{2} dl \approx 2\pi y dl.$$

Nəticədə səthin bütöv sahəsi

$$S_{\overline{AB}} = \int_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y dl.$$

Əgər fırlanma OY oxu ətrafında aparılırsa, onda alınan

Müəyyən integral

cismin vəziyyətini nəzərə alaraq onun səthinin sahəsi:

$$S_{\overline{AB}} = \int_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} x dl$$

düsturuna görə hesablanır.

4. Əyrixətli trapesiyanın sahəsi.

Əgər əyrixətli trapesiya bir funksiyanın qrafikinin əyrisi ilə məhdudlaşdırılmışdır, onda onun sahəsini

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Əgər əyrixətli trapesiya iki əyri xətti arasında qalan bir sahə olarsa, onda onun sahəsini

$$S = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx.$$

Əgər misalda aşağı və yuxarı sərhədlər məchul olarsa, onları müəyyən etmək üçün $f(x) = \varphi(x)$ tənliyinin köklərini taparaq $x_1 = a, x_2 = b$ kimi götürürük.

Əgər alınan sahə qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinə görə bir neçə hissəyə bölünərsə, onda bütöv trapesiyanın sahəsini bu kəmiyyətin additivlik xassəsinə görə parçaların ayrı-ayrılıqda hesablanmış sahələrinin cəmi kimi göstərmək mümkündür.

Misal. $4y = 8x - x^2$ və $4y = x + 6$ xətləri ilə məhdudlaşdırılmış əyrixətli trapesiyanın sahəsini tapın.

Həlli. 1) Əvvəlcə qrafiklərin kəsişmə nöqtələrini müəyyən edək:

$$y_1 = \frac{8x - x^2}{4} = \frac{x + 6}{4} = y_2$$

tənliyini həll edərək alırıq:

$$x_1 = 1 = a; \quad x_2 = 6 = b$$

Müəyyən integral

deməli, alınan sahəni $[1; 6]$ parçada axtarıq.

2) İndi isə bir başa sahəni hesablayaq:

$$S = \int_1^6 [y_1(x) - y_2(x)] dx$$

$$S = \int_1^6 \left(\frac{8x - x^2}{4} - \frac{x + 6}{4} \right) dx = \dots = \frac{1}{4} \left(\frac{7}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^6 = 5 \frac{5}{24}$$

Polyar koordinatların köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsi

$$S = \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

VI fəsil :

Misalların həllinə aid nümunələr:

Qeyri-müəyyən integrala aid misallar:

Misal 1. $f(x) = \int (x^2 + 5) dx$ qeyri-müəyyən integralının ibtidai funksiyasını tapın.

Həlli:

$$\int (x^2 + 5) dx = \frac{1}{3} x^3 + 5x + C$$

çünki;

$$\left(\frac{1}{3} x^3 + 5x + C \right)' = x^2 + 5$$

Misal 2. $f(x) = \int x^5 dx$ qeyri-müəyyən integralının ibtidai funksiyasını tapın.

Həlli:

Müəyyən integral

$$\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = x^5 \text{ olduğu üçün}$$

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

Misal 3. İnteqralın xassəsindən istifadə edərək hesablayın.

$$\int (3x^2 + 2x + 2) dx$$

Həlli:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 2x + 2) dx &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 2 dx = 3 \cdot \\ &\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x = x^3 + x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

Misal 4. İnteqralı hesablayın.

$$\int x \sin x dx$$

Həlli: $u=x$ və $dx=\sin x dx=d(-\cos x)$ götürək və hissə - hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Misal 5. İnteqralı hesablayın:

$$\int x e^{-x} dx$$

Həlli. $u=x$ və $dv = e^{-x} dx = d(-e^{-x})$ götürək və hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \int x d(-e^{-x}) = -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} - \int e^{-x} d(-x) \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Müəyyən integral

Misal 6. İntegralı hesablayın:

$$\int \frac{x^3 - 5x + 7}{x - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Həlli. } \int \frac{x^3 - 5x + 7}{x - 3} &= \int \left(x^2 + 3x + 4 + \frac{19}{x - 3} \right) dx = \\ &= \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 4 dx + 19 \cdot \int \frac{d(x - 3)}{x - 3} = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \\ &+ 4x + 19 \ln|x - 3| + C \end{aligned}$$

Müəyyən integrala aid misallar:

Misal 1. İntegralın qiymətini hesablayın.

$$\int_0^1 x dx$$

Həlli: Nyuton – Leybnis düsturuna görə

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Misal 2. İntegralın qiymətini hesablayın.

$$\int_0^3 x^3 dx$$

Həlli: Nyuton – Leybnis düsturuna görə

$$\int_0^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4}$$

Misal 3. İntegralın qiymətini hesablayın.

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 1) dx$$

Həlli: Nyuton – Leybnis düsturuna görə

Müəyyən integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 1) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 - 2 \right) - \\ &\quad - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - (-1) \right) = -3 \end{aligned}$$

Misal 4. İnteqralın qiymətini hesablayın.

$$\int_1^e x \ln x \, dx$$

Həlli: $u = \ln x$ və $dv = x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ götürüb hissə - hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək,

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx &= \int_1^e \ln x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \\ \int_1^e \frac{x^2}{2} d \ln x &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \cdot x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

Misal 5. İnteqralın qiymətini hesablayın.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

Həlli: $e^x = t$ ilə əvəz edək. Onda, yeni inteqrallama sərhədlərini tapaq. $t=1$ və $x=1$ olduqda $t=e$ olur. Onda

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} &= \int_1^e \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int_1^e \frac{dt}{t} - \int_1^e \frac{dt}{1+t} = \\ \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_1^e &= 1 + \ln \frac{2}{e+1} \end{aligned}$$

Müəyyən integral

Çalışmalar:

İntegralı hesablayın:

1. $\int_1^3 dx$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

3. $\int_0^2 3x dx$

4. $\int_0^1 (x^2 - 2x - 3) dx$

5. $\int_1^2 x^4 dx$

6. $\int_2^3 \frac{3}{x} dx$

7. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx$

8. $\int_2^3 (2x - 1)^3 dx$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$

11. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

12. $\int_1^2 \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$

13. $\int_0^1 x e^x dx$

14. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

15. $\int_0^{2\pi} x \cos x dx$

16. $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx$

Verilmiş xətlərlə hüdüdlanmış əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayın.

1) $y = -2x + x^2 + 2$ $x=1, x=3, y=0$

2) $y = 4 - x^2$ $x=-3, x=3, y=0$

Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış fiqurun sahəsini hesablayın.

1) $y = x^2 + 2x$ $x=3$ $y=0$

2) $y = \sqrt{x}$ $x=1$ $y=0$

Diferensial tənliklər

VII FƏSİL

Diferensial tənliklər

§ 1. Adi diferensial tənliklər. Dəyişənlərinə ayrıla bilən adi diferensial tənliklər.

Əsas anlayışlar, təriflər.

Tərif. İxtiyari x dəyişəni, onun $y = y(x)$ funksiyası və bu funksiyanın həmin x dəyişəninə nəzərən $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ törəmələri daxil olan tənliyə **adi diferensial tənlik** deyilir.

Diferensial tənliyə daxil olan ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə həmin diferensial tənliyin tərtibi deyilir. n -tərtibli adi diferensial tənlik ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

(1)

(1) diferensial tənliyini eyniliyə çevirən $y = \varphi(x)$ funksiyasına həmin tənliyin həlli deyilir. Bu, o deməkdir ki, $y = \varphi(x)$ funksiyasını və onun $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ törəmələrini (1) tənliyində yerinə yazdıqda həmin tənlik x -ə nəzərən eyniliyə çevrilir.

n -tərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli n sayda ixtiyari sabitin daxil olduğu elə

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (2)$$

həllinə deyilir ki, o verilmiş tənliyi eyniliyə çevirsin.

Diferensial tənliyin ümumi həllinə daxil olan ixtiyari sabitlərin müəyyən qiymətlərində alınan hər bir həlli diferensial tənliyin **xüsusi həlli** adlanır.

Verilmiş diferensial tənliyi ödəyən funksiya (həll) qeyri-əşkar və parametrik şəkildə də verilə bilər. Bu halda həmin

Diferensial tənliklər

funksiyaya bəzən diferensial tənliyin inteqralı deyilir. Diferensial tənliyin həllinin qrafiki **inteqral əyrisi** adlanır.

Dəyişənlərinə ayrılma bilən diferensial tənliklər.

Tutaq ki, $M(x)$ və $N(y)$ funksiyaları uyğun olaraq (a,b) və (c,d) intervalında kəsilməzdir. Bu halda

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik deyilir. (1) tənliyində dx -in əmsalı ancaq x -dən, dy -in əmsalı ancaq y -dən asılıdır.

Fərz edək ki, $y(x)$ funksiyası (1) tənliyinin həllidir. Onda həmin funksiya (1) tənliyini eyniliyə çevirir:

$$M(x)dx + N(y)dy \equiv 0. \quad (2)$$

Bu eyniliyi inteqralladıqda

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \quad (3)$$

münasibəti alınar, burada C ixtiyari sabitdir. Buradan aydındır ki, (3) tənliyi (1) tənliyinin bütün həllərini təyin edir. Buna görə də (3) münasibətinə (1) tənliyinin ümumi inteqralı deyilir.

Fərz edək ki, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ funksiyaları kəsilməzdir. Bu halda

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (4)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılan tənlik deyildir. Bu tənliyi həll etmək üçün onun hər iki tərəfini $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ hasilinə bölək:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Dəyişənlərinə ayrılmış bu tənliyin ümumi inteqralı

Diferensial tənliklər

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$$

(5)

olar.

(4) tənliyinin (5) ümumi inteqralından alınmayan başqa həlləri də ola bilər. Belə həllər $N_1(y) M_2(x) = 0$ bərabərliyinin ödənilmədiyi nöqtələr içərisində olar

($N_1(y) = 0, M_2(x) = 0$).

$$y' = \frac{1-x}{2+y}$$

Misal. $x = 5, y = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən diferensial tənliyinin həllini tapmalı.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2+y},$$

$$(x-1)dx + (y+2)dy = 0,$$

$$\int (x-1)d(x-1) + \int (y+2)d(y+2) = C_1,$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2 \quad (C^2 = 2C_1).$$

Mərkəzi $O(1,-2)$ nöqtəsində olan çevrələr. Xüsusi həlli tapaq üçün $x = 5, y = 1$ başlanğıc şərtlərdən istifadə edək:

$$(5-1)^2 + (1+2)^2 = C^2, \quad C^2 = 25.$$

Axtarılan xüsusi inteqral

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25. \quad \text{çevrəni müəyyən edir.}$$

Diferensial tənliklər

§ 2. Birtərtibli, bircins diferensial tənliklər. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər

Birtərtibli diferensial tənliklər.

Birtərtibli diferensial tənlik ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır

$$F(x, y, y') = 0.$$

Bu tənliyi axtarılan funksiyanın y' törəməsinə nəzərən həll etmək mümkün olduqda

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

şəklində törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənlik alınır.

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

şəklindədir. Burada C ixtiyari sabitdir. Həndəsi olaraq (2) ümumi həll inteqral əyriləri ailəsindən ibarətdir, yəni C sabitinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun olan xətlər toplusudur. İnteqral əyriləri belə bir xassəyə malikdirlər ki, onların hər bir $M(x, y)$ nöqtəsində toxunanın meyl bucağı

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

şərtini ödəyir.

Əgər inteqral əyrisinin keçdiyi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsini versək, onda bununla sonsuz inteqral əyriləri ailəsindən müəyyən bir inteqral əyrisi seçilir və bu bizim diferensial tənliyin xüsusi həllinə uyğundur.

Analitik olaraq bu tələb $x = x_0$ olduqda $y = y_0$ başlanğıc adlanan şərtə gətirilir. Əgər (2) ümumi həll məlumdursa, onda alırıq ki,

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Bu şərtədən C sabitini müəyyən etmək olar və nəticədə, uyğun xüsusi həlli tapmaq olar. Koşi məsələsi bundan

Diferensial tənliklər

ibarətdir.

Koşi məsələsi. (1) diferensial tənliyinin $y_0 = \varphi(x_0)$ başlanğıc şərti ödəyən, yəni arqumentin $x = x_0$ qiymətində verilmiş $y = y_0$ qiymətini alan $y = \varphi(x)$ həllini tapın.

Koşi məsələsini həndəsi olaraq belə ifadə etmək olar: (1) diferensial tənliyinin verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapın.

Qeyd edək ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyi həmişə

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

(3)

diferensial şəkildə yazmaq olar. Doğrudan da (2) tənliyini

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(x, y)dx - dy = 0$$

kimi yazıb, orada $M(x, y) = f(x, y)$ və $N(x, y) = 1$ qəbul etsək (3) şəklində diferensial tənlik alınar.

Bircins diferensial tənliklər.

Tərif 1. Əgər hər bir k ədədi üçün

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y) \quad (1)$$

eyniliyi doğru olarsa, onda $f(x, y)$ funksiyasına x və y dəyişənlərinə nəzərən n dərəcəli bircins funksiya deyilir.

İndi isə

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

(2)

diferensial tənliyinə baxaq.

Tərif 2. Əgər x və y dəyişənlərinin diferensiallarının $M(x, y)$ və $N(x, y)$ əmsalları eyni dərəcəli bircins funksiyalar

Diferensial tənliklər

olarsa, onda (2) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik adlanır.

$$\frac{y}{x} = z$$

Bu tənliyi həll etmək üçün $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ əvəzləməsi vasitəsilə onu dəyişənlərinə ayrılan tənliyə gətirmək lazımdır.

İndi tutaq ki, bircins diferensial tənlik aşağıdakı şəkildə verilmişdir

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

Əgər $f(x, y)$ funksiyası x və y dəyişənlərinə nəzərən sıfır dərəcəli bircins funksiya olarsa, yəni

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

şerti ödənilərsə, onda (3) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik olar.

$$xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

Misal. diferensial tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

$$x \frac{dy}{dx} = y \ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$y \ln\left(\frac{y}{x}\right) dx - x dy = 0$$

$$M(x, y) = y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{və} \quad N(x, y) = -x$$

birdərəcəli bircins funksiyalardır. Doğrudan da,

Diferensial tənliklər

$$M(kx, ky) = ky \ln \left(\frac{ky}{kx} \right) = ky \ln \left(\frac{y}{x} \right),$$

$$N(kx, ky) = -kx.$$

$$\frac{y}{x} = z$$

Tənliyi həll etmək üçün x , $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq

$$xz \ln z \cdot dx - x(xdz + zdx) = 0.$$

Buradan

$$xdz = z(\ln z - 1)dx,$$

$$x \frac{dz}{dx} = z(\ln z - 1),$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln(\ln z - 1) = \ln x + \ln C, \quad \ln z - 1 = Cx,$$

$$\ln z = Cx + 1, \quad \ln \frac{y}{x} = Cx + 1, \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1}.$$

Nəticədə baxılan tənliyin ümumi həlli $y = xe^{Cx+1}$ olar.

Birtərtibli xətti diferensial tənlik. Bernulli tənliyi.

Axtarılan funksiya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə birtərtibli xətti diferensial tənlik deyilir və aşağıdakı kimi yazılır

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{1}$$

Diferensial tənliklər

$f(x) \equiv 0$ olduqda alınan

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

tənliyinə (1) tənliyinə uyğun xətti bircins tənlik deyilir.

$f(x) \neq 0$ olduqda (1) tənliyi xətti bircins olmayan diferensial tənlik adlanır. (1) tənliyini müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Bu üsullardan biri sabitin variasiyası üsuludur. Bu üsula görə əvvəlcə xətti bircins tənliyin ümumi həlli tapılır. Alınan tənlik dəyişənlərinə ayrılır

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Sonuncu tənliyi integrallasaq

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

buradan isə (2) tənliyinin ümumi həllini alırıq:

$$y = C e^{-\int p(x)dx}. \quad (3)$$

İndi isə xətti bircins tənliyin (3) ümumi həllindəki ixtiyari

C sabitini x-dən asılı $C = C(x)$ funksiyası hesab edək:

$$y = C(x) e^{-\int p(x)dx}. \quad (4)$$

y-in bu ifadəsini (1) tənliyində yerinə yazaraq sadə çevirmələrdən sonra alırıq

$$C'(x) = f(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Buradan isə naməlum C(x) funksiyası tapılır

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

C(x)-in bu ifadəsini (4) bərabərliyində yerinə yazdıqda (1) tənliyinin ümumi həlli alınır:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Diferensial tənliklər

Misal. $y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x^2 + 1$ diferensial tənliyi həll edin.
 Əvvəlcə bircins olmayan

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x^2 + 1 \quad (5)$$

tənliyinin uyğun

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = 0 \quad (6)$$

bircins tənliyini həll edək.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1}dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1},$$

$$\ln y = \ln(x^2 + 1) + \ln C.$$

Axırıncı bərabərlikdən verilmiş bircins diferensial tənliyin ümumi həllini tapırıq: $y = C(x^2 + 1)$. Burada C sabitini x-dən asılı $C = C(x)$ funksiyası hesab edək, onda

$$y = C(x)(x^2 + 1). \quad (7)$$

y-in bu ifadəsini (5) tənliyində yerinə yazsaq alarıq

$$C'(x)(x^2 + 1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2 + 1}C(x)(x^2 + 1) = x^2 + 1.$$

Buradan $C'(x) = 1$, yaxud $C(x) = x + C$. Bu həlli (7) bərabərliyində yerinə yazdıqda (5) tənliyinin həllini alarıq

$$y = (x + C)(x^2 + 1).$$

Bernulli tənliyi. Birtərtibli xətti tənliklərə gətirilə bilən bir növ tənlikdə vardır, hansılara ki, Bernulli tənliyi deyilir. Bernulli tənliyi ümumi şəkildə

Diferensial tənliklər

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0; 1 \quad (8)$$

belə yazılır. Həmin tənlik $z = y^{1-n}$ əvəzləməsi ilə xətti tənliyə gətirilir və daha sonra alınmış birtərtibli xətti tənliyi ikinci $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsi ilə həll edirik.

§ 3. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər. İkitərtibli diferensial tənliklərin həlli

Tam diferensiallı tənliklər. İnteqrallatıcı vuruq.

Tutaq ki,

$$p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

diferensial tənliyin sol tərəfi hər hansı $u(x,y)$ funksiyaının tam diferensialıdır. Onda bu diferensial tənlik tam diferensiallı adlanır.

Tam diferensiallıq. Tərifə əsasən

$$p(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y) = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \quad (2)$$

buradan.

$$p(x,y) = \frac{du}{dx}, \quad Q(x,y) = \frac{du}{dy}$$

Birinci bərabərlikdən y -ə, ikincidən x -ə nəzərən xüsusi törəmə alaıq.

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d^2u}{dx dy}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dx dy}$$

Şvars teoreminə görə

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dx dy}$$

Odur ki,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dQ}{dx} \quad (3)$$

Diferensial tənliklər

bərabərliyi (1) tənliyinin tam diferensiallıq şərti adlanır. Bu bərabərlik ödənildikdə axtarılan $u(x)$ funksiyasını tapmaq olur. Onda (1) diferensial tənliyi $du(x,y) = 0$, bunun həlli isə $u(x,y) = c$ olar.

Misal 1.

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$p = 3x^2 + 6xy^2, \quad Q = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{dp}{dy} = 12xy, \quad \frac{dQ}{dx} = 12xy$$

Tam diferensiallıq şərti ödəndi. Odur ki,

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6xy^2, \text{ hər tərəfi } dx \text{ vurub inteqrallayaq:}$$

$$\int \frac{du}{dx} dx = \int (3x^2 + 6xy^2) dx$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$(\varphi(y)$ hələlik məlum olmayan funksiyadır).

Hər tərəfdən y -ə nəzərən törəmə alaq.

$$\frac{du}{dy} = 6x^2y + \varphi'(y), \quad \frac{du}{dy} = Q \text{ olduğundan}$$

$$6x^2y + 4y^3 = 6x^2y + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 4y^3, \quad \varphi(y) = y^4$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$$

alınır və verilmiş tənliyin ümumi inteqralı.

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

Tutaq ki, (1) tənliyi tam diferensiallı deyil. Yəni 93) şərti ödənilmir. Bəzi hallarda elə $\mu(x,y)$ funksiyası tapmaq olur ki, (1) tənliyinə vurmaqla tənlik tam diferensiallı olur. Yəni

$$\frac{d}{dy}(\mu p) = \frac{d}{dx}(\mu Q)$$

və ya

$$Q \frac{d\mu}{dx} - p \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) \mu,$$

buradan

$$Q \frac{d \ln \mu}{dx} - p \frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{dp}{dy} - \frac{dQ}{dx}, \quad (4)$$

Diferensial tənliklər

Göründüyü kimi xüsusi törəməli diferensial tənlik alındı. Odur ki, xüsusi hallarda baxaq, hansı ki, integrallayıcı vuruğu nisbətən asan tapmaq olur

1) $\mu = \mu(x)$ onda $\frac{d\mu}{dy} = 0$ və (4) tənliyi

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{dp}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{Q} = h(x) \quad (5)$$

şəklinə düşür. Integrallayıb, nəticədə

$$\ln \mu(x) = \int h(x) dx, \quad \mu(x) = e^{\int h(x) dx} \quad (6)$$

tapırıq.

Misal 2.

$$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy$$

(5) düsturunu tətbiq edək.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = \frac{1}{2x^3 + 2x} \cdot (2x^2 + 2 - 6x^2 - 2) = h(x)$$

$$h(x) = -\frac{4x^2}{2x^3 + 2x} = -\frac{2x}{x^2 + 1}, \text{ demək}$$

$$\ln \mu(x) = \int h(x) dx = -\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = -\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^{-1}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

tənliyi $\mu(x)$ -ə vuraq

$$\frac{2x^2y + 2y + 5}{x^2 + 1} dx + \frac{2x^3 + 2x}{x^2 + 1} dy = 0$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{2x^3 + 2x}{x^2 + 1} = 2x$$

$$\frac{du}{dy} dy = 2x dy, \quad u(x, y) = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x)$$

$$\text{Buradan,} \quad \frac{du}{dy} = 2y + \varphi'(x) = \frac{2x^2y + 2y + 5}{x^2 + 1} - 2y =$$

$$\frac{5}{x^2 + 1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2y + 2y + 5}{x^2 + 1} - 2y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

$$\varphi(x) = \int \frac{5}{x^2 + 1} dx = 5 \arctan x.$$

Diferensial tənliklər

Beləliklə, $u(x,y) = 2xy + 5\arctg x$ alınır.

Tənliyin ümumi inteqralı $2xy + 5\arctg x = c$; $x=0$

2) $\mu = \mu(x)$ olduqda, yəni

$$\frac{1}{p} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dp}{dy} \right) = \lambda(y) \text{ olduqda (4) tənliyindən}$$

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \lambda(y) ; \quad \mu = e^{\int \lambda(y) dy} \quad (7)$$

Misal 3.

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7-3xy^3)dy$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dp}{dy} \right) = \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} = -\frac{2}{y} = \lambda(y);$$

$$\mu = e^{\int \lambda(y) dy} = e^{-2 \int \frac{dy}{y}} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{2x^2 - 3y^3}{y^2} dx + \frac{7 - 3yx^2}{y^2} dy = 0;$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3y \right) dy = 0$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 3y, \quad \frac{du}{dx} dx = (2x - 3y) dx,$$

$$u(x,y) = \int (2x - 3y) dx = x^2 - 3xy - \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = -3x + \varphi'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x, \quad \varphi'(y) = \frac{7}{y^2},$$

$$\varphi(y) = \int \frac{7}{y^2} dy = -\frac{7}{y} \quad u(x,y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y}$$

$$x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = c.$$

Verilmiş tənliyin ümumi inteqralıdır.

Tənliyin tərtibinin azadılması halları.

Sərbəst dəyişənə, axtarılan funksiya onun birinci və ikinci tərtib törəməsinə nəzərən tənliyə ikitərtibli diferensial tənlik deyilir. Bu tənliyi ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

Diferensial tənliklər

İkitərtibli diferensial tənliyi eyniliyə çevirən x məchulundan və iki sərbəst ixtiyari C_1 və C_2 sabitlərindən asılı olan $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ funksiyasına bu tənliyin ümumi həlli deyilir.

(1) tənliyinin ümumi həllindən C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərinin verilmiş $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ qiymətlərində alınan $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ həllinə (1) tənliyinin xüsusi həlli deyilir.

Əgər $F(x, y, y', y'') = 0$ tənliyi yüksək törəməyə nəzərən həll ediləndirsə, onda bu tənliyi

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

şəklində göstərmək olar.

Sadə inteqrallanan ikitərtibli diferensial tənliklərə elə tənliklər aiddir ki, (2) bərabərliyinin sağ tərəfində duran funksiya yalnız üç argumentin birindən asılı olsun.

I növ. Tutaq ki,

$$y'' = f(x). \quad (3)$$

Bu tənliyi inteqrallasaq alarıq

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Yenidən inteqrallasaq nəticədə alarıq

$$y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2,$$

burada C_1 və C_2 – ixtiyari sabitlərdir və qeyri-müəyyən inteqrallar uyğun funksiyaların ibtidai funksiyalarıdır.

II növ. Tutaq ki,

$$y'' = f(y). \quad (4)$$

Burada

$$y' = p(y)$$

götürsək (p -yə y -dən asılı funksiya kimi baxsaq) alarıq

Diferensial tənliklər

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Nəticədə, (4) tənliyi aşağıdakı şəkilə düşər

$$p \frac{dp}{dy} = f(y)$$

Dəyişənləri ayırısaq:

$$p dp = f(y) dy$$

Sonuncu tənliyi integrallasaq alarıq:

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y) dy + \frac{C_1}{2}$$

və ya

$$p = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}.$$

$p = \frac{dy}{dx}$ olduğundan əvvəlki tənliyi belə yazmaq olar:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}.$$

Buradan bir daha dəyişənləri ayıraraq və integrallayaraq sonda alarıq:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = \pm (x + C_2).$$

III növ. Tutaq ki,

$$y'' = f(y'). \tag{5}$$

Burada $y' = p(x)$ götürək. Onda

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

olar və (5) tənliyi aşağıdakı şəkilə düşər

Diferensial tənliklər

$$\frac{dp}{dx} = f(p)$$

Dəyişənləri ayıraraq integrallasaq:

$$\frac{dp}{f(p)} = dx \quad \text{və} \quad \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

Bu tənlikdən $p = \frac{dy}{dx}$ kəmiyyətini müəyyən edərək ikinci dəfə integrallama yolu ilə y -ki də tapmaq olar.

Tərtibin azaldılması halları. İkitərtibli

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

diferensial tənliyinin birtərtibli diferensial tənliyinə gətirildiyi aşağıdakı iki hala baxaq.

I hal. Tutaq ki, (1) diferensial tənliyinin sağ tərəfində x dəyişəni aşkar şəkildə daxil deyildir, yəni tənlik

$$y'' = f(y, y') \quad (2)$$

şəklindədir.

Burada

$$y' = p(y) \quad \text{və} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

götürərək

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

birtərtibli diferensial tənliyi alırıq. Burada sərbəst dəyişən kimi y çıxış edir.

II hal. Tutaq ki, (1) diferensial tənliyinin sağ tərəfində y dəyişəni aşkar şəkildə daxil deyildir, yəni tənlik

$$y'' = f(x, y') \quad (3)$$

şəklindədir. Burada

Diferensial tənliklər

$$y' = p(x) \quad \text{və} \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

götürərək məchul p funksiyasının daxil olduğu birtərtibli diferensial tənlik alarıq

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Qeyd edək ki, yuxarıda baxılan II və III növləri (§ 6) (2) və (3) tənliklərinin xüsusi hallarıdır.

Misal 1.

$$y'' = \frac{y'^2}{y} \quad (4)$$

tənliyini həll edin.

Birinci hala görə $y' = p$ və $y'' = p \frac{dp}{dy}$ götürək. Onda (4) tənliyi

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}$$

şəklinə düşər.

Buradan:

1) $p=0$, yəni $y=C$;

$$2) \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}, \text{ yəni } \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \quad \text{və} \quad \ln p = \ln y + \ln C_1.$$

Potensiallasaq alarıq

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 y$$

və nəticədə,

Diferensial tənliklər

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx.$$

İntegralladıqdan sonra alarıq

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2$$

və deməli,

$$y = C_2 e^{C_1 x},$$

burada C_1 və C_2 – ixtiyari sabitlərdir.

Misal 2.

$$\begin{aligned} x=1 \text{ olduqda } y &= \frac{1}{2} \text{ və } y' = 1 \text{ başlanğıc şərtləri ödəyən} \\ xy'' &= 2x - y' \end{aligned} \quad (5)$$

tənliyinin həllini tapın.

(5) tənliyində $y' = p$ və $y'' = \frac{dp}{dx}$ götürək. Onda

$$x \frac{dp}{dx} = 2x - p,$$

yaxud

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{p}{x}. \quad (6)$$

Alınan tənlik bircins tənlik olduğundan $\frac{p}{x} = u$ əvəzləməsi qəbul edək, nəticədə

$$p = xu \text{ və } \frac{dp}{dx} = x \frac{du}{dx} + u.$$

(6) tənliyində yerinə yazsaq alarıq

Diferensial tənliklər

$$x \frac{du}{dx} + u = 2 - u$$

buradan

$$\frac{du}{dx} = \frac{2-2u}{x}, \text{ və ya } \frac{du}{u-1} = -\frac{2dx}{x}.$$

İntegrallasaq alırıq

$$\ln(u-1) = -2 \ln x + \ln C_1$$

və nəticədə,

$$u-1 = \frac{C_1}{x^2}, \text{ yəni } \frac{p}{x} = 1 + \frac{C_1}{x^2} \text{ və } p = x + \frac{C_1}{x}.$$

C_1 ixtiyari sabitini müəyyən etmək üçün verilmiş başlanğıc şərtləri ($x=1$ olduqda $p = y' = 1$) nəzərə alaq:
 $1 = 1 + C_1$, yəni $C_1 = 0$ və beləliklə,

$$p = \frac{dy}{dx} = x.$$

Buradan alırıq $dy = x dx$ və

$$y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{7}$$

C_2 sabitini başlanğıc şərtlərdən tapırıq. (7) düsturunda

$$x=1 \text{ və } y = \frac{1}{2} \text{ götürsək alırıq } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2, \text{ yəni } C_2 = 0.$$

Nəticədə, axtarılan xüsusi həll $y = \frac{x^2}{2}$ olar.

Diferensial tənliklər

3. Hasil və qismətin diferensialını daxilinə alan tənliklər.

İndi isə funksiyaların hasilini və ya qismətini daxilinə alan iki növ tənliyə baxaq, həmin tənliklər aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$d(xy) = x dy + y dx; \quad (1)$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}; \quad (2)$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}. \quad (3)$$

Bu növ tənlikləri

$$xy = u, \quad y = \frac{u}{x} \quad \text{və ya} \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = ux$$

əvəzləmələrin köməyi ilə asanlıqla həll etmək mümkündür. Həmin əvəzləmələrin tətbiqinə aid bir misala baxaq:

Misal 1. (1) halına aid

$$x^2 dy + xy dx = dx$$

tənliyi həll edin.

Ortaq vurug kimi x məchulunu mötərizə xaricinə çıxaraq:

$$x(x dy + y dx) = dx.$$

Tənliyin hər iki tərəfini $\frac{1}{x}$ ifadəsinə vuraq:

$$d(xy) = \frac{1}{x} dx \quad \text{əvəzləmə}$$

$$du = \frac{1}{x} dx. \quad y \cdot x = u$$

Sonuncu tənliyi bircins tənlik kimi həll edək:

$$\int du = \int \frac{1}{x} dx.$$

$$u = \ln x \Rightarrow yx = \ln x + \ln C = \ln(Cx)$$

Buradan alırıq ki, tənliyin ümumi həlli

Diferensial tənliklər

$$y = \frac{\ln(Cx)}{x}.$$

Misal 2. (2) halına aid

$$y^2 x dy - y^3 dx = x^2 dy$$

tənliyi həll edin.

Ortaq vuruğ kimi y^2 məchulunu mötərizə xaricinə çıxaraq:

$$y^2 (x dy - y dx) = x^2 dy.$$

Tənliyin hər iki tərəfini $\frac{1}{x^2 y^2}$ ifadəsinə vuraq:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{1}{y^2} dy$$

əvəzləmə

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = y^{-2} dy$$

$$\frac{y}{x} = u$$

$$\int du = \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$u = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow \frac{y}{x} = C - \frac{1}{y}$$

Burdan alırıq ki, tənliyin ümumi həlli

$$y^2 = x(Cy - 1).$$

VII fəslə aid məsələlər:

Misalların həllinə aid nümunələr:

Misal 1. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$;

Həlli . $\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1-x}$; $\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x} + \ln C$; $\ln(1+y) = \ln(1-x) + \ln C$; $y = C(1-x) - 1$;

Misal 2. $(1-x)dy - ydx = 0$ tənliyinin $x=2$ olduqda $y=1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapın:

Həlli.

Diferensial tənliklər

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1-x} = 0; \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{1-x} = \ln C; \ln y + \ln(x-1) = \ln C;$$

$$\ln y = \ln C \frac{1}{x-1}; y = \frac{C}{x-1}; 1 = \frac{C}{2-1}; C=1; y = \frac{1}{x-1}.$$

Misal 3. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y = e^{kx};$

Həlli. $y' = (e^{kx})' = k e^{kx}; \quad y'' = (k e^{kx})' = k^2 e^{kx};$

$$y'' + 2y' + 5y = k^2 e^{kx} + 2k e^{kx} + 5 e^{kx} = 0;$$

$$e^{kx}(k^2 + 2k + 5) = 0; \quad k^2 + 2k + 5 = 0;$$

$$D = 4 - 20 = -16; \quad k_1 = -1 + 2i; \quad k_2 = -1 - 2i;$$

$$D < 0; \quad y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

Misal 4. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x;$

Həlli: $y = uv; \quad \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}; \quad v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}uv = 3x;$

$$v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v \right) = 3x;$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln v = -\ln x$$

$$v = \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = 3x; \quad du = 3x^2 dx;$$

$$\int du = \int 3x^2 dx + C; \quad u = x^3 + C;$$

$$y = uv = (x^3 + C) \frac{1}{x} = x^2 + \frac{C}{x}$$

Misal 5. $y'' + y' - 2y = 0; \quad y = e^{kx};$

$y' = (e^{kx})' = k e^{kx}; \quad y'' = (k e^{kx})' = k^2 e^{kx};$

$$y'' + y' - 2y = k^2 e^{kx} + k e^{kx} - 2 e^{kx} = 0; \quad e^{kx}(k^2 + k - 2) = 0;$$

$$k^2 + k - 2 = 0; \quad D = 1 + 8 = 9; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = -2;$$

$$D > 0; \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x};$$

VII fəslə aid çalışmalar

Tənlikləri həll edin:

1. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

2. $ydy + \frac{xdx}{x+1} = 0$

3. $(xy-x)dx + (xy+x-y-1)dy = 0;$

4. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

5. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

6. $(x+y)dx + xdy = 0$

7. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

8. $e^x dx + ydy = 0$

9. $xydx + (1+x^2)dy = 0$

10. $(x+y)dx - (y-x)dy = 0$

Yüksək tərtibli diferensial tənlikləri həll edin.

1. $y'' + 2y' + 10y = 0; \quad y = e^{kx}$

2. $y'' - 7y' + 12y = 0; \quad y = e^{kx}$

3. $y'' + 8y' + 25y = 0; \quad y = e^{kx}$

İzahlı lüğət

İZAHLI LÜGƏT

Riyaziyyat - həqiqi aləmin fəza formalarını və kəmiyyətlər arasındakı münasibətləri öyrənən bir elmdir. Riyaziyyat sözü ərəbcədən tərcümədə əldə edilən biliklər heyəti deməkdir.

Ali riyaziyyat - ali təhsil müəssisələrində öyrədilən analitik həndəsə, diferensial hesabı, integral hesabı, xətti cəbr və digər riyaziyyat bölmələrini toplusudur.

Absis - latın dilindən tərcümədə “kəsilmiş, ayrılmış” mənalarını verir. Koordinat sistemini təşkil edən vertikal düz xəttidir.

Adi kəsir - ərəb sözüdür. Vahidin bir neçə hissəyə bölünməsinə deyilir.

Aksiom - müəyyən elmi nəzəriyyə çərçivəsində isbat edilməyən, lakin əsas qəbul edilən təklifdir. Aksiom yunanca “dəyərli” deməkdir.

Alqoritm - verilmiş məsələnin həlli üçün müəyyən ardıcılıqla yerinə yetiriləcək əməllər sırasının dəqiq yazılışdır. Bu termin 1x əsrdə yaşamış özbək riyaziyyatçısı Əl-Xarəzminin adından irəli gəlir.

Arqument - iki dəyişən arasında funksional asılılıq olarsa, onda ixtiyari qiymətlər ala bilən dəyişənə deyilir. Bu termini 1844-cü ildə riyaziyyata O.L.Koşi daxil etmişdir.

Arkkosinus - kosinus funksiyasına nəzərən tərs funksiyadır.

Arkkotangens - kotangens funksiyasına nəzərən tərs funksiyadır.

Arksinus - sinus funksiyasına nəzərən tərs funksiyadır.

Arktangens - tangens funksiyasına nəzərən tərs funksiyadır.

Başlangıclar - Evklidin riyaziyyat tarixində xüsusi yer tutan 13 kitabına deyilir.

İzahlı lüğət

Bezu teoremi - ixtiyari $f(x)$ çoxhədlisinin $(x-a)$ xətti ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq haqqında teoremdir.

Bərabərlik - $(=)$ işarəsi ilə birləşdirilmiş iki ədədi və ya hərfi ifadədir.

Bərabər fiqurlar - bir-birinin üzərinə qoyulduqda tamamilə üst-üstə düşən fiqurlardır.

Bərabərsizlik - böyük $(>)$ və ya kiçik $(<)$ işarəsi ilə bağlanan iki ədədi və ya hərfi ifadədir.

Bərabərsizliyin həlli - dəyişənin bərabərsizliyi doğru edən qiymətidir. Binom - ikihədlidir.

Birqiymətli funksiya - x -in x çoxluğundakı hər bir qiymətinə y -in ancaq bir qiyməti uyğun qoyulduqda, $y=f(x)$ funksiyasına x çoxluğunda təyin olunmuş birqiymətli funksiya deyilir.

Birhədlidir - yalnız vurma və qüvvətə yüksəltmə əməlləri daxil olan cəbri ifadələrdir.

Birdərəcəli birməchullu tənlik: $ax+b=0$ şəklində olan tənliklərdir.

Birdərəcəli ikiməchullu tənlik: $ax+by=0$ şəklində olan tənliklərdir.

Bölmə - bir ədədi o biri ədəddəki təkliklər qədər bərabər hissələrə ayırmaq və ya bir ədədi o biri ədəddəki təkliklər qədər təkliyi olan qruplara ayırmaq əməlidir.

Bölünmə əlaməti - bölmə əməlini aparmadan bir natural ədədin ikinci bir natural ədədə bölünüb-bölünmədiyini ifadə edən qaydadır.

Bölünən və bölən - bir ədəd o birinə qalıqsız bölünərsə, birinci ədəd ikincinin bölünəni, ikinci ədəd isə birincinin bölənidir.

Cəbr - həndəsədən fərqli riyaziyyatdır. O, tənlikləri və funksiyaları öyrənir. Cəbr fənninin əsasını Əl-Xarəzmi qoymuşdur.

İzahlı lüğət

Cəbri ədədlər - tam əmsallı cəbri tənliklərin kökü olan həqiqi və ya kompleks ədədlərə deyilir.

Cəbri ifadə - rəasional cəbri ifadələrin başqa adıdır.

Cəbri funksiya - cəbri tənliyi ödəyən funksiyaadır.

Çevrə - müstəvi üzərində verilmiş nöqtədən verilmiş məsafədə olan və həmin müstəvidə yerləşən bütün nöqtələr çoxluğudur.

Çoxqiymətli funksiya - x argumentinin hər bir qiyməti ilə y funksiyaasına iki və daha çox qiyməti uyğun olan funksiyaadır.

Çoxhədli - toplama və çıxma işarələri ilə bir-birinə bağlı olan bir neçə birhədlidən alınan ifadədir.

Dairəvi funksiya - sinus və kosinus funksiyalarına deyilir.

Deduksiya - ümumi qanunları bilib, bu qanunları xüsusi hallara tətbiqetmə üsuludur. Latin sözü olub “çıxarma” deməkdir.

Determinant - elementləri olan kvadratşəkilli cədvədir. Latin sözüdür və mənası “təyinedici” deməkdir.

Direktris - latin sözü olub və yönəldici xətt deməkdir.

Diskriminant - kvadrat tənliyin köklərinin xarakterini müəyyən edən ifadədir.

Diferensial - x nöqtəsində $y=f(x)$ funksiyaasının $f'(x)$ törəməsi olduqda, $f'(x)$ törəməsi ilə δx artımı hasilidir.

Diferensial tənlik - sərbəst dəyişən x , axtarılan $f(x)$ funksiyaası və onun $f', f'', \dots, f^{(n)}$ törəmələri arasında verilmiş münasibətə deyilir.

Diferensiallanan funksiya - $x=a$ nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin nöqtədə diferensiallandıdır.

Düzbucaqlı koordinat sistemi - qarşılıqlı perpendikulyar olan iki düz xəttin əmələ gətirdiyi sistemdir.

İzahlı lüğət

Düz mütənasib asılılıq - k sıfıra bərabər olmayan ədəd olduqda, iki x və y kəmiyyəti arasında $y=kx$ düsturu ilə ifadə olunan asılılıqdır.

Düstur - hər hansı bir təklifi ifadə edən riyazi işarələr kombinasiyasıdır.

Evrika - Arximed öz adı ilə adlandırılan “Arximed qanununu” kəşf edərkən işlətmişdir. Yunan dilindən tərcümədə “tapdım” deməkdir.

Eyni bərabər ifadələr - bütün uyğun qiymətləri bərabər olan ifadələrdir.

Eynigüclü - ekvivalent deməkdir.

Eynilik - hərflərinin bütün mümkün qiymətlərində doğru olan bərabərlikdir.

Elementar riyaziyyat - XVII əsrə qədər təşəkkül tapmış riyaziyyatdır.

Ellips - müstəvinin fokuslar adlanan verilmiş iki nöqtəsindən məsafələrinin cəmi sabit kəmiyyət olan nöqtələr çoxluğudur.

Ədalət bildirən ədədlər - pifaqorçular ədədin kvadratını ədalətin simvolu adlandırırlar.

Ədəd - rəqəmlərin köməyi ilə ifadə olunan işarələrdir.

Ədəd oxu - üzərində hər bir ədədin uyğun nöqtə ilə göstərildiyi düz xəttidir.

Ədədi ifadə - ədədlərin əməl işarələri vasitəsilə birləşdirilməsindən alınan yazılışdır.

Ədədi orta - bir neçə ədədin cəmini toplananların sayına böldükdə alınan qiismətdir.

Əyrixətli integral - mənfi olmayan və $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyasının əyrixətli integralı, OX oxunun $[a,b]$ parçası, a və b nöqtələrindən OX oxuna çəkilmiş perpendikulyarlarla məhdudlanmış fiqurun sahəsinin qiymətinə deyilir.

İzahlı lüğət

Əyrixətli trapesiya - yuxarıdakı şərtlərlə qurulan fiqurdur.

Əks teorem - tərs teorem deməkdir.

Əks təklif - bir təklifin həm şərti həm də nəticəsi inkaredici şəkllə salındıqda alınan təklif əvvəlkinə görə əks təklifdir.

Əks tərs təklif - əks təklifdə şərt və nəticənin yerini dəyişdikdə alınan təklifdir.

Əks çoxhədlilər - eyni mütləq qiymətli, lakin əks işarəli hədlərdən ibarət olan iki çoxhədlidir.

Əməllər - hesabda öyrənilən dörd əməldir.

Əməllər sırası - bir neçə əməlin ardıcıl olaraq yerinə yetirilməsi qaydasıdır.

Əmsal - hərfi vuruqların qarşısında duran ədədi vuruqdur.

Ərəb rəqəmləri - hazırda istifadə etdiyimiz rəqəmlərə deyilir.

Ərəb sistemi - onluq nömrələmə sistemidir.

Əsas elementar funksiyalar - üstlü, qüvvət, loqarifmik, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalara deyilir.

Funksiya - asılılıq deməkdir.

Hesab - ədədlər və onlar üzərində aparılan əməllər haqqında elmdir. Hesab adı yunan sözü olan aritmosdan götürülmüşdür və mənası ədəd deməkdir. Buna görə hesab elmini Arifmetika da adlandırırlar.

Hesab əməlləri - toplama, çıxma, vurma və bölmə əməlləridir.

Hesabi kök - mənfi olmayan ədədin mənfi olmayan kvadrat köküdür.

Həqiqi ədədlər - bütün rəasional və irrasional ədədlərə deyilir.

İzahlı lüğət

Hiperbola - müstəvinin fokuslar adlanan verilmiş iki nöqtəsindən məsafələri fərqi sabit kəmiyyət olan nöqtələr çoxluğudur.

Xəyali vahid - kvadratı mənfi birə bərabər olan ədəddir və i hərfi ilə işarə olunur. i ədədini riyaziyyata Eyler daxil etmişdir.

Xəyali ədəd - bi şəklində olan ədədlərə deyilir. Xəyali ədəd terminini riyaziyyata Dekart daxil etmişdir.

Xəyali ox - üzərində sırf xəyali ədədlərin yerləşdiyi ordinat oxudur.

Xətti asılılıq - k və b sıfıra bərabər olmayan ədədlər olduqda $y=kx+b$ düsturu ilə ifadə olunan iki x və y kəmiyyətləri arasındakı asılılıqdır.

Xətti tənlik - $ax=b$ şəklində olan tənliklərə deyilir.

Xətti funksiya - $y=ax+b$ şəklində olan funksiya.

İbtidai funksiya - verilmiş aralıqdan bütün x -lər üçün $F'(x)=f(x)$ münasibəti ödənilirsə, onda deyirlər ki, F funksiyası f funksiyanın ibtidai funksiyasıdır.

İndeks - riyazi ifadəyə daxil olan hərfin sağ tərəfində yazılan rəqəm və ya hərfə deyilir.

İnteqral - latınca “summa” sözünün baş hərfindən götürülmüşdür. Bu işarəni riyaziyyata Leybnisin tələbəsi İvan Bernulli daxil etmişdir.

İnteqrallama - verilmiş funksiyanın bütün ibtidai funksiyalarını tapmaq deməkdir.

İsbat - hər hansı xassənin doğruluğunu müəyyən edən mühakimədir.

Kvadrat kök - ikinci qüvvətdən kökə deyilir.

Kvadrat tənlik - ikidərəcəli cəbri tənlikdir.

Kvadrat üçhədli - bir dəyişəni olan ikidərəcəli çoxhədlidir.

İzahlı lüğət

Kəmiyyət - zaman, temperatur,uzunluq və s. vahidlərə deyilir.Kəmiyyət ərəb sözüdür və dilimizə tərcüməsi “miqdar,say” deməkdir.

Kəsilməz funksiya - x nöqtəsi x_0 nöqtəsinə yaxınlaşdığında funksiyanın $f(x)$ qiyməti onun $f(x_0)$ qiymətinə yaxınlaşarsa,onda deyirlər ki, f funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiyadır.

Komponent - bir şeyin tərkib hissəsi deməkdir.

Konqruent - bərabər sözünün ekvivalentidir.

Konstant - sabit kəmiyyət deməkdir və $const$ şəklində yazılır.

Qapalı çoxluq - bütün limit nöqtələri özünə daxil olan çoxluqdur.

Qarışıq ədəd - tərkibində həm tam və həm də kəsr olan ədəddir.

Qauss metodu - xətti tənliklər sisteminin üçbucaq sistemə gətirilməklə yerinə yetirilən həll qaydasıdır.

Qeyri-müəyyənlik - sonsuzluq işarələri ilə yazılan ifadələr qeyri-müəyyənlik olaraq qəbul olunmuşdur.

Qeyri-müəyyən integral - $F(x)$ funksiyası $f(x)$ üçün ibtidai funksiya olduqda,deyirlər ki, $F(x)+c$ ifadəsi $f(x)$ funksiyasının qeyri-müəyyən integralıdır.

Qızıl bölgü - ab parçasının el iki ae və eb kimi hissələrə bölünməsinə deyilir ki, ae hissəsi ab və eb arasında orta mütənasib olsun.

Qurma məsələsi - verilmiş bəzi elementlərinə görə bu və ya başqa bir fiqurun qurulmasını tələb edən məsələlərdir.

Qüvvət - a^x şəklində yazılan ifadələrə deyilir.

Qüvvət funksiyasının törəməsi – x^n funksiyasının törəməsi nx^{n-1} ifadəsinə bərabərdir.

Qüvvətə yüksəltmə - bir neçə bərabər vuruğun hasilini tapmaq əməlidir.

İzahlı lüğət

Loqarifm - b ədədini almaq üçün a ədədini yüksəltmək lazım olan qüvvət üstü b ədədinin a əsasına görə loqarifmidir.

Loqarifmik funksiya - tərkibinə loqarifmik ifadə daxil olan cəbri funksiya.

Loqarifmik tənlik - məchulu loqarifm işarəsi altında olan tənliklərə deyilir.

Loqarifmləmə - ifadədən onun loqarifminə keçməkdir.
Lemma - müstəqil əhəmiyyəti olmayan və yalnız başqa bir teoremi isbat etmək üçün lazım olan təklifdir.

Maksimum və minimum - funksiyanın maksimum və minimum nöqtələridir.

Metodika - latınca “yol, üsul” mənalarını verən metod sözündən götürülmüşdür.

Minimum - ən kiçik miqdar mənasındadır.

Minus - çıxma işarəsinin digər adıdır.

Misal - ərəb sözü olub, mənası nümunə deməkdir.

Misqal - çəki vahididir.

Misl - vurma deməkdir.

Modul - mütləq qiymət deməkdir.

Monoton funksiya - artmayan və azalmayan funksiya.

Mötərizə - əməlləri hansı ardıcılıqla yerinə yetirmək lazım olduğunu göstərən şərti işarələrdir.

Müxtəsər vurma eynilikləri - hesablamanı asanlaşdırmaq üçün işlədilən ifadələrdir.

Mütənasib - ərəb sözüdür, mənası aralarında nisbət olan mənasında işlədilir.

Mütləq qiymət - mənfi ədədin əksi olan müsbət ədəddir.

Mütləq xəta - ölçülən kəmiyyətin dəqiq qiyməti ilə onun təqribi qiyməti arasındakı fərkdir.

Natamam kvadrat tənlik – $ax^2+bx+c=0$ çevrilməmiş tam kvadrat tənliyində b və c kəmiyyətlərindən biri və ya ikisi sıfıra bərabər olduqda alınan tənliklərə deyilir.

İzahlı lüğət

Neper loqarifmi - əsası e olan loqarifmlərə deyilir.

Neper çubuqları - çoxrəqəmli ədədlərin vurulmasını asanlaşdıran üsuldur.

Nisbət - iki ədəddən birinin o birinin hansı hissəsi olduğunu göstərən ədəddir.

Nyüton binomu - n tam və müsbət ədəd olduqda $(a+b)^n$ ifadəsini çoxhədli şəklində göstərən düsturdur.

Nömrələmə - ədədləri adlandırmaq və yazmaq üçün lazım olan qaydalar sistemidir.

Onluq kəsr - məxrəci 10 ədədinin qüvvətlərindən ibarət olan adi kəsrdir.

Onluq işarə - ədədin vergüldən sağ tərəfdə olan bütün rəqəmləridir.

Onluq loqarifm - əsası 10 olan loqarifmdir.

Onluq say sistemi - əsası 10 olan mövqeli say sistemidir.

Ordinat - koordinat sistemində y oxuna verilən addır.

Orta kəmiyyət - kəmiyyətlərin ən böyüyü və ən kiçiyi arasında qalan kəmiyyətdir.

Oxşar hədlər - bir-birindən yalnız əmsalları ilə fərqlənən birhədlilərdir.

Palindromik ədəd - rəqəmlərini tərsinə düzəndə dəyişməyən ədədlərə deyilir.

Parabola - müstəvinin fokus adlanan f nöqtəsindən və direktris adlanan d düz xəttindən eyni uzaqlıqda olan nöqtələr çoxluğu.

Pifaqor ədədləri – $a^2+b^2=c^2$ bərabərliyini ödəyən hər hansı üç natural ədədə deyilir.

Pifaqor teoremi - düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bərabərdir.

Plyus - latınca mənası çox deməkdir və toplama işarəsinin digər adıdır.

Pozision - latınca pozisi sözündən götürülmüşdür və mənası mövqe deməkdir.

İzahlı lüğət

Rasional ədəd - müsbət və mənfi ədədlər sıfırla birlikdə rasional ədədlər adlanır.

Rasional cəbri ifadələr - toplama, çıxma, vurma, bölmə və qüvvətə yüksəltmə əməlləri vasitəsilə rəqəmlər və hərflərlə işarə edilmiş ədədlərdən düzəldilmiş cəbri ifadələrdir.

Rasional funksiya - qüvvət funksiyalarından düzəldilmiş funksiya

Rəqəm - ədədləri yazıda göstərmək üçün işlədilən şərti işarədir.

Riyazi induksiya metodu - müəyyən bir ümumi nəticəyə gəlmək üçün aparılan mühakimə üsuludur. induksiya latın sözüdür və yönəltmək mənasında işlədirilir. Bu metodu ilk dəfə işlədən B. Paskal olmuşdur.

Riyazi təklif - bitmiş bir riyazi fikri ifadə edən söz qrupudur. Roma rəqəmləri - I-bir, V-beş, X-on, L-əlli, C-yüz, D-beş yüz və M-min rəqəmlərinin köməkliyi ilə qurulan say sistemidir.

Sinus - trigonometrik funksiya

Sıfır - hindlilər sıfır rəqəminə sunia (boş), ərəblər isə əs-sifr (heç nə) demişlər.

Sıfır qüvvəti - sıfırdan fərqli hər hansı bir ədədin sıfır qüvvətinin vahidə bərabər olmasıdır.

Tam kvadrat tənlik – $x^2+px+q=0$ şəklində olan tənliklərdir.

Teorem - yunanca teoreo sözündən götürülmüşdür və mənası düşünürəm deməkdir. Doğruluğu isbat yolu ilə meydana çıxan təkliflərdir.

Tənlik - məchulu olan bərabərliyə deyilir.

Tənliklər sistemi - ümumi həlləri axtarılan iki və ya bir neçə tənlikdir.

Tərif - hər hansı anlayışın cinsini və bu cinsdən fərqləndirən növ əlamətini ifadə edən cümlədir.

İzahlı lüğət

Tərs mütənasiblik - iki kəmiyyətdən birinin qiymətləri artdıqda və ya azaldıqda o birinin qiymətləri azalırsa və ya artırsa onda belə kəmiyyətlər tərs mütənasib kəmiyyətlər adlanır.

Tərs teorem - şərti bir teoremin nəticəsi, nəticəsi isə həmin teoremin şərti olan teoremə deyilir.

Tərs funksiya - bir funksiyanın tərsi olan funksiya deyilir.

Toplama - iki və ya bir neçə toplananın cəmini tapmaq üçün edilən hesab əməlidir.

Törəmə - arqumentin δx artımı istənilən qayda ilə sıfıra yaxınlaşdıqda funksiyanın δy artımının δx artımına nisbətinin limiti varsa, onda həmin limitə $y=f(x)$ funksiyanın x arqumentinə nəzərən törəməsi deyilir. Törəmə terminini riyaziyyata Laqranj daxil etmişdir.

Triqonometriya -yunanca triqonon-üçbucaq və metrezis-ölçmək deməkdir.

Triqonometrik funksiyalar - sinus,kosinus,tangens və kotangens funksiyalarına deyilir.

Viyet teoremi - çevrilmiş kvadrat tənliyin köklərinin cəmi əks işarə ilə götürülmüş ikinci əmsala,köklərin hasilini isə sərbəst həddə bərabərdir.

Vinoqradov teoremi - kifayət qədər böyük olan istənilən tək ədəd 3 sadə ədədin cəminə bərabərdir.

Vurma - verilən ədədlərdən birinin o biri ədəddəki təklirlərin sayı qədər toplanan olaraq təkrar edilməsidir.

İSTİFADƏ OLUNAN ƏDƏBİYYAT

1. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. – М., 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.– М.: Наука, 1969.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
6. Кирюшенков В.Н. Лекции по высшей математике (рукопись).
7. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М., 1980.
8. Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.:ИНФРА– М., 1994.
9. Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во МГУ, 1994.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.
11. R.Məmmədov “Ali riyaziyyat kursu” 1-ci hissə, 2-ci hissə, 3-cü hissə.
12. Y.Ş.Səlimov, C.A. İsmayılov, H.B.Hüseynov, Ə.M.Musayev “ Ali riyaziyyatdan testlər”
13. M.S.Alməmmədov, N.A.Mikayılov, T.N.Quluzadə ”Ali Riyaziyyat” 1-ci və 2-ci hissə.

Susanna Aliyeva Mirzalı

ALİ RİYAZİYYATIN ƏSASLARI

Dərslik

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surəti çıxartmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir. Bu dərsliklə bağlı irad və təkliflərinizi **kosmos-190@mail.ru** elektron ünvanına göndərməyiniz xahiş olunur. Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

Naşir: Valeh Mayılov
Dizayner: Vahid Zahidoğlu
Texniki redaktor: Aygün Hüseynova

Yığılmağa verilmişdir: 21.01.2022.

Çapa imzalanıb: 25.01.2022

Hesab – nəşriyyat həcmi. Fiziki çap vərəqi 15, 5.

Formatı 60x84 1/16. Səhifə 154. Ofset kağızı. Ofset çapı.

Tiraj 300 nüsxə, Qiyməti müqavilə ilə.

"MSV NƏŞR" mətbəəsində çap olunmuşdur.

Tel.: +994 55 640 00 94

+994 12 539 54 69