

M.S.Cəbrayilov, B.Ə.Əliyev

RİYAZİ ANALİZ

BİRDƏYİŞƏN
FUNKSİYANIN
İNTEQRAL
HESABI

104
368

M.S.Cəbraylov, B.Ə.Əliyev

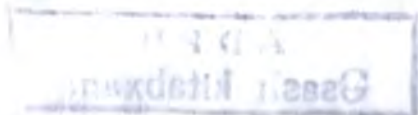
RİYAZİ ANALİZ

Birdəyişənli funksiyanın
integral hesabı

dərs vəsaiti

*Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Tədris-metodika şurasının 25.12.2015-ci il tarixli
iclasının qərarına əsasən çap olunur (pr № 10).*

BAKİ-2016



559459

517-2
C-49

Elmi redaktoru: V.M.Qurbanov
f-r.e.d., professor

Rəyçilər: H.M.Hüseynov
Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi
riyaziyyat" kafedrasının professoru,
f-r.e.d

H.İ.Aslanov
AMEA-nın RMI-nun "Funksional
analiz" şöbəsinin müdiri, f-r.e.d.,
professor

Ə.F.Quliyev
ADPU-nun "Riyazi analiz
kafedrasının" müəllimi, f.r.e.n

356656

Malik Saday oğlu Cəbrayıllov, Bəhram Əli oğlu Əliyev.
Riyazi analiz. Birdəyişənli funksiyanın integral hesabı.
ADPU-nəşriyyatı. Bakı-2016. 376 səh.

ADPU
Əsaslı kitabxana

Giriş

Dərs vəsaiti "Riyaziyyat müəllimliyi", "Riyaziyyat və informatika müəllimliyi" ixtisaslarında "Riyazi analiz" kursunun proqramı əsasında yazılıb və bu kursun "Birdəyişənli funksiyaların inteqral hesabı" bölməsini əhatə edir. Vəsait müəlliflərin əvvəl çap olunmuş "Riyazi analiz" (Birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı) adlı dərs vəsaitinin davamıdır.

Müəlliflər bu vəsaitdə də klassik riyaziyyat dərsliklərinin ənənələrinə sadıq qalaraq, proqramda nəzərdə tutulan əsas teoremlər və təklifləri isbatla vermişdir. Təcrübə göstərir ki, təklifləri isbatsız verdikdə tələbə onu yaxşı mənimsəmir və ona görə də tezliklə unudur. Mənimsəmə prosesinin daha səmərəli olması üçün isbat olunan teoremlər və təkliflərin tətbiqinə aid vəsaitdə kifayət qədər misallar həll edilmişdir.

Zənnimizcə həlləri ilə verilən misallar, tələbələrin müstəqil çalışmalarına əsaslı surətdə kömək edəcəkdir. Şərh olunan mövzuların tələbələrin gələcək fəaliyyətinə aid olan məktəb riyaziyyatına tətbiq imkanları da diqqətdə saxlanılmışdır.

Vəsait dörd fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil "Qeyri müəyyən inteqral" adlanır. Bu fəsil ibtidai funksiya, onun xassələri, qeyri müəyyən inteqrallar, onların müxtəlif üsullarla hesablanması qaydalarına həsr olunmuşdur.

İkinci fəsil "Müəyyən inteqral" adlanır. Burada müəyyən inteqralın xassələri, inteqrallama meyarları, inteqrallanan funksiyaların sinifləri, yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən inteqral, onun xassələri, müəyyən və qeyri-müəyyən inteqral arasında əlaqə və müəyyən inteqrallarla bağlı bəzi bərabərsizliklər şərh olunmuş və bu mövzulara dair xeyli sayda misallar həll edilmişdir.

Üçüncü fəsil "Qeyri məxsusi inteqral" adlanır. Bu fəsildə I və II növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılması üçün müxtəlif əlamətlər verilmiş, baş qiymət mənadı inteqralların yığılması mövzuları şərh olunmuşdur. Tələbələrin bu mövzularda çətinlik

çəkdiyini nəzərə alaraq burada misal həllinə daha çox diqqət yetirilmişdir.

Dördüncü fəsil Müəyyən integralin həndəsə, fizika və mexanika fənnlərində tətbiqlərinə həsr olunub.

Kitab pedaqoji ali məktəblərin tələbələri, orta məktəb müəllimləri, həmçinin "Riyazi analiz" fənnini müstəqil öyrənənlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Vəsait haqqında öz qeydlərini bildirməklə onun təkmilləşməsinə kömək edən elmi redaktor prof.V.M.Qurbanova və rəyçilər prof.H.M.Hüseynova, prof.H.İ.Aslanova və dos.Ə.F.Quliyevə təşəkkürümüzü bildiririk. Vəsait haqqında iradlarını bildiren oxuculara qabaqcadan öz minnətdarlığımızı bildiririk.

I FƏSİL

QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL

§1. İbtidai funksiya anlayışı

Diferensial hesabının əsas məsələsi verilmiş funksiyanın törəməsinin varlığını, varsa tapılması qaydalarını və törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın tədqiqi üsullarını öyrənməkdir. Bir çox tətbiqi əhəmiyyətli məsələlərdə funksiyanın törəməsinə görə özünün tapılması zərurəti yaranır. Belə məsələlərə bir sıra mexanika, fizika, texnika, həndəsə məsələlərinin həllində ehtiyac yaranır. Məsələn, maddi nöqtənin t -dən asılı $v(t)$ hərəkət sürəti məlumdursa, hərəkətin t -dən asılı dəyişdiyi qanunu tapmaq məsələsi belə məsələlərdəndir. Gedilən yolun hərəkət qanununu $s(t)$ ilə işarə etsək, $s'(t) = v(t)$ bərabərliyindən $s(t)$ -nin tapılması məsələsi mexanikanın vacib məsələlərindən hesab olunur. Bu fəsildə əsasən bu tip məsələlərlə məşğul olacağıq. Başqa sözlə verilmiş törəməsinə görə funksiyanın özünün tapılması məsələsini öyrənəcəyik.

Tutaq ki, Δ ədəd oxunda sonlu və ya sonsuz aralıqdır.

Tərif 1. Tutaq ki, $f(x)$ və $F(x)$ Δ aralığında təyin olunmuş funksiyalardır. Əgər $F(x)$ funksiyası bu aralıqda differensiallanandarsa və aralığın hər bir nöqtəsində törəməsi $f(x)$ -in həmin nöqtədəki qiymətinə bərabərdirsə, onda $F(x)$ funksiyasına $f(x)$ -in Δ aralığında ibtidai funksiyası deyilir: $F'(x) = f(x), x \in \Delta$.

Tərifdən aydındır ki, əgər xüsusi halda, $\Delta = [a, b]$ olarsa, onda $x = a$ nöqtəsində $F(x)$ funksiyasının sağ törəməsinin $f(a+0)$ -a bərabər olması nəzərdə tutulur: $F'(a+0) = f(a+0)$. Analoji olaraq $x = b$ nöqtəsində $F(x)$ funksiyasının sol törəməsinin $f(b-0)$ -a bərabər olması nəzərdə tutulur: $F'(b-0) = f(b-0)$.

Verilmiş nöqtədə funksiyanın törəməsinin varlığından onun həmin nöqtədə kəsilməzliyi alındığından aydındır ki, $F(x)$ ibtidai funksiyası Δ aralığında kəsilməz olacaqdır (uc nöqtəsində birtərəfli kəsilməz olacaqdır).

Misal 1. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ funksiyası $\Delta = [0; +\infty)$ aralığında $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.

Doğurdan da $[0; +\infty)$ aralığının istənilən daxili nöqtəsində $F'(x) = \sqrt{x}$ bərabərliyi ödənilir. $x = 0$ nöqtəsində $F(x)$ funksiyasının sağ törəməsini hesablayaq.

$$F'(0+) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{2}{3} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \sqrt{x} = 0 = f'(0+).$$

Beləliklə alırıq ki, $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ funksiyası $[0; +\infty)$ aralığında $f(x) = \sqrt{x}$ -in ibtidai funksiyasıdır.

Misal 2. $F(x) = \operatorname{ctg} x$ funksiyası $\Delta = (0, \pi)$ aralığında $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ funksiyasının ibtidai funksiyadır. Doğurdan da, $\forall x \in (0, \pi)$ üçün

$$F'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

münasibəti ödənilir.

C ixtiyari sabit olduqda Δ aralığının istənilən x nöqtəsində

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

münasibətindən görünür ki, $F(x)$ Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, C ixtiyari sabit olduqda, $F(x) + C$ funksiyası da Δ aralığında $f(x)$ -in ibtidai

funksiyasıdır. Beləliklə, əgər Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiya varsa, onda $f(x)$ -in Δ aralığında sonsuz sayda ibtidai funksiyası vardır.

Bizim əvvəl öyrəndiyimiz anlayışlar-funksiyanın limiti, kəsilməzliyi törəməsi anlayışları lokal xarakter daşıyırdı, yəni funksiyanı müəyyən nöqtənin kiçik ətrafında xarakterizə edirdi. İbtidai funksiya isə funksiyanı müəyyən aralıqda xarakterizə edir.

Teorem 1.1. Müəyyən Δ aralığında diferensiallanan $F(x)$ və $\Phi(x)$ funksiyalarının Δ aralığında eyni bir $f(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyası olması üçün $F(x) - \Phi(x)$ fərqinin bu aralıqda sabit olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $F(x)$ və $\Phi(x)$ funksiyalarının hər ikisi $f(x)$ funksiyasının Δ aralığında ibtidai funksiyasıdır. $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$ olsun. Onda aydındır ki, $\varphi(x)$ funksiyası Δ aralığında diferensiallandıdır və bu aralığın istənilən x daxili nöqtəsində

$$\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

İxtiyari $x_1 \in \Delta$ və $x_2 \in \Delta (x_1 < x_2)$ nöqtəsini qeyd edək. $\varphi(x)$ funksiyası $[x_1, x_2]$ parçasında Laqranj teoreminin bütün şərtlərini ödəyir. Deməli, elə $\xi \in (x_1, x_2)$ var ki, $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1)$ bərabərliyi doğrudur. $\varphi'(\xi) = 0$ olduğundan, Δ aralığının istənilən x_1, x_2 nöqtələri üçün $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ bərabərliyini alırıq. Bu isə $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$ funksiyasının Δ aralığında sabit olduğunu göstərir.

Kafilik. Fərz edək ki, $F(x)$ funksiyası Δ aralığında $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdır, yəni $F'(x) = f(x)$. Digər tərəfdən C ixtiyari olduqda $\Phi(x) = F(x) + C$ funksiyası da $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdır, çünki, $(F(x) + C)' = f(x)$. Deməli, $F(x) - \Phi(x) = C$.

Nəticə 1.1. Əgər $F(x)$ Δ aralığında $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $f(x)$ -in bu aralıqda istənilən digər ibtidai funksiyası $\Phi(x) = F(x) + C$ şəklindədir. Burada C ixtiyari sabitdir. Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri (əgər varsa) digərindən sabit toplanan dəqiqliy ilə fərqlənir.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ funksiyası $f(x) = x^2$ funksiyasının

$\Delta = (-\infty, +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyasıdır. Burada C istənilən sabitdir.

§2. Qeyri-müəyyən integral və onun xassələri

Tərif 1. Müəyyən Δ aralığında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasının bu aralıqdakı bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna (küliyyatına) $f(x)$ funksiyasının Δ aralığında qeyri-müəyyən integralı deyilir və simvolik olaraq

$$\int f(x)dx$$

kimi işarə olunur. Burada, $\int$ simvolu integral işarəsi, $f(x)dx$ - integralaltı ifadə, $f(x)$ integralaltı funksiya, x isə integrallama dəyişəni adlanır.

Əgər $F(x)$ funksiyası Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, onda nəticə 1.1-ə əsasən

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (2.1)$$

münasibəti doğrudur. Qeyd edək ki, (2.1) bərabərliyi iki çoxluğun bərabərliyi kimi başa düşülür. Bu mənada (2.1) bərabərliyini

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$$

kimi yazmaq daha doğru olardı. Bununla belə (2.1) yazılışından istifadə olunur. Bəzən, $\int f(x)dx$ simvolik yazılışı $f(x)$ -in Δ aralığında ibtidai funksiyalar çoxluğu kimi yox, bu çoxluqdan götürülmüş ixtiyari bir ibtidai funksiya kimi başa düşülür.

$f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalar çoxluğunun simvolik göstərilişində inteqral işarəsi altında $f(x)$ -in özünün deyil, $f(x)$ -in dx diferensialına hasilini yazırlar. Belə yazılış hər şeydən əvvəl ibtidai funksiyasının hansı dəyişənin funksiyası olmasını göstərmək üçün edilir. Məsələn,

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \quad \int x^2 z dz = x^2 \frac{z^2}{2} + C$$

bərabərliklərində hər iki halda inteqrallı funksiya $x^2 z$ funksiyasıdır, ancaq bu funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralları müxtəlifdir. Çünki, birinci halda inteqrallama dəyişəni x , ikinci halda isə z -dir.

Əgər $F(x)$, Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının hər hansı ibtidai funksiyasıdırsa, onda (2.1) düsturuna əsasən inteqral işarəsi altında $F(x)$ funksiyasının diferensialı yazılır. Doğrudan da,

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$$

olduğundan,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

münasibəti doğrudur.

$f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasının və ya qeyri-müəyyən inteqralının tapılmasına $F(x)$ funksiyasının inteqrallanması deyilir. İnteqrallama əməli diferensiallama əməlinin tərs əməlidir.

Qeyri-müəyyən inteqralın aşağıdakı dörd əsas xassəsini qeyd edək.

Xassə 1. $f(x)$ funksiyası Δ aralığında ibtidai funksiya malikdirsə, onda istənilən $x \in \Delta$ üçün

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

Doğurdan da, əgər $F(x)$, Δ aralığında $f(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyasıdırsa, onda

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

Xassə 1 –dən xüsusi halda alırıq:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Xassə 2. Əgər $F(x)$ funksiyası Δ aralığında diferensiallandırsa, onda

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ və ya } \int F'(x)dx = F(x) + C$$

bərabərliyi doğrudur.

Doğurdan da (2.1) bərabərliyinin sol tərəfində $dF(x) = f(x)dx$ bərabərliyini nəzərə alsaq, tələb olunan bərabərliyi alırıq.

Xassə 3. Əgər $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyalarının Δ aralığında ibtidai funksiyaları varsa, onda $f_1(x) + f_2(x)$ funksiyanın da Δ aralığında ibtidai funksiyası var və aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad (2.2)$$

İsbatı. Tutaq ki, $F_1(x)$ və $F_2(x)$ funksiyaları Δ aralığında uyğun olaraq $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyalarının ibtidai funksiyalarıdır, yəni istənilən $x \in \Delta$ nöqtəsində $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$ bərabərlikləri ödənilir.

Onda $\int f_1(x)dx = F_1(x) + C_1$, $\int f_2(x)dx = F_2(x) + C_2$ bərabərliyini yaza bilərik. Burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərdir.

$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ işarə edək. Onda aydındır ki, $x \in \Delta$ olduqda

$$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

olduğundan, $F(x)$ funksiyası Δ aralığında $f_1(x) + f_2(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası olar. Beləliklə, $x \in \Delta$ olduqda

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$$

bərabərliyini alarıq. Burada C ixtiyari sabitdir. Digər tərəfdən $x \in \Delta$ olduqda

$$\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2.$$

Göründüyü kimi (2.2) bərabərliyinin sol tərəfi $F_1(x) + F_2(x) + C$ şəklində, sağ tərəfi isə $F_1(x) + F_2(x) + C_1 + C_2$ şəklində funksiyalar çoxluğudur C, C_1, C_2 istənilən sabitlər olduğundan bu çoxluqlar üst-üstə düşür, yəni (2.2) bərabərliyi doğrudur.

Xəssə 4. Əgər $f(x)$ funksiyasının Δ aralığında ibtidai funksiyası varsa, onda k istənilən sabit ədəd olduqda $k \cdot f(x)$ funksiyasının da Δ aralığında ibtidai funksiyası var və $k \neq 0$ olduqda

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (2.3)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. Tutaq ki, $F(x)$ Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Onda Δ aralığında $(kF(x))' = kf(x)$ olduğundan aydındır ki, $k \cdot F(x)$ funksiyası Δ aralığında $k \cdot f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası olacaqdır, yəni

$$\int kf(x) dx = kF(x) + C_1$$

Burada C_1 ixtiyari sabitdir.

Beləliklə, (2.3) bərabərliyinin sol tərəfi $k \cdot F(x) + C_1$ şəklində funksiyalar çoxluğudur. (2.3) bərabərliyinin sağ tərəfi isə

$$k(F(x) + C) = kF(x) + kC$$

şəklində olan funksiyalar çoxluğudur. C və C_1 ixtiyari sabitlər olduğundan, $k \neq 0$ şərti daxilində bu çoxluqlar üst-üstə düşür, yəni (2.3) bərabərliyi doğrudur.

Misal 1. İsbat edin ki, $\int f(t)dt = F(t) + C$ olarsa,

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (2.4)$$

olar.

İsbatı. (2.4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadənin törəməsini hesablayaq:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right]' &= \frac{1}{a} F'(ax + b)(ax + b)' = \\ &= F'(ax + b) = f(ax + b). \end{aligned}$$

Başqa sözlə, $\frac{1}{a} F(ax + b) + C$ funksiyası $\Delta = (-\infty, +\infty)$ aralığında $f(ax + b)$ -nin ibtidai funksiyasıdır, yəni (2.4) bərabərliyi doğrudur.

§3. İnteqrallar cədvəli

Yuxarıda qeyd etdik ki, əgər $F(x)$ funksiyası hər hansı Δ aralığında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, yəni Δ aralığında $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənirsə, onda $f(x)$ -in qeyri-müəyyən inteqralı üçün

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bərabərliyi doğrudur. Bu mühakimədən istifadə edərək elementar funksiyaların törəmələrinin köməyi ilə bəzi sadə elementar funksiyaların qeyri-müəyyən integralları üçün aşağıdakı cədvəli yazmaq olar:

$$1^0. \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$2^0. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$3^0. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$4^0. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5^0. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6^0. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7^0. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z});$$

$$8^0. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z});$$

$$9^0. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, \quad |x| < a;$$

$$10^0. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$11^0. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (\text{əgər kök altında}$$

$x^2 - a^2$ olarsa, onda $|x| > a$ götürülür);

$$12^0. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (|x| \neq a);$$

$$13^0. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$14^0. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$15^0. \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C ;$$

$$16^0. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C \quad (x \neq 0).$$

Qeyd 1. Qeyri-müyyən inteqrala tərif verərkən $F(x)$ funksiyanın $f(x)$ -in ibtidai funksiyası olduğu Δ aralığını qeyd edirik. Belə ki, $\int f(x)dx = F(x) + C$ bərabərliyi $F'(x) = f(x)$ bərabərliyinin ödəndiyi aralıqda doğrudur, məsələn, 3^0 düsturu $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ aralığında, 9^0 düsturu $(-a, a)$ aralığında doğrudur.

İnteqralı hesablamaq dedikdə inteqraltı funksiyanın ibtidai funksiyanın tapılması başa düşülür. İbtidai funksiyanın hansı çoxluqda axtarılması inteqraltı ifadədən müəyyən edilir.

Bəzi düsturların isbatına diqqət edək. 3^0 düsturunun doğruluğunu göstərək.

$x > 0$ olduqda $\ln|x| = \ln x$ olduğundan,

$$(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x} \text{ olar, } x < 0 \text{ olduqda } \ln|x| = \ln(-x)$$

olduğundan

$$(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = -\frac{1}{x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Deməli, $x \neq 0$ olduqda $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$ olar, yəni 3^0 düsturu doğrudur.

12^0 düsturunun doğruluğunu isbat edək. Sadəlik üçün $a = 1$ götürək.

$|x| \neq 1$ olduğundan, $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ və $(1, +\infty)$ aralıqlarında 12^0 düsturunun doğruluğunu yoxlamaq lazımdır.

$$-\infty < x < -1 \Leftrightarrow -\infty < x + 1 < 0; \quad 2 < 1 - x < +\infty.$$

Onda, $(-\infty, -1)$ aralığında $\frac{1+x}{1-x} < 0$ olar.

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln \left(-\frac{1+x}{1-x} \right) \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right)' &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(-\frac{1+x}{1-x} \right) \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1+x} \cdot \left(-\frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)' \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

$(-1, 1)$ aralığına baxaq.

$$-1 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1+x < 2;$$

$$-1 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 2.$$

Deməli, $(-1, 1)$ aralığında $\frac{1+x}{1-x} > 0$ olar. Onda,

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right)' &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

$(1, +\infty)$ aralığına baxaq.

$$1 < x < +\infty \Leftrightarrow 2 < 1+x < +\infty;$$

$$1 < x < +\infty \Leftrightarrow -\infty < -x < -1 \Leftrightarrow -\infty < 1-x < 0.$$

Deməli, $(1, +\infty)$ aralığında $\frac{1+x}{1-x} < 0$. Ona görə,

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln \left(-\frac{1+x}{1-x} \right)$$

bərabərliyi doğrudur. Aydınadır ki, bu halda da

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right)' = \frac{1}{1-x^2},$$

yəni, 12^0 düsturu doğrudur.

Qeyd 2. Məlumdur ki, hər bir elementar funksiyanın törəməsi də elementar funksiya. Başqa sözlə, diferensiaslama əməli elementar funksiyalar sinifindən kənara çıxmır. Ancaq inteqrallama əməli bu xassəyə malik deyildir, yəni elə elementar funksiyalar var ki, onların qeyri-müəyyən inteqralı elementar funksiya deyildir. Ona görə də diferensiaslama əməlindən fərqli olaraq heç də bütün elementar funksiyaların inteqralı elementar funksiyalarla ifadə olunmur, yəni elə elementar funksiyalar var ki, onların inteqralı elementar funksiyaların sonlu kombinasiyası şəklində göstərilə bilmir.

Məsələn, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ inteqralını elementar funksiyalarla ifadə

etmək mümkün deyil.

Lakin bu o demək deyildir ki, bu inteqrallar mövcud deyil. Elementar funksiyalar sinifi bu mənada kifayət deyil. Qeyd edək ki, bir çox tətbiqi əhəmiyyətli inteqrallar var ki, onlar elementar funksiyalarla ifadə olunmur. Belə inteqrallara misal olaraq aşağıdakıları göstərmək olar.

$$1^0. \int e^{-x^2} dx, \quad (\text{Puasson inteqralı});$$

$$2^0. \int \cos x^2 dx \quad (\text{Frenel inteqralı});$$

$$3^0. \int \sin x^2 dx \quad (\text{Frenel inteqralı});$$

$$4^0. \int \frac{dx}{\ln x} \quad (0 < x \neq 1) \quad (\text{inteqral loqarifm});$$

$$5^0. \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (x \neq 0) \quad (\text{integral kosinus});$$

$$6^0. \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (x \neq 0) \quad (\text{integral sinus}).$$

Bu integralların hər birində integralaltı funksiya kəsilməz olduğundan onlar mövcuddur, ancaq isbat edilmişdir ki, bu integrallar elementar funksiyalarla ifadə olunmur. Bu integralların riyazi analizin özündə və fizikada mühüm rolu vardır. Məsələn, Frenel integralları optikada geniş istifadə olunur. Puasson integralı istilikkeçirmə və diffuziya nəzəriyyəsinə mühüm rol oynayır.

Bir çox hallarda verilmiş integralı integralaltı funksiya üzərində eyni çevirilmələr aparmaqla elə integrala gətirmək olur ki, sonuncu integralı hesablamaq üçün qeyri-müəyyən integralın əsas xassələrindən və integrallar cədvəlindən istifadə etmək mümkün olur.

Misal 1. $\int \frac{2^{2x-1} - 3^{2x+3}}{6^{2x}} dx$ qeyri-müəyyən integralını hesablayın.

Həlli. Integralaltı funksiya üzərində müəyyən çevirmələr aparmaqla integrallar cədvəlində 4^0 düsturundan istifadə edək.

$$\int \frac{2^{2x-1} - 3^{2x+3}}{6^{2x}} dx = \int \frac{4^x \cdot 2^{-1} - 9^x \cdot 3^3}{36^x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{4^x}{36^x} dx - \int 3^3 \frac{9^x}{36^x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{9}\right)^x dx - 27 \int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \frac{1}{9}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x - 27 \cdot \frac{1}{\ln \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^x + C =$$

$$= -\frac{1}{2 \ln 9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x + \frac{27}{\ln 4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + C.$$

Misal 2. $\int \lg^2 x dx$ qeyri-müəyyən integralını hesablayın.

Həlli. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$
 $= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 1 \cdot dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

Misal 3. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ qeyri-müəyyən integralını hesablayın.

Həlli. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{x^2 + (1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx =$
 $= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$

Misal 4. $\int \frac{dx}{5x^2+6}$ integralını hesablayın.

Həlli. $\frac{1}{5x^2+6} = \frac{1}{5\left(x^2 + \frac{6}{5}\right)} = \frac{1}{5\left(x^2 + \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2\right)}$

olduğundan, integrallar cədvəlində 10^0 düsturuna görə,

$$\int \frac{dx}{5x^2+6} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{6}} x + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{6}} x + C.$$

Misal 5. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ integralını hesablayın.

Həlli. $4x^2 + 4x + 5$ kvadrat üçhədlisinin tam kvadratını ayıraq. $4x^2 + 4x + 5 = (2x + 1)^2 + 2^2$ olduğundan, integrallar cədvəlində 10^0 düsturuna və (2.4)-ə əsasən,

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x + 1)}{(2x + 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{2} + C.$$

Misal 6. $\int \sin(5x - 2) dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\int \sin(5x - 2) dx = \frac{1}{5} \int \sin(5x - 2) d(5x - 2)$ olduğundan, integrallar cədvəlində 5^0 düsturuna və (2.4)-ə əsasən,

$$\begin{aligned} \int \sin(5x - 2) dx &= \frac{1}{5} \int \sin(5x - 2) d(5x - 2) = \\ &= -\frac{1}{5} \cos(5x - 2) + C. \end{aligned}$$

Misal 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$ integralını hesablayın.

Həlli. $\sqrt{7 - 6x - x^2} = \sqrt{4^2 - (x + 3)^2}$ olduğundan, integrallar cədvəlində 9^0 düsturuna və (2.4)-ə əsasən,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}} = \int \frac{d(x + 3)}{\sqrt{4^2 - (x + 3)^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x + 3}{4} + C.$$

§4. Dəyişənin əvəz edilməsi ilə integrallama üsulu

Funksiyanın integrallanmasının ən effektiv üsullarından biri dəyişənin əvəz edilməsi ilə integrallama üsuludur. x -in dəyişmə aralığını Δ_x , t -nin dəyişmə aralığını isə Δ_t ilə işarə edək.

Teorem 4.1. Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $f(x)$ və $\varphi(t)$ funksiyaları uyğun olaraq Δ_x və Δ_t aralıqlarında təyin olunmuşdur və $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$.

2) $f(x)$ funksiyasının Δ_x aralığında $F(x)$ ibtidai funksiyası var, yəni

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (4.1)$$

3) $\varphi(t)$ funksiyası Δ_t aralığında diferensiallananıdır.

Onda, $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ funksiyasının Δ_t aralığında $F[\varphi(t)]$ ibtidai funksiyası var və

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt = \int f(x)dx, \quad x = \varphi(t) \quad (4.2)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $f(x)$ və $F(x)$ funksiyaları Δ_x aralığında təyin olunmuşdur. 1) şərtinə əsasən $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$ olduğundan $f(\varphi(t))$ və $F(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyaları təyin edilmişdir. $F(x)$ funksiyası Δ_x aralığında, $\varphi(t)$ funksiyası isə Δ_t aralığında diferensiallanan olduğundan $F[\varphi(t)]$ funksiyası iki diferensiallanan funksiyanın kompozisiyası kimi Δ_t aralığında diferensiallananıdır və mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması haqqındakı teoremə əsasən Δ_t aralığının istənilən t nöqtəsində

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (4.3)$$

bərabərliyi ödəyir. (4.3) bərabərliyi onu göstərir ki, $F[\varphi(t)]$ funksiyası Δ_t aralığında $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biridir. Onda qeyri-müəyyən inteqralın tərifinə görə

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \quad (4.4)$$

bərabərliyini yazı bilərik. Burada C istənilən sabitdir. (4.1) düsturunda $x = \varphi(t)$ qəbul etsək alarıq:

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \quad (4.5)$$

(4.4) və (4.5) düsturlarının sağ tərəfləri bərabərdir və deməli sol tərəfləri də bərabər olmalıdır, yəni (4.2) bərabərliyi doğrudur. Teorem isbat olundu.

(4.2) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq

$$\int f(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}. \quad (4.6)$$

Bəzən (4.6) düsturunu tətbiq edərkən əvvəlcə verilmiş inteqralı (4.6) bərabərliyinin sol tərəfi şəklinə gətirmək daha münasibdir. Sonra $\int f(x)dx$ inteqralını hesablayıb, x -in yerinə $\varphi(t)$ yazmaq lazımdır. (4.6) düsturuna əvəzetmə ilə inteqrallama düsturu deyilir.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx \text{ şəklində inteqralları hesablamaq üçün } u = \varphi(x)$$

əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u} \Big|_{u=\varphi(x)} = (\ln|u| + C) \Big|_{u=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Məsələn,

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int \frac{du}{u} \Big|_{u=\ln x} = (\ln|u| + C) \Big|_{u=\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Qeyd edək ki, (4.6) düsturunu bir çox hallarda əks ardıcılıqla (sağdan sola) istifadə etmək daha münasibdir. Başqa sözlə,

$\int f(x)dx$ inteqralını hesablamaq üçün əvvəlcə bu inteqral

$x = \varphi(t)$ əvəzləməsi vasitəsilə $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$ inteqralına

gətirilir (sonuncu inteqralın hesablanması müəyyən mənada daha asan hesab edildisə). Hesab edirik ki, $\varphi(t)$ funksiyası

müəyyən Δ_t aralığında diferensiasıllanandır və $t = \varphi^{-1}(x)$ tərs

funksiyası vardır. $\varphi^{-1}(x)$ tərs funksiyasının varlığı üçün $\varphi(t)$ -

nin Δ_t aralığında ciddi monoton olmasını tələb etmək

kifayətdir. Bu halda, məlum olduğu kimi birqiymətli $\varphi^{-1}(x)$ tərs funksiyası mövcuddur. Beləliklə,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (4.7)$$

(4.7) düsturu da dəyişənin əvəz edilməsi ilə inteqrallama düsturu adlanır.

Beləliklə, qeyri-müəyyən inteqralların dəyişənin əvəz edilməsi ilə hesablanmasında aşağıdakı iki qaydaya riayət olunması məqsədəuyğundur.

Birinci qayda. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ şəklində inteqralları hesablamaq üçün onu $\int f(\varphi(x))d\varphi(x)$ şəklində yazmaq lazımdır. Sonra $\varphi(x)=t$ əvəzləməsi aparıb, alınan inteqralı (t -dən asılı) hesablayıb, alınan nəticədə t -nin əvəzinə $\varphi(x)$ yazmaq lazımdır. Bəzi nümunələr göstərək.

$$1. \int \sin^n x \cdot \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) =$$

$$= \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C ;$$

$$2. \int \sin mx dx = \frac{1}{m} \int \sin mx d(mx) = \frac{1}{m} \int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{m} \cos t + C = -\frac{1}{m} \cos mx + C ;$$

$$3. \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C ;$$

$$4. \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n d(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C ;$$

İkinci qayda. $\int f(x)dx$ şəklində integralları hesablamaq üçün $x = \varphi(t)$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada hesab olunur ki, $\varphi(t)$ müəyyən aralıqda diferensiallanan və $t = \varphi^{-1}(x)$ tərsi olan funksiya. Alınan integralı (t -dən asılı) hesablayıb, nəticədə t -nin yerinə $\varphi^{-1}(x)$ yazmaq lazımdır.

İntegralı hesablayarkən hansı qaydanın tətbiqi integralaltı funksiya asılıdır. Elə etmək lazımdır ki, əvəzləmədən sonrakı integralın hesablanması daha asan olsun.

Misal 1. $\int \cos(4+3x)dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $4+3x=t$ əvəzləməsi aparsaq, $dt=3dx$ olar. Onda

$$\int \cos(4+3x)dx = \int \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin(4+3x) + C.$$

Misal 2. $\int \frac{dx}{14x+3}$ integralını hesablayın.

Həlli. $14x+3=t$ əvəzləməsi aparsaq, $dt=14dx$ olar. Onda

$$\int \frac{dx}{14x+3} = \frac{1}{14} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{14} \ln|t| + C = \frac{1}{14} \ln|14x+3| + C.$$

Misal 3. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\sqrt[3]{1-x}=t$ əvəz edək. Onda $x=1-t^3$, $dx=-3t^2 dt$ olar.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx &= \int (1-t^3)^2 \cdot t \cdot (-3t^2) dt = -3 \int (1-t^3)^2 t^3 dt = \\ &= -3 \int (t^3 - 2t^6 + t^9) dt = -3 \left(\frac{t^4}{4} - 2 \frac{t^7}{7} + \frac{t^{10}}{10} \right) + C = \\ &= -3t^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{7} t^3 + \frac{1}{10} t^6 \right) + C = -3t^4 \left(\frac{35 - 40t^3 + 14t^6}{140} \right) + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{140}(1-x)^{4/3} [35 - 40(1-x) + 14(1-x)^2] + C = \\
&= -\frac{3}{140}(1-x)^{4/3} [35 - 40 + 40x + 14 - 28x + 14x^2] + C = \\
&= -\frac{3}{140}(1-x)^{4/3} (14x^2 + 12x + 9) + C.
\end{aligned}$$

Misal 4. $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $1-5x^2 = t$ əvəz edək. Buradan, $-10x dx = dt$,
 $x dx = -\frac{dt}{10}$, $x^2 = \frac{1-t}{5}$ alırıq. Onda

$$\begin{aligned}
\int x^3(1-5x^2)^{10} dx &= \int x^2(1-5x^2)^{10} x dx = \int \frac{1-t}{5} t^{10} \left(-\frac{dt}{10}\right) = \\
&= -\frac{1}{50} \int (t^{10} - t^{11}) dt = -\frac{1}{50} \left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{12}}{12} \right) + C = \\
&= -\frac{1}{50} \left[\frac{(1-5x^2)^{11}}{11} - \frac{(1-5x^2)^{12}}{12} \right] + C = \\
&= -\frac{1}{50} \left[\frac{12 - 11(1-5x^2)}{132} \right] (1-5x^2)^{11} + C = \\
&= -\frac{1+55x^2}{6600} (1-5x^2)^{11} + C.
\end{aligned}$$

Misal 5. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\sin x = t$ əvəzləməsi aparsaq, $\cos x dx = dt$. Onda

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx &= \int \cos^4 x \sqrt{\sin x} \cos x dx = \\
&= \int (1-t^2)^2 \sqrt{t} dt = \int \sqrt{t} dt - 2 \int t^2 \sqrt{t} dt + \int t^4 \sqrt{t} dt = \\
&= \int t^{\frac{1}{2}} dt - 2 \int t^{\frac{5}{2}} dt + \int t^{\frac{9}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{t^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1} + C =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + C = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}t^2 + \frac{2}{11}t^4 \right) + C =$$

$$= \sqrt{\sin^3 x} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x \right) + C.$$

Misal 6. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ integralını hesablayın.

Həlli. İntegralaltı ifadə üzərində sadə çevirmə aparaq və $\ln x = t$ əvəz edək.

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\ln x \frac{dx}{x}}{\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\ln x d(\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{1+t}} =$$

$$\int \frac{1+t}{\sqrt{1+t}} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \int \frac{(1+t)d(1+t)}{\sqrt{1+t}} - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} =$$

$$= \int \sqrt{1+t} d(1+t) - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} = \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - 2(1+t)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}[(1+\ln x) - 3] + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}(\ln x - 2) + C.$$

Yuxarıdakı integrallar I qayda ilə hesablanıb. Növbəti misallarda II qaydadan istifadə olunur.

Misal 7. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx (a \neq 0)$ integralını hesablayın.

Həlli. $x = a \operatorname{sh} t$ əvəzləməsi aparsaq, $dx = a \operatorname{ch} t dt$ olar.

Onda,

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \int \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} a \operatorname{ch} t dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{a^2}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{2} \int e^{2t} d(2t) + 2 \int dt - \frac{1}{2} \int e^{-2t} d(-2t) \right] = \\
&= \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2t} + 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + C = \frac{a^2}{4} \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t \right) + C = \\
&= \frac{a^2}{4} sh 2t + \frac{a^2}{2} t + C.
\end{aligned}$$

t dəyişənini ilkin x dəyişəni ilə ifadə edək. Bunun üçün $x = a sh t$ bərabərliyindən istifadə edək.

$$sh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{olduğundan,} \quad x = a \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{və ya}$$

$$ae^{2t} - 2xe^t - a = 0 \text{ alırıq.}$$

Buradan,

$$e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

münasibətini alırıq. $e^t > 0$ olduğundan, sonuncu bərabərlikdə radikal işarəsi qarşısında «+» işarəsi götürülməlidir. Beləliklə,

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{|a|}.$$

Buradan, $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ ($C = -\ln|a|$) alırıq.

$ch^2 t = 1 + sh^2 t$ eyniliyindən istifadə etsək,

$$ch t = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{|a|} \text{ alırıq.}$$

$$\text{Onda } sh 2t = 2 sh t ch t = 2 \frac{x}{|a|} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{|a|} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2} \text{ olar.}$$

Deməli,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.\end{aligned}$$

Misal 8. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$ ($a > 0$) integralını hesablaym.

Həlli. $x = 2a \sin^2 t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) əvəzləməsi aparaq. Onda

$$dx = 4a \sin t \cdot \cos t dt.$$

$$\begin{aligned}\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx &= \int 2a \sin^2 t \sqrt{\frac{2a \sin^2 t}{2a - 2a \sin^2 t}} \cdot 4a \sin t \cdot \cos t dt = \\ &= 8a^2 \int \sin^2 t \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot \sin t \cdot \cos t dt = 8a^2 \int \sin^2 t \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \sin t \cdot \cos t dt = \\ &= 8a^2 \int \sin^4 t dt = 8a^2 \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{8a^2}{4} \int (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \\ &= 2a^2 \left[\int dt - 2 \int \cos 2t dt + \int \cos^2 2t dt \right] = \\ &= 2a^2 \left[\int dt - \int \cos 2t d(2t) + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4t) dt \right] = \\ &= 2a^2 \left[t - \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right] + C = \\ &= 2a^2 \left[\frac{3}{2} t - \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right] + C.\end{aligned}$$

t dəyişənini ilkin x dəyişəni ilə ifadə edək. $x = 2a \sin^2 t$

bərabərliyindən $\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}$ münasibətini alırıq. $0 < t < \frac{\pi}{2}$

olduğundan $\sin t > 0$ olur və deməli, sonuncu bərabərlikdə kök işarəsi qarşısında «+» işarəsi götürülməlidir.

$$\text{Buradan, } t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} \text{ alırıq.}$$

İndi isə $\sin 2t$ və $\sin 4t$ ifadələrini x dəyişəni ilə ifadə edək. $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \frac{x}{2a} = \frac{2a-x}{2a}$ olduğundan,

$$\cos t = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}} \text{ alırıq. } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ intervalında } \cos t > 0 \text{ oldu-}$$

ğundan, sonuncu bərabərlikdə radikal işarəsi qarşısında «+» işarəsi götürülmüşdür.

$$\text{Onda } \sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sqrt{\frac{x}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)};$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \frac{2a-x}{2a} - \frac{x}{2a} = \frac{2a-2x}{2a} = \frac{a-x}{a};$$

$$\sin 4t = 2 \sin 2t \cdot \cos 2t = 2 \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)} \cdot \frac{a-x}{a} =$$

$$= \frac{2}{a^2} \sqrt{x(2a-x)}(a-x).$$

Deməli,

$$\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 2a^2 \left[\frac{3}{2} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{a^2} \sqrt{x(2a-x)}(a-x) \right] + C =$$

$$= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{x(2a-x)} \left(-2a + \frac{a-x}{2} \right) + C =$$

$$= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C, \quad 0 \leq x < 2a$$

Qeyri-müəyyən inteqralın tətbiqinə aid bəzi nümunələr göstərək.

Misal 9. $F(x) = \sin 3x \cdot \cos^3 x + \cos 3x \cdot \sin^3 x$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli. $F(x)$ funksiyasının törəməsini tapaq:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cos 3x \cos^3 x - 3 \sin 3x \cos^2 x \cdot \sin x - 3 \sin 3x \cdot \sin^3 x + \\ &+ 3 \cos 3x \sin^2 x \cos x = 3 \cos^2 x (\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x) + \\ &+ 3 \sin^2 x (\cos 3x \cos x - \sin 3x \cdot \sin x) = \\ &= 3(\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x) = 3 \cos 4x. \end{aligned}$$

$F'(x)$ funksiyası $3 \cos 4x$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri olduğundan, $F(x)$ funksiyası $\int 3 \cos 4x dx$ funksiyalar çoxluğu içərisindədir.

$$\int 3 \cos 4x dx = \frac{3}{4} \sin 4x + C \quad \text{olduğundan,} \quad \int F'(x) dx = F(x) + C$$

bərabərliyindən istənilən $x \in (-\infty, +\infty)$ üçün alırıq:

$$\frac{3}{4} \sin 4x + C = \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x.$$

Xüsusi halda, məsələn, $x = 0$ götürsək, $C = 0$ alırıq.

Beləliklə,

$$\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

Misal 10. İfadəni sadələşdirin:

$$F(x) = 1 - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

Həlli. $F(x)$ funksiyasının törəməsini tapaq.

$$\begin{aligned} F'(x) &= -3(4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x) + \\ &+ 2(6 \sin^5 x \cos x - 6 \cos^5 x \sin x) = -12 \sin^3 x \cos x + 12 \cos^3 x \sin x + \\ &+ 12 \sin^5 x \cos x - 12 \cos^5 x \sin x = 12 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \\ &+ 12 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 12 \sin x \cos x \cos 2x - \\ &- 12 \sin x \cos x \cos 2x = 0. \end{aligned}$$

$\int 0 dx = C$ olduğundan, $F(x)$ funksiyası bu sabitlər içərisindən seçilməlidir. Onda elə C_0 sabiti var ki, istənilən $x \in (-\infty, +\infty)$ üçün $F(x) = C_0$ bərabərliyi ödəyir. Xüsusi halda $x = 0$ götürsək, $C_0 = 0$ alırıq. Beləliklə, $F(x) = 0$.

Misal 11. Eyniliyi isbat edin:

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Həlli. $f(x) = \sin^4 x$ işarə edək və $f(x)$ -in qeyri-müəyyən inteqralını tapaq. Bunun üçün dərəcəni aşağı salma düsturlarından istifadə edəcəyik.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

$f(x) = \left(\int f(x) dx \right)'$ olduğundan (bax, §2, xassə 1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\int f(x) dx \right)' = \left(\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C \right)' = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

§5. Hissə-hissə inteqrallama üsulu

Teorem 5.1. Tutaq ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları hər hansı Δ aralığında diferensiallanandır və bu aralıqda $\int v(x) du$ qeyri-müəyyən inteqralı mövcuddur.

Onda, Δ aralığında $\int u(x)dv$ inteqralı da var və

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du \quad (5.1)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki, funksiyanın diferensialının tərifinə və I tərtib diferensialın invariantlıq xassəsinə görə (5.1) düsturunu

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (5.2)$$

şəklində yazmaq olar.

Tutaq ki, u və v funksiyaları Δ aralığında diferensiallanmışdır. Onda hasilin diferensiallanması qaydasına görə

$$d(uv) = v du + u dv.$$

Buradan,

$$u dv = d(uv) - v du \quad (5.3)$$

əldırıq. (5.3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hər iki toplananın inteqralı mövcuddur. Qeyri-müəyyən inteqralın ikinci və üçüncü xassələrinə görə (bax, §2)

$$\int d(uv) = uv + C. \quad (5.4)$$

Teoremin şərtinə görə isə $\int v du$ inteqralı mövcuddur.

Ona görə də qeyri-müəyyən inteqralın üçüncü xassəsinə görə (5.3) bərabərliyinin sol tərəfinin də qeyri-müəyyən inteqralı var və aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du.$$

Burada, (5.4) düsturundakı C – inteqrallama sabiti nəzərə alınmayıb. Bu inteqrallama sabiti $\int v du$ inteqralından yaranan inteqrallama sabitinə aid edilmişdir.

(5.1) və ya (5.2) düsturuna hissə-hissə inteqrallama düsturu deyilir.

Misal 1. $J = \int x \ln x dx$ integralım hesablaym.

Həlli. $u = \ln x$, $dv = x dx$ götürək. Onda

$du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ olar. Onda (5.2) düsturuna görə

$$J = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Beləliklə,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Misal 2. $J = \int x^2 e^{-2x} dx$ integralını hesablaym.

Həlli. $u = x^2$, $e^{-2x} dx = dv$ götürsək,

$du = 2x dx$, $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ olar. Onda (5.2) düsturuna görə

$$J = -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} + \int e^{-2x} x dx.$$

$\int e^{-2x} x dx$ integralını hesablamaq üçün hissə-hissə integrallama düsturunu təkrar tətbiq edək. $u = x$, $e^{-2x} dx = dv$ götürsək,

$du = dx$, $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ olar. (5.2) düsturuna əsasən,

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} x dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} \int e^{-2x} d(-2x) \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

Nəticədə,

$$J = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x^2 + x + \frac{1}{2}) + C$$

alırıq.

Misal 3. $J = \int x^2 \sin 2x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $x^2 = u$, $\sin 2x dx = dv$ qəbul etsək, $du = 2x dx$,
 $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ olar. (5.2) düsturunu tətbiq etsək,

$J = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$ alırıq. $\int x \cos 2x dx$ inteqralını
 hesablamaq üçün təkrar (5.2) düsturundan istifadə edək.

$u = x$, $\cos 2x dx = dv$ olsun. Onda $du = dx$, $v = \frac{1}{2} \sin 2x$ olar.

Beləliklə,

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Nəticədə,

$$J = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Misal 4. $J = \int x^2 \arccos x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $\arccos x = u$, $x^2 dx = dv$ qəbul etsək,
 $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{x^3}{3}$ olar. Onda (5.2) düsturuna əsasən,

$$J = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ alırıq. } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ inteqralını}$$

hesablamaq üçün təkrar (5.2) düsturundan istifadə edək.

$u = x^2$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ qəbul etsək,

$$du = 2x dx,$$

$$v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}$$

alırıq.

Onda,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -x^2 \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} 2x dx = \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} d(x^2) = \\
&= \sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Nəticədə,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right) + C = \\
&= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \times \left(x^2 + \frac{2}{3} (1-x^2) \right) + C = \\
&= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} \right) = \\
&= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{9} \sqrt{1-x^2} (x^2 + 2) + C.
\end{aligned}$$

Misal 1-də hissə-hissə inteqrallama düsturunu bir dəfə, misal 2, misal 3 və misal 4-də isə iki dəfə ardıcıl tətbiq etməli olduq. Bir sıra hallarda bu düsturu bir neçə dəfə təkrar tətbiq etməyə ehtiyac yaranır. $P_n(x)$ n dərəcəli çoxhədli olarsa,

$\int P_n(x) \cos ax dx$, $\int P_n(x) \sin bx dx$ -tipli inteqralları hesabla-
maq üçün hissə-hissə inteqrallama düsturunu n dəfə tətbiq etmək lazımdır.

Bəzən, hissə-hissə inteqrallama üsulunu ardıcıl olaraq bir neçə dəfə tətbiq etdikdən sonra verilmiş inteqralın özü alınır. Başqa sözlə əgər verilmiş inteqralı J ilə işarə etsək, hissə-hissə inteqrallama üsulunu ardıcıl olaraq bir neçə dəfə tətbiq etdikdən sonra, J -dən asılı tənlik alınır və alınan bu tənlikdən J tapılır. Aşağıdakı misala baxaq.

Misal 5. $J = \int e^{ax} \sin bxdx$ integralını hesablayın
($a, b \neq 0$)

Həlli. $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$ qəbul etsək, $du = ae^{ax}dx$,
 $v = -\frac{1}{b}\cos bx$ olar. Onda (5.2) düsturuna əsasən,

$$J = \int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int \cos bxe^{ax} dx$$

alırıq. Sonuncu integrala (5.2) düsturunu təkrar tətbiq edək.

$u = e^{ax}$, $dv = \cos bxdx$ götürsək,

$du = ae^{ax}dx$, $v = \int \cos bxdx = \frac{1}{b}\sin bx$ alırıq. Onda

$$\int \cos bxe^{ax} dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} J$$

alırıq.

Beləliklə,

$$\begin{aligned} J &= -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} J \right) = \\ &= -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a \cdot e^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} J. \end{aligned}$$

J -dən asılı tənlik aldığımız. Bu tənlikdən J -ni tapacağıq.

$$J \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{b^2} = \frac{(a \sin bx - b \cos bx)e^{ax}}{b^2}$$

Buradan,

$$J = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Hissə-hissə integrallama üsulundan istifadə edərkən u və dv ifadələrinin seçilməsi mühüm rol oynayır. Qeyd edək ki, misal 5-də hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edərkən $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$, kimi də götürmək olar. u və dv -nin

ifadələri münasib seçilmədikdə, adətən (5.2) düsturunu tətbiq etdikdə sağ tərəfdə daha mürəkkəb inteqrallar yarana bilər. Adətən u - olaraq inteqralaltı ifadənin elə hissəsi götürülür ki du daha sadə olsun.

Qeyd 1. Bəzi hallarda inteqralların hesablanmasında dəyişənin əvəz edilməsi və hissə-hissə inteqrallama üsullarının hər ikisi tətbiq olunur.

Misal 6. $J = \int x \sin \sqrt{x} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $x = t^2$ əvəzləməsi aparsaq, $dx = 2t dt$ olar. Onda $J = \int t^2 \sin t \cdot 2t dt = 2 \int t^3 \sin t dt$ alırıq.

Alınan inteqrala hissə-hissə inteqrallama düsturunu ardıcıl olaraq üç dəfə tətbiq etsək,

$$J = 2(6 - x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2 - x)\sin \sqrt{x} + C$$

alırıq.

Misal 7. $J = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ ($a > 0$) inteqralını hesablayın.

Həlli. $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $dv = dx$ qəbul etsək $du = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $v = x$ olar. Onda (5.2) düsturuna görə

$$J = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

olar. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ inteqralında inteqralaltı ifadə üzərində sadə

çevirmələr aparıb, inteqrallar cədvəlində 11⁰ düsturundan istifadə etsək,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \int \frac{a^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx - \\ &- a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = J - a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C \end{aligned}$$

olar. Onda

$$J = x\sqrt{a^2 + x^2} - J + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

alırıq. J -yə nəzərən tənlik aldıq. Buradan,

$$J = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

Qeyd 2. $P(x)$ n dərəcəli çoxhədli olduqda $\int P(x)e^{ax} dx$ şəklinə integralları hesablayarkən, $n \geq 3$ olduqda hissə-hissə integrallama metodundan istifadə etdikdə müəyyən texniki çətinliklər yaranır. Aydınır ki, bu şəkildə integralları hesablayarkən nəticədə $Q(x)e^{ax}$ şəklinə funksiya yaranır. Burada $Q(x)$ dərəcəsi $P(x)$ -in dərəcəsinə bərabər olan müəyyən çoxhəddidir. Ona görə də $\int P(x)e^{ax} dx$ şəklinə integralları hesablamaq üçün qeyri-müəyyən əmsallar metodundan istifadə etmək daha münasibdir. Bu üsulun mahiyyətini aşağıdakı misalla izah edək.

Misal 8. $J = \int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx$ integralını hesablayın.

Həlli.

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{3x} + C$$

şəklinə axtaraq. Burada A, B, D, E hələlik qeyri-müəyyən əmsallardır. Bu bərabərliyin hər tərəfindən törəmə alaq. Onda $(x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} = [3(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) + 3Ax^2 + 2Bx + D]e^{3x}$.

x -in eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirsək,

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 3B + 3A = -2, \\ 3D + 2B = 0, \\ 3E + D = 5, \end{cases}$$

sistemi alırıq. Bu sistemdən

$$A = \frac{1}{3}, B = -1, D = \frac{2}{3}, E = \frac{13}{9} \text{ alarıq. Beləliklə,}$$

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{13}{9} \right) e^{3x} + C.$$

Misal 9. $J = \int \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} dx$ inteqralları hesablayın.

Həlli. Əvvəlcə əvəzetmə metodundan istifadə etməklə verilmiş inteqralı daha sadə şəkllə salağ və sonra hissə-hissə inteqrallama metodundan istifadə edək.

$$\arctg x = t \text{ əvəzləməsi aparsaq, } x = t g t, x^2 = t g^2 t, \frac{dx}{1+x^2} = dt$$

olar. Onda verilmiş inteqral $J = \int t \cdot t g^2 t dt$ şəklinə düşər. Bu inteqralı hissə-hissə inteqrallama metodu ilə hesablayaq. $u = t$, $v = t g^2 t dt$ qəbul edək. Onda $du = dt$

$$v = \int t g^2 t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = t g t - t$$

olar. (5.2) düsturuna görə

$$\begin{aligned} J &= \int t \cdot t g^2 t dt = t(t g t - t) - \int (t g t - t) dt = \\ &= t \cdot t g t - t^2 - \int \frac{\sin t}{\cos t} dt + \frac{t^2}{2} + C = \\ &= t \cdot t g t - \frac{t^2}{2} + \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} + C = t \cdot t g t - \frac{t^2}{2} + \ln |\cos t| + C. \end{aligned}$$

Yenidən x dəyişəninə qayıtsaq, $t = \arctg x$, $\cos^2 t = \frac{1}{1+t g^2}$

$$\text{olduğundan, } |\cos t| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\ln |\cos t| = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \text{ olar.}$$

Beləliklə,

$$J = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

Misal 10. $J = \int \arcsin^2 x \, dx$ inteqralları hesablayın.

Həlli. Birbaşa hissə-hissə inteqrallama metodundan istifadə etmək münasib deyildir. $\arcsin x = t$ əvəzləməsi apararaq. Hesab edirik ki, $x \in [-1, 1]$. Aydınır ki, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

və $\sin t = x$, $dx = \cos t \, dt$ olacaqdır. Onda verilmiş inteqral aşağıdakı şəkllə düşəcəkdir: $J = \int t^2 \cos t \, dt$

Bu inteqralı hesablamaq üçün hissə-hissə inteqrallama metodundan istifadə edək. $u = t^2$, $\cos t \, dt = dv$ qəbul etsək, $du = 2t \, dt$, $v = \sin t$ olar. Onda $J = t^2 \sin t - 2 \int t \cdot \sin t \, dt$ olar.

$\int t \cdot \sin t \, dt$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama düsturunu təkrar tətbiq edək. $u = t$, $\sin t \, dt = dv$ götürsək, $du = dt$, $v = -\cos t$ olar. Onda

$$J = t^2 \sin t - 2(-t \cos t + \int \cos t \, dt) = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C$$

x dəyişəninə qayıdaq. $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda,

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2} \text{ olduğundan,}$$

$$J = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

§6. Cəbri çoxhədlilərin vuruqlara ayrılması

Tutaq ki,

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0) \quad (6.1)$$

kompleks əmsallı n dərəcəli cəbri çoxhədlidir. İstənilən sabit kompleks ədədə sıfır dərəcəli çoxhədli kimi baxmaq qəbul olunmuşdur.

Tərif 1. Əgər $P_n(z_0) = 0$ olarsa, z_0 kompleks ədədi $P_n(z)$ cəbri çoxhədlisinin kökü adlanır.

Məlumdur ki, z_0 ədədinin $P_n(z)$ çoxhədlisinin kökü olması üçün zəruri və kafi şərt $P_n(z)$ çoxhədlisinin $z - z_0$ fərqinə qalıqsız bölünməsidir (Bezu teoremi).

Cəbrin əsas teoreminə görə $n \geq 1$ olduqda istənilən $P_n(z)$ cəbri çoxhədlisinin heç olmazsa bir kökü vardır (ümumiyyətlə desək, kompleks),

Məlumdur ki, Bezu teoreminə görə əgər z_1 kompleks ədədi $P_n(z)$ ($n \geq 1$) çoxhədlisinin köküdürsə, onda $P_n(z)$ üçün

$$P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z) \quad (6.2^1)$$

ayrılığı doğrudur. Burada $Q_{n-1}(z)$ dərəcəsi $n-1$ olan cəbri çoxhədlidir. $Q_{n-1}(z_1) \neq 0$ və yaxud $Q_{n-1}(z_1) = 0$ ola bilər.

Əgər $n > 1$ olarsa və $Q_{n-1}(z_1) \neq 0$ olarsa onda cəbrin əsas teoreminə görə $Q_{n-1}(z)$ çoxhədlisinin heç olmazsa bir kökü vardır. Bu kökü z_2 ilə işarə edək. Onda

$$Q_{n-1}(z) = (z - z_2)Q_{n-2}(z) \quad (6.2^2)$$

bərabərliyi doğru olar. Burada $Q_{n-2}(z)$ $n-2$ dərəcəli çoxhədlidir. Mühakimələri bu qayda ilə davam etdirsək aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$Q_{n-2}(z) = (z - z_3)Q_{n-3}(z) \quad (6.2^3)$$

$$Q_1(z) = (z - z_n)Q_0(z) \quad (6.2^n)$$

Sonuncu bərabərlikdə $Q_0(z)$ ilə sıfır dərəcəli müəyyən çoxhədli işarə olunmuşdur, yəni $Q_0(z) = c_0 = \text{const}$.

(6.2¹) - (6.2⁴) bərabərliklərindən

$$P_n(z) = c_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (6.3)$$

ayrılışını alırıq. Bu ayrılışdakı c_0 əmsalı sıfırdan fərqlidir, əks halda $P_n(z)$ çoxhədli eynilik kimi sıfır bərabər olardı. (6.3) ayrılışından aydındır ki, $P_n(z_1) = P_n(z_2) = \dots = P_n(z_n) = 0$. Bu isə o deməkdir ki, $z_1, z_2, \dots, z_n$ ədədləri $P_n(z)$ çoxhədlişinin kökləridir. Digər tərəfdən (6.3) bərabərliyindən aydındır ki, $z_1, z_2, \dots, z_n$ ədədlərindən fərqli istənilən kompleks b ədədi üçün $P_n(b) \neq 0$ münasibəti ödəyir. Bu o deməkdir ki, $P_n(z)$ cəbri çoxhədlişinin $z_1, z_2, \dots, z_n$ ədədlərindən fərqli başqa kökü yoxdur. Beləliklə, $P_n(z)$ çoxhədlişinin n sayda kökü vardır. Əgər $P_n(z)$ çoxhədlişinin şəkli məlumdursa, onda (6.3) ayrılışında iştirak edən c_0 sabitini müəyyən edə bilərik. Tutaq ki, $P_n(z)$ (6.1) şəklindədir. (6.1) və (6.3) bərabərliklərində z^n -in əmsallarını müqayisə etsək $c_0 = a_0$ alırıq.

Əgər $P_n(z)$ çoxhədli (6.1) şəklində təyin olunubsa və $a_0 = 1$ isə, onda $P_n(z)$ çoxhədlişinə gətirilmiş çoxhədli deyilir. Gətirilmiş çoxhədli üçün (6.3) düsturu

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (6.4)$$

şəklində olar.

Bundan sonra biz yalnız gətirilmiş çoxhədliyə diqqət ayıracağıq.

Əgər (6.2¹) ayrılışında $Q_{n-1}(z_1) = 0$ olarsa, onda Bezu teoreminə görə $Q_{n-1}(z_1)$ çoxhədlişini $Q_{n-1}(z) = (z - z_1)Q_{n-2}(z)$ şəklində göstərə bilərik, burada $Q_{n-2}(z)$ $n-2$ dərəcəli müəyyən çoxhədli. Nəticədə bu halda

$$P_n(z) = (z - z_1)^2 Q_{n-2}(z)$$

ayrılışını alarıq, yəni $P_n(z)$ çoxhədlişi $(z - z_1)^2$ -na bölünür.

Tərif 2. Əgər (6.1) bərabərliyi ilə təyin olunan n dərəcəli $P_n(x)$ cəbri çoxhədlişi $k_1 \geq 1$ natural ədəd olmaqla $(z - z_1)^{k_1}$ -ə bölünürsə və $(z - z_1)^{k_1+1}$ -ə bölünmürsə, onda k_1 ədədinə $P_n(z)$ çoxhədlisinin z_1 kökünün təkrarlanma sayı deyilir.

Ayındır ki, $1 \leq k_1 \leq n$.

Əgər $k_1 = 1$ olarsa, onda z_1 kökü $P_n(z)$ çoxhədlisinin sadə kökü, $k_1 > 1$ olduqda isə z_1 kökü $P_n(z)$ çoxhədlisinin k_1 dəfə təkrarlanan kökü adlanır.

Əgər z_1 kökü $P_n(z)$ çoxhədlisinin k_1 dəfə təkrarlanan köküdürsə, onda Bezu teoreminə görə $P_n(z)$ çoxhədlişi üçün aşağıdakı ayrılış doğrudur.

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0$$

Burada $Q_{n-k_1}(z)$ $n - k_1$ dərəcəli çoxhədlidir. $n - k_1 \geq 1$ olduqda cəbrin əsas teoreminə görə $Q_{n-k_1}(z)$ çoxhədlisinin kökü vardır. Bu kökü z_2 ilə işarə edək. Tutaq ki, z_2 kökü k_2 dəfə təkrarlanır. Onda

$$Q_{n-k_1}(z) = (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z), \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0$$

ayrılışını alarıq.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, sonlu addımdan sonra gətirilmiş $P_n(z)$ çoxhədlişi üçün

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N}$$

ayrılışını alarıq. Burada $i \neq j$ olduqda $z_i \neq z_j$ və $i, j = 1, 2, \dots, N$. Ayındır ki, $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$ olmalıdır.

Tutaq ki,

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (6.5)$$

n dərəcəli gətirilmiş cəbri çoxhədlisi verilmişdir və $a_1, a_2, \dots, a_n$ əmsalları həqiqi ədəldir. Belə çoxhədliyə həqiqi əmsallı çoxhədli deyilir.

Həqiqi əmsallı çoxhədlinin aşağıdakı mühüm xassəsini qeyd edək.

Teorem 6.1. Əgər z_0 kompleks ədədi həqiqi əmsallı (6.5) cəbri çoxhədlisinin k dəfə təkrarlanan köküdürsə, onda z_0 ədədinin qoşması olan $\bar{z}_0$ ədədi də həmin çoxhədlinin k dəfə təkrarlanan köküdür.

İsbatı. Əvvəlcə isbat edək ki, həqiqi əmsallı $P_n(z)$ çoxhədlisi üçün

$$\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z}) \quad (6.6)$$

bərabərliyi doğrudur. Burada $\bar{z}$, z kompleks ədədin qoşmasıdır. Həqiqi a_i , $i = 1, \dots, n$ ədədləri üçün

$\bar{a}_1 = a_1, \bar{a}_2 = a_2, \dots, \bar{a}_n = a_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \overline{P_n(z)} &= \overline{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \overline{z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} = \\ &= \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \bar{z} + \bar{a}_n = P_n(\bar{z}) \end{aligned}$$

(6.6) bərabərliyindən xüsusi halda alırıq ki, əgər b kompleks ədədi həqiqi əmsallı $P_n(z)$ çoxhədlisinin köküdürsə, onda $\bar{b}$ kompleks qoşması da $P_n(z)$ çoxhədlisinin köküdür.

$\bar{\bar{z}} = z$ münasibətindən istifadə etməklə (6.6) bərabərliyindən alırıq.

$$P_n(z) = \overline{P_n(\bar{z})} \quad (6.7)$$

Tutaq ki, z_0 kompleks ədədi (6.5) həqiqi əmsallı $P_n(z)$ çoxhədlisinin k dəfə təkrarlanan köküdür. Bu o deməkdir ki,

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0$$

bərabərliyi doğrudur. Burada $Q_{n-k}(z)$ $n-k$ dərəcəli mütəyyən cəbri çoxhədlidir və z_0 ədədi bu çoxhədlinin kökü deyil. (6.7) bərabərliyinə əsasən

$$P_n(z) = \overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)} \quad (6.8)$$

alırıq.

$$\begin{aligned} \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)} &= \overline{(z - z_0)^k} \cdot \overline{Q_{n-k}(z)} = (z - z_0)^k \cdot \overline{Q_{n-k}(z)} \\ &= (z - z_0)^k \cdot Q_{n-k}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

(6.9)-u (6.8) –də nəzərə alsaq,

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(\bar{z})$$

alırıq. Teoremin hökmünü isbat etmək üçün z_0 ədədinin $Q_{n-k}(\bar{z})$ çoxhədlisinin kökü olmadığını göstərmək kifayətdir.

Doğurdan da $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$ olduğundan $\overline{Q_{n-k}(z_0)} = Q_{n-k}(\bar{z_0}) = Q_{n-k}(z_0) \neq 0$ olar. Teorem isbat olundu.

Bundan sonra həqiqi dəyişənli həqiqi əmsallı cəbri çoxhədlilərə baxacağıq. Ona görə də dəyişəni z ilə yox, x ilə işarə edəcəyik.

Teorem 6.1-dən istifadə edərək həqiqi əmsallı $P_n(x)$ cəbri çoxhədlisini gətirilmiş vuruqların hasili şəklində göstərək.

Tutaq ki, $P_n(x)$ çoxhədlisinin m sayda müxtəlif $x_1, x_2, \dots, x_m$ həqiqi kökləri vardır və bu köklər uyğun olaraq $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dəfə təkrarlanır və eləcə də, uyğun olaraq $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ dəfə təkrarlanan kompleks $z_1, z_2, \dots, z_s$ kökləri vardır. Onda teorem 6.1-ə görə $P_n(x)$ çoxhədlisi üçün

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} (x - z_1)^{\lambda_1} (x - z_1)^{\lambda_1} \times \\ &\times (x - z_2)^{\lambda_2} (x - z_2)^{\lambda_2} \dots (x - z_s)^{\lambda_s} (x - z_s)^{\lambda_s} \end{aligned} \quad (6.10)$$

ayrılığı doğrudur. Aydındır ki,

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s) = n$ olmalıdır.

$z_k (k = \overline{1, s})$ kökünün həqiqi və xəyali hissələrini uyğun olaraq u_k və v_k ilə işarə etsək, $z_k = u_k + i v_k$, $\bar{z}_k = u_k - i v_k$ olar.

İstənilən $k (k = \overline{1, s})$ üçün

$$\begin{aligned} (x - z_k)^{\lambda_k} (x - \bar{z}_k)^{\lambda_k} &= \left[(x - z_k)(x - \bar{z}_k) \right]^{\lambda_k} = \\ &= \left[(x - u_k - i v_k)(x - u_k + i v_k) \right]^{\lambda_k} = \\ &= \left[(x - u_k)^2 + v_k^2 \right]^{\lambda_k} = (x^2 + p_k x + q_k)^{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Burada, $p_k = -2u_k$, $q_k = u_k^2 + v_k^2$, $(k = \overline{1, s})$ işarə olunmuşdur.

(6.11) bərabərliyini (6.10)-də nəzərə alsaq, həqiqi əmsallı n dərəcəli $P_n(x)$ çoxhədlisini

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ &\times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s} \end{aligned} \quad (6.12)$$

şəklində göstərmək olar.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $x^2 + p_k x + q_k$ kvadrat üçhədlisinin diskriminantı üçün

$$\frac{p_k^2}{4} - q_k = -v_k^2 (k = \overline{1, 2, \dots, s})$$

bərabərliyi doğrudur. z_k -lar həqiqi olmadığından $v_k \neq 0$ olar.

Onda sonuncu bərabərlikdən

$$\frac{p_k^2}{4} - q_k < 0 \quad (k = \overline{1, 2, \dots, s}) \quad (6.13)$$

alarıq. (6.13) şərti onu göstərir ki, (6.12) ayrılışında $x^2 + p_k x + q_k (k = \overline{1, 2, \dots, s})$ kvadrat üçhədlisinin həqiqi kökləri yoxdur.

§7. Düzgün rasiyal kəsrlərin sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərilməsi

$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şəklində olan funksiyalara rasiyal funksiya və yaxud rasiyal kəsr deyilir. Burada, $P_m(x)$ və $Q_n(x)$ uyğun olaraq m və n dərəcəli həqiqi əmsallı cəbri çoxhədlilərdir və $n \geq 1$. Əgər $m < n$ olarsa, onda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rasiyal kəsrinə düzgün rasiyal kəsr, $m \geq n$ olduqda isə düzgün olmayan rasiyal kəsr deyilir.

Tutaq ki, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ düzgün olmayan rasiyal kəsrdir ($m \geq n$). Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi qaydasından istifadə etməklə, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şəklində düzgün olmayan rasiyal kəsri, tam rasiyal ifadə ilə düzgün rasiyal kəsrin cəmi şəklində göstərmək olar:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)}.$$

Burada, P_{m-n} $m - n$ dərəcəli müəyyən çoxhədli, $P_k(x)$ isə k ($k \leq n - 1$) dərəcəli müəyyən çoxhədlidir (əgər sıfır deyilsə). $P_{m-n}(x)$ -ə qismət, $P_k(x)$ -ə isə $P_m(x)$ -in $Q_n(x)$ -ə bölünməsindən alınan qalıq çoxhədli deyirlər.

Düzgün rasiyal kəsrlər haqda aşağıdakı lemmaları isbat edək:

Lemma 7.1. Tutaq ki, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m < n$) həqiqi əmsallı

düzgün rasiyal kəsrdir və a həqiqi ədədi $Q_n(x)$ çoxhədlisinin $k \geq 1$ dəfə təkrarlanan köküdür, yəni,

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdot Q_{n-k}(x), \quad Q_{n-k}(a) \neq 0 \quad (7.1)$$

ayrılığı doğrudur. Burada $Q_{n-k}(x)$ həqiqi əmsallı $n-k$ dərəcəli mütəyyən çoxhədlidir. Onda elə həqiqi A ədədi və $P_l(x)$ həqiqi əmsallı çoxhədlisi var ki,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-l} Q_{n-k}(x)} \quad (7.2)$$

göstərilişi doğrudur.

İsbatı. (7.2) ayrılışının doğru olması üçün zəruri və kafi şərt $AQ_{n-k}(x) + (x-a)P_l(x) \equiv P_m(x)$ olmasıdır.

Bu bərabərlikdə $x=a$ götürsək, $A = \frac{P_m(a)}{Q_{n-k}(a)}$ alarıq (şərtə görə $Q_{n-k}(a) \neq 0$). $P_l(x)$ çoxhədlisini tapmaq üçün aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$(x-a)P_l(x) = P_m(x) - \frac{P_m(a)}{Q_{n-k}(a)} \cdot Q_{n-k}(x).$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfi həqiqi əmsallı çoxhədlidir.

$$F(x) = P_m(x) - \frac{P_m(a)}{Q_{n-k}(a)} Q_{n-k}(x)$$

qura edək. $F(x)$ -in dərəcəsi $(n-1)$ -i aşağı bilməz, çünki, $m \leq n-1$ və $n-k \leq n-1$. Aydındır ki, $F(a) = 0$. Ona görə $F(x)$ çoxhədlisi $(x-a)$ -ya qalıqsız bölünür və deməli,

$$P_l(x) = \frac{F(x)}{x-a}.$$

Aydındır ki, $P_l(x)$ -in dərəcəsi $(n-2)$ -ni aşağı bilməz.

(7.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfindəki sonuncu kəsr düzgün rəşional kəsrdir və deməli (7.2) göstərilişinin sağ tərəfi iki düzgün rəşional kəsrin fərqi olduğundan bu fərq düzgün olmayan kəsr ola bilməz. Lemma 7.1 isbat olundu.

Nəticə. Tutaq ki, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} (m < n)$ həqiqi əmsallı düzgün

rasional kəsrdir və $a_1, a_2, \dots, a_k$ müxtəlif ədədlər olduqda

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} \quad (7.3)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n)$$

göstərilişi doğrudur.

Onda, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ kəsri üçün aşağıdakı göstəriliş doğrudur.

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 2}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x - a_1} + \\ &+ \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_2)^{\alpha_2}} + \frac{A_2^{(2)}}{(x - a_2)^{\alpha_2 - 1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_2}^{(2)}}{x - a_2} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} + \\ &+ \frac{A_2^{(k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k - 1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{x - a_k}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Burada $A_j^{(i)}$ -müəyyən həqiqi ədədlərdir.

Həqiqətən lemma 7.1-i məxrəci (7.3) şəklində olan $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} (m < n)$ düzgün kəsrinə ardıcıl tətbiq etməklə (7.4) göstərilişinin doğruluğuna inanmaq olar.

Lemma 7.2. Tutaq ki, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} (m < n)$ həqiqi əmsallı

düzgün rasional kəsrdir və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. $x^2 + px + q$ üçhədlisinin $a = u + iv$ və $\bar{a} = u - iv$ kompleks qoşma kökləri vardır (burada u və v həqiqi ədədlərdir və $v \neq 0$)

2. a və $\bar{a}$ ədədləri $Q_n(x)$ çoxhədlisinin $\beta \geq 1$ dəfə təkrarlanan kökləridir, yəni

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^\beta \cdot Q_{n-2\beta}(x), \quad Q_{n-2\beta}(a) \neq 0,$$

$$Q_{n-2\beta}(\bar{a}) \neq 0, \quad p = -2u, \quad q = u^2 + v^2$$

münasibətləri doğrudur.

Onda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ kəsri üçün elə M, N həqiqi ədədləri və

$P_m(x)$ həqiqi əmsallı çoxhədliyi var ki,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_\ell(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q_{n-2\beta}(x)} \quad (7.5)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. İstənilən həqiq M və N sabitləri üçün

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} \text{ fərqi} \text{ə baxaq.}$$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q_{n-2\beta}(x)} -$$

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x)}{(x^2 + px + q)^\beta \cdot Q_{n-2\beta}(x)} \quad (7.6)$$

(7.6)-nın sağ tərəfindəki kəsir iki düzgün rasiyal kəsirin fərqi kimi düzgün rasiyal kəsirdir. Bu kəsirin sürətindəki M və N sabitlərini elə seçək ki, $P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x)$ çoxhədliyi $x^2 + px + q = (x - a)(x - \bar{a})$ kvadrat üçhədlisinə bölünsün.

Məlumdur ki, $P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x)$ çoxhədlisinin bu üçhədliyə bölünməsi üçün

$$P_m(a) - (Ma + N) \cdot Q_{n-2\beta}(a) = 0 \quad (7.7)$$

bərabərliyi ödənilməlidir, yəni a ədədi

$$P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x)$$

çoxhədlisinin kökü olmalıdır. Bu çoxhədli həqiqi əmsallı çoxhədli olduğundan, aydındır ki, $\bar{a}$ ədədi də onun kökü olacaqdır.

M və N əmsallarını (7.7) bərabərliyindən təyin edəcəyik. (7.7) bərabərliyindən

$$Ma + N = \frac{P_m(a)}{Q_{n-2\beta}(a)} \quad \text{və ya} \quad M(u + i\nu) + N = \frac{P_m(a)}{Q_{n-2\beta}(a)}$$

alırıq. $\frac{P_m(a)}{Q_{n-2\beta}(a)}$ kompleks ədədinin həqiqi və xəyali hissəsini

uyğun olaraq A və B ilə işarə etsək, onda sonuncu bərabərliyi

$$M(u + i\nu) + N = A + iB$$

şəklində yazı bilərik. Buradan, həqiqi və xəyali hissələri bərabərləşdirsək, M və N -ə nəzərən

$$Mu + N = A, \quad M\nu = B$$

bərabərliklərini alırıq. Axırıncı bərabərliklərdən M və N sabitləri birqismətli tapılır:

$$M = \frac{B}{\nu}, \quad N = A - \frac{B\mu}{\nu} \quad (7.8)$$

Beləliklə, əgər M və N sabitləri (7.8) düsturunu ilə təyin olunarsa, onda $P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x)$ çoxhədli $x^2 + px + q$ üçhədlisinə bölünər, yəni müəyyən həqiqi əmsallı $P_\ell(x)$ çoxhədli üçün

$$P_m(x) - (Mx + N) \cdot Q_{n-2\beta}(x) = (x^2 + px + q) \cdot P_\ell(x) \quad (7.9)$$

göstərilişi doğru olar. (7.9) bərabərliyini (7.6)-də nəzərə alsaq, tələb olunan (7.5) göstərilişini alırıq. Lemma 7.2 isbat olundu.

Lemma 7.1 və Lemma 7.2 -ni ardıcıl tətbiq etməklə aşağıdakı mühüm nəticəni alırıq.

Teorem 7.1. Tutaq ki, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m < n$) həqiqi əmsallı

düzgün rasional kəsrdir və $Q_n(x)$ çoxhədli

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots \\ \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

ayrılışına malikdir, burada $a_1, a_2, \dots, a_k$ $Q_n(x)$ çoxhədlisinin uyğun olaraq $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ dəfə təkrarlanan bütün müxtəlif həqiqi kökləridir, $Q_n(x)$ çoxhədlisinin həqiqi olmayan hər bir $z_j (j = 1, 2, \dots, s)$ kökünə və onun qoşması $\bar{z}_j$ -yə $x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$ şəklində vuruq uyğun gəlir, β_j isə z_j (və ya $\bar{z}_j$) kökünün təkrarlama sayıdır.

Onda, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ düzgün rəasional kəsri üçün

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \dots \\ & + \frac{A_{\alpha_2}^{(2)}}{(x-a_2)} + \dots + \frac{A_j^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-a)^{\alpha_k-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{x-a_k} + \\ & + \frac{M_l^{(1)}x + N_l^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{M_{\beta_1}^{(1)}x + N_{\beta_1}^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_l^{(s)}x + N_l^{(s)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}} + \dots \\ & + \frac{M_{\beta_s}^{(s)}x + N_{\beta_s}^{(s)}}{x^2 + p_sx + q_s} \end{aligned} \quad (7.10)$$

ayrılışı doğrudur, burada $A_j^{(i)} (i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, \alpha_i)$ və $M_j^{(i)}, N_j^{(i)}$ müəyyən həqiqi ədədlərdir.

İsbatı. (7.1) ayrılışına görə $Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot Q_{n-\alpha_1}(x)$ olar. Burada,

$Q_{n-\alpha_1}(x) = (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$ $n - \alpha_1$ dərəcəli çoxhədlidir. Aydındır ki, $Q_{n-\alpha_1}(a_1) \neq 0$. Onda lemma 7.1-ə görə

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} Q_{n-\alpha_1}(x)} \quad \text{alırıq. } \alpha_1 > 1 \text{ olduqda}$$

lemma 7.1-i yenidən

$$\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} Q_{n-\alpha_1}(x)} \text{ düzgün rasiyal kəsrinə tətbiq etsək,}$$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2} Q_{n-\alpha_1-1}}$$

Prosesi $x - a_1$ vuruğunun qüvvət üstü sıfır olana qədər davam etdirsək və tamamilə eyni qayda ilə $x - a_j$ ($j = 2, \dots, k$) vuruqları ilə davransaq,

$$\begin{aligned} \frac{P_m}{Q_n}(x) &= \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \\ &+ \frac{A_1^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{x-a_k} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} \end{aligned}$$

alırıq. Burada $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ düzgün rasiyal kəsrdir, $Q^*(x)$ isə həqiqi

kökləri olmayan çoxhədlidir və

$$Q^*(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s} \text{ şəklindədir.}$$

Lemma 7.2 - ni ardıcıl olaraq $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ kəsrinə və bu zaman

alınan ifadələrə tətbiq etsək, nəticədə (7.10) düsturunu alırıq.

Qeyd 1. (7.10) ayrılışında hesab edirik ki, $Q(x)$ gətirilmiş cəbri çoxhədlidir, yəni bu çoxhədlinin baş əmsalı 1-ə bərabərdir. Əgər belə olmazsa onda rasiyal kəsirin sürət və məxrəcini məxrəcdəki çoxhədlinin baş əmsalına bölməklə, buna həmişə nail olmaq olar.

Sadə və ya elementar rasiyal kəsrlər dedikdə:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^m}; \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q};$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

şəklində rasional kəsrlər nəzərdə tutulur. Burada a, A, M, N, p, q həqiqi ədədlərdir, $m \geq 1$ natural ədəddir, $x^2 + px + q$ kvadrat üçhədlisinin isə həqiqi kökləri yoxdur, yəni $\frac{p^2}{4} - q < 0$ şərti ödənilir.

Teorem 7.1 hökm edir ki, hər bir düzgün rasional kəsr elementar kəsrlərin cəmi şəklində göstərilir.

(7.10) ayrılışında əmsalları tapmaq üçün bu bərabərliyin sağ tərəfindəki kəsrlər ortaq məxrəcə gətirirlər və sürətdə alınmış çoxhədli x -in dərəcələrinə görə qruplaşdırılır. Bərabərliyin sağ və sol tərəflərində sürətlərdə eyni dərəcəli x -lərin əmsalları bərabərləşdirilir. Bu halda əmsallardan asılı xətti tənliklər sistemi alınır. Bu tənliklər sistemindən tələb olunan əmsallar tapılır. (7.10) ayrılışında əmsalların bu qayda ilə tapılması qeyri-müəyyən əmsallar üsulu adlanır. Bəzən əmsallar üçün alınan tənliklər sisteminin tapılması nisbətən çox vaxt aparır. Ona görə də əmsalların tapılması üçün başqa üsul tətbiq edilir. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sürətlərin bərabər edilməsi nəticəsində x -ə nəzərən eynilik alınır və bu eynilikdə x -ə konkret qiymətlər verməklə, məsələn, x -ə $Q(x)$ -in köklərini qiymət kimi verməklə əmsalların tapılması üçün alınan tənliklər sisteminin həllinə tez nail olmaq olur.

Misal 1. $\frac{x}{x^3 - 3x + 2}$ düzgün rasional kəsri sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərin.

Həlli. Əvvəlcə verilmiş kəsrin məxrəcini vuruqlarına ayıraq.

$x = 1$ ədədi $Q(x) = x^3 - 3x + 2$ çoxhədlisinin köküdür. Deməli, $Q(x)$ çoxhədlisi $x - 1$ ikihədlisinə qalıqsız bölünür.

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$$

$$= x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) =$$

$$= (x - 1)[x(x + 1) - 2] = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$x^2 + x - 2$ kvadrat üçhədlisinin kökləri $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ ədədləridir.

Beləliklə, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. $x = 1$ kökü iki dəfə təkrarlanır.

Teorem 7.1-ə əsasən verilmiş düzgün rəasional kəsir üçün aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki kəsrləri ortaq məxrəcə gətirək. Alınmış bərabərliyin sağ və sol tərəfindəki kəsrlərin sürətlərini bərabərləşdirsək,

$$x \equiv A(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)^2 \quad (7.11)$$

və ya

$$x \equiv x^2(B + C) + x(A + B - 2C) + (2A - 2B + C)$$

eyniliyini alırıq.

İki çoxhədlinin eyniliklə bərabər olması şərtindən istifadə etsək,

$$\begin{cases} B + C = 0, \\ A + B - 2C = 1, \\ 2A - 2B + C = 0, \end{cases}$$

xətti tənliklər sistemini alırıq. Bu sistemi həll etsək, $A = \frac{1}{3}$,

$B = \frac{2}{9}$, $C = -\frac{2}{9}$ alırıq. Beləliklə, verilmiş kəsirin sadə rəasional

kəsrlərə ayrılışı

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x+2}$$

şəklində olar.

(7.11)-dən A, B, C -nin qiymətlərini tapmaq üçün aşağıdakı qaydadan da istifadə edə bilərdik. (7.11)-də $x = 1$ götürsək,

$$1 = A(1+2) = 3A \text{ bərabərliyindən } A = \frac{1}{3},$$

$x = -2$ götürsək, $-2 = C(-2-1)^2 = 9C$ bərabərliyindən

$$C = -\frac{2}{9} \text{ alırıq.}$$

A və C -nin bu qiymətlərini (7.11) yerinə yazsaq,

$$x = \frac{1}{3}(x+2) + B(x+2)(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlikdə $x = 0$ götürsək, $B = \frac{2}{9}$ alırıq.

Misal 2. $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}$ düzgün rasiyal kəsrini elementar rasiyal kəsrlərin cəmi şəklində göstərin.

Həlli. Verilmiş kəsrin məxrəcini vuruqlarına ayıraq. Aydındır ki,

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$$

ayrılığı doğrudur və $x^2 + 4$ və $x^2 + 1$ kvadrat ikihədlilərinin həqiqi kökləri yoxdur.

Teorem 7.1-ə əsasən verilmiş düzgün rasiyal kəsrin elementar kəsrlərə ayrılığı aşağıdakı kimi olar:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki kəsrləri ortaq məxrəcə gətirək.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$$

Bu bərabərliyin sağ və sol tərəfindəki kəsrlərin sürətlərini bərabərləşdirsək,

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 4)$$

və yaxud

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A + 4C)x + (B + 4D)$$

eyniliyini alırıq. x -in eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirsək,

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 1, \\ A + 4C = 5, \\ B + 4D = 4 \end{cases}$$

sistemi alırıq. Bu sistemi həll etsək,

$$A = -\frac{5}{3}, B = 0, C = \frac{5}{3}, D = 1 \text{ alırıq. Onda baxılan düzgün}$$

rasional kəsrin elementar kəsrlərin cəmi şəklində göstərilişi aşağıdakı şəkildə olar.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = -\frac{5}{3} \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{5x + 3}{3(x^2 + 1)}.$$

Misal 3. $\frac{1}{x^4 + 1}$ düzgün rasional kəsri elementar

kəsrlərin cəmi şəklində göstərin.

Həlli. Aydındır ki, istənilən x həqiqi ədədi üçün

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$$

eyniliyi doğrudur. Sağ tərəfdəki kvadrat üçhədlilərinin hər ikisi həqiqi kökə malik deyildir. Onda teorem 7.1-ə görə verilmiş düzgün rasional kəsri aşağıdakı şəkildə göstərə bilirik

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Bu bərabərlikdən

$$(Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \equiv 1$$

eyniliyini, və yaxud

$$\begin{aligned} x^3(A + C) + x^2(\sqrt{2}A + B + D - \sqrt{2}C) + \\ + x(A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D) + B + D \equiv 1 \end{aligned}$$

eyniliyini alırıq. Axırncı eynilikdən A, B, C, D əmsallarından asılı

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ \sqrt{2}(A - C) + B + D = 0, \\ A + C + \sqrt{2}(B - D) = 0, \\ B + D = 1 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Bu sistemdən

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}$$

alırıq.

Beləliklə,

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

göstərilişini alırıq.

§8. Rasional kəsrlərin integrallanması

1. Elementar rasional kəsrlərin integrallanması.

Aydındır ki, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şəklində istənilən düzgün olmayan

rasional kəsri çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi qaydasından istifadə etməklə həmişə müəyyən bir çoxhədli ilə düzgün rasional kəsirin cəmi şəklində göstərmək olur. Çoxhədlinin integrallanması heç bir çətinlik törətmədiyindən yalnız düzgün

rasional kəsrlərin inteqrallanmasını öyrənəcəyik. Teorem 7.1-ə görə isə düzgün rasional kəsrlərin inteqrallanması yuxarıda qeyd olunduğu kimi dörd tip elementar kəsrlərin inteqrallanmasına gətirilir. Elementar rasional kəsrlərin inteqrallarını hesablayaq.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^m} &= A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ &= \frac{A}{1-m} (x-a)^{1-m} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C; \end{aligned}$$

($m \geq 2$ natural ədəddir)

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ şəklində elementar rasional kəsrin

inteqralını hesablamaq üçün x^2+px+q kvadrat üçhədlisini

$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ şəklində yazmaq və nəzərə

almaq ki, $q - \frac{p^2}{4} > 0$. $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ işarə edək. $t = x + \frac{p}{2}$

əvəzləməsi aparaq. Onda $dx = dt$ olar.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} a = \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) + C.
\end{aligned}$$

IV. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}$ ($m \geq 2$ natural ədəd, $\frac{p^2}{4} - q < 0$) şəklində elementar rəasional kəsrlərin inteqralını hesablayaq. III halda olduğu kimi $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ işarə edək. $dt = dx$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + \\
&+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{M}{2(1-m)(t^2 + a^2)^{m-1}} + \\
&+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}
\end{aligned}$$

Sonuncu inteqralı $J_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$, ($m \geq 2$) kimi işarə edək.

Göründüyü kimi IV tip elementar kəsrlərin inteqrallanması J_m inteqralının hesablanmasına gətirilir.

$$J_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + t^2 - t^2}{(t^2 + a^2)^m} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + t^2}{(t^2 + a^2)^m} dt - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{a^2} \int t \cdot \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\
&= \frac{1}{a^2} J_{m-1} - \frac{1}{a^2} \int t \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m}
\end{aligned}$$

Sonuncu inteqralı hesablamak üçün hissə-hissə inteqrallama düsturundan istifadə edək. Bunun üçün $u = t$, $dv = \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m}$

qəbul edək.

Onda

$$\begin{aligned}
&du = dt, \\
v = \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}}
\end{aligned}$$

olar.

Deməli,

$$\begin{aligned}
\int t \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m} &= \frac{t}{2(1-m)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m-1}} = \\
&= \frac{t}{2(1-m)(t^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)} \cdot J_{m-1}
\end{aligned}$$

Bunu, J_m -in ifadəsində nəzərə alsaq,

$$J_m = \frac{1}{a^2} J_{m-1} + \frac{t}{2a^2(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2a^2(m-1)} J_{m-1}$$

və yaxud

$$J_m = \frac{t}{2a^2(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{a^2} J_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots$$

rekurent düsturunu alırıq. Bu düsturda $m = 2$ götürsək,

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1$$

alarıq.

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

olduğundan,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

olar. J_2 məlum olduqdan sonra J_m üçün rekurent düsturda $m=3$ götürsək J_3 -ü hesablaya bilərik və s. J_m integralında t və a -nın x dəyişəni və p, q əmsalları ilə ifadəsini nəzərə almaqla IV tip elementar rəasional kəsirin x dəyişəni və M, N, p, q əmsalları ilə ifadəsini alırıq.

Beləliklə, hər dörd tip elementar rəasional kəsirin integralı elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə olunur.

Rəasional kəsrlərin qeyri-müəyyən integralını hesablamaq, üçün aşağıdakı ardıcılıqla hərəkət etmək məqsədə uyğundur.

1. Əgər rəasional kəsr düzgün olmayan rəasional kəsrdirsə, sürətini məxrəcinə bölməklə onu çoxhədli ilə düzgün rəasional kəsirin cəmi şəklində göstərmək;

2. Alınmış düzgün rəasional kəsirin məxrəcini xətti və kvadratik vuruqların hasili şəklində göstərmək;

3. Bu düzgün rəasional kəsri elementar kəsrlərin cəmi şəklində göstərmək;

4. Qeyri-müəyyən integralın xəttilik xassəsindən və elementar rəasional kəsrlərin integralanmasından istifadə etməklə hər bir həddin qeyri-müəyyən integralını ayrı-ayrılıqda hesablamaq.

Misallara müraciət edək.

Misal 1. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ qeyri-müəyyən

integralını hesablayın.

Həlli. İntegralaltı funksiya düzgün rəasional kəsrdir. Onda teorem 7.1-ə görə

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

ayrılışını yazı bilərik. Buradan,

$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$
eyniliyini alırıq. Bu eynilikdə x -ə ardıcıl olaraq -1 ; -2 ; -3
qiymətlərini versək, $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = -\frac{3}{2}$ alırıq. Beləliklə,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{x+3}$$

ayrılışı doğrudur. Onda,

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$-\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right| + C.$$

Misal 2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$ qeyri-müəyyən

integralını hesablayın.

Həlli. İntegralaltı funksiya düzgün rəşional kəsir olmaqla, məxrəcin təkrarlanan həqiqi kökləri vardır: $x = -2$ kökü iki dəfə, $x = -3$ kökü isə üç dəfə təkrarlanır. Onda teorem 7.1-ə əsasən

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+3)^3} +$$

$$+ \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{x+3}$$

ayrılışı doğrudur. Buradan,

$$1 \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 +$$

$$+ C(x+1)(x+2)(x+3)^3 + D(x+1)(x+2)^2 +$$

$$+ E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

eyniliyini alırıq. Bu eynilikdə $x = -1$ götürsək, $A = \frac{1}{8}$; $x = -2$

götürsək, $B = -1$; $x = -3$ götürsək, $D = -\frac{1}{2}$ almar.

C, E, F əmsallarını tapmaq üçün x -ə ardıcıl olaraq $x = 0$, $x = -4$ və $x = -5$ qiymətlərini verək. Onda C, E və F -dən asılı aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} 9C + 2E + 6F = \frac{11}{4}, \\ C - 2E + 2F = \frac{1}{4}, \\ -4C + 3E - 6F = 1. \end{cases}$$

Bu sistemdən $C = 2$, $E = -\frac{5}{4}$, $F = -\frac{17}{8}$ tapırıq. Onda aydındır ki,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+2} - \\ &\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+3)^3} - \frac{5}{4} \int \frac{dx}{(x+3)^2} - \frac{17}{8} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + \\ &+ 2 \ln|x+2| + \frac{1}{4(x+3)^2} + \frac{5}{4x+3} - \frac{17}{8} \ln|x+3| + C = \\ &= \frac{4(x+3)^2 + (x+2) + 5(x+2)(x+3)}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln|x+1| + \\ &+ 2 \ln|x+2| - \frac{17}{8} \ln|x+3| + C = \\ &= \frac{9x^2 + 50x + 68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + C. \end{aligned}$$

Misal 3. $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ qeyri-müəyyən inteqralını

hesablayın.

Həlli. İnteqralaltı funksiya düzgün rəşional kəsrdir. Onu yuxarıda elementar rəşional kəsrlərin cəmi şəklində göstərmişik: (bax §7, misal 2)

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = -\frac{5}{3} \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{3} \frac{5x + 3}{x^2 + 1}$$

Deməli,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx &= -\frac{5}{3} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \frac{1}{3} \int \frac{5x + 3}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\frac{5}{3} \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + \frac{5}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{5}{6} \ln(x^2 + 4) + \frac{5}{6} \ln(x^2 + 1) + \arctg x + C = \\ &= \frac{5}{6} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} \right) + \arctg x + C. \end{aligned}$$

Misal 4. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ qeyri-müəyyən inteqralını

hesablayın.

Həlli. Teorem 7.1-ə əsasən,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2+1)^2} + \frac{M_2x + N_2}{x^2+1}$$

ayrılığı doğrudur. Buradan,

$$\begin{aligned} A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (M_1x + N_1)(x+1)^2 + \\ + (M_2x + N_2)(x+1)^2(x^2+1) \equiv 1 \end{aligned}$$

eyniliyini alırıq. Bu eynilikdə x -ə xüsusi qiymətlər vermək daha münasibdir.

$x = i$ götürsək,

$$(M_1 i + N_1)(i + 1)^2 = 1$$

alırıq. Buradan, $M_1 = -\frac{1}{2}$, $N_1 = 0$ alırıq; $x = -1$ götürsək,

$B = \frac{1}{4}$ alırıq; $x = 0$ götürsək, $A + B + N_1 + N_2 = 1$ və yaxud

$A + N_2 = \frac{3}{4}$ alırıq; $x = 1$ götürsək,

$8A + 4B + 4(M_1 + N_1) + 8(M_2 + N_2) = 1$ və yaxud

$A + M_2 + N_2 = \frac{1}{4}$ alırıq.

$x = -2$ götürsək, $-25A + 25 \cdot \frac{1}{4} + 1 + 5(-2M_2 + N_2) = 1$ və

yaxud, $5A + 2M_2 - N_2 = \frac{5}{4}$ alırıq.

Beləliklə, A, M_2, N_2 əmsallarından asılı aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini aldıq.

$$\begin{cases} A + N_2 = \frac{3}{4}, \\ A + M_2 + N_2 = \frac{1}{4}, \\ 5A + 2M_2 - N_2 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Bu tənliklər sistemindən $A = \frac{1}{2}$, $N_2 = \frac{1}{4}$, $M_2 = -\frac{1}{2}$ tapırıq.

Onda,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{x^2+1}$$

olar. Beləliklə,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{-2x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \\ &- \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{x(1-x)}{4(x+1)(x^2+1)} - \\ &- \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

§ 9. Bəzi irrasional ifadələrin inteqrallanması.

Xətti və kəsir-xətti irrasionalılıqların inteqrallanması.

İki x və y dəyişənlərindən asılı n dərəcəli çoxhədli dedikdə (həqiqi əmsallı) "

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$$

şəklində ikidəyişənli funksiya başa düşülür, burada a_{ij} müəyyən həqiqi ədədlərdir, i, j mənfi olmayan tam ədədlərdir və $i+j=n$ şərtini ödəyən a_{ij} əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir

Məsələn, $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 -$ ikidəyişənli ikidərəcəli çoxhədlidir, burada a_{ij} ($i, j=0,1$) müəyyən həqiqi ədədlərdir.

Tutaq ki, x və y dəyişənlərindən asılı n dərəcəli $P_n(x, y)$ və m dərəcəli $Q_m(x, y)$ çoxhədlisi verilmişdir.

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$$

şəklində funksiya x və y dəyişənlərindən asılı rasional funksiya deyilir.

Rasional funksiya haqda aşağıdakı aşkar hökmü qeyd edək.

Əgər $R(x, y)$ x və y dəyişənlərindən asılı rasional funksiyaıdırsa, $R_1(t), R_2(t)$ və $R_3(t)$ t dəyişənindən asılı istənilən rasional funksiyaıdırsa, onda

$$R[R_1(t), R_2(t)] \cdot R_3(t) \quad (9.1)$$

şəklində olan ifadələr t -dən asılı rasional funksiyaıdır (t dəyişənindən asılı rasional funksiya dedikdə həqiqi əmsallı rasional kəsir nəzərdə tutulur). Bu hökmün doğruluğuna inanmaq üçün, sadəcə olaraq nəzərə almaq lazımdır ki, eyni bir t dəyişənindən asılı rasional funksiyaıara toplama, çıxma, vurma və bölmə əməllərini tətbiq etdikdə, yenidən t dəyişənindən asılı rasional funksiya alınır.

Məsələn, $R(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2y^2 - 5y}{x + 3x^3y + y^3}$ funksiyaı

x, y dəyişənlərindən asılı rasional funksiyaıdır. Çünki $R(x, y)$ ikidərəcəli $P_2(x, y) = 3x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$ və

$Q_4(x, y) = x + 3x^3y + y^3$ dörd dərəcəli çoxhədlilərin nisbətidir.

Biz bu fəsildə x və y dəyişənlərindən asılı rasional funksiyaı $R(x, y)$ ilə işarə edəcəyik.

Əvvəlcə

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+\delta}}\right) dx \quad (9.1)$$

şəkilli inteqrallarm hesablanmasına baxaq, burada k tam müsbət ədəddir.

Əgər $a\delta - bc = 0$ olarsa, onda $f(x) = \frac{ax+b}{cx+\delta}$ kəsir xətti

funksiyaı sabit olardı. Bu halda (9.1) inteqralında inteqralaltı funksiya x -dən asılı rasional funksiya olardı və rasional funksiyaının inteqralına əvvəlki paraqrafda baxmışıq.

Tutaq ki, $a\delta - bc \neq 0$. Aşağıdakı kimi əvəzləmə aparaq:

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+\delta}}. \text{ Onda } x = \frac{t^k \delta - b}{a - ct^k}, \quad dx = \frac{(a\delta - bc)kt^{k-1}}{(a - ct^k)^2} dt.$$

Qeyri – müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi düsturuna əsasən,

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+\delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{t^k \delta - b}{a - ct^k}, t\right) \cdot \frac{(a\delta - bc)kt^{k-1}}{(a - ct^k)^2} dt = \int R^*(x) dt.$$

Burada, $R^*(t) = R\left(\frac{t^k \delta - b}{a - ct^k}, t\right) \cdot \frac{(a\delta - bc)kt^{k-1}}{(a - ct^k)^2}$. Aydındır ki,

$R^*(t)$ t -dən asılı rəşional funksiyaadır.

Beləliklə (9.1) şəklində inteqralın hesablanması t dəyişənindən asılı rəşional funksiyanın inteqrallanmasına gətirildi.

$\int R^*(x) dt$ inteqralını hesabladıqdan sonra t - nin yerinə $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+\delta}}$ yazmaqla , (9.1) şəklində inteqralları hesablamış oluruq.

Misal 1. $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}$ qeyri-müəyyən inteqralını hesablayın.

Həlli. $\sqrt{3x+2} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $3x+2 = t^2$, $x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$, $dx = \frac{2}{3} t dt$.

Beləliklə,

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{9} \int \frac{t^2 - 2}{t} t dt = \frac{2}{9} \int (t^2 - 2) dt = \frac{2}{9} \int t^2 dt - \frac{4}{9} \int dt = \\ &= \frac{2t^3}{27} - \frac{4}{9} t + C = \frac{2(3x+2)^{3/2}}{27} - \frac{4}{9} \sqrt{3x+2} + C = \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{3x+2} \left(\frac{3x+2}{27} - \frac{2}{9} \right) + C = 2\sqrt{3x+2} \left(\frac{3x-4}{27} \right) + C =$$

$$= \frac{6x-8}{27} \sqrt{3x+2} + C.$$

Misal 2. $J = \int \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \frac{dx}{x-2}$ qeyri-müəyyən inteqralını hesablayın.

Həlli. $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = t$ əvəzləməsi aparsaq,

$$\frac{x+2}{x-2} = t^2, \quad x = \frac{2(t^2+1)}{t^2-1}, \quad dx = \frac{-8tdt}{(t^2-1)^2}$$

olur. Onda

$$J = -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = -2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C.$$

Övvəlki dəyişənə qayıtsaq,

$$J = -2 \left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \right| \right) + C.$$

İndi isə

$$\text{II. } \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+\delta} \right)^{s_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+\delta} \right)^{s_n} \right) dx \quad (9.3)$$

şəklində olan iteqralların hesablanmasına baxaq. Burada fərz edilir ki, $s_1, s_2, \dots, s_n$ rəşional ədədlərdir, a, b, c, δ həqiqi ədədlərdir və $a\delta - bc \neq 0$. Əks halda $\frac{ax+b}{cx+\delta}$ nisbəti sabit olardı. Bu isə maraqlı hal deyildir.

s ilə $s_1, s_2, \dots, s_n$ kəsrlərinin ortaq məxrəcələrini işarə edək. Onda s_i -lər $s_i = \frac{p_i}{s}$ şəklində göstərilə bilər (burada p_i tam ədəddir, $i = \overline{1, n}$).

$$t^s = \frac{ax + b}{cx + \delta} \quad (9.4)$$

əvəzləməsi aparaq.

Buradan,

$$x = \frac{\delta t^s - b}{a - ct^s} \quad (9.5)$$

alırıq. Göründüyü kimi x dəyişəni t -nin rəasional funksiyasıdır. Aydınır ki, onun törəməsi də t -nin rəasional funksiyası olacaqdır. Bu funksiyanın diferensialını hesablayaq:

$$dx = \frac{(a\delta - bc)st^{s-1}}{(a - ct^s)^2} dt. \quad (9.6)$$

(9.4) bərabərliyindən

$$\left(\frac{ax + b}{cx + \delta} \right)^{s_i} = t^{s_i s} = t^{p_i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (9.7)$$

alırıq.

(9.5)-(9.7) bərabərliklərini (9.3) inteqralında nəzərə alaq. Onda

$$\begin{aligned} \int R \left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + \delta} \right)^{s_1}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + \delta} \right)^{s_n} \right] dx = \\ = \int R \left[\frac{\delta t^s - b}{a - ct^s}, t^{p_1}, \dots, t^{p_n} \right] \frac{(a\delta - bc)st^{s-1}}{(a - ct^s)^2} dt \end{aligned}$$

Aydınır ki, sonuncu inteqralda inteqralaltı funksiya rəasional kəsrdir və belə inteqralların hesablanması bilirik. Sonuncu inteqralı hesabladıqdan sonra t dəyişəninə yerinə

$$t = \left(\frac{ax + b}{cx + \delta} \right)^{1/s}$$

yazmaq lazımdır.

Misal 3. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{2x+3}}$ qeyri-müəyyən

integralını hesablayın.

Həlli. $(2x+3)^{\frac{1}{6}} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $2x+3 = t^6$, $dx = 3t^5 dt$,

$$J = \int \frac{3t^5 dt}{t^3 - 2t^2} = 3 \int \frac{t^3}{t-2} dt$$

olar.

İntegralaltı ifadəni düzgün kəsre çevirək:

$$\frac{t^3}{t-2} = t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} J &= 3 \int \left(t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2} \right) dt = 3 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + 4t + 8 \ln|t-2| \right) = \\ &= \sqrt{2x+3} + 3\sqrt[3]{2x+3} + 12\sqrt[6]{2x+3} + 24 \ln|\sqrt[6]{2x+3} - 2| + C. \end{aligned}$$

§ 10. Eyler əvəzləmələri.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (10.1)$$

şəklində inteqrallara baxaq. Burada a, b, c həqiqi ədədlərdir. Aşağıda hər yerdə nəzərdə tutulur ki, $a \neq 0$ və kvadrat üçhədlinin təkrarlanan kökü yoxdur.

Bu tip inteqralları Eyler əvəzləmələri vasitəsilə rəasional funksiyaların inteqralına gətirmək olar.

1. Eylerin birinci əvəzləməsi. Fərz edək ki,

$ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin həqiqi kökləri yoxdur, başqa sözlə kompleks qoşma kökləri vardır. Bu halda kvadrat üçhədlinin işarəsi a -nın işarəsi ilə müəyyən olunur. (10.1) inteqralında kvadrat üçhədlə kvadrat kök altında olduğundan,

müsbət qiymətlər almalıdır. Ona görə də $a > 0$ münasibəti ödənməlidir.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z - \sqrt{a} x \quad (10.2)$$

əvəzləməsi aparaq. Yeni z dəyişəninə keçsək,

$$ax^2 + bx + c = z^2 - 2\sqrt{a}zx + ax^2, \quad x = \frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}z + b},$$

$$dx = \frac{2z(2\sqrt{a}z + b) - 2\sqrt{a}(z^2 - c)}{(2\sqrt{a}z + b)^2} dz = 2 \frac{\sqrt{a}z^2 + bz + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}z + b)^2} dz.$$

(10.2) bərabərliyində x -in ifadəsini nəzərə alsaq,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z - \sqrt{a} \frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}z + b} = \frac{\sqrt{a}z^2 + bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}z + b}.$$

olar. $x, \sqrt{ax^2 + bx + c}$, dx -in bu ifadələrini (10.1)-də nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(\frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}z + b}, \frac{\sqrt{a}z^2 + bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}z + b}\right) \times \\ &\times \frac{2(\sqrt{a}z^2 + bz + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}z + b)^2} dz = \int R_1(z) dz. \end{aligned}$$

$R_1(z)$ z -dən asılı rəşional funksiya dır. Onun inteqralı elementar funksiylarla ifadə olunur.

(10.2) əvəzləməsinə Eylerin I əvəzləməsi deyilir.

Misal 1. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ qeyri-müəyyən inteqralını

hesablayın.

Həlli. $x^2 + a^2$ kvadrat ikihədlisinin həqiqi kökləri olmadığından Eylerin birinci əvəzləməsini tətbiq edək. $\sqrt{x^2 + a^2} = z - x$ əvəzləməsi aparaq. Buradan,

$$x = \frac{z^2 - a^2}{2z},$$

$$dx = \frac{z^2 + a^2}{2z^2} dz, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = z - \frac{z^2 - a^2}{2z} = \frac{z^2 + a^2}{2z}.$$

alırıq. Onda

$$J = \int \frac{2z}{z^2 + a^2} \cdot \frac{z^2 + a^2}{2z} dz = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x) + C$$

Misal 2. $J = \int \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{15}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ qeyri-müəyyən

integralını hesablaym.

Həlli. $1 + x^2$ kvadrat ikihədlisinin həqiqi kökləri olmadığından Eylerin birinci əvəzləməsini tətbiq edək.

$$\sqrt{1 + x^2} = z - x$$

əvəzləməsi aparaq. Buradan,

$$x = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad dx = \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz, \quad \sqrt{1 + x^2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{z^2 + 1}{2z} = z$$

alırıq. Bu ifadələri verilmiş integralda nəzərə alsaq,

$$J = \int \frac{z^{15}}{z^2 + 1} \cdot \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz = \int z^{14} dt = \frac{z^{15}}{15} + C = \frac{1}{15} (x + \sqrt{1 + x^2})^{15} + C.$$

Eylerin 2-ci əvəzləməsi: Fərz edək ki, $ax^2 + bx + c$ üçhədlisinin iki müxtəlif α və β həqiqi kökü vardır. Bu halda a əmsali istənilən işarəyə malik ola bilər. (10.1) integralında

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)z, \quad (10.3)$$

əvəzləməsi aparaq. Onda

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 z^2$$

və yaxud

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 z^2.$$

Buradan,

$$x = \frac{\alpha z^2 - a\beta}{z^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(\beta - \alpha)z}{(z^2 - a)^2} dz,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\alpha - \beta)z}{z^2 - a}$$

alırıq.

Beləliklə,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{\alpha z^2 - a\beta}{z^2 - a}, \frac{a(\alpha - \beta)z}{z^2 - a}\right) \times$$

$$\times \frac{2a(\beta - \alpha)z}{(z^2 - a)^2} dz = \int R_2(z) dz$$

Aydınır ki, $R_2(z)$ z -dən asılı rəasional funksiyadır.

(10.3) əvəzləməsinə Eylerin II əvəzləməsi deyilir.

Misal 3. $J = \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$ qeyri-müəyyən

inteqralını hesablayın.

Həlli. $x^2 + 3x + 2$ kvadrat üçhədlisinin kökləri $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ olduğu üçün Eylerin II əvəzləməsindən istifadə etmək məqsədə uyğundur.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{(x + 1)(x + 2)} = z(x + 1)$$

əvəzləməsi aparaq. Əvəzləmədən $x = \frac{z^2 - 2}{1 - z^2},$

$dx = \frac{-2zdz}{(1 - z^2)^2}, \quad \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{-z}{1 - z^2}$ alırıq. x, dx və

$\sqrt{x^2 + 3x + 2}$ -nın bu ifadələrini verilmiş inteqralda yerinə yazsaq,

$$J = -2 \int \frac{z(z+2)dz}{(z+1)^3(z-2)(z-1)}$$

alırıq. İntegralaltı ifadəni sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərək.

$$\frac{z(z+2)}{(z+1)^3(z-2)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{F}{(z+1)^3} + \frac{D}{z-2} + \frac{E}{z-1}.$$

Buradan, surətləri bərabərləşdirsək, aşağıdakı eyniliyi alırıq:

$$A(z+1)^2(z-2)(z-1) + B(z+1)(z-2)(z-1) + F(z-2)(z-1) + D(z+1)^3(z-1) + E(z+1)^3(z-2) = z^2 + 2z.$$

Bu eynilikdə $z=1$ götürsək, $E = -\frac{3}{8}$; $z=-1$ götürsək,

$F = -\frac{1}{6}$; $z=2$ götürsək, $D = \frac{8}{27}$ alırıq. Bu eynilikdə ardıcıl

olaraq $z=3$ və $z=-3$ götürsək, A və B -dən asılı

$$\begin{cases} 4A + B = \frac{19}{108}, \\ 4A - B = \frac{8}{27} \end{cases}$$

sistemi alırıq. Bu sistemdən $A = \frac{17}{216}$, $B = -\frac{5}{36}$ tapırıq.

Onda

$$\begin{aligned} J &= -2 \int \frac{z(z+2)dz}{(z+1)^3(z-2)(z-1)} = -\frac{17}{108} \int \frac{dz}{z+1} + \frac{5}{18} \int \frac{dz}{(z+1)^2} + \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(z+1)^3} - \frac{16}{27} \int \frac{dz}{z-2} + \frac{3}{4} \int \frac{dz}{z-1} = -\frac{17}{108} \ln|z+1| - \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{z+1} - \\ &- \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{16}{27} \ln|z-2| + \frac{3}{4} \ln|z-1| + C. \end{aligned}$$

Burada, $z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$ götürmək lazımdır.

Misal 4. $J = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ qeyri-müəyyən

integralını hesablayın.

Həlli. I üsul. $1-x^2$ funksiyasının $x_1 = -1$ və $x_1 = 1$ həqiqi kökləri vardır. Ona görə də Eylerin ikinci əvəzləməsindən istifadə etmək olar.

$$\sqrt{1-x^2} = (x+1)z$$

əvəz edək. Buradan,

$$x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad 1+x^2 = 2 \frac{1+z^4}{(1+z^2)^2},$$

$$dx = -\frac{4z}{(1+z^2)^2} dz$$

alırıq. Onda

$$J = \int \frac{(1+z^2)^2}{2(1+z^4)} \cdot \frac{1+z^2}{2z} \frac{-4z}{(1+z^2)^2} dz = -\int \frac{1+z^2}{1+z^4} dz = -\int \frac{\frac{1}{z^2} + 1}{\frac{1}{z^2} + z^2} dz =$$

$$= -\int \frac{d\left(z - \frac{1}{z}\right)}{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2} = -\int \frac{d\left(z - \frac{1}{z}\right)}{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + (\sqrt{2})^2}.$$

İnteqrallar cədvəlində 10^0 düsturundan istifadə edək. Onda

$$J = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{\sqrt{2}} \right) + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{z^2 - 1}{\sqrt{2}z} \right) + C$$

nlarıq. Əvəzləmədən $z = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$ tapırıq. z -in bu ifadəsini J -də nəzərə alıb, sadə çevirmələrdən sonra

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

nlarıq.

Qeyd edək ki, bu inteqralı Eyler əvəzləməsindən istifadə etmədən də hesablaya bilərik.

II üsul. $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ əvəzləməsi aparaq.

Onda aydındır ki, $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ olar. Onda

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\cos t dt}{\cos t (1 + \sin^2 t)} = \int \frac{dt}{1 + \sin^2 t} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t} + \tan^2 t} = \\ &= \int \frac{d(\tan t)}{1 + \tan^2 t + \tan^2 t} = \int \frac{d(\tan t)}{1 + 2\tan^2 t} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\tan t)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \tan^2 t} \end{aligned}$$

İnteqrallar cədvəlində 10^0 düsturundan istifadə edək. Onda

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2\tan t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\tan t) + C$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ olduğundan,}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C$$

nlarıq.

Eylerin 3-cü əvəzləməsi. Əgər $c \geq 0$ olarsa

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c} \quad (10.4)$$

əvəzləməsi aparmaqla (10.1) şəklində integralın hesablanmasını rasiional funksiyanın hesablanmasına gətirmək olar. Doğurdan da, əvəzləmədən

$$x = \frac{2\sqrt{cz} - b}{a - z^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{z^2\sqrt{c} - bz - a\sqrt{c}}{a - z^2},$$

$$dx = 2 \frac{z^2\sqrt{c} - bz + a\sqrt{c}}{(a - z^2)^2} dz$$

alırıq. Onda,

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= \int R\left(\frac{2\sqrt{cz} - b}{a - z^2}, \frac{z^2\sqrt{c} - bz + a\sqrt{c}}{a - z^2}\right) \cdot \frac{2(z^2\sqrt{c} - bz + a\sqrt{c})}{(z^2 - a)^2} dz \end{aligned}$$

Göründüyü kimi integralaltı funksiya rasiional kəsrdir.

(10.4) əvəzləməsi Eylerin III əvəzləməsi adlanır.

Misal 5. $J = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ integralını hesablayın.

Həlli. $1+x-x^2$ kvadrat üçhədlisində $a < 0$, $c > 0$ olduğu üçün Eylerin üçüncü əvəzləməsindən istifadə edək.

$$\sqrt{1+x-x^2} = xz - 1$$

əvəzləməsi aparaq. Buradan,

$$x = \frac{1+2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{-2(z^2+z-1)}{(1+z^2)^2} dz,$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = \frac{z(1+2z)}{1+z^2} - 1 = \frac{z^2+z-1}{1+z^2}, \quad 1+x = \frac{z^2+2z+2}{1+z^2}$$

alırıq.

x , dx , $(1+x)$ və $\sqrt{1+x-x^2}$ üçün alınan bu ifadələri verilmiş integralda nəzərə alsaq,

$$J = -2 \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} = -2 \int \frac{d(z+1)}{(z+1)^2 + 1} = -2 \operatorname{arctg}(z+1) + C.$$

Yenidən x dəyişəninə qayıdaq. Əvəzləmədən

$$z+1 = \frac{1 + \sqrt{1+x-x^2}}{x} + 1 = \frac{1+x + \sqrt{1+x-x^2}}{x}$$

alırıq. Onda

$$J = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x + \sqrt{1+x-x^2}}{x} \right) + C.$$

Qeyd. Eyler əvəzləmələri vasitəsilə (10.1) şəklində olan inteqralları hesablayarkən bəzən texniki çətinliklər yaranır. Ona

görə də bir çox hallarda $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

bərabərliyini nəzərə almaqla (10.1) şəklində olan inteqrallar

$$\int R_1(z, \sqrt{1-z^2}) dz, \int R_2(z, \sqrt{z^2-1}) dz, \int R_3(z, \sqrt{z^2+1}) dz$$

şəklində olan inteqrallara gətirilir. Bu şəkildə olan inteqrallarda irrasionallıqdan azad olmaq üçün

$$z = \sin t, \quad z = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t$$

trigonometrik əvəzləmələrdən və yaxud

$$z = \operatorname{sh} t, \quad z = \operatorname{ch} t, \quad z = \operatorname{th} t$$

hiperbolik əvəzləmələrindən istifadə etmək daha səmərəli olur. Məsəl 4-də verilmiş inteqralın ikinci üsulla hesablanması əslində dediklərimizə bir sübutdur. Başqa bir nümunə göstərək.

Məsəl 6. $J = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2}}$ qeyri-müəyyən

inteqralını hesablayın ($a > 0$).

Həlli. $x = a \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$dx = a \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ olduğundan,}$$

$$J = \int \frac{l}{a^2(1+tg^2t)\sqrt{a^2(1+tg^2t)}} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t}.$$

$\frac{l}{1+tg^2t} = \cos^2 t$ eyniliyindən istifadə etsək,

$$J = \frac{l}{a^2} \int \cos t dt = \frac{l}{a^2} \sin t + \text{●}$$

alırıq. J üçün alınan bu ifadədə yenidən x dəyişəninə keçək.

Əvəzləmədən $tg t = \frac{x}{a}$ alırıq. $\sin t = \frac{tg t}{\sqrt{1+tg^2 t}}$ eyniliyində

$tg t = \frac{x}{a}$ götürsək,

$$J = \frac{l}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + C = \frac{l}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

§11. Diferensial binomun integrallanması.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (11.1)$$

şəklində qeyri-müəyyən inteqrala baxaq. Burada a və b sıfırdan fərqli ixtiyari həqiqi ədədlərdir. a və b ədədlərindən heç olmazsa biri sıfıra bərabər olarsa, onda (11.1) inteqralı cədvəl inteqralı olardı. Əgər p, m, n ədədləri eyni zamanda tam ədədlər olarsa, onda (11.1) inteqralı rəasional ifadənin inteqralı olardı ki, belə inteqralları da hesablamağı bilirik. Ona görə də m, n, p ədədlərindən heç olmazsa biri tam olmayan rəasional ədəddir. Rus alimi P.L.Çəbişev isbat etmişdir ki, (11.1) inteqralı aşağıda göstərilən üç halda elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə olunur.

I. p – tam ədəd olduqda ;

II. $\frac{m+1}{n}$ - tam ədəd olduqda ;

III. $\frac{m+1}{n} + p$ - tam ədəd olduqda .

I hala baxaq. Bu halda $x = t^\lambda$ əvəzləməsi aparaq. Burada λ natural ədədi m və n rəşional ədədlərinin ortağ məxrəcidir. Onda (11.1) inteqralında inteqralaltı funksiya rəşional funksiyaaya çevrilər. Doğrudan da, $m = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, n = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ olarsa,

$$x^m = t^{m\lambda} = t^{\frac{\alpha_1 \lambda}{\beta_1}} = t^{m_1}, \quad x^n = t^{n\lambda} = t^{\frac{\alpha_2 \lambda}{\beta_2}} = t^{m_2}, \quad dx = \lambda t^{\lambda-1} dt \quad \text{olar.}$$

Burada m_1 və m_2 tam ədədlərdir. Bu ifadələri (11.1)

inteqralında nəzərə alsaq,

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \lambda \int t^{m_1} (a + bt^{m_2})^p t^{\lambda-1} dt \quad \text{olar.}$$

m_1, m_2, p, λ tam ədədlər olduğu üçün , bu bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqralda , inteqralaltı funksiya rəşionallaşıb.

II hala baxaq. Tutaq ki, $p = \frac{r}{s}$ şəklində kəsrdir. Aşağıdakı kimi əvəzləmə aparaq :

$$a + bx^n = t^s \tag{11.2}$$

Bu əvəzləmə vasitəsilə (11.1) inteqralı rəşional kəsrlərin inteqrallanmasına gətirilir.

(11.2) əvəzləməsindən

$$x = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} (t^s - a)^{\frac{1}{n}}, \quad x^m = \frac{1}{\sqrt[n]{b^m}} (t^s - a)^{\frac{m}{n}},$$

$$dx = \frac{s}{n \cdot \sqrt[n]{b}} \cdot t^{s-1} \cdot (t^s - a)^{\frac{1}{n}-1} dt, \quad (a + bx^n)^p = t^{sp} = t^r$$

alarıq. Bu ifadələri (11.1)-də nəzərə alsaq,

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{s}{n \cdot \sqrt[n]{b^{m+l}}} \int (t^s - a)^{\frac{m+l}{n} - 1} t^{r+s-1} dt$$

alırıq. $r, s, \frac{m+l}{n}$ tam ədədlər olduğundan, bu bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqralda, inteqralaltı funksiya rəşional funksiya dır və biz belə funksiyaların inteqralının hesablanması bilirik.

III hala baxaq. Tutaq ki, p və $\frac{m+l}{n}$ ədədlərindən heç biri tam

deyildir, ancaq $p + \frac{m+l}{n}$ tam ədəddir, $p = \frac{r}{s}$ şəklində kəsrdir.

$ax^{-n} + b = t^s$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$x^n = \frac{a}{t^s - b}, \quad a + bx^n = x^n t^s = \frac{at^s}{t^s - b}, \quad x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{t^s - b}},$$

$$x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(t^s - b)^{\frac{m}{n}}}, \quad (a + bx^n)^p = \frac{a^p t^r}{(t^s - b)^p},$$

$$dx = -\frac{s}{n} \sqrt[n]{a} \frac{(t^s - b)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot t^{s-1}}{(t^s - b)^{\frac{2}{n}}} dt$$

alırıq. x^m , $(a + bx^n)^p$ və dx - in ifadələrini (11.1) - də nəzərə alaq. Onda

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= -\frac{s}{n} a^{\frac{m+l}{n} + p} \int \frac{t^r (t^s - b)^{\frac{1}{n} - 1} t^{s-1}}{(t^s - b)^{\frac{m}{n}} (t^s - b)^p (t^s - b)^{\frac{2}{n}}} dt = \\ &= -\frac{s}{n} a^{\frac{m+l}{n} + p} \int \frac{t^{r+s-1}}{(t^s - b)^{\frac{m+l}{n} + p + 1}} dt \end{aligned}$$

olar. Artıq inteqralaltı funksiya t - dən asılı rəşional kəsrdir və belə rəşional ifadələrin inteqrallanmasını bilirik.

Qeyd. P.L.Çebişev isbat etmişdir ki, yuxarıda baxdığımız üç halın heç biri ödənmədikdə (11.1) inteqralı elementar funksiyalarla ifadə olunmur.

Misal 1. $J = \int \sqrt[3]{x}(3 + 2\sqrt{x})^2 dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{2}$, $p = 2$ olduğu üçün I hala uyğun olaraq $x = t^6$ əvəzləməsi aparsaq, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$, $dx = 6t^5 dt$ olar. Onda

$$J = \int t^2 (3 + 2t^3)^2 6t^5 dt = 6 \int t^7 (9 + 12t^3 + 4t^6) dt =$$

$$= 6 \int (9t^7 + 12t^{10} + 4t^{13}) dt = 54 \frac{t^8}{8} + 72 \frac{t^{11}}{11} + 24 \frac{t^{14}}{14} + C =$$

$$= \frac{27}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{72}{11} x^{\frac{11}{6}} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$$

Misal 2. $J = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ qeyri-müəyyən inteqralını hesablayın.

Həlli. Bu halda $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$,

$\frac{m+n}{n} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ tam ədəd olduğu üçün II hala uyğun olaraq

$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

Onda $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt$, $\sqrt{x} = (t^3 - 1)^2$ olar.

Yeni dəyişənə keçsək,

$$J = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^7 (4t^3 - 7) + C.$$

Beləliklə,

$$J = \frac{3}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}(4(1 + \sqrt[4]{x}) - 7) + C =$$

$$= \frac{3}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}(4\sqrt[4]{x} - 3) + C$$

Misal 3. $J = \int \frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. Bu halda $m = -6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$, $s = 3$ və $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = -1$ olduğundan, III hala uyğun olaraq, $x^{-3} + 2 = t^3$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

Buradan, $x = \frac{1}{(t^3 - 2)^{\frac{1}{3}}}$, $dx = -\frac{t^2 dt}{(t^3 - 2)^{\frac{4}{3}}}$, $x^6 = \frac{1}{(t^3 - 2)^2}$,

$$1 + 2x^3 = 1 + 2 \frac{1}{t^3 - 2} = \frac{t^3}{t^3 - 2}, \quad (1 + 2x^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{t^2}{(t^3 - 2)^{\frac{2}{3}}} \text{ alırıq.}$$

Onda

$$J = \int x^{-6} (1 + 2x^3)^{\frac{2}{3}} dx = - \int (t^3 - 2)^2 \frac{t^2}{(t^3 - 2)^{\frac{2}{3}}} \frac{t^2}{(t^3 - 2)^{\frac{4}{3}}} dt =$$

$$= - \int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{5}(x^{-3} + 2)^{\frac{5}{3}} + C.$$

§ 12. Bəzi triqonometrik ifadələrin inteqrallanması

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (12.1)$$

şəkilində olan inteqrallara baxaq.

Burada inteqralaltı $R(\sin x, \cos x)$ funksiyası $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarından asılı rəşional funksiya dır. Misallar göstərək.

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos^2 x}{1 + \sin^3 x} \quad \text{funksiyası} \quad \sin x \quad \text{və} \quad \cos x$$

funksiyalarının rasiional funksiyasıdır. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{1 + \cos x}$ funksiyası $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarından asılı rasiional funksiya deyildir. Biz yalnız $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarından asılı rasiional funksiyalarının inteqrallanmasını öyrənəcəyik.

$$(12.1) \quad \text{inteqralı} \quad tg \frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi) \quad \text{əvəzləməsi}$$

vasitəsilə rasiional funksiyanın inteqrallanmasına gətirilir. Doğurdan da, bu halda

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

olduğundan,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt. \quad (12.2)$$

Artıq (12.2)-nin sağ tərəfindəki inteqralda, inteqralaltı ifadə t -dən asılı rasiional funksiyaadır.

Misal 1. $J = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $tg \frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi$ əvəzləməsi aparaq. Onda aydındır ki,

$$J = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} dt = \int \frac{2}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2}$$

$3t^2 + 2t + 2$ kvadrat üçhədlisinin həqiqi kökləri yoxdur. Bu kvadrat üçhədlini

$$3t^2 + 2t + 2 = 3 \left[\left(t + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{5}{9} \right] = 3 \left[\left(t + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 \right]$$

şəklində yazaq. Onda

$$\int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{d \left(t + \frac{1}{3} \right)}{\left(t + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t + 1}{\sqrt{5}} + C$$

olar. Alınan cavabda t -nin əvəzinə $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ yazsaq, tələb olunan integralı hesablamış olarıq.

$$J = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

Qeyd. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ($-\pi < x < \pi$) əvəzləməsi (bu əvəzləmə bəzi riyazi ədəbiyyatlarda universal əvəzləmə adlanır) vasitəsilə (12.1) şəklində integralları hesablayarkən bir çox hallarda

texniki çətinliklər yaranır və integralin hesablanması çox vaxt aparır. Ona görə bəzi hallarda digər əvəzləmələrdən istifadə etmək daha faydalıdır. Aşağıdakı halları nəzərdən keçirək.

I. Əgər (12.1) integralında $R(\sin x, \cos x)$ rasional funksiyası üçün

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ olarsa, yəni R funksiyası $u = \sin x$ dəyişəninə nəzərən tək olarsa, onda $\cos x = t$ əvəzləməsi;

b) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ olarsa, yəni R funksiyası $v = \cos x$ dəyişəninə nəzərən tək olarsa, onda $\sin x = t$ əvəzləməsi;

c) $R(\sin x, \cos x)$ funksiyası üçün $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ şərti ödənərsə, yəni $R(u, v)$ funksiyası $u = \sin x$, $v = \cos x$ funksiyalar küllisinə nəzərən cüt olarsa, $tg x = t$ əvəzləməsi aparılması faydalıdır.

Misal 2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$ qeyri-müəyyən integralını hesablayın.

Həlli. Integralaltı ifadə $\sin x$ dəyişəninə nəzərən tək funksiyadır. $\cos x = t$ əvəzləməsi apararaq. Onda

$\sin^5 x dx = \sin^4 x \sin x dx = -(1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = -(1 - t^2)^2 dt$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx &= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^2} dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2} dt = \\ &= -\int \frac{dt}{t^2} + \int 2dt + \int t^2 dt = \frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

II. Tutaq ki, (12.1) integralı

$$\int R_1(\sin x) \cos x dx \text{ və ya } \int R_2(\cos x) \sin x dx \quad (12.3)$$

şəklindədir, burada R_1 və R_2 uyğun olaraq $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarından asılı rəasional funksiyalardır. Bu halda birinci inteqralda $\sin x = t$, ikinci inteqralda isə $\cos x = t$ əvəzləməsi aparmaqla baxılan inteqralları t -dən asılı rəasional funksiyanın inteqrallanmasına gətirmək olar. Misala müraciət edək.

Misal 3. $J = \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. Bu inteqral (12.3) şəklindədir. $\sin x = t$ əvəzləməsi aparaq. $\cos x dx = dt$ olduğundan,

$$J = \int \frac{t dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{1+t^4} = \frac{1}{2} \arctg t^2 + C = \frac{1}{2} \arctg(\sin^2 x) + C.$$

III. Tutaq ki, (12.1) inteqralında inteqralaltı funksiya $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının yalnız cüt dərəcələri iştirak edir, yəni (12.1) inteqralı

$$\int R_1(\sin^2 x, \cos^2 x) dx \quad (12.4)$$

şəklindədir, burada $R_1(u, v)$ ilə u və v dəyişənlərindən asılı rəasional funksiya. Bu halda $\tg x = t$ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ əvəzləməsi aparmaq daha münasibdir. Əvəzləmədən

$$x = \arctg t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\tg^2 x}{1+\tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

alırıq. Onda (12.4) inteqralı

$$\int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

inteqralına gətirirlər. Artıq inteqralaltı funksiya t -dən asılı rəasional funksiya.

Misal 4. $J = \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, baxılan integral (12.4) şəklində olan integraldır. $\operatorname{tg} x = t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ əvəzləməsi aparaq.

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

olduğundan,

$$J = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2 dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}$$

olar. Asanlıqla inanmaq olar ki,

$$\frac{t^2}{(1+2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+2t^2}$$

bərabərliyi doğrudur. Onda

$$J = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+2t^2} = \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C =$$

$$= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C = x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

Qeyd edək ki, bu integralı integralaltı funksiyada dərəcəni aşağı salma düsturundan istifadə edib, sadələşdirdikdən sonra universal əvəzləmənin köməyi ilə də asanlıqla hesablamaq olur.

Misal 5. $J = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ integralım hesablaym.

Həlli. Aydındır ki, bu integral (12.4) şəklində olan integraldır. $tg x = t$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) əvəzləməsi aparaq. Onda baxılan integral aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{aligned}
 J &= \int \frac{1+t^2}{t^4+1} dt \\
 J &= \int \frac{1+t^2}{t^4+1} dt = \int \frac{\frac{1}{t^2}+1}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(\sqrt{2})^2} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} \right) + C = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg^2 x - 1}{\sqrt{2} tg x} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg^2 x - 1}{\sqrt{2} tg x} \right) + C.
 \end{aligned}$$

IV. Tutaq ki, (12.1) integralı

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx \quad (12.5)$$

şəklindədir. Burada α və β həqiqi ədədlərdir. Aşağıdakı üç hala baxaq:

a) Tutaq ki, α və β ədədlərindən biri, məsələn β tək natural ədəddir ($\beta = 2k+1$, $k=0,1,2,\dots$) digəri, yəni α isə istənilən həqiqi ədəddir. Onda $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyindən istifadə etməklə (12.5) integralını

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \int \sin^\alpha x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^\alpha x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx$$

şəklində yazı bilərik. Axırncı inteqralda $\sin x = t$ əvəzləməsi aparsaq,

$$\int \sin^{\alpha} x (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx = \int t^{\alpha} (1 - t^2)^k \, dt$$

alırıq. Nyuton binomu düsturundan istifadə etməklə sonuncu inteqralın hesablanması $k+1$ sayda qüvvət funksiyasının inteqrallanmasına gətirilir.

Misal 6. $J = \int tg^5 x \, dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, baxılan inteqral (12.5) şəklində olan inteqraldır ($\alpha = 5$ tək natural ədəd, $\beta = -5$). Onda $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyindən istifadə etməklə verilmiş inteqralı aşağıdakı şəkildə yazıq:

$$\begin{aligned} J &= \int tg^5 x \, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} \, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x \, dx}{\cos^5 x} = \\ &= - \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x)}{\cos^5 x} \end{aligned}$$

$\cos x = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$J = - \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^5} \, dt = - \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^5} \, dt = - \int \frac{dt}{t^5} + 2 \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C = \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

alırıq.

$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$ düsturundan istifadə etsək, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$,

$\frac{1}{\cos^4 x} = (1 + tg^2 x)^2$ olduğundan,

$$J = \frac{1}{4} (1 + tg^2 x)^2 - (1 + tg^2 x) - \ln|\cos x| + C =$$

$$= \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{3}{4} - \ln|\cos x| + C$$

olar. C ixtiyari sabit olduğundan $C - \frac{3}{4}$ ədədi də ixtiyari sabitdir. $C - \frac{3}{4} = C_1$ işarə etsək,

$$J = \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln|\cos x| + C_1$$

alarıq.

b) Tutaq ki, (12.5) integr alında α və β ədədlərinin hər ikisi cüt natural ədəddir, yəni $\alpha = 2m$, $\beta = 2n$ ($m, n \in N$). Bu halda $m \neq n$ olduqda integr alaltı funksiyanı

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (12.6)$$

düsturlarından istifadə etməklə çevirmək daha əlverişli olur. (12.6) düsturlarını tətbiq etdikdə (12.5) integr alı aşağıdakı şəkldə düşər.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx &= \int (\sin^2 x)^m (\cos^2 x)^n dx = \\ &= \frac{1}{2^{m+n}} \int (1 - \cos 2x)^m (1 + \cos 2x)^n dx \end{aligned}$$

İntegr alaltı funksiyada $(1 - \cos 2x)^m$ və $(1 + \cos 2x)^n$ vuruqlarının hər ikisinə Nyuton binomunu tətbiq edib mötərizələri açsaq, hədləri $\cos 2x$ funksiyasının tək və cüt qüvvətlərini özündə saxlayan cəm alarıq. $\cos 2x$ funksiyasının tək dərəcəli qüvvətlərinin integr allanması a) bəndində göstərilmişdir. $\cos 2x$ funksiyasının cüt dərəcəli qüvvətlərinin daxil olduğu integr alları hesblamaq üçün isə yenidən (12.6) dərəcəni aşağı salma düsturlarından istifadə etməklə, $\cos 4x$ funksiyasının qüvvətlərində, ibarət integr allar alarıq. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, sonda $\int \cos 2kx dx$ ($k \in N$)

şəklində inteqrallar alırıq. Belə inteqrallar isə asanlıqla hesablanır.

$m = n$ olduqda

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

düsturundan istifadə etmək daha münasibdir. Bu halda

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2n} x \, dx &= \int (\sin x \cdot \cos x)^{2n} \, dx = \frac{1}{4^n} \int \sin^{2n} 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4^n} \int (\sin^2 2x)^n \, dx = \frac{1}{8^n} \int (1 - \cos 4x)^n \, dx \end{aligned}$$

alırıq.

Sonuncu inteqralda inteqralaltı funksiya Nyuton binomunu tətbiq etsək, hədləri $\cos 4x$ funksiyaının tək və cüt qüvvətlərini özündə saxlayan cəm alırıq. Belə cəmin inteqralının hesablanması isə yuxarıda göstərmişik.

Misal 7. $\int \sin^6 x \, dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ və $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ dərəcəni

ən aşağı salma düsturlarından və $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyindən istifadə edək.

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^3 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^3 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{16} \int \cos 2x \, d(2x) + \frac{3}{16} \int (1 + \cos 4x) \, dx - \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) \, d(\sin 2x) = \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C = \frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \\ + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Misal 8. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $\alpha = 2$, $\beta = 4$ ədədlərinin hər ikisi cütdür. (12.6) dərəcəni aşağı salma düsturlarından istifadə edək.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{(1 - \cos 2x)}{2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + \\ &+ \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

c) (12.5) inteqralında $\alpha + \beta = -2k$, $k \in \mathbb{N}$ mənfi cüt ədəd olduğu hala baxaq. Bu halda inteqralaltı funksiya iki şəkildə ola bilər:

1) İnteqralaltı funksiya kəsr olub, surətdə sinus (və yaxud kosinus), məxrəcdə isə kosinus (və yaxud sinus) olmaqla, dərəcələri müxtəlifdir. Kəsrin surətində sinus, məxrəcində isə kosinus olduqda $\operatorname{tg} x = t$ əvəzləməsi, əks halda isə $\operatorname{ctg} x = t$ əvəzləməsi aparmaq daha münasibdir.

2) İnteqralaltı funksiya kəsr olub, surət sabit, məxrəc isə sinus və kosinusların dərəcələri hasilərindən ibarətdirsə, yenə də $\operatorname{tg} x = t$ və yaxud $\operatorname{ctg} x = t$ əvəzləməsi aparmaq daha münasibdir.

c) halının 1) və 2) bəndlərinə aid nümunələr göstərək.

Misal 9. $J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\alpha = 3, \beta = -7, \alpha + \beta = -4$ mənfi cüt ədəd olduğu üçün $\operatorname{tg} x = t \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$x = \arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^3}} \cdot t \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3(1+t^2)^2}{1+t^2} dt = \int t^3(1+t^2) dt = \\ &= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C. \end{aligned}$$

Misal 10. $J = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^9 x}} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{9}{2}, \alpha + \beta = -4$ mənfi cüt ədəd

olduğu üçün $\operatorname{tg} x = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$J = \int t^{\frac{1}{2}} (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^{\frac{1}{2}} (1+t^2) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C =$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} t + \frac{1}{7} t^3 \right) + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^3 x \right) + C.$$

Misal 11. $J = \int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x}$ integralım hesablayın.

Həlli. $\alpha = -7$, $\beta = -1$, $\alpha + \beta = -8$ mənfi cüt ədəd

olduğu üçün $\operatorname{tg} x = t$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ əvəzləməsi aparaq.

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin^6 x = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3,$$

$$\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ olduğundan,}$$

$$J = \int \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^3 \cdot \frac{1+t^2}{t} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^7} dt = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^7} dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^7} + 3 \int \frac{dt}{t^5} + 3 \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{6}t^{-6} - \frac{3}{4}t^{-4} - \frac{3}{2}t^{-2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x - \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

V. $\alpha \neq \pm\beta$ olduqda

$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$ şəklində olan integralları hesablamaq üçün hasilin cəmə çevrilməsi haqda

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

trigonometrik düsturlardan istifadə etmək lazımdır.

Misal 12. $J = \int \sin 3x \cdot \cos 4x dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $\sin 3x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2} [\sin 7x - \sin x]$ olduğundan,

$$J = \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

Çalışmalar

1. Əgər

a) $F'(x) = 6x + 3$ və $F(-2) = 4$ olarsa,

b) $F'(x) = 9x^2 + 4x - 10$ və $F(-1) = 10$ olarsa, $F(x)$ -i tapın.

2. Aşağıdakı qeyri-müəyyən integralları hesablayın.

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$, b) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{14 - 6x - 3x^2}}$.

3. Hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq etməklə aşağıdakı integralları hesablayın.

a) $\int e^x \sin x dx$, b) $\int \sqrt{5 - x^2} dx$, c) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$,

e) $\int x \cos^2 x dx$, d) $\int \arccos x dx$, f) $\int x \cdot \ln(x + 1) dx$.

4. Əvəzetmə üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı integralları hesablayın.

a) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$, b) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} dx$, c) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$,

e) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3 - x^4}}$, d) $\int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx$.

5. Rəşional kəsrlərin integrallanması üsulundan istifadə etməklə aşağıdakı integralları hesablayın.

$$\text{a) } \int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)},$$

$$\text{c) } \int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+1)} dx.$$

6. Eyler əvəzləmələrindən istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}},$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}.$$

7. Binomal diferensialların inteqrallanmasından istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

$$\text{a) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}, \quad \text{c) } \int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$$

8. Triqonometrik və hiperbolik funksiyaların inteqrallanmasından istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5},$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}, \quad \text{e) } \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx, \quad \text{d) } \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}.$$

Cavablar

1. a) $F(x) = 3x^2 + 3x - 2$; b) $F(x) = 3x^3 + 2x^2 - 10x + 1$.

2. a) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C$; b) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{5}} + C$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{\frac{17}{3}}} + C$.

3. a) $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$; b) $\frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$;

c) $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$; e) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$;

d) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

f) $\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{4} (x-1)^2 - \frac{\ln|x+1|}{2} + C$.

4. a) $-2\sqrt{\cos x} + C$; b) $\frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$;

c) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + C$; e) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$;

d) $\ln|3+x \ln x| + C$.

5. a) $5x + \ln x^2 (x+2)^4 |x-2|^3 + C$;

b) $-\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C$;

c) $\frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2 \operatorname{arctg} x + \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}} + C$.

6. a) $-2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1+x-x^2} + 1}{x} + 1 \right) + C$;

$$b) 2 \ln \left| \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x \right| - \frac{3}{2 \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1 \right)} ;$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1 \right| + C$$

$$c) \frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} + C.$$

$$7. a) \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C ;$$

$$b) 3 \ln \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + C ; c) (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(3x^2-2)}{15} + C ;$$

$$e) \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{(2x^2-1)}{3x^3} + C.$$

$$8. a) \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C ;$$

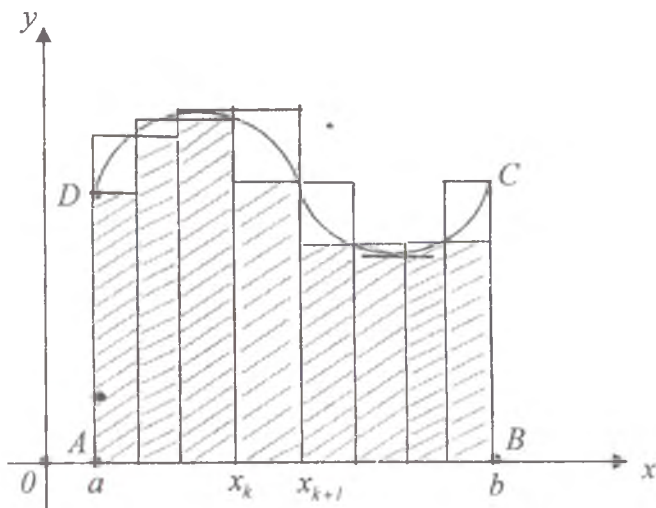
$$b) \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C ; c) -2 \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C ;$$

$$e) -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C ; d) \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

II FƏSİL MÜƏYYƏN İNTEQRAL

§ 13. Müəyyən inteqrala gətirilən məsələlər. Müəyyən inteqralın tərifı

1. Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasında mənfi olmayan kəsilməz $f(x)$ funksiyasının qrafiki, $y=0$ absis oxu, $x=a, x=b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş $ABCD$ fiqurunun (bu fiquru əyrixətli trapesiya adlandırırlar) sahəsini hesablamaq lazımdır (şəkil 2.1).



Şəkil 2.1

Əyrixətli trapesiyanın oturacağı olan $[a, b]$ parçasını x_k -nöqtələri vasitəsilə $[x_{k-1}, x_k]$, $(k=1, 2, \dots, n)$ hissələrinə bölək:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

$[a, b]$ parçasının $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələri vasitəsilə qeyd edilən şəkildə bölgüsünü T ilə işarə edək. Bu halda deyirlər ki, $[a, b]$ parçasında T bölgüsü aparılıb.

$f(x)$ funksiyası $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) parçalarında kəsilməz olduğundan bu parçalarda özünü ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır. $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında

$$\max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(\xi_k), \quad \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(\eta_k) \text{ işarə edək.}$$

Oturacağı $[x_{k-1}, x_k]$ parçası, hündürlüyü $f(\eta_k)$ olan düzbucaqlının sahəsi

$$f(\eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(\eta_k) \Delta x_k$$

olacaqdır. Burada $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğudur.

Əyrixətli trapesiyanın daxilində yerləşən və oturacaqları $[x_{k-1}, x_k]$, hündürlükləri $f(\eta_k)$ olan düzbucaqlıların əmələ gətirdiyi fiqurun pilləvari sahəsi

$$S_D(T) = f(\eta_1) \Delta x_1 + \dots + f(\eta_{n-1}) \Delta x_{n-1} + f(\eta_n) \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k$$

olar. (şəkil 2.1-də bu sahə ştrixlənmişdir)

Analoji olaraq baxdığımız əyrixətli trapesiyanı daxilində saxlayan pilləvari fiqurun sahəsi

$$S_X(T) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

olar. $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ ($k = 1, \dots, n$) ədədlərindən ən böyüyünü $d(T)$ ilə işarə edək: $d(T) = \max_k \Delta x_k$. $d(T)$ -ni T bölgüsünün diametri adlandırırlar. $d(T)$ -nin dəyişməsi $S_D(T)$ və $S_X(T)$ cəmlərinin dəyişməsinə səbəb olacaqdır.

Tərif 1. Əgər $d(T) \rightarrow 0$ şərtində $S_D(T)$ və $S_X(T)$ cəmləri eyni limitə yaxınlaşarsa, onda əyrixətli trapesiya kvadratlanan fiqur, həmin limitə isə onun sahəsi deyilir.

Əgər $S_D(T)$ və $S_X(T)$ cəmlərinin limitləri fərqli olarsa, onda baxılan fiqur kvadratlanmayandır, başqa sözlə fiqurun sahəsi yoxdur deyirlər.

Beləliklə, ayrışdırılabilir trapesiyanın sahəsini S ilə işarə etsək,

$$S = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S_D(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S_X(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (13.1)$$

2. Başqa bir məsələyə baxaq. Fərz edək ki, maddi nöqtə $t = a$ anından $t = b$ anına $v = v(t)$ ani sürəti ilə hərəkət edir. $t = a$ anından $t = b$ anınadək gedilən yolun hərəkət qanununu təyin edək. Sürət müntəzəm olmadığından, yolu zamanın sürətə hasili kimi tapa bilmirik. $[a, b]$ parçasında T bölgüsü aparaq:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Əgər $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, \dots, n$) -parçaları kifayət qədər kiçik olarsa $t = t_{k-1}$ anından $t = t_k$ anınadək sürəti müntəzəm hesab edə bilərik. Fərz edək ki, t_{k-1} -anından t_k -anınadək sürət v_k -dir. Onda $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ qəbul etsək,

$$\sigma_T(v) \approx v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^n v_k \Delta t_k$$

olar. v_k -sürətini (t_{k-1}, t_k) intervalının ixtiyari ξ_k anındakı sürəti qəbul etsək,

$$\sigma_T(v) \approx \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$$

alırıq. $d(T) = \max_k \Delta t_k$ olsun. Bu təqribi bərabərlik Δt_k kifayət qədər kiçik olduqda hərəkət qanununu daha dəqiq ifadə edir.

$$l = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k. \quad (13.2)$$

Göründüyü kimi baxdığımız həndəsi və fiziki məsələ oxşar cəmlərin limitinin hesablanmasına gətirilir. Fizikada,

texnikada belə məsələlər çoxdur. Ona görə də məsələyə ümumi şəkildə baxmağa çalışaq.

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasının istənilən sonlu sayda $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ –nöqtələr çoxluğu $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ şərtini ödəyir. Bu halda deyirlər ki, $[a, b]$ parçasının T bölgüsü aparılmışdır. $x_k (k = \overline{0, n})$ nöqtələrinə T bölgüsünün nöqtələri, $[x_{k-1}, x_k] (k = \overline{1, n})$ parçalarına isə T bölgüsünün parçaları deyilir. İxtiyari T bölgüsü üçün $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğunu Δx_k ilə işarə edək: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. $d(T) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ kəmiyyətini T bölgüsünün diametri adlandırırlar.

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında ixtiyari iki T_1 və T_2 bölgüsü verilmişdir. Əgər T_1 bölgüsünün hər bir nöqtəsi həm də T_2 bölgüsünün nöqtəsidirsə, onda T_2 bölgüsünə T_1 bölgüsünün davamı deyirlər. Əgər T_1 və T_2 bölgülərinin hər bir nöqtəsi T bölgüsünün nöqtəsidirsə və T bölgüsünün başqa bölgü nöqtələri yoxdursa, onda T bölgüsünə T_1 və T_2 bölgülərinin birləşməsi deyilir və $T = T_1 \cup T_2$ kimi işarə olunur. Aydın ki, bu halda T bölgüsü T_1 və T_2 bölgülərinin davamıdır.

Tutaq ki, $f(x)$, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş funksiya və $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bu parçanın ixtiyari bölgüsüdür.

$$\sigma_T(f) = \sigma_T(f; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (13.3)$$

cəmini düzəldək, burada $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ixtiyari qeyd olunmuş nöqtələrdir. (13.3) cəminə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında T bölgüsünə uyğun Riman inteqral cəmi, ξ_k nöqtələrinə isə T bölgüsünün aralıq nöqtələri deyilir.

Aydınır ki, $\sigma_T(f; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ Riman inteqral cəmi T bölgəsindən və ξ_k aralıq nöqtələrindən asılıdır. Sadəlik üçün $\sigma_T(f; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ inteqral cəmini $\sigma_T(f)$ ilə işarə edəcəyik.

Tərif 2. Tutaq ki, J müəyyən sonlu ədəddir. Əgər $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi varsa ki, $[a, b]$ parçasının diametri δ -dan kiçik olan istənilən $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsü üçün $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq

$$|\sigma_T(f) - J| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda deyirlər ki, $\sigma_T(f)$ Riman inteqral cəmlərinin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində limiti var və bu limit J -ə bərabərdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\sigma_T(f)$ inteqral cəmlərinin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində limiti varsa, yeganədir. Beləliklə, $J = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T(f)$.

Tərif 3. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasının $\sigma_T(f)$ inteqral cəmlərinin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində J ədədinə bərabər limiti varsa, onda $f(x)$ -ə $[a, b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan funksiya, J ədədinə isə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında Riman inteqralı və yaxud müəyyən inteqralı deyirlər və bunu $\int_a^b f(x) dx$ kimi işarə edirlər.

Beləliklə, tərifə görə

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

$\int_a^b f(x)dx$ simvolunda a -ya inteqralın aşağı, b -yə yuxarı sərhəddi, $f(x)$ -ə inteqralaltı funksiya, x -ə inteqrallama dəyişəni, $[a,b]$ -yə inteqrallama aralığı deyirlər. Gələcəkdə “Riman inteqralı”, “Riman mənaada inteqrallanan funksiya” terminləri əvəzinə sadəcə, uyğun olaraq “inteqral” və “inteqrallanan funksiya” terminlərindən istifadə edəcəyik.

Müəyyən inteqralın tərifindən görünür ki, $\int_a^b f(x)dx$ -simvolu ədəddir. O, inteqralaltı funksiyaadan və a , b ədədlərindən asılıdır. İnteqrallama dəyişəninin hansı hərflə işarə olunması rol oynamır. Onu ixtiyari dəyişənlə əvəz edə bilərik, yəni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

Müəyyən və qeyri-müəyyən inteqralın eyni $\int$ simvolu ilə işarə olunması təsadüfi deyil. Onlar arasında əlaqə bu anlayışlar meydana gələndən xeyli sonra, Nyuton-Leybnis düsturu vasitəsilə yaranıb. Bu düstura qədər müəyyən inteqral cəm vasitəsilə hesablanıb. Bu da onun tətbiq imkanlarını məhdudlaşdırıb. Ona görə də Nyuton-Leybnis düsturunu riyaziyyatda inqilab hesab edirlər.

Misal 1. Tərifdən istifadə edərək, isbat edin ki, $f(x)=C=const$ funksiyası istənilən $[a,b]$ parçasında inteqrallananıdır və

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

Həlli.	$[a,b]$	parçasının	istənilən
$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$		bölgüsünü	götürək.
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $d(T) = \max_k \Delta x_k$ olsun.		$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$	$(k = \overline{1, n})$

nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq $f(\xi_k) = C$ olduğu üçün

$$\begin{aligned}\sigma_T(f) &= C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \dots + C\Delta x_n = \\ &= C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C(b-a)\end{aligned}$$

bərabərliyi ödənəcəkdir. $\sigma_T(f)$ integral cəmi sabit olduğundan,

$$\int_a^b C dx = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T(f) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} C(b-a) = C(b-a).$$

Misal 2. Tərifdən istifadə edərək, $\int_0^1 x dx$ - müəyyən

integralını hesablayın.

Həlli. $[0, 1]$ parçasını

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$ nöqtələri ilə n bərabər

hissəyə bölək. Aydındır ki, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ olar. ξ_k nöqtələri olaraq,

$[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının sağ uc nöqtələrini götürək:

$\xi_k = x_k = \frac{k}{n} (k = \overline{1, n}), \quad d(T) = \max_k \Delta x_k = \frac{1}{n}. \quad \text{Onda}$

$d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. $f(x) = x$ olduğundan, tərifə görə

$$\begin{aligned}\int_0^1 x dx &= \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \\ &= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(1+n)}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Misal 3. $[-1, 4]$ parçasında verilmiş $f(x) = 1 + x$ funksiyası üçün $[-1, 4]$ parçasını n bərabər hissəyə bölməklə və ξ_k ($k = \overline{1, n}$) aralıq nöqtələrini $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının orta

nöqtələri götürməklə, $\int_{-1}^4 (1+x) dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $[-1, 4]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Onda aydındır ki, hər bir $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğu $\frac{5}{n}$ -ə bərabər olacaqdır.

$\max_k \Delta x_k = \frac{5}{n} \quad (k = 1, \dots, n)$. Bölgü nöqtələri

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{5}{n}, \quad x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{5}{n}, \dots, x_k = -1 + k \cdot \frac{5}{n}, \dots,$$

$x_n = 4$. Bu bölgünün diametri $d(T) = \frac{5}{n}$ -ə bərabərdir.

$$d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty. \quad \xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \quad (k = 1, \dots, n) \text{ götürək.}$$

Onda $f(x) = 1 + x$ olduğundan, $\sigma_T(f)$ integral cəmi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{aligned} \sigma_T(f) &= \sum_{k=1}^n (1 + \xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(x_k - x_{k-1} + \frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2} \right) = + \left(x_1 - x_0 + \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \right) + \\ &+ \left(x_2 - x_1 + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \right) + \left(x_3 - x_2 + \frac{x_3^2 - x_2^2}{2} \right) + \dots + \\ &+ \left(x_n - x_{n-1} + \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2} \right) = x_n - x_0 + \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \\ &= 4 - (-1) + \frac{16 - 1}{2} = 12,5. \end{aligned}$$

Müəyyən integralın tərifinə görə

$$\int_{-1}^4 (1 + x) dx = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (1 + \xi_k) \cdot \Delta x_k = 12,5.$$

Misal 4. Tərifdən istifadə edərək, $\int_{-1}^0 x^2 dx$ müəyyən integralını hesablayın.

Həlli. $[-1, 0]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Onda

$$\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad (k = \overline{1, n}) \text{ və}$$

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = -1 + \frac{2}{n}, \dots, \quad x_k = -1 + k \cdot \frac{1}{n}, \dots,$$

$$x_n = -1 + n \cdot \frac{1}{n} = 0 \text{ olacaqdır. Bu bölüğünün diametri}$$

$$d(T) = \frac{1}{n}. \quad d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty. \quad \xi_k \text{ aralıq nöqtələri olaraq}$$

$$\xi_k = x_k = -1 + k \cdot \frac{1}{n} \text{ sağ uc nöqtələrini götürək. Onda } f(x) = x^2$$

olduğundan, $f(\xi_k) = \xi_k^2 = \left(\frac{k}{n} - 1\right)^2$ olacaqdır. $\sigma_T(f)$ integral cəmi üçün alırıq:

$$\begin{aligned} \sigma_T(f) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(k-n)^2}{n^3} = \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-n)^2 = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2). \end{aligned}$$

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ məlum düsturundan istifadə etsək,

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6}$$

olar.

Onda $\sigma_T(f)$ integral cəmi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right).$$

Tərifə görə,

$$\int_{-1}^0 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}.$$

Misal 5. Tərifdən istifadə etməklə $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ inteqralları

hesablayın.

Həlli. $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək.

Aydındır ki, bölgü nöqtələri

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2n}, \quad \dots, \quad x_k = k \cdot \frac{\pi}{2n}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\pi}{2}$$

olacaqdır. $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) parçalarının uzunluğu

$$\Delta x_k = \frac{\pi}{2n} \quad (k = \overline{1, n}) \text{ olacaqdır. Aydındır ki, bu } T \text{ bölgüsünün}$$

diametri $d(T) = \frac{\pi}{2n}$ və $d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. ξ_k aralıq nöqtələri

olaraq $\xi_k = x_k$ götürək. Onda $f(x) = \cos x$ olduğundan, $\sigma_T(f)$ inteqral cəmi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n \cos \xi_k \cdot \Delta x_k = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n}$$

Aşağıdakı məlum düsturdan istifadə edək:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

Bu düsturda $u = \frac{\pi}{2n}$ götürsək, onda

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2}$$

olar. Kosinusların cəmi üçün alınan bu ifadəni $\sigma_n(f)$ -in ifadəsinə nəzərə alsaq,

$$\sigma_n(f) = \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\pi}{4n} = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \cdot \cos \frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}.$$

Bu bərabərlikdə $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = 1$

və $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{4n} = 1$ olduğunu nəzərə alsaq, müəyyən integralın tərifinə görə

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \cdot \cos \frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n} = 1.$$

Misal 6. Tərifdən istifadə etməklə $\int_0^1 a^x dx$ ($a > 0$)

inteqralını hesablayın.

Həlli. $[0,1]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Bölgü nöqtələri

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_k = \frac{k}{n}$, ..., $x_n = 1$ olacaqdır. Hər bir $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) parçasının uzunluğu

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$. Bu bölgünün diametri $d(T) = \frac{1}{n}$.

$d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$ sağ uc nöqtələrini götürək. Onda $f(x) = a^x$ olduğundan,

$f(\xi_k) = a^{\frac{k}{n}}$ olacaqdır. $\sigma_T(f)$ inteqral cəmi aşağıdakı şəkllə düşər.

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \dots + a^{\frac{n}{n}} \right) \frac{1}{n}$$

$S_n = a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \dots + a^{\frac{n}{n}}$ cəmi, vuruğu $q = a^{\frac{1}{n}} \neq 1$ olan həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmidir. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturuna görə,

$$S_n = a^{\frac{1}{n}} \frac{1 - a}{1 - a^{\frac{1}{n}}}$$

Onda

$$\sigma_n(f) = (a - 1) \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \frac{1}{n} = (a - 1) \frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot a^{\frac{1}{n}}.$$

Bu bərabərlikdə $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a^n} - 1} = \ln a \quad \text{və} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 1$$
 limitlərindən istifadə etsək,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a - 1) \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a^n} - 1} \cdot a^{\frac{1}{n}} = \frac{a - 1}{\ln a}$$

alırıq. Deməli, tərifi görə $\int_0^1 a^x dx = \frac{a - 1}{\ln a}$.

(13.1), (13.2) bərabərlikləri ilə təyin olunan limitlər müəyyən inteqralla aşağıdakı kimi ifadə olunur:

1. Əyrixətli trapesiyanın sahəsi, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında inteqralına bərabərdir:

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

2. Cismnin getdiyi yol, sürətin inteqralına bərabər olar.

$$l = \int_a^b v(t) dt.$$

§14. İnteqrallanan funksiyanın məhdudluğu.

Teorem 14.1. $f(x)$ funksiyanının $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olması üçün onun bu parçada məhdud olması zəruridir.

İsbatı. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır. İsbat edək ki, $f(x)$ bu parçada məhduddur. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında qeyri-məhduddur. $[a, b]$ parçasının diametri $d(T) < \delta$ olan ixtiyari $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsünü götürək. $f(x)$ $[a, b]$ -də qeyri-məhdud

olduğundan $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) parçalarından heç olmasa birində qeyri məhdud olacaqdır. Müəyyənlik üçün tutaq ki, $[x_0, x_1]$ parçasında qeyri məhduddur.

$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ parçalarında uyğun olaraq $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ aralıq nöqtələrini seçək və bu nöqtələri qeyd edək. ξ_1 nöqtəsi isə $[x_0, x_1]$ parçasında dəyişir.

$\sigma_1 = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$ işarə edək. $f(x)$ $[x_0, x_1]$ parçasında qeyri-məhdud olduğundan $\forall M > 0$ ədədi üçün $\exists \xi_1 \in [x_0, x_1]$ nöqtəsi var ki, $|f(\xi_1)| > \frac{M + \sigma_1}{\Delta x_1}$.

Onda

$$|\sigma_T(f)| = |f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \sigma_1| \geq |f(\xi_1) \cdot \Delta x_1| - |\sigma_1| > M + \sigma_1 - |\sigma_1| \geq M.$$

Deməli, $\sigma_T(f)$ cəmi qeyri məhduddur, yəni $\sigma_T(f)$ cəminin $d(T) \rightarrow 0$ şərtində sonlu limiti ola bilməz. Bu isə $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında inteqrallanması şərtinə ziddir. Deməli fərziyyəmiz doğru deyildir, yəni $f(x)$ $[a, b]$ parçasında məhduddur.

Təbii olaraq sual yaranır: $[a, b]$ parçasında məhdud ixtiyari funksiya inteqrallandırmı?

Bu sualın cavabı ümumiyyətlə desək, mənfidir. Məsələn,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{rasional olduqda,} \\ 0, & x - \text{irrasional olduqda,} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasına baxaq. Aydındır ki, bu funksiya istənilən $[a, b]$ parçasında məhduddur. Göstərək ki, bu funksiya $[a, b]$ parçasında inteqrallanan deyildir.

Doğrudan da əgər, $[a, b]$ parçasının ixtiyari T bölgüsündə ξ_k aralıq nöqtələri olaraq rasional nöqtələr seçsək,

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a,$$

İrrasional nöqtələr seçsək, $\sigma_T(f) = 0$ olar.

Deməli, Dirixle funksiyası üçün $\sigma_T(f)$ integral cəminin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində limiti yoxdur. Başqa sözlə $D(x)$ Dirixle funksiyası istənilən $[a, b]$ parçasında inteqrallanan deyildir.

§ 15. Yuxarı və aşağı Darbu cəmləri

Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında məhduddur və bu parçada müəyyən T bölgüsü aparılıb:
 $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

olsun. Aşağıdakı cəmləri daxil edək.

$$S_T = M_1 \Delta x_1 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \quad (15.1)$$

$$s_T = m_1 \Delta x_1 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad (15.2)$$

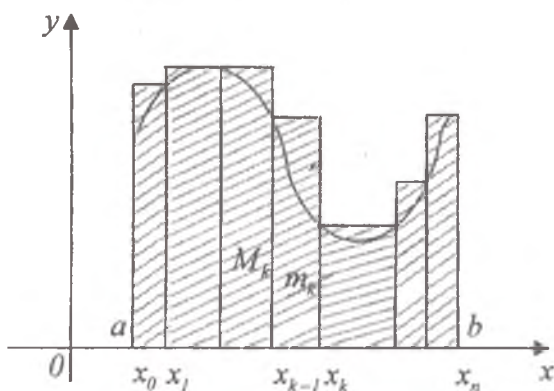
S_T və s_T cəminə uyğun olaraq, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında T bölgüsünə uyğun yuxarı və aşağı Darbu cəmi deyirlər.

Darbu cəmlərinə həndəsi məna verək. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir və mənfi olmayan qiymətlər alır. $f(x)$ funksiyasının qrafiki, $y=0$ absis oxu, $x=a$ və $x=b$ düz xətləri ilə məhdud edilmiş fiqura (əyrixətli trapesiya) baxaq. Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasının ixtiyari T bölgüsü aparılıb. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında

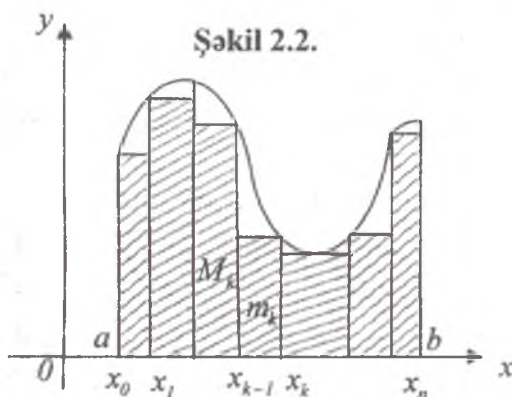
kəsilməz olduğundan hər bir $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) parçasında kəsilməzdir.

$$M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

olsun. Aydındır ki, S_T yuxarı Darbu cəmi əyrixətli trapesiyanı daxilində saxlayan pilləvari fiqurun sahəsi, $\bullet_T$ aşağı Darbu cəmi isə əyrixətli trapesiyanın daxilində yerləşən pilləvari fiqurun sahəsidir. (S_T və s_T sahələri uyğun olaraq şəkil 2.2 və şəkil 2.3-də ştrixlənmişdir).



Şəkil 2.2.



Şəkil 2.3.

Darbu cəmlərinin aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. Fərz edək ki, $\sigma_T(f)$ $f(x)$ funksiyaının $[a, b]$ parçasınının T bölgüsünə uyğun inteqral cəmi, S_T və s_T isə həmin bölgüyə uyğun yuxarı və aşağı Darbu cəmləridir. Onda

$$s_T \leq \sigma_T(f) \leq S_T$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. T bölgüsünə uyğun $f(x)$ -in $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında dəqiq aşağı sərhəddi m_k , dəqiq yuxarı sərhəddi M_k olduğundan, $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ üçün

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

Bu bərabərsizliyi Δx_k -ya vurub, k -ya 1 -dən n -ə qədər qiymətlər verib tərəf-tərəfə cəmləsək, alırıq:

$$s_T \leq \sigma_T(f) \leq S_T.$$

Xassə 2. Fərz edək ki, $T = \{x_k\}_{k=0}^n$, $[a, b]$ parçasının ixtiyari qeyd olunmuş bölgüsüdür. Onda

$$S_T = \sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (15.3.)$$

$$s_T = \inf_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (15.4)$$

İsbatı. Fərz edək ki, ε ixtiyari müsbət ədəddir.

$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ olduğundan, dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının elə ξ_k nöqtəsi var ki,

$$M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_k) < M_k. \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Buradan,

$$\sum_{k=1}^n \left(M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

bərabərsizliyini və yaxud

$$S_T - \varepsilon < \sum_{k=l}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq S_T$$

bərabərsizliyini alırıq. Deməli, dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə,

$$S_T = \sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sum_{k=l}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

(15.3) isbat olundu. Analoji üsulla (15.4) isbat olunur.

Xəssə 3. Tutaq ki, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ və

$T = \{x_k\}_{k=0}^n$ $[a, b]$ parçasının istənilən bölgüsü, $d(T)$ isə bu bölgünün diametridir. T' bölgüsü T bölgüsünə l sayda bölgü nöqtələri əlavə etməklə alınmışsa, onda

$$0 \leq S_T - S_{T'} \leq (M - m) l^* d(T), \quad (15.5)$$

$$0 \leq S_{T'} - S_T \leq (M - m) l d(T) \quad (15.6)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İsbatı. Əvvəlcə tutaq ki, T' bölgüsü T bölgüsünə bir yeni x' bölgü nöqtəsinin əlavə olunması ilə alınmışdır. Bu halda (15.5) bərabərsizliyini isbat edək. Müəyyənlik üçün tutaq ki, $x_{k-l} < x' < x_k$. Onda

$$\begin{aligned} S_{T'} &= \sum_{i=l}^{k-l} M_i \Delta x_i + \sup_{x \in [x_{k-l}, x']} f(x) \cdot (x' - x_{k-l}) + \\ &+ \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \cdot (x_k - x') + \sum_{i=k}^n M_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

$S_T = \sum_{i=l}^n M_i \Delta x_i$ göstərilənlərindən alırıq:

$$\begin{aligned} S_T - S_{T'} &= M_k (x_k - x_{k-l}) - \sup_{x \in [x_{k-l}, x']} f(x) \cdot (x' - x_{k-l}) - \\ &- \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \cdot (x_k - x') = M_k (x_k - x' + x' - x_{k-l}) - \\ &- \sup_{x \in [x_{k-l}, x']} f(x) \cdot (x' - x_{k-l}) - \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \cdot (x_k - x') = \end{aligned}$$

$$= \left(M_k - \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \right) (x_k - x') + \\ + \left(M_k - \sup_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x) \right) (x' - x_{k-1}). \quad (15.7)$$

Məlumdur ki, funksiyanın parçada dəqiq yuxarı sərhəddi bu parçanın bir hissəsindəki dəqiq yuxarı sərhəddindən kiçik deyildir, funksiyanın parçada dəqiq aşağı sərhəddi isə bu parçanın bir hissəsindəki dəqiq yuxarı sərhəddindən böyük deyildir, yəni

$$0 \leq M_k - \sup_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x) \leq M - m, \\ 0 \leq M_k - \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \leq M - m \quad (15.8)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

(15.8) bərabərsizliklərini (15.7) bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$S_T - S_{T'} \leq (M - m)(x_k - x') + (M - m)(x' - x_{k-1}) = \\ = (M - m)(x_k - x_{k-1}) \leq (M - m)d(T)$$

olar. Beləliklə (15.5) bərabərsizliyi $l = 1$ üçün isbat olundu.

İndi tutaq ki, T' bölgüsü T bölgüsünə $l > 1$ sayda bölgü nöqtələri əlavə etməklə alınmışdır. Müəyyənlik üçün tutaq ki, $l \leq n$. $l = 1$ üçün apardığımız isbat prosesini ardıcıl olaraq l dəfə $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) parçalarına tətbiq etməklə asanlıqla (15.5) bərabərsizliyinin doğruluğuna inanmaq olar.

Analoji üsulla (15.6) bərabərsizliyi isbat olunur. Bu xassədən aşağıdakı mühüm nəticə alınır.

Nəticə 1. Bölgü nöqtələrinin sayını artırdıqda aşağı Darbu cəmi azalmır, yuxarı Darbu cəmi isə artmır.

İsbatı. Tutaq ki $[a, b]$ parçasının $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsü aparılıb. Bölgü nöqtələrinə yeni l sayda bölgü nöqtələri əlavə edək. Alınan yeni bölgünü T' ilə işarə edək. (15.5) və (15.6)

bərabərsizliklərindən alırıq: $S_T \geq S_{T'}$, $s_T \leq s_{T'}$. Nəticə isbat olundu.

Xassə 4. İstənilən aşağı Darbu cəmi istənilən yuxarı Darbu cəmindən böyük deyil, yəni $[a, b]$ parçasının istənilən T_1 və T_2 bölgüləri üçün $s_{T_1} \leq S_{T_2}$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. $[a, b]$ parçasında T_1 və T_2 bölgüləri apararaq T_1 və T_2 bölgülərinin birləşməsini T ilə işarə edək. $T = T_1 \cup T_2$. Aydınır ki, T bölgüsü T_1 və T_2 bölgülərinin hər birinin davamıdır.

Onda xassə 3-dən çıxan nəticə 1-ə əsasən

$$s_{T_1} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T_2}$$

olar.

Nəticə 2. $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçası üzrə bütün mümkün yuxarı Darbu cəmləri çoxluğu aşağıdan, aşağı Darbu cəmləri çoxluğu isə yuxarıdan məhduddur.

Doğrudan da, xassə 4-ə görə istənilən yuxarı Darbu cəmi qeyd olunmuş müəyyən aşağı Darbu cəmindən kiçik deyildir, başqa sözlə, yuxarı Darbu cəmləri çoxluğu aşağıdan məhduddur. Analoji mühakiməni aparmaqla, asanlıqla inanmaq olar ki, aşağı Darbu cəmləri çoxluğu yuxarıda məhduddur..

Ona görə də bütün mümkün T bölgüləri üçün $\{s_T\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi, $\{S_T\}$ çoxluğunun isə dəqiq aşağı sərhəddi vardır:

$$J_* = \sup_T \{s_T\}, \quad J^* = \inf_T S_T$$

olsun. Aydınır ki,

$$s_T \leq J_* \leq J^* \leq S_T.$$

J_* və J^* ədədlərinə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında uyğun olaraq aşağı və yuxarı Darbu inteqralları deyilir.

Darbu lemması. $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, $[a, b]$ parçasının diametri $d(T) < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün

$$J_* - \varepsilon \leq s_T \leq S_T < J^* + \varepsilon \quad (15.9)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

İsbatı. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və onu qeyd edək. Dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə, $J_* = \sup_T \{s_T\}$ bərabərliyindən alınır ki, $[a, b]$ parçasının elə T_l bölgüsü var ki,

$$s_{T_l} > J_* - \frac{\varepsilon}{2} \quad (15.10)$$

bərabərsizliyi ödənilir. T_l bölgüsünün (a, b) intervalında yerləşən bölgü nöqtələrinin sayı l olsun. Tutaq ki, T $[a, b]$ parçasının diametri

$$d(T) < \frac{\varepsilon}{2l(M-m)} = \delta_l(\varepsilon)$$

bərabərsizliyini ödəyən istənilən bölgüsüdür. Burada hesab edirik ki, $M \neq m$. Əgər $M = m$ olarsa, onda $f(x) = c = \text{const}$ olardı və bu halda istənilən T bölgüsü üçün $s_T = S_T = c(a-b)$ və deməli, $J_* = J^* = c(b-a)$ olardı. Aydındır ki, bu halda Darbu lemması doğrudur. Əgər $f(x)$ sabit funksiya olmazsa, təbii ki, $M > m$ olacaqdır.

T bölgüsünə T_l bölgüsünün nöqtələrini əlavə edək: $T' = T \cup T_l$ olsun. Beləliklə, T' bölgüsü T bölgüsünə l sayda yeni bölgü nöqtələrinin əlavə olunması ilə alınmışdır. Xəssə 3-ə görə

$$s_{T_l} \leq s_{T'} \leq s_T + (M-m)l d(T) < s_T + (M-m)l \cdot \frac{\varepsilon}{2l(M-m)} = s_T + \frac{\varepsilon}{2}$$

Beləliklə,

$$s_{T_l} \leq s_T + \frac{\varepsilon}{2}$$

Alınan bu bərabərsizlikdən (15.10) bərabərsizliyinə görə

$$J_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_T + \frac{\varepsilon}{2}$$

və yaxud

$$J_* - \varepsilon < s_T \quad (15.11)$$

bərabərsizliyini alırıq.

Beləliklə, isbat etdik ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta_1(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, (məsələn, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2l(M-m)}$ götürmək olar) diametri δ_1 -dən kiçik olan istənilən T bölgüsü üçün (5.11) bərabərsizliyi ödənilir.

Eyni qayda ilə isbat etmək olar ki, həmin $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta_2(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, diametri δ_2 -dən kiçik olan istənilən T bölgüsü üçün

$$S_T < J^* + \varepsilon \quad (15.12)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ seçək. Onda diametri $d(T) < \delta(\varepsilon)$ şərtini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün (15.11) və (15.12) bərabərsizlikləri eyni zamanda ödənəcəkdir və deməli (15.9) bərabərsizliyi ödənəcəkdir.

Lemma isbat olundu.

Qeyd. (15.11) və (15.12) bərabərsizliklərini uyğun olaraq

$$0 \leq J_* - s_T < \varepsilon, \quad 0 \leq S_T - J^* < \varepsilon$$

şəklində yazaq. Bu bərabərsizliklərdən alınır ki,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} s_T = J_*, \quad \lim_{d(T) \rightarrow 0} S_T = J^*.$$

Bununla əlaqədar olaraq bir çox riyazi ədəbiyyatlarda Darbu lemması aşağıdakı şəkildə deyilir.

Darbu lemması. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyanın bu parçada J^* yuxarı və J_* aşağı Darbu

İnteqralları uyğun olaraq yuxarı və aşağı Darbu cəmlərinin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində limitləridir:

$$J^* = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S_T, \quad J_* = \lim_{d(T) \rightarrow 0} s_T.$$

§ 16. Funksiyanın inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt teoremləri

Darbu cəmlərinin xassələrinə əsaslanıb müəyyən inteqralın varlığı məsələsini öyrənək.

Teorem 16.1. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyanın bu parçada inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0 \quad (16.1)$$

olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, məhdud $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanıdır. J - bu funksiyanın inteqral cəminin limiti olsun. $f(x)$, $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan tərifi görə $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, diametri $d(T) < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq $\sigma_T(f)$ inteqral cəmi üçün

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

və yaxud

$$J - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < J + \frac{\varepsilon}{3}$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir.

Darbu cəmlərinin 1-ci və 2-ci xassələrinə görə axırncı bərabərsizlikdən

$$J - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_T \leq S_T \leq J + \frac{\varepsilon}{3}.$$

alırıq. Buradan alırıq ki, diametri $d(T) < \delta$ şərtini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün

$$S_T - s_T \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödəyir. Bu isə o deməkdir ki, (16.1) ödəyir. Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ ixtiyari müsbət ədəddir. T $[a, b]$ parçasının elə bölgüsüdür ki, (16.1) bərabərliyi ödəyir. Göstərək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanandır.

Yuxarıda göstərmişik ki, $[a, b]$ parçasının istənilən T bölgüsü üçün

$$s_T \leq J_* \leq J^* \leq S_T \quad (16.2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdən (16.1)-ə görə alırıq:

$$0 \leq J^* - J_* < \varepsilon.$$

ε -nün ixtiyariliyindən $J_* = J^*$ alırıq. Aşağı və yuxarı Darbu inteqrallarının ortaq qiymətini J ilə işarə edək, yəni $J_* = J^* = J$ olsun. Onda Darbu lemmasına əsasən, həmin ε -na görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, diametri $d(T) < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün

$$J - \varepsilon < s_T \leq S_T < J + \varepsilon \quad (16.3)$$

bərabərsizliyi ödəyir. Digər tərəfdən Darbu cəmlərinin 1-ci xassəsinə görə istənilən T bölgüsü üçün

$$s_T \leq \sigma_T \leq S_T \quad (16.4)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(16.4) bərabərsizliyini (16.3)-də nəzərə alsaq, ξ_k nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq

$$J - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < J + \varepsilon$$

və yaxud

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J \right| < \varepsilon$$

alırıq. Bu isə o deməkdir ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də integrallanandır. Teorem 16.1 isbat olundu.

Qeyd. Teorem 16.1-də (16.1) şərtini “ $\varepsilon - \delta$ ” dilində yazaq: $\forall \varepsilon > 0$ görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi vardır ki, $[a, b]$ parçasının diametri $d(T) < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən T bölgüsü üçün

$$S_T - s_T < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Bununla əlaqədar olaraq teorem 16.1-i aşağıdakı ekvivalent şəkildə söyləmək olar.

Teorem 16.1*. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyasının bu parçada integrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt, $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün $[a, b]$ parçasının elə T bölgüsünün varlığıdır ki,

$$S_T - s_T < \varepsilon \quad (16.5)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Teorem 16.1-dən aşağıdakı mühüm nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyası bu parçada integrallanırsa, onda $f(x)$ -in Riman inteqral cəmi ilə yanaşı onun aşağı və yuxarı Darbu cəmləri də $\int_a^b f(x) dx$ ədədinə yığılır.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında integrallanandır. Onda (16.5) bərabərsizliyi doğrudur. Teorem 16.1-də kafiliyin isbatında göstərdik ki, bu halda $J_* = J^*$ olur. Aşağı

və yuxarı Darbu cəmlərinin bu orta qiymətinə J ilə işarə etsək, (16.2)-dən alırıq:

$$s_T \leq J \leq S_T$$

Buradan, $0 \leq J - s_T \leq S_T - s_T$ və $S_T - J \leq S_T - s_T$ bərabərsizliklərini alırıq. (16.5) bərabərsizliyinə görə axırıncı bu iki bərabərsizlikdən

$$J - s_T < \varepsilon \quad \text{və} \quad S_T - J < \varepsilon$$

bərabərsizlikləri alınır. Bu isə o deməkdir ki,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} s_T = J \quad \text{və} \quad \lim_{d(T) \rightarrow 0} S_T = J.$$

Teorem 16.1-in isbatında göstərmişik ki, J ədədi $f(x)$ funksiyanın $\sigma_T(f)$ integral cəminin $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində

limitidir, yəni $J = \int_a^b f(x) dx$. Beləliklə, əgər $f(x)$ $[a, b]$

parçasında integrallananırsa, onda $f(x)$ funksiyanın $\sigma_T(f)$ integral cəmi ilə bərabər onun Darbu cəmləri də $d(T) \rightarrow 0$ şərti

daxilində $\int_a^b f(x) dx$ ədədinə yığılır. Nəticə 1 isbat olundu.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında məhduddur və $[a, b]$ parçasında $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsü aparılmışdır.

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

olsun. $\omega_k(f) = M_k - m_k$ ($k = 1, \dots, n$) kəmiyyətinə $f(x)$ funksiyanın $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında rəqsi deyilir. $M_k \geq m_k$ olduğundan $\omega_k(f) \geq 0$ olması aşkardır. Onda

$$\begin{aligned} S_T - s_T &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

Beləliklə, teorem 16.1-dən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 2. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyasının bu parçada inteqrallanan olması üçün

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \Delta x_k = 0$$

münasibətinin ödənməsi zəruri və kafidir.

Nəticə 3. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyasının bu parçada inteqrallanan olması üçün $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \Delta x_k < \varepsilon$$

bərabərsizliyini təmin edən T bölgüsünün varlığı zəruri və kafidir.

$[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olması haqda daha bir meyar söyləyək.

Teorem 16.2. $[a, b]$ parçasında məhdud $f(x)$ funksiyasının bu parçada inteqrallanan olması üçün $J_* = J^*$ bərabərliyinin ödənməsi zəruri və kafidir.

Misal 1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ funksiyası üçün $[0, 1]$ parçasını n bərabər hissələrə bölməklə yuxarı və aşağı Darbu cəinlərini hesablayın.

Həlli. $[0, 1]$ parçasını n bərabər hissəyə bölek.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1.$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ funksiyası}$$

$[0, 1]$ parçasında kəsilməzdir və artandır. Ona görə,

$$M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \sqrt{x} = \sqrt{x_k} = \sqrt{\frac{k}{n}};$$

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \sqrt{x} = \sqrt{x_{k-1}} = \sqrt{\frac{k-1}{n}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

olacaqdır. Onda, S_n - yuxarı Darbu cəmi,

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}};$$

s_n - aşağı Darbu cəmi isə

$$s_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

olacaqdır.

Misal 2. $f(x) = 2^x$, $x \in [0, 10]$ funksiyası üçün $[0, 10]$ parçasını n bərabər hissəyə bölməklə, yuxarı və aşağı Darbu cəmlərini hesablayın.

Həlli. $[0, 10]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Aydındır

ki, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{10}{n}$, $x_2 = 2 \frac{10}{n}$, ..., $x_k = k \frac{10}{n}$, ..., $x_n = 10$,

$\Delta x_k = \frac{10}{n}$ olacaqdır.

$f(x) = 2^x$ funksiyası $[0, 10]$ parçasında kəsilməzdir və artandır. Ona görə,

$$M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} 2^x = 2^{x_k} = 2^{k \cdot \frac{10}{n}},$$

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} 2^x = 2^{x_{k-1}} = 2^{(k-1) \cdot \frac{10}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olacaqdır.

Onda S_n - yuxarı Darbu cəmi

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 2^{k \cdot \frac{10}{n}} \cdot \frac{10}{n} = \frac{10}{n} \sum_{k=1}^n 2^{k \cdot \frac{10}{n}},$$

s_n -aşağı Darbu cəmi isə

$$s_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 2^{(k-1) \cdot \frac{10}{n}} \cdot \frac{10}{n} = \frac{10}{n} \sum_{k=1}^n 2^{(k-1) \cdot \frac{10}{n}} = \frac{10}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k \cdot \frac{10}{n}}$$

şəklində olacaqdır.

$2^{\frac{10}{n}} + 2^{2 \cdot \frac{10}{n}} + \dots + 2^{(n-1) \cdot \frac{10}{n}}$ cəmi, vuruğu $q = 2^{\frac{10}{n}}$ olan həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmidir. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturuna görə

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k \cdot \frac{10}{n}} = \frac{2^{\frac{10}{n}} (1 - 2^{10})}{1 - 2^{\frac{10}{n}}} = \frac{1023 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{2^{\frac{10}{n}} - 1}.$$

Onda

$$S_n = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n \left(2^{\frac{10}{n}} - 1 \right)}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k-1) \cdot \frac{10}{n}} = 1 + 2^{\frac{10}{n}} + 2^{2 \cdot \frac{10}{n}} + \dots + 2^{(n-1) \cdot \frac{10}{n}} = \frac{1(1 - 2^{10})}{1 - 2^{\frac{10}{n}}} = \frac{1023}{2^{\frac{10}{n}} - 1}$$

olduğundan,

$$S_n = \frac{10230}{n \left(2^{\frac{10}{n}} - 1 \right)}.$$

Misal 3. Göstərin ki, $f(x) = 1 + x$ funksiyası üçün $[-1, 4]$ parçasında teorem 16.1^{*}-un (16.5) şərti ödənilir və

$\int_{-1}^4 (1+x) dx$ integralını integral cəminin limiti kimi hesablayın.

Həlli. Teorem 16. 1^{*} -ə görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün $[-1, 4]$ parçasının elə T bölgüsünü tapmaq lazımdır ki, $S_T - s_T < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin. $[-1, 4]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək.

$$T : x_0 = -1, x_1 = -1 + \frac{5}{n}, x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{5}{n},$$

$$x_3 = -1 + 3 \cdot \frac{5}{n}, \dots, x_k = -1 + k \cdot \frac{5}{n}, \dots, x_n = 4.$$

Aydındır ki, $\Delta x_k = \frac{5}{n}$, $d(T) = \frac{5}{n}$. $f(x) = 1 + x$ funksiyası hər

bir elementar $[x_{k-1}, x_k] = \left[-1 + (k-1) \frac{5}{n}, -1 + k \frac{5}{n} \right]$ ($k = \overline{1, n}$)

parçasında kəsilməz və artan olduğundan özünün dəqiq aşağı sərhədini sol uc nöqtəsində, dəqiq yuxarı sərhədini sağ uc nöqtəsində alacaqdır. Ona görə

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + 5 \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{5}{n} (k-1) \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1), \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{5k}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{5k}{n} \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k.$$

Onda

$$S_n - s_n = \frac{25}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (k-1) \right) = \frac{25}{n^2} \cdot n = \frac{25}{n}$$

Aydındır ki, əgər $n > \frac{25}{\varepsilon}$ ödənersə, onda bu bərabərsizliyi

ödəyən bütün natural n ədədləri üçün $S_n - s_n < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Onda teorem 16. 1^{*}-a görə

$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx$ inteqralı mövcuddur. Bu inteqralı tərifdən

istifadə edərək hesablayaq. ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $[x_{k-1}, x_k]$ elementar parçalarının sağ uc nöqtələri götürək. Aydındır ki, $d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. Onda inteqral cəmi aşağıdakı şəkildə olar.

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{5k}{n}\right) \frac{5}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{25}{n^2} \cdot k.$$

Tərifə görə,

$$\int_{-1}^4 (1+x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{25}{n^2} \cdot k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{25}{2}.$$

Beləliklə, $\int_{-1}^4 (1+x) dx = \frac{25}{2}.$

Misal 4. $[2,3]$ parçasında elə T bölgüsü aparın ki, x_k bölgü nöqtələri həndəsi silsilə əmələ gətirsin. ξ_k nöqtələrini $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının sağ uc nöqtəsində götürməklə, $\int_2^3 x^3 dx$ inteqralını inteqral cəminin limiti kimi hesablayın.

Həlli. $T : x_0 = 2, x_1 = 2 \sqrt[n]{\frac{3}{2}}, x_2 = 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^2, \dots,$

$x_3 = 2 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^3, \dots, x_k = 2 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^k, \dots, x_n = 3$

götürək. Aydındır ki, bu bölgü nöqtələri, vuruğu $q = \sqrt[n]{\frac{3}{2}} > 1$ olan həndəsi silsilədir. $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) parçalarının uzunluğu

$$\begin{aligned}\Delta x_k &= x_k - x_{k-1} = 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^k - 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^{k-1} = \\ &= 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^{k-1} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 2q^{k-1} \cdot (q-1)\end{aligned}$$

Aydındır ki,

$$\begin{aligned}d(T) &= \max_k \Delta x_k = \max_k 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^{k-1} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \\ &= 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^{n-1} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 2q^{n-1}(q-1)\end{aligned}$$

olacaqdır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 0$ olduğundan, $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow d(T) \rightarrow 0$.

ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının sağ uc

nöqtələrini götürək: $\xi_k = x_k = 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \right)^k = 2q^k$. Onda $\sigma_T(f)$

integral cəmi aşağıdakı şəkildə olar.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \xi_k^3 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k^3 \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (2q^k)^3 \cdot 2^{k-1}(q-1) = 16(q-1) \sum_{k=1}^n q^{4k-1} = \\ &= 16(q-1) [q^3 + q^7 + q^{11} + \dots + q^{4n-1}] = \\ &= 16(q-1)q^3 [1 + q^4 + q^8 + \dots + q^{4n-1}] = 16(q-1)q^3 \frac{q^{4n} - 1}{q^4 - 1} = \\ &= 16(q-1)q^3 \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1}{q^4 - 1} = (q-1)q^3 \frac{3^4 - 2^4}{q^4 - 1} =\end{aligned}$$

$$= 65 \frac{q^3(q-1)}{q^4-1} = 65 \frac{q^3(q-1)}{(q-1)(q+1)(q^2+1)} = 65 \frac{q^3}{(q+1)(q^2+1)}$$

Asanlıqla inanmaq olar ki, $n \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow 1$ və tərsinə $q \rightarrow 1 \Rightarrow n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{q \rightarrow 1} \sigma_n = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{65q^3}{(q+1)(q^2+1)} = \frac{65}{4}.$$

Beləliklə, $\int_2^3 x^3 dx = \frac{65}{4}$.

Misal 5. $[2,3]$ parçasını n bərabər hissəyə bölüb, ξ_k aralıq nöqtələrini $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) parçalarının sol uc nöqtələrində götürməklə $\int_2^3 x^3 dx$ integralını integral cəminin limiti kimi hesablayın.

Həlli. $[2,3]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Alınan bölgü T olsun.

$$T: x_0 = 2, x_1 = 2 + \frac{1}{n}, x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{n}, \dots, x_k = 2 + k \cdot \frac{1}{n}, \dots, x_n = 3.$$

$[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğu

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = 2 + \frac{k}{n} - \left(2 + \frac{k-1}{n} \right) = \frac{1}{n}.$$

T bölgüsünün diametri $d(T) = \max_k \Delta x_k = \frac{1}{n}$.

$\xi_k = x_{k-1} = 2 + \frac{k-1}{n}$ ($k = \overline{1, n}$) götürək. Aydındır ki,

$d(T) \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. Onda $\sigma_n(f)$ integral cəmi aşağıdakı şəkildə olar.

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \xi_k^3 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left[2 + \frac{k-1}{n} \right]^3 \frac{1}{n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left(8 + 12 \frac{k-1}{n} + 6 \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 + \left(\frac{k-1}{n} \right)^3 \right) \frac{1}{n} = \\
&= \frac{8}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{12}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) + \frac{6}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (k-1)^3
\end{aligned}$$

Doğruluğu riyazi induksiya prinsipi ilə asanlıqla isbat olunan aşağıdakı düsturlardan istifadə edək.

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Onda

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= 8 + \frac{12}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{6}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^4} \left[\frac{(n-1)n}{2} \right]^2 = \\
&= 8 + 6 \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{4n^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= 8 + \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 = \\
&= 8 + 6 + 2 + \frac{1}{4} = 16 \frac{1}{4} = \frac{65}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə, } \int_2^3 x^3 dx = \frac{65}{4}.$$

§17. Riman mənada inteqrallanan funksiyalar sinfi

Teorem 17.1. $[a, b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyası həmin parçada inteqrallananıdır.

İsbatı. Parçada kəsilməz funksiya həmin parçada müntəzəm kəsilməzdir. Ona görə ixtiyari $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, $|x' - x''| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən $x' \in [a, b]$, $x'' \in [a, b]$ nöqtələri üçün

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $[a, b]$ parçasının diametri δ -dan kiçik olan istənilən $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsünü götürək. Parçada kəsilməz funksiya özünün dəqiq aşağı nə dəqiq yuxarı sərhədlərini aldığından, $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında elə ξ_k və η_k nöqtələri var ki,

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(\xi_k), \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(\eta_k). \quad \text{Aydındır}$$

ki, $|\xi_k - \eta_k| \leq \Delta x_k \leq d(T) < \delta(\varepsilon)$ olduqda,

$$M_k - m_k = |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Beləliklə, $d(T) < \varepsilon$ şərtini ödəyən $\forall T$ bölgüsü üçün

$$0 \leq S_T - s_T = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon \quad \text{bərabərsizliyi}$$

ödənəcəkdir. Onda teorem 16.1*-a əsasən, $f(x)$ $[a, b]$ -də inteqrallananıdır.

Teorem 17.1 isbat olundu.

Aşağıdakı teorem kəsilməz funksiyalardan daha geniş funksiyalar sinfinin də inteqrallanan funksiyalar sinfinə daxil olduğunu göstərir.

Şərtləşək ki, əgər x nöqtəsi (a, b) intervalına daxildirsə, onda deyirlər ki, (a, b) intervalı x nöqtəsini örtür.

Teorem 17.2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş məhdud funksiyadır. Əgər, $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə görə $f(x)$ funksiyasının bütün kəsilmə nöqtələrini örtən və uzunluqları cəmi ε -dan kiçik olan sonlu sayıda intervallar varsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanırdır.

İsbatı. Tutaq ki, M və m $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında uyğun olaraq dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədləridir. Qeyd edək ki, əgər $M = m$ olarsa, onda $f(x)$ $[a, b]$ parçasında sabit funksiya olardı və biz sabit funksiyanın inteqrallanmasını bilirik. Ona görə $M > m$ hesab edəcəyik.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ götürək və onu qeyd edək. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(M - m)}$ olsun.

$f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrini uzunluqları cəmi ε_1 -dən kiçik olan sonlu sayıda intervallarla örtək. $[a, b]$ parçasının bu intervallara daxil olmayan nöqtələr çoxluğu sonlu sayıda cüt-cüt kəsişməyən parçalardan ibarətdir. Bu parçaları əlavə parçalar adlandıraraq. Əlavə parçaların hər birində $f(x)$ kəsilməzdir və deməli həm də müntəzəm kəsilməzdir. k -cı əlavə parçanı $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, m$) ilə işarə edək. Deməli, elə $\delta_k > 0$ ədədi var ki, $|\xi'' - \xi'| < \delta_k$ şərtini ödəyən $\forall \xi'', \xi' \in [a_k, b_k]$ nöqtələri üçün

$$|f(\xi'') - f(\xi')| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \quad (17.1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$\delta = \min_{1 \leq k \leq m} \delta_k$ qəbul edək və $[a_k, b_k]$ əlavə parçasında diametri δ -dan kiçik olan istənilən T_r bölgüsü götürək. (17.1) münasibətinə görə T_r bölgüsünün hər bir parçasında $f(x)$

funksiyasının M_k dəqiq yuxarı sərhəddi ilə m_k dəqiq aşağı sərhəddinin fərqi $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ədədindən kiçik olacaqdır.

(Ümumiyyətlə, ixtiyari X çoxluğunda $\sup_X f(x) - \inf_X f(x) = \sup_{\xi, \eta \in X} (f(\xi) - f(\eta)) = \sup_{\xi, \eta \in X} |f(\xi) - f(\eta)|$)

münasibəti doğrudur). Əgər əlavə parçaların bütün bölgü nöqtələri üzərinə $f(x)$ funksiyanın kəsilmə nöqtələrini örtən intervalların uc nöqtələrini əlavə etsək, alınan $\{x_k\}$ nöqtələri $[a, b]$ parçasının yeni bir T bölgüsünü yaradır. $[a, b]$ parçasının bu cür quruluşu T bölgüsü üçün

$$\begin{aligned} S_T - s_T &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \\ &= \sum^* (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum^* (M_k - m_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

olar. Burada, bir ştrixlə göstərilən cəm elə $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarına aiddir ki, (x_{k-1}, x_k) intervallarından hər biri $f(x)$ funksiyanın kəsilmə nöqtələrini örtən intervallardan biridir. İki ştrixlə göstərilən cəm isə elə $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarına aiddir ki, bu parçalardan hər biri T_r bölgülərindən birinin parçasıdır. $f(x)$ funksiyanın kəsilmə nöqtələrini örtən intervalların uzunluqları cəmi ε_1 ədədindən kiçik olduğundan və istənilən k üçün $M_k - m_k \leq M - m$ olduğundan bir ştrixlə göstərilən cəm üçün alırıq:

$$\begin{aligned} \sum^* (M_k - m_k) \Delta x_k &\leq (M - m) \sum^* \Delta x_k \leq (M - m) \cdot \varepsilon_1 < \\ &< (M - m) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (17.2)$$

İki ştrixlə göstərilən cəm T_r ($r = 1, 2, \dots, m$) bölgülərinin parçalarına aiddir və qurmaya əsasən bu parçaların hər birində

$f(x)$ funksiyasının dəqiq yuxarı sərhədi ilə dəqiq aşağı sərhədinin fərqi $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ədədindən kiçikdir. Deməli,

$$\begin{aligned} \sum'' (M_k - m_k) \Delta x_k &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_k \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (17.3)$$

(17.2), (17.3) münasibətlərindən alınır ki, T bölgüsü üçün $S_T - s_T < \varepsilon$ bərabərsizliyi doğrudur.

Beləliklə, $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün $[a, b]$ parçasının elə T bölgüsü var ki, $S_T - s_T < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda teorem 16.1*-a görə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olmasını alırıq.

Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. $[a, b]$ parçasında məhdud və sonlu sayda kəsilmə nöqtəsinə malik $f(x)$ funksiyası bu parçada inteqrallanıdır. Xüsusi halda, $[a, b]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası bu parçada inteqrallanıdır..

İsbatı. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında p sayda kəsilmə nöqtəsi vardır. Hər bir x_k kəsilmə nöqtəsini uzunluğu $\frac{\varepsilon}{2p}$ -dən kiçik intervallarla örtək. Bu halda bütün

kəsilmə nöqtələrini örtən intervalların uzunluqları cəmi $\frac{\varepsilon}{2}$ -dən kiçik olacaqdır. Onda teorem 17.2-yə görə $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olar.

Xatırlayaq ki, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası aşağıdakı iki şərti ödədikdə, ona hissə-hissə kəsilməz funksiya deyilir.

1) $[a, b]$ parçasının sonlu sayıda nöqtələri istisna olmaqla bütün daxili nöqtələrdə $f(x)$ kəsilməz olsun, bu sonlu sayıda nöqtələr isə $f(x)$ -in I növ kəsilmə nöqtələri olsun.

2) a sol uc nöqtəsində $f(x)$ -in sağ limiti, b sağ uc nöqtəsində isə sol limiti olsun.

Qeyd. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında integrallanandır, $g(x)$ funksiyası isə $[a, b]$ parçasının sonlu sayıda nöqtələri istisna olmaqla $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyası ilə üst-üstə düşür. Onda $g(x)$ funksiyası da $[a, b]$ parçasında integrallanandır və $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ bərabərliyi doğrudur.

Bu qeydin doğruluğuna Nəticə 1-in isbat sxemindən istifadə etməklə inanmaq olar.

Beləliklə, teorem 17.2-nin şərtləri ödəndikdə $\int_a^b f(x)dx$ integralının qiyməti $f(x)$ -in kəsilmə nöqtəsindəki qiymətindən asılı deyildir. Ona görə də əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının müəyyən nöqtələrində təyin olunmayıbsa $f(x)$ -i bu nöqtələrdə təyin etməklə ($f(x)$ -in $[a, b]$ -də məhdud qalması şərtlə) $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında integrallanaq olmasına nail olmaq olar.

Məsələn, $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)}$ integralında integralaltı

funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsində təyin olunmayıb.

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \text{teyin olunmayıb,} & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

funksiyası üçün $x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının aradan qaldırılmalı olan kəsilmə nöqtəsidir: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = 1$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ götürək. Onda alınan yeni funksiya $\forall x \in [0, \pi]$ üçün eyniliklə 1-ə bərabər olar və deməli, axtarılan integral π -yə bərabər olar.

Sonsuz sayda kəsilmə nöqtəsinə malik inteqrallanan funksiya aid misal göstərək. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında aşağıdakı kimi funksiya baxaq:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

Tərifə görə,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \sin \frac{1}{x} > 0, \\ -1, & \sin \frac{1}{x} < 0, \\ 0, & \sin \frac{1}{x} = 0. \end{cases}$$

$f(x)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə göstərək.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right), \quad n=1,2,\dots, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{(2n-1)\pi}\right), \quad n=1,2,\dots, \\ 0, & x=0 \text{ və } x=\frac{1}{n\pi}, \quad n=1,2,\dots \end{cases}$$

Aydındır ki, $X = \left\{x_k = \frac{1}{k\pi}, k \in N\right\}$ nöqtələr çoxluğu $f(x)$

funksiyasının I növ kəsilmə nöqtələridir. Doğurdan da, $k = 2n$ cüt olduqda

$$f\left(\frac{1}{2n\pi} - 0\right) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2n\pi} + 0\right) = -1 \quad (n=1,2,\dots)$$

və $k = 2n - 1$ tək ədəd olduqda

$$f\left(\frac{1}{(2n-1)\pi} - 0\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{(2n-1)\pi} + 0\right) = 1, \quad (n=1,2,\dots)$$

$x=0$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyanın II növ kəsilmə nöqtəsidir.

Çünki, $\sin \frac{1}{x}$ funksiyanın $x=0$ nöqtəsində limiti yoxdur.

$\forall \varepsilon > 0$ ədədi götürək və onu qeyd edək. $x=0$ nöqtəsini $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ intervalı ilə örtək. $x=0$ nöqtəsi X çoxluğunun limit

nöqtəsi olduğundan bu intervaldan kənarda yalnız sonlu sayda kəsilmə nöqtəsi vardır. Tutaq ki, bu intervaldan kənarda qalan kəsilmə nöqtələrinin sayı p -dir. Aydındır ki, p ədədi ε -dan

usılıdır. p sayda kəsilmə nöqtələrinin hər birini uzunluğu $\frac{\varepsilon}{2p}$

dən kiçik olan intervalla örtək. Onda $f(x)$ funksiyanın bütün

kəsilmə nöqtələrini uzunluqları cəmi $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$ ədədini aşmayan sonlu sayda intervallarla örtmək olar. Onda teorem 17.2-yə əsasən, $f(x)$ funksiyası $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında inteqrallananıdır.

Teorem 17.3. $[a, b]$ parçasında monoton $f(x)$ funksiyası bu parçada inteqrallananıdır.

İsbatı. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $f(x)$ azalmayıdır. Onda $\forall x \in [a, b]$ üçün $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ olduğundan, $f(x)$ $[a, b]$ -də məhduddur. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və onu qeyd edək. $[a, b]$ parçasının ele

$T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsünü götürək ki, $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ olsun.

$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ olsun. $f(x)$ sabit funksiya olmadığından, $f(b) > f(a)$.

Aydındır ki, bu halda $M_k = f(x_k)$, $m_k = f(x_{k-1})$ olacaqdır. Onda

$$\begin{aligned} S_T - s_T &= \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \Delta x_k \leq \\ &\leq d(T) \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = d(T) (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

alırıq. Teorem 16.1*-a görə $f(x)$ $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır. Teorem isbat olundu.

§ 18. Müəyyən integralin əsas xassələri

Xassə 1. Qəbul edilir ki,

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Xassə 2. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında integrallanandır. $a < b$ şərti daxilində qəbul edilir ki,

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Xassə 3. (Sabit vuruğun integral işarəsi xaricinə çıxarılması). Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında integrallanırsa, onda $\forall C \in \mathbb{R}$ həqiqi ədədi üçün $Cf(x)$ -də $[a, b]$ parçasında integrallanandır və

$$\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx.$$

Bu xassənin isbatı aşağıdakı bərabərlikdən alınır.

$$\begin{aligned} \int_a^b Cf(x) dx &= \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Cf(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= C \cdot \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = C \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Xassə 4. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında integrallanırsa, onda $f(x) + g(x)$ -də $[a, b]$ parçasında integrallanandır və

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (18.1)$$

İsbatı. $[a, b]$ parçasının ixtiyari T bölgüsü və $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aralıq nöqtələri üçün

$$\sigma_T(f+g) = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

bərabərliyi doğrudur. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında integrallanan olduğundan $d(T) \rightarrow 0$ şərti daxilində sağ tərəfdəki integral cəmlərinin limitinin varlığından, sol tərəfdəki cəmin də limitinin varlığı alınır. Sonuncu bərabərlikdə $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək, Riman integralınının tərifinə görə (18.1) bərabərliyini alırıq.

Nəticə 1. Əgər $f_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ funksiyaları $[a, b]$ - də integrallananırsa, və C_k ($k = \overline{1, n}$) sabit ədədlədirsə, onda

$\sum_{k=1}^n C_k f_k(x)$ funksiyası da $[a, b]$ -də integrallananıdır və

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n C_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

$$\text{Nəticə 2. } \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Xəssə 5. Tutaq ki, $a < c < b$. Onda, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, c]$, $[c, b]$ parçalarında integrallananırsa, $[a, b]$ parçasında da integrallananıdır və aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

İsbatı. $f(x)$ $[a, b]$ və $[c, b]$ parçalarının hər birində integrallanan olduğundan, bu parçalarda məhduddur və deməli, $f(x)$, $[a, b]$ parçasında da məhduddur.

Tutaq ki, $\forall \varepsilon > 0$ verilmişdir. $f(x)$ $[a, c]$ və $[c, b]$ parçalarında integrallanan olduğundan teorem 16.1-dən çıxan

nəticə 3-ə görə, uyğun olaraq ε T_1 və T_2 bölgüləri seçmək olur ki,

$$\sum_{T_1} \omega_i(f) x_i < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{T_2} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

bərabərsizlikləri ödənər. Tutaq ki, T $[a, b]$ parçasının bölgüsüdür və T_1 və T_2 bölgülərinin birləşməsidir: $T = T_1 \cup T_2$.

Aydındır ki,

$$\sum_T \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{T_1} \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{T_2} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Onda funksiyanın inteqrallanması haqda zəruri və kafi şərt teoreminə görə (teorem 16.1*) $f(x)$ $[a, b]$ parçasında inteqrallandır.

Yuxarıdakı şəkildə qurulmuş T bölgüsü üçün inteqral cəmini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\sum_T f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{T_1} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{T_2} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (18.2)$$

Aydındır ki, T, T_1, T_2 bölgülərinin diametrləri arasında $d(T_1) \leq d(T)$; $d(T_2) \leq d(T)$ münasibəti doğrudur və $d(T) \rightarrow 0$ şərtində $d(T_1) \rightarrow 0$ və $d(T_2) \rightarrow 0$. Ona görə (18.2) bərabərsizliyində $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək, müəyyən inteqralın tərifinə əsasən alarıq:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Xəssə 6. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandırsa, onda bu funksiya $[a, b]$ parçasına daxil olan istənilən $[c, d]$ parçasında da inteqrallandır.

İsbati. Tutaq ki, $\forall \varepsilon > 0$ verilmişdir. $f(x)$, $[a, b]$ -də inteqrallanan olduğundan, teorem 16.1*-yə əsasən $[a, b]$ parçasının ε T bölgüsü var ki,

$$S_T - s_T < \varepsilon. \quad (18.3)$$

Tutaq ki, $T' [a, b]$ parçasının başqa bir bölgüsüdür və T' bölgüsü T bölgüsünə c və d nöqtələrinin əlavə edilməsi ilə alınmışdır: $T' = T \cup \{c, d\}$. Aydınır ki, T' bölgüsü $[c, d]$ parçasında bir bölgü doğurur və bu bölgünü T_i ilə işarə edək. Onda

$$\sum_{T'} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{T'} \omega_i \Delta x_i = S_{T'} - s_{T'}. \quad (18.4)$$

(18.4) bərabərsizliyində birinci cəm T_i bölgüsünə uyğun mənfi olmayan hədlərin cəmindən ibarətdir, ikinci cəm isə T' bölgüsünə uyğun mənfi olmayan hədlərin cəmindən ibarətdir və birinci cəmdə iştirak edən hədlər həm də ikinci cəmdə iştirak edir. $T \subset T'$ olduğundan Darbu cəminin məlum xassəsinə (bax, §15, xassə 3-dən alınan nəticə 1) və (18.3)-ə görə

$$S_{T'} - s_{T'} \leq S_T - s_T < \varepsilon. \quad (18.5)$$

(18.4) və (18.5) bərabərsizliklərindən alınır:

$$\sum_{T_i} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Onda teorem 16.1* -dən çıxan nəticə 3-ə görə $f(x)$ $[c, d]$ parçasında inteqrallanandır.

Xassə 7. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallananırsa, onda $f(x)g(x)$ hasili də $[a, b]$ parçasında inteqrallanandır.

İsbatı. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan, bu parçada məhdudurlar, başqa sözlə elə $A > 0$ və $B > 0$ ədədləri var ki, $\forall x \in [a, b]$ olduqda $|f(x)| \leq A$, $|g(x)| \leq B$. Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasında hər hansı T bölgüsü aparılıb. $\forall x', \forall x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ üçün

$$\begin{aligned} f(x'')g(x'') - f(x')g(x') &= [f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + \\ &+ f(x')g(x'') - f(x')g(x')] = [f(x'') - f(x')]g(x'') + \\ &+ f(x')[g(x'') - g(x')] \end{aligned} \quad (18.6)$$

eyniliyini yazaq. $f(x)g(x)$, $f(x)$ və $g(x)$ funksiya-larının $[x_{k-1}, x_k]$ parçasındaki rəqsini uyğun olaraq $\omega_k(fg)$, $\omega_k(f)$, $\omega_k(g)$ ilə işarə edək. Göstərək ki,

$$\omega_k(fg) \leq B\omega_k(f) + A\omega_k(g) \quad (18.7)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Doğurdan da (18.6) eyniliyindən alırıq:

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B|f(x'') - f(x')| + A|g(x'') - g(x')|.$$

Bu bərabərsizlikdə bütün mümkün $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ nöqtələri üzrə supremuma keçsək,

$$\begin{aligned} \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| &\leq \\ &\leq B \cdot \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x'') - f(x')| + A \cdot \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x'') - g(x')| \end{aligned}$$

və yaxud (18.7) bərabərsizliyini alırıq. (18.7) bərabərsizliyindən

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(fg) \Delta x_k \leq B \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k + A \sum_{k=1}^n \omega_k(g) \Delta x_k \quad (18.8)$$

bərabərsizliyini alırıq.

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları inteqrallanan olduğundan,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(g) \Delta x_k = 0.$$

Ona görə (18.8) bərabərsizliyində $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(fg) = 0$$

alırıq. Teorem 16.1-ə əsasən, alırıq ki, $f(x) \cdot g(x)$ hasilinin $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır. Xəssə isbat olundu.

Riyazi induksiya metodunun köməyi ilə göstərmək olar ki, $[a, b]$ parçasında inteqrallanan sonlu sayda funksiya-ların

hasili də $[a, b]$ parçasında inteqrallanıdır. Xüsusi halda əgər $f(x)$ $[a, b]$ - də inteqrallandırsa, onda $\forall n \in \mathbb{N}$ natural ədədi üçün $f''(x)$ funksiyası da $[a, b]$ - də inteqrallanıdır.

Xəssə 8. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandırsa və $|f(x)|$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında dəqiq aşağı sərhəddi müsbətdirsə, onda $\frac{1}{f(x)}$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanıdır.

İsbatı. $\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| \geq m > 0$ olmasından alırıq ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün $|f(x)| \geq m > 0$. Buradan, $\forall x \in [a, b]$ üçün $\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{m}$. Ona görə də $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ nöqtələri üçün

$$\left| \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} \right| \leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_2) \cdot f(x_1)|} \leq \frac{1}{m^2} |f(x_1) - f(x_2)|, \quad (18.9)$$

bərabərsizliyini alırıq.

$T = \{x_k\}_{k=0}^n$ $[a, b]$ parçasının ixtiyari bölgüsü olsun. Onda (18.9) bərabərsizliyindən

$$\omega_k \left(\frac{1}{f} \right) \leq \frac{1}{m^2} \omega_k(f) \quad (18.10)$$

bərabərsizliyini alırıq. Burada, $\omega_k \left(\frac{1}{f} \right)$ və $\omega_k(f)$ uyğun olaraq

$\frac{1}{f(x)}$ və $f(x)$ funksiyalarının $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında rəqsləridir.

Onda (18.10) bərabərsizliyindən

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{1}{f} \right) \Delta x_k \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k$$

alırıq. Sonuncu bərabərsizlikdə $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək,

$$0 \leq \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{1}{f} \right) \Delta x_k \leq \frac{1}{m^2} \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k = 0.$$

Teorem 16.1 -dən alınan nəticə 2-yə əsasən hökm edirik ki, $\frac{1}{f(x)}$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandır.

Nəticə 3. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallandırsa və $|g(x)|$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında dəqiq aşağı sərhəddi müsbətdirsə, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandır.

Nəticənin isbatı $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ bərabərliyinə əsasən, xassə 7 və xassə 8-dən alınır.

Xassə 9. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandırsa və bu parçada $f(x) \geq 0$ isə, onda

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

İsbatı. $f(x) \geq 0$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan $[a, b]$ parçasının $\forall T$ bölgüsü üçün və istənilən $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ aralıq nöqtələri üçün

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0.$$

Bu bərabərsizlikdə $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

alırıq.

Nəticə 4. $[a, b]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün bu parçada $f(x) \geq g(x)$ bərabərsizliyi ödənilirsə, onda

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad (18.11)$$

İsbatı. Xəssə 9-a görə $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$. Buradan, və nəticə 2-dən (18.11) bərabərsizliyi alınır.

Xəssə 10. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanan, bu parçada mənfi olmayan qiymətlər alır, müəyyən $x_0 \in [a, b]$ nöqtəsində kəsilməzdir və $f(x_0) > 0$. Onda

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

İsbatı. $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz olduğundan elə $\delta > 0$ ədədi var ki, $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$ üçün $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ bərabərsizliyi doğrudur. Tutaq ki, $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$ istənilən qeyd olunmuş parçadır və $\alpha < \beta$. Aydınır ki, $a \leq \alpha < \beta \leq b$ olar. Onda xəssə 5 və xəssə 9-a görə

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \geq \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{(\beta - \alpha)}{2} f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Nəticə 5. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir və hər bir $x \in [a, b]$ üçün $f(x) \geq g(x)$ bərabərsizliyi ödənilir. Bundan əlavə tutaq ki, heç olmazsa bir

$x_0 \in [a, b]$ nöqtəsi var ki, $f(x_0) > g(x_0)$ bərabərsizliyi ödəyir. Onda

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

Qeyd 1. Xəssə 10-da $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməz olması şərtindən imtina etmək olmaz. Doğrudan da, məsələn,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x = \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

funksiyası $[0, 1]$ parçasında mənfi olmayan qiymətlər alır.

$x = \frac{1}{2}$ nöqtəsi aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir və

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0. \text{ Lakin, } \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Xəssə 11. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanırsa, $|f(x)|$ funksiyası da bu parçada inteqrallanırdır və

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad a < b. \quad (18.12)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. $f(x)$ $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan, məhduddur. Deməli, $|f(x)|$ funksiyası da $[a, b]$ -də məhduddur.

$\omega_k(f)$ və $\omega_k(|f|)$ ilə uyğun olaraq $f(x)$ və $|f(x)|$ funksiyasının $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında rəqsini işarə edək:

$$\omega_k(|f|) = \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} ||f(x)| - |f(y)||,$$

$$\omega_k(f) = \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)|$$

Aydındır ki, $\forall \xi, \eta \in [a, b]$ üçün $||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leq |f(\xi) - f(\eta)|$ bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliyə əsasən,

$$\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (18.13)$$

olar.

$f(x)$ $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ üçün $[a, b]$ parçasının elə $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ bölgüsü tapılacaq ki, $\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir.

(18.13) bərabərsizliyinə görə T bölgüsü üçün $\sum_{k=0}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k < \varepsilon$

alırıq. Buradan, $|f(x)|$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olması alınır. Xassənin birinci hissəsi isbat olundu. İndi tutaq ki, $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ $[a, b]$ parçasının ixtiyari bölgüsüdür. Aydındır ki,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k.$$

Bu bərabərsizlikdə $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək (18.12) bərabərsizliyin alırıq.

Qeyd 2. Biz (18.12) bərabərsizliyini isbat edərkən $a < b$ olduğunu qəbul etmişdik. Əgər $a > b$ olarsa, onda da (18.12) bərabərsizliyi doğrudur.

Doğrudan da,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| - \int_b^a f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = \left| - \int_b^a |f(x)| dx \right| = \left| \int_b^a |f(x)| dx \right|$$

Qeyd 3. Xassə 11 – in tərsi ümumiyyətlə desək, doğru deyildir, yəni $|f(x)|$ -in

$[a, b]$ parçasında inteqrallanan olmasından, $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olması çıxmır. Doğrudan da, aşağıdakı bərabərlikdə təyin olunan $f(x)$ funksiyasına baxaq.

$$f(x) = D(x) - \frac{1}{2}, \quad x \in [a, b].$$

Burada, $D(x)$ Dirixle funksiyasıdır. Aydındır ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanan deyildir. Çünki, əks halda xassə 4-ə görə $D(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ funksiyası da $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olardı. Ancaq $|f(x)| = \frac{1}{2}$ funksiyası $[a, b]$ -də inteqrallananıdır.

Misal 1. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır. İsbat edin ki, $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ bərabərliyinin doğru olması üçün funksiyasının bütün kəsilməzlik nöqtələrində $f(x) = 0$ olması zəruridir.

İsbatı. Fərz edək ki, $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. Lakin, $x_0 \in [a, b]$ kəsilməzlik nöqtəsində $f(x_0) \neq 0$. Onda, $f(x)$ funksiyası x_0 -

nöqtəsində kəsilməz olduğundan, elə $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervalı var ki, $f(x_0) \neq 0$. Onda

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) dx &= \int_a^{x_0 - \varepsilon} f^2(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f^2(x) dx + \\ &+ \int_{x_0 + \varepsilon}^b f^2(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f^2(x) dx > 0. \end{aligned}$$

olardı. Alınmış ziddiyyət göstərir ki, $f(x) = 0$ olmalıdır.

§ 19. Yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən integral.

İbtidai funksiyanın varlığı.

Əvvəlcə yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən integrallara baxaq. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında integrallanandır və $x \in [a, b]$ ixtiyari nöqtədir. Onda $f(x) \forall x \in [a, b]$ üçün $[a, x]$ parçasında integrallanandır. x -ilə parçanın sağ ucunu işarə etdiyimizdən, integrallama dəyişənini t -ilə işarə edib,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (19.1)$$

integralına baxaq. $f(x)$ funksiyası $[a, x]$ parçasında integrallanan olduğundan (19.1) integralı mövcuddur. Ona yuxarı sərhəddi dəyişən müəyyən integral deyirlər.

Teorem 19.1. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında integrallanandır. Onda

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir.

İsbatı. Tutaq ki, $x_0 \in [a, b]$ ixtiyari nöqtədir. $f(x)$, $[a, b]$ -də integrallanan olduğundan məhduddur, yəni elə $M \geq 0$ ədədi var ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün $|f(x)| \leq M$. Aydındır ki,

$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Bu fərqi qiymətləndirək.

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)|dt \right| \leq M|x - x_0|$$

Bu bərabərsizlikdən alınır ki,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Bu isə onu göstərir ki, $F(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. x_0 -in ixtiyariliyindən alınır ki, $F(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir.

Teorem isbat olundu.

Teorem 19.2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır və $x_0 \in [a, b]$ nöqtəsində kəsilməzdir. Onda

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ funksiyası } x_0 \text{ nöqtəsində diferensiallananıdır və } F'(x_0) = f(x_0).$$

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. $\forall \varepsilon > 0$ götürək. Onda bu ε -na görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (19.2)$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir. $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$ fərqlərini mütləq qiymətcə fərqləndirək.

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} - f(x_0) = \\ &= \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right|\end{aligned}\quad (19.3)$$

t dəyişəni $[x_0, x]$ parçasında dəyişdiyindən, aydındır ki, $|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Onda (19.2) bərabərsizliyinə əsasən (19.3)-dən alırıq:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x dt \right| = \varepsilon.$$

Deməli, nöqtədə törəmənin tərifinə görə,

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd 1. Teorem 19.1 və teorem 19.2-də $F(x)$ funksiyası

olaraq $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ funksiyası götürmək olar, burada p ,

$[a, b]$ parçasına daxil olan ixtiyari qeyd olunmuş nöqtədir.

Qeyd 2. Teorem 19.1 və teorem 19.2-də $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında kəsilməz olduğu halda da doğrudur. Bu halda integralin aşağı sərhədi olaraq (a,b) intervalına daxil olan ixtiyari nöqtə götürülür.

Teorem 19.3. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda $F(x)$ funksiyanın $[a,b]$ parçasında ibtidai funksiyası vardır və ibtidai funksiyalarından biri $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyasıdır.

İsbatı. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğundan teorem 19.1-ə görə $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və $\forall x \in [a,b]$ nöqtəsində $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, $F(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdır.

İbtidai funksiyaların bir-birindən sabit toplanan qədər fərqləndiyini nəzərə alsaq, hökm edə bilərik ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyasının ixtiyari ibtidai funksiyası

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad x \in [a,b]$$

şəklində olar. Beləliklə, əgər $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyası $f(x)$ - in ibtidai funksiyası olduğundan, $f(x)$ - in qeyri - müəyyən integralı ilə müəyyən integralı arasında aşağıdakı əlaqə yaranır:

$$\int f(x)dx = F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Beləliklə, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

bərabərliyi doğrudur, başqa sözlə yuxarı sərhəddi dəyişən müəyyən inteqralın yuxarı sərhəddə nəzərən törəməsi, inteqralaltı funksiyaya bərabərdir.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ - də inteqrallanıdır. Onda $[a, b]$ parçasında

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

funksiyasını təyin edə bilərik.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

eyniliyindən istifadə etsək,

$$G(x) = \int_a^b f(t) dt - F(x) \quad (19.4)$$

bərabərliyini alırıq. Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən $x \in [a, b]$ nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda yuxarıda isbat etdiyimiz teorem 19.2-yə əsasən, $F(x)$ funksiyası x nöqtəsində differensiallanan olar və (19.4) -ə görə

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərliyi isə

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)$$

kimi yazı bilərik.

Misal 1. Aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

$$a) F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0), \quad b) F(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{x^2} \frac{dt}{t} \quad (x > 0),$$

$$c) F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \quad (x > 0)$$

Həlli. a). Yuxarı sərhəddi dəyişən müəyyən integralın törəməsi haqda teorem 19.2-yə əsasən,

$$F'(x) = \left(\int_1^x \ln t dt \right)' = \ln x.$$

b). Verilmiş integralı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$F(x) = \int_{\frac{2}{x}}^c \frac{dt}{t} + \int_c^{x^2} \frac{dt}{t} = \int_c^{x^2} \frac{dt}{t} - \int_c^{\frac{2}{x}} \frac{dt}{t}.$$

Burada $c > 0$ ixtiyari qeyd olunmuş sabitdir. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki integrala x -dən asılı mürəkkəb funksiya kimi baxmaq olar. Onda mürəkkəb funksiya törəmə alma qaydasına və yuxarı sərhəddi dəyişən müəyyən integralın törəməsi haqqındakı teoremə əsasən,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_c^{x^2} \frac{dt}{t} \right)'_{x^2} \cdot (x^2)'_x - \left(\int_c^{\frac{2}{x}} \frac{dt}{t} \right)'_{\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)'_x = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x} \end{aligned}$$

c). Verilmiş integralı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^c \cos(t^2) dt + \int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt = - \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt + \int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt.$$

burada c ixtiyari sabit ədəddir.

Onda,

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \right)' + \left(\int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \right)' = \\ &= - \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \right)'_{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)'_x + \left(\int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \right)'_{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'_x = \\ &= - \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(- \frac{1}{x^2} \right) + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Misal 2. Parametrik şəkildə verilmiş

$$x = \int_2^t \frac{\ln z}{z} dz, \quad y = \int_5^{ln t} e^z dz$$

funksiyasının $\frac{dy}{dx}$ törəməsini tapm.

Həlli. Məlumdur ki, parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ düsturu ilə hesablanır. y'_t və x'_t törəmələrini tapaq.

$$x'_t = \left(\int_2^t \frac{\ln z}{z} dz \right)'_t = \frac{\ln t}{t},$$

$$y'_t = \left(\int_5^{ln t} e^z dz \right)'_t = \left(\int_5^{ln t} e^z dz \right)'_{ln t} \cdot (ln t)'_t = e^{ln t} \cdot \frac{1}{t} = t \cdot \frac{1}{t} = 1.$$

Öndə

$$y'_x = \frac{t}{\ln t}.$$

Misal 3. Limiti hesablaym: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$

Həlli. $F(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$, $G(x) = x$ işarə edək. Aydındır

ki, bu funksiyalar $x=0$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur və $F(0)=G(0)=0$. $F'(0)=1$, $G'(0)=1 \neq 0$.

Beləliklə, $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı üçün Lopital qaydasını tətbiq etmək olar.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left(\int_0^x \cos t^2 dt \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \cos x^2 = 1.$$

Misal 4. Limiti hesablayın: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Həlli. $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı haqda

Lapitalın ikinci qaydasını ardıcıl olaraq iki dəfə tətbiq edək.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x (\arctgt)^2 dt \right)'}{\left(\sqrt{x^2 + 1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctgx)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\arctgx)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\arctgx)^2 \right)'}{x'} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (\arctg x)^2 + \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2 \arctg x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (\arctg x)^2 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \arctg x \right] = \\
&= 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

§20. Nyuton-Leybnis düsturu

Teorem 20.1. (İntegral hesabının əsas teoremi). $f(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməz funksiya, $\Phi(x)$ -isə onun $[a, b]$ -də ixtiyari ibtidai funksiyası olduqda

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (20.1)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. Yuxarıda qeyd etdik ki, $f(x)$, $[a, b]$ - də kəsilməz funksiyadirsə, onda $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ funksiyası $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında ibtidai funksiyalarından biridir. Digər tərəfdən, ibtidai funksiyalar biri digərindən sabit toplanan qədər fərqləndiyindən, C ixtiyari sabit olduqda, $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C$ funksiyası da $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında ibtidai funksiyası olacaqdır. $x = a$ götürsək, $\Phi(a) = C$ alırıq. $x = b$ götürsək, $\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C$ alırıq.

Sonuncu iki bərabərliklərdən alırıq ki, $\Phi(x)$ funksiyası $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında ibtidai funksiyasıdır və (20.1) bərabərliyi doğrudur.

Nyuton-Leybnis düsturu adlanan (20.1) düsturu müəyyən integral ilə qeyri-müəyyən integral arasında əlaqə yaradır. Ona integral hesabının əsas düsturu da deyirlər. Bu əlaqə olmasaydı müəyyən integralın tətbiq imkanları çox məhdudd olardı.

Qeyd 1. (20.1) düsturunun köməyi ilə müəyyən integralın hesablanması ibtidai funksiyanın hesablanmasına gətirilir.

(20.1) düsturunu bəzən, $\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)|_a^b$ kimi yazmaq qəbul olunmuşdur.

Qeyd 2. Teorem 20.1-i sonlu sayda nöqtədə $\Phi'(x) = f(x)$ şərtindən imtina etməklə gücləndirmək olar. Başqa sözlə $[a, b]$ parçasının sonlu sayda nöqtələri istisna olmaqla, qalan hər yerdə $\Phi'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənərsə, onda teorem 20.1 öz gücündə qalır.

Teorem 20.2. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında integrallanırsa, $\Phi(x)$ funksiyası isə bu parçada kəsilməzdir və $[a, b]$ parçasının sonlu sayda nöqtəsi istisna olmaqla hər bir nöqtəsində $\Phi'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

bərabərliyi doğrudur.

Misal 1. $\int_{-1}^2 x^4 dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $f(x) = x^4$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri $\Phi(x) = \frac{1}{5}x^5$ funksiyasıdır. Onda Nyuton-Leybnis düsturuna görə

$$\int_{-1}^2 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{5} (32 + 1) = \frac{33}{5}.$$

Misal 2. $\int_0^{\pi} \sin x dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $f(x) = \sin x$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri $\Phi(x) = -\cos x$ olduğundan, Nyuton-Leybnis düsturuna görə

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

Misal 3. $\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ interqalını hesablayın.

Həlli. İnteqralaltı funksiyanı çevirək.

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{2} |\sin x|. \text{ Onda}$$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} |\sin x| dx.$$

Müəyyən inteqralın 5-ci xassəsinə görə,

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx = \\ &= (-\cos x) \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos x) \Big|_{2\pi}^{3\pi} - (-\cos x) \Big|_{3\pi}^{4\pi} = \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8. \end{aligned}$$

$$\text{Deməli, } \int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 8\sqrt{2}.$$

Misal 4. $\int_0^2 |1 - 5x| dx$ integralını hesablayın.

$$\text{Həlli. } |1-5x| = \begin{cases} 1-5x, & x \leq \frac{1}{5}, \\ 5x-1, & x > \frac{1}{5}, \end{cases}$$

olduğundan, müəyyən integralın məlum xassələrinə görə,

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-5x| dx &= \int_0^{\frac{1}{5}} (1-5x) dx + \int_{\frac{1}{5}}^2 (5x-1) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{5}} dx - 5 \int_0^{\frac{1}{5}} x dx + 5 \int_{\frac{1}{5}}^2 x dx - \int_{\frac{1}{5}}^2 dx = \frac{1}{5} - 5 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{5}} + 5 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^2 - \\ &\quad - \left(2 - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} - 5 \frac{1}{2 \cdot 25} + \frac{5 \cdot 4}{2} - \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 25} - \frac{9}{5} = \frac{41}{5}. \end{aligned}$$

§ 21. Müəyyən integralda dəyişənin əvəz edilməsi.

Qeyri-müəyyən integralların hesablanmasında dəyişənin əvəz edilməsi üsulundan istifadə edirik. Müəyyən integralın hesablanmasında da bir çox hallarda bu üsuldən istifadə olunur.

Tutaq ki, $f(x)$ Δ_x aralığında, $g(t)$ isə Δ_t aralığında təyin olunmuş funksiylərdir və $g(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Onda $f(g(t))$ mürəkkəb funksiyanın mənası vardır.

Teorem 21.1. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyaıdır. $x = g(t)$ funksiyaı isə $[\alpha, \beta]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz diferensiallanan funksiyaıdır və $\forall t \in [\alpha, \beta]$ üçün $a \leq g(t) \leq b$ bərabərsizliyi ödəyir və $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$. Onda,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt \quad (21.1)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. (21.1) bərabərliyi bu mənada başa düşülür ki, bir tərəfdəki inteqral varsa, o biri tərəfdəki inteqral da var və onların ədədi qiymətləri bərabərdir.

$f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğundan, Nyuton – Leybnis düsturuna görə, onun $F(x)$ ibtidai funksiyası vardır və

$$F'(x) = f(x), \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (21.2)$$

İstənilən $t \in [\alpha, \beta]$ üçün teoremin şərtinə görə $F(g(t))$ funksiyası təyin olunmuşdur və $F(x)$ və $x=g(t)$ funksiyalarının hər ikisi öz təyin oblastında diferensiallanan olduğundan, $G(t) = F(g(t))$ mürəkkəb funksiyası da $[\alpha, \beta]$ diferensiallandırılır və

$$G'(t) = F'_t(g(t)) = F'_g(g(t))g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t). \quad (21.3)$$

(21.3) bərabərliyindən çıxır ki, $G(t)$ funksiyası $f(g(t)) \cdot g'(t)$ funksiyasının $[\alpha, \beta]$ parçasında ibtidai funksiyasıdır. Onda Nyuton-Leybnis teoreminə görə

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd 1. Müəyyən inteqralı

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

düsturu ilə hesablayarkən, başqa sözlə, $g(t)$ diferensiallanan funksiya olduqda, $x = g(t)$ şəklində əvəzləmə apararkən, yeni t dəyişəninin inteqrallama sərhədləri olan α və β ədədləri

$$\begin{cases} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{cases}$$

sisteminə tapılır.

Əgər $x = g(t)$ funksiyası monoton olmazsa, ola bilsin ki, bu sistemin çoxlu sayda (hətta sonsuz sayda) həlli olsun. Bu halda sistemin həllərindən eləsini götürmək lazımdır ki, alınan $[\alpha, \beta]$ parçasında $x = g(t)$ monoton olsun. Bunu aşağıdakı misalda göstərik.

Misal 1. $J = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ integralını hesablayın.

Həlli. $x = \sin t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $dx = \cos t \, dt$ olar. Yeni t integrallama dəyişəninə sərhədləri olan α və β aşağıdakı sistemdən tapılmalıdır.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \sin \alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \beta \end{cases}$$

Bu sistemin birinci tənliyindən $\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ikinci tənliyindən isə $\beta = (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ alırıq.

Əgər bu sistemin həllər cütü olaraq $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ götürsək,

onda $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ parçasında $\sin t$ funksiyası monoton artan

olacaqdır. Deməli, yeni t dəyişəninə dəyişmə oblası $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

parçası olacaqdır. Əgər $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ götürsək, onda $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

parçasında $\cos t > 0$ olacaq və ona görə
 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Beləliklə,

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right).$$

Məlum $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ düsturundan istifadə etsək,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad \text{alırıq.} \quad \text{Onda}$$

$$J = \ln \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}} = \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Sistemin (α, β) həllər cütü olaraq $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$ götürsək,

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right]$ parçasında $x = \sin t$ funksiyası monoton

olmayacaqdır. Ona görə də $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$ yeni t dəyişəninin inteqrallama sərhədləri ola bilməz.

Qeyd 2. Bəzi hallarda müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsini $x = g(t)$ şəklində deyil, $t = \psi(x)$ şəklində aparmaq daha səmərəli olur. Aydındır ki, bu halda t dəyişəninin inteqrallama sərhədləri $\psi(a) = \alpha$ və $\psi(b) = \beta$ bərabərliklərindən tapılmalıdır. Bunun üçün isə $t = \psi(x)$ funksiyasının birqiymətli tərs funksiyası olmalıdır. Praktikada, adətən $\psi(x)$ funk-

siyasından $[a, b]$ parçasında monoton və kəsilməz diferensiallanan olması tələb olunur.

Misal 2. $J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ integralını hesablayın.

İsbatı. $x = a \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ əvəz edək.

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt. \text{ Onda}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Misal 3. $J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}$ integralını

hesablayın.

Həlli. İntegralaltı ifadədə sürət və məxrəci $\cos^2 x$ -ə bölsək alırıq.

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}.$$

$\operatorname{tg} x = t$ əvəzləməsi aparaq. $x = 0$ olduqda $t = 0$,
 $x = \pi/4$ olduqda $t = 1$ olar. Onda

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Qeyd 3. Nyuton-Leybnis düsturu müəyyən integralı qeyri-müəyyən integral vasitəsilə hesablamağa imkan verir. Lakin bu heç də o demək deyildir ki, hər hansı qeyri-müəyyən integral elementar funksiyalarla ifadə olunmursa, uyğun müəyyən integralı elementar funksiyalarla ifadə etmək mümkün deyil. Buna aid misal göstərək.

Misal 4. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ -integralını hesablayın.

Həlli. $x = \pi - t$ əvəzləməsindən istifadə etsək, $dx = -dt$; $x = 0$ olduqda $t = \pi$, $x = \pi$ olduqda $t = 0$ olar. Onda

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} d(-t) = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{1 + \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

İntegralın qiyməti integrallama dəyişəninin hansı hərflə işarə olunmasından asılı olmadığından sonuncu integralda t əvəzinə x yazıb bərabərliyin sol tərəfinə keçirsək, alırıq.

$$2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{1 + \cos^2 t}.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 t} dx = - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1 + (\cos t)^2} = - \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Bu misal onunla maraqlıdır ki, $\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ qeyri-müəyyən integralı elementar funksiyalarla ifadə olunmur.

Misal 5. $J = \int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^{3/2} dx$ integralını hesablayın.

Həlli. $x = \sin^3 t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $dx = 3 \sin^2 t \cos t dt$; $x = 0$ olduqda $t = 0$, $x = 1$ olduqda $t = \frac{\pi}{2}$ olar. Yeni dəyişənə keçək:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{3/2} 3 \sin^2 t \cos t dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \cdot \sin^2 t \cdot \cos t dt = \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \cdot \sin^2 t dt = 3 \int_0^{\pi/2} (\cos t \cdot \sin t)^2 \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin 2t)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt + \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cos 2t dt = \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt + \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t d(\sin 2t) = \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} dt - \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} \cos 4t dt + \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t d(\sin 2t) = \\
 &= \frac{3}{16} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{16} \sin^3 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{32}.
 \end{aligned}$$

Misal 6. $I = \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{2x+5}}$ integralını hesablayın.

Həlli. $2x+5=t$ əvəzləməsi aparaq. $x = \frac{t-5}{2}$,

$$2dx = dt, \quad dx = \frac{1}{2} dt,$$

$x=1 \Rightarrow t=7$, $x=2 \Rightarrow t=9$ olar. Onda

$$\begin{aligned}
 I &= \int_7^9 \frac{t-5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_7^9 \frac{t-5}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4} \int_7^9 \left(\sqrt{t} - \frac{5}{\sqrt{t}} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{4} \left. \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_7^9 - \frac{5}{4} \left. \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_7^9 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 7^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{5}{4} \cdot 2 \left(9^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(3^3 - \sqrt{7}^3) - \frac{5}{2}(3 - \sqrt{7}) = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{7})(9 + 3\sqrt{7} + 7) - \frac{5}{2}(3 - \sqrt{7}) = \\
&= (3 - \sqrt{7}) \left[\frac{1}{6}(16 + 3\sqrt{7}) - \frac{5}{2} \right] = (3 - \sqrt{7}) \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{5}{2} \right) = \\
&= (3 - \sqrt{7}) \left(\frac{16 - 15}{6} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) = (3 - \sqrt{7}) \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{6} - \frac{7}{2} = -3 + \frac{9\sqrt{7} - \sqrt{7}}{6} = -3 + \frac{8\sqrt{7}}{6} = -3 + \frac{4\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}$$

Misal 7. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$ integralında formal olaraq

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ əvəzləməsi aparsaq, onda düzgün olmayan nəticə alarıq. Bunu izah edin.

Həlli. Əgər formal olaraq $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ əvəzləməsi aparsaq,

onda $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$x = 0$ və $x = 2\pi$ olduqda $t = 0$ olar. Onda verilmiş integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x} = \int_0^0 \frac{2 \frac{dt}{1+t^2}}{5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 0 \text{ olardı. Bu isə ola bilməz.}$$

Çünki $\frac{1}{5 - 3\cos x}$ funksiyası $[0, 2\pi]$ parçasında müsbətdir və onun integralı sıfıra bərabər ola bilməz. Buna səbəb $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$ funksiyasının $x = \pi$ nöqtəsində təyin olunmamasıdır.

Misal 8. $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$ integralında formal olaraq

$\operatorname{tg} x = t$ əvəzləməsi aparsaq, onda düzgün olmayan nəticə alırıq. Bunu izah edin.

Həlli. $\operatorname{tg} x = t$ əvəzləməsi aparsaq,

$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$ alırıq. Onda

$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$ olduğundan,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^0 \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{\frac{1}{1+t^2}} = \int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0$$

olardı. Bu isə ola bilməz. Çünki $\frac{1}{1 + \cos^2 x}$ funksiyası $[0, \pi]$ parçasında müsbətdir və onun integralı sıfıra bərabər ola bilməz. Qeyd 2-yə əsasən, ziddiyyətə səbəb $\operatorname{tg} x$ funksiyasının $[0, \pi]$ -də

birqiymətli tərs funksiyasının olmamasıdır. Bu funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsində təyin olunmamışdır.

Misal 9. $\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$ integralında $x = \sin t$

əvəzləməsi aparmaq olarmı?

Həlli. Əgər formal olaraq $x = \sin t$ əvəzləməsi aparsaq, onda yeni t dəyişəninə α və β integrallama sərhədləri

$$\begin{cases} 0 = \sin \alpha \\ 3 = \sin \beta \end{cases}$$

sistemindən tapılmalıdır. Bu sistemin isə həlli yoxdur. Ona görə də verilmiş integralda $x = \sin t$ əvəzləməsi aparmaq olmaz.

Misal 10. İsbat edin ki, $[-l, l]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün $f(x)$ cüt funksiya olduqda,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

$f(x)$ tək funksiya olduqda isə,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ $[-l, l]$ parçasında cütdür, yəni $\forall x \in [-l, l]$ üçün $f(-x) = f(x)$ bərabərliyi doğrudur.

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx \text{ bərabərliyindən istifadə edək.}$$

$$\int_{-l}^0 f(x) dx \text{ integralında } x = -y \text{ əvəzləməsi aparaq.}$$

$$x = -l \Rightarrow y = l, \quad x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad dx = -dy. \quad \text{Onda}$$

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = - \int_l^0 f(y) dy = \int_0^l f(y) dy = \int_0^l f(x) dx \quad \text{olduğundan,}$$

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx.$$

İndi tutaq ki, $f(x)$ $[-l, l]$ parçasında təkdir, yəni $\forall x \in [-l, l]$ üçün $f(-x) = -f(x)$ bərabərliyi doğrudur.

$$\int_{-l}^0 f(x) dx \text{ integralında } x = -y \text{ əvəzləməsi aparaq.}$$

$$x = -l \Rightarrow y = l, \quad x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad dx = -dy. \quad \text{Onda}$$

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = - \int_l^0 f(-y) dy = \int_l^0 f(y) dy = - \int_0^l f(y) dy = - \int_0^l f(x) dx$$

olduğundan,

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \int_{-l}^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx = 0$$

əlırıq.

Misal 11. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ ədəd oxunda kəsilməz və $T > 0$ dövrü funksiyadırsa, onda istənilən qeyd olunmuş a ədədi üçün

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $f(x)$ funksiyası T dövrü funksiya olduğundan, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ üçün $f(x+T) = f(x)$ bərabərliyi doğrudur.

İxtiyari qeyd olunmuş a ədədi üçün $\int_a^{a+T} f(x)dx$ integralını aşağıdakı şəkildə göstərək:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

$\int_T^{a+T} f(x)dx$ integralında $x = y + T$ əvəzləməsi aparaq.

$x = T \Rightarrow y = 0$, $x = a + T \Rightarrow y = a$, $dx = dy$. Onda,

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy = -\int_a^0 f(y)dy = -\int_a^0 f(x)dx$$

olduğundan,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

olar.

Misal 12. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ integrəlini hesablayın.

Həlli. $f(x) = \cos x$ funksiyası cütdür. Göstərək ki, $\varphi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ funksiyası təkdir.

$$\varphi(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -\varphi(x)$$

olduğundan, $\varphi(x)$ təkdir. $\cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$ funksiyası cüt və tək funksiyanın hasilı kimi təkdir. Onda misal 10-a görə

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

Misal 13. $\int_0^{4\pi} \sin^3 x dx$ integrəlini hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, $\sin^3 x$ funksiyası 2π dövrlü funksiyadır. Verilmiş integrəli aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\int_0^{4\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 x dx.$$

Misal 11-də $f(x) = \sin^3 x$, $a = 2\pi$, $T = 2\pi$ götürsək,

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx.$$

Deməli,

$$\int_0^{4\pi} \sin^3 x dx = 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx$$

Misal 11-də $f(x) = \sin^3 x$, $a = -\pi$, $T = 2\pi$ götürsək, onda

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \, dx$$

olar.

$\sin^3 x$ funksiyası tək funksiya olduğundan misal 10-a əsasən,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \, dx = 0.$$

Beləliklə, $\int_0^{4\pi} \sin^3 x \, dx = 0$ alarıq.

Bu integralin yuxarıdakı qayda üzrə hesablanmasında məqsəd dövrü funksiyanın integralının xassəsindən istifadə etməkdir. Əslində isə bu integralı $x = \cos t$ əvəzləməsi aparmaqla hesablamaq heç bir çətinlik törətmir.

Misal 14. $\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx$ bərabərliyini

isbat edin.

Həlli.
$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

olduğundan, tələb olunan bərabərliyin doğruluğunu isbat etmək üçün

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx$$

bərabərliyinin doğruluğunu isbat etmək kifayətdir. $x = \pi - t$

əvəzləməsi aparaq. $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi \Rightarrow t = 0$;

$dx = -dt$. Onda

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\pi - t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

§22. Müəyyən integralda hissə-hissə integrallama

Teorem 22.1. Fərz edək ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiyalardır. Onda

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x) dx \quad (22.1)$$

İsbatı. Doğurdan da, $u(x)v(x)$ funksiyası $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası olduğundan Nyuton-Leybnis düsturuna görə,

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)] dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Buradan, (22.1) düsturunu alırıq. (22.1) düsturuna müəyyən integral üçün hissə-hissə integrallama düsturu deyilir.

Qeyd. $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ -ifadəsini

$u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b = u v \Big|_a^b$ şəklində yazsaq və $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$ olduğunu nəzərə alsaq, (22.1) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılar.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (22.2)$$

Misal 1. $\int_0^1 \arctg x dx$ integralsını hesablayın.

Həlli. $u = \arctg x$, $dx = dv$ götürsək, $du = \frac{dx}{1+x^2}$,

$v = x$ olar. Onda

$$\int \arctg x dx = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \\ = \arctg 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

Misal 2. Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları hesablaym.

$$1) J = \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad 2) J = \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx, \quad 3) J = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$$

Həlli. 1). $u = x$, $dv = \sin x dx$ qəbul etsək, $du = dx$, $v = -\cos x$ olar. Onda

$$J = \int_0^{\pi} x \sin x dx = - \int_0^{\pi} x d(\cos x) = - \left(x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = \\ = - \left(x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = -\pi \cos \pi = \pi.$$

2). $u = x^2$, $dv = \cos x dx$ qəbul etsək, $du = 2x dx$, $v = \sin x$ olar. Onda

$$J = \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \int_0^{2\pi} x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = \\ = -2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək. Onda

$$J = -2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{2\pi} x d(\cos x) = 2 \left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx \right) =$$

$$= 2 \left(2\pi \cos 2\pi - \sin x \Big|_0^{2\pi} \right) = 2(2\pi - 0) = 4\pi.$$

). Verilmiş integralı

$$J = \int_{\frac{1}{e}}^e (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx \quad \text{şəklində yazaq. Bu integralların hər}$$

birinə hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edək.

$u = \ln x$, $dv = dx$ qəbul etsək, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ olar. Onda

$$J = - \left(x \cdot \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 x \cdot \frac{dx}{x} \right) + \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= - \left[\left(0 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} \right) - \left(1 - \frac{1}{e} \right) \right] + [(e \ln e - 0 - (e - 1))] =$$

$$= \left(-\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} \right) + (e - e + 1) = -\frac{2}{e} + 2 = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Misal 3. Hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq etməklə

$$J = \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

integralını hesablayın.

Həlli. $u = x$, $dv = e^{-2x} dx$ qəbul etsək, $du = dx$,
 $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ olar. Onda

$$J = x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}.$$

Misal 4. $J = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ inteqralları hesablayın.

Həlli. Əvvəlcə $\sqrt{1+x} = t$ əvəzləməsi aparaq: $1+x = t^2$,
 $x = t^2 - 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$, $dx = 2t dt$ olar.
 Onda

$$J = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \arcsin(t^2 - 1) dt.$$

Sonuncu inteqralı hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə hesablayaq.

$u = \arcsin(t^2 - 1)$, $dv = dt$ qəbul etsək, $du = \frac{2dt}{\sqrt{2-t^2}}$, $v = t$
 olar. Onda

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \arcsin(t^2 - 1) dt &= t \cdot \arcsin(t^2 - 1) \Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot \frac{2dt}{\sqrt{2-t^2}} = \\ &= \sqrt{2} \arcsin 1 - \arcsin 0 + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(2-t^2)}{\sqrt{2-t^2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2-t^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 2(0-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2. \end{aligned}$$

Misal 5. $J = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ inteqralları hesablayın.

Həlli. Hissə-hissə inteqrallama metodundan istifadə edək.
 $u = \sin x$, $dv = e^x dx$ götürsək, $du = \cos x dx$, $v = e^x$ olar.
 $u = \sin x$ və $v = e^x$ funksiyalarının özləri və törəmələri $[0, \pi]$
 parçasında kəsilməz olduğundan, hissə-hissə inteqrallama
 metodunu tətbiq etmək olar. Onda

$$J = e^x \cdot \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx.$$

$\int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama metodunu tətbiq edək. $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$ götürsək, $du = -\sin x \, dx$, $v = e^x$ olar.

Onda

$$J = - \left(\cos x \cdot e^x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x \, dx \right) = -(e^\pi + 1) - J$$

alırıq. J inteqralına nəzərən tənlik aldıq. Buradan, $2J = e^\pi + 1$ və yaxud $J = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

§ 23. Müəyyən inteqralın qiymətləndirilməsi.

Orta qiymət teoremləri.

Teorem 23.1. (Birinci orta qiymət teoremi). Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallanan və $g(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında mənfi olmayan (və yaxud müsbət olmayan) qiymətlər alır. $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri uyğun olaraq m və M olsun. Onda $m \leq \mu \leq M$ bərabərsizliyini ödəyən elə μ ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx \quad (23.1)$$

düsturü doğrudur.

İsbati. Dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə $\forall x \in [a, b]$ üçün $m \leq f(x) \leq M$ bərabərsizliyi doğrudur.

Müəyyənlik üçün tutaq ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün $g(x) \geq 0$. Onda aydındır ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad (23.2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Müəyyən integralın dördüncü və beşinci xassələrinə görə $m \cdot g(x)$, $M \cdot g(x)$ və $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında integrallananıdır.

Onda (23.2) bərabərsizliyini hədbəhəd integrallaşaq,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (23.3)$$

bərabərsizliyini alırıq. Burada iki hal mümkündür:

$$1) \int_a^b g(x) dx = 0 ; 2) \int_a^b g(x) dx \neq 0.$$

Birinci halda (23.3) bərabərsizliyindən $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$

alardıq. Onda (23.1) bərabərsizliyi μ -nün istənilən qiymətində, o cümlədən $m \leq \mu \leq M$ bərabərsizliyini ödəyən

qiymətində də doğru olardı. Tutaq ki, $\int_a^b g(x) dx > 0$. Bu halda

(23.3) bərabərsizliyinin hər tərəfini $\int_a^b g(x) dx$ ədədinə bölsək,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

bərabərsizliyini alırıq.
$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$
 işarə etsək, tələb

olunan (23.1) bərabərsizliyini alırıq. $\int_a^b g(x)dx < 0$ olduğu hal

da oxşar qayda ilə isbat olunur. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. $f(x)$, $[a, b]$ parçasında integrallanandırısa, m və M onun bu parçada uyğun olaraq dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləridirsə, onda elə μ ($m \leq \mu \leq M$) ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (23.4)$$

İsbatı. (23.3) bərabərsizliyində $g(x) = 1$ qəbul edək.

$$\int_a^b 1 \cdot dx = b-a \text{ olduğundan,}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (23.5)$$

bərabərsizliyini alırıq.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ ədədini } \mu \text{ ilə işarə etsək, (23.4)-ü alırıq.}$$

μ ədədinə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında orta qiyməti deyilir.

Əgər, xüsusi halda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda elə α, β ədədləri var ki, $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ və ona görə də $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ parçasında elə ξ nöqtəsi var ki, $f(\xi) = \mu$. Bu halda (23.4) düsturu aşağıdakı şəkildə düşər.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (23.6)$$

Nəticə 2. Fərz edək ki, $f(x)$, $[a, b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə $[a, b]$ parçasında integrallananıdır və istənilən $x \in [a, b]$ üçün $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) şərtini ödəyir. Onda elə $\xi \in (a, b)$ nöqtəsi var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (23.7)$$

İsbatı. Tutaq ki, $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$.

Müəyyənlik üçün tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx > 0$. Əgər $\int_a^b f(x)dx = 0$

olarsa, onda (23.7) bərabərliyi istənilən $\xi \in (a, b)$ üçün doğru olardı (23.1 bərabərliyinə əsasən). $m < \mu < M$ halına baxaq. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğundan, Veyerştrasın ikinci teoreminə görə elə $\bar{x} \in [a, b]$ və $\underline{x} \in [a, b]$ nöqtələri var ki, $f(\bar{x}) = m$, $f(\underline{x}) = M$. Parçada kəsilməz funksiyanın aralıq qiymətləri alması haqda teoremə görə $f(x)$ kəsilməz funksiyası m və M ədədləri arasındakı bütün aralıq qiymətləri alır. Ona görə elə $\xi \in (a, b)$ var ki, $f(\xi) = \mu$. Asanlıqla inanmaq olar ki, $\mu = M$ və $\mu = m$ halları üçün də (23.7) bərabərliyi doğrudur.

Qeyd 1. $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) olması şərti zəruridir. Əgər bu şərt pozularsa (23.1) düsturu doğru olmaz. Məsələn, $[0, 1]$ parçasında verilmiş

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{və} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

funksiyaları üçün

$$\int_0^1 g(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}$$

olduğundan, ixtiyari μ üçün $\int_0^1 f(x)g(x) dx \neq \mu \int_0^1 g(x) dx$.

Qeyd 2. (23.7) düsturunun doğruluğu üçün $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında kəsilməz olması şərtini azaltmaq olmaz. Başqa sözlə, $f(x)$ kəsilməz olmadıqda (23.7) bərabərliyi ümumiyyətlə desək, doğru deyil.

Məsələn, $[0, 1]$ parçasında kəsilən

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3, & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{və} \quad g(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

funksiyaları üçün

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 dx = 1,$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^{1/3} 3 dx + \int_{1/3}^1 \frac{1}{3} dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

olduğundan $[0,1]$ parçasında elə bir ξ nöqtəsi yoxdur ki,
 $f(\xi) = \frac{11}{9}$ olsun.

Teorem 23.2. (ikinci orta qiymət teoremi). Fərz edək ki, $f(x)$, $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə $[a,b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiya və $g'(x) \geq 0$. Onda $[a,b]$ parçasında elə $\xi \in [a,b]$ var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx \quad (23.8)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. $u(x) = g(x)$, $dv(x) = f(x)dx$ qəbul edərək, hərəbərliyinin sol tərəfinə hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edək:

$$v(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad u(x) = g(x), \quad du(x) = g'(x)dx.$$

Onda

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \left(g(x) \cdot \int_a^x f(t)dt \right) \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b \left(g'(x) \int_a^x f(t)dt \right) dx \end{aligned} \quad (23.9)$$

Sağ tərəfdəki ikinci integrala birinci orta qiymət teoremini tətbiq edək.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiyası kəsilməzdir və $g'(x) \geq 0$. Ona görə də elə $\xi \in [a,b]$ nöqtəsi var ki,

$$\int_a^b \left(g'(x) \cdot \int_a^x f(t) dt \right) dx = \int_a^x f(t) dt \left(\int_a^b g'(x) dx \right) =$$

$$= (g(b) - g(a)) \int_a^x f(t) dt$$

Sonuncu bərabərliyi (23.9) – də nəzərə alsaq,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_a^b f(t) dt - (g(b) - g(a)) \int_a^x f(t) dt$$

alırıq.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

olduğunu nəzərə alıb, sadələşdirmə aparsaq, tələb olunan (23.8) düsturunu alırıq. Teorem isbat olundu.

(23.8) bərabərliyinə Bonne düsturu deyilir.

Misal 1. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının $[0, 100]$ parçasında μ orta qiymətini tapın.

Həlli.

$$\mu = \frac{1}{100-0} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = \frac{1}{100} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{100} = \frac{2}{300} 100^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{300} \cdot 1000 = 6\frac{2}{3}.$$

Misal 2. $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ funksiyasının $[0, 2\pi]$ parçasında μ orta qiymətini tapın.

Həlli.

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2 \sin x + 3 \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} (10x - 2 \cos x + 3 \sin x) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [(20\pi - 2 \cos 2\pi + 3 \sin 2\pi) - (0 - 2 \cos 0 + 3 \sin 0)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (20\pi - 2 + 2) = 10.$$

Misal 3. Birinci orta qiymət teoremindən istifadə etməklə

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}$$

İntegralını qiymətləndirin.

Həlli. Yuxarıda göstərmişik ki, əgər $f(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ isə, onda (23.5) bərabərsizliyi doğrudur.

$[0, 2\pi]$ parçasında kəsilməz $f(x) = \frac{1}{1 + 0,5 \cos x}$ funksiyasının ən kiçik və ən böyük qiymətlərini tapaq. Asanlıqla inanmaq olar ki, $\min_{x \in [0, 2\pi]} \frac{1}{1 + 0,5 \cos x} = \frac{2}{3}$, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \frac{1}{1 + 0,5 \cos x} = 2$. Ona görə,

$$\frac{4\pi}{3} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} \leq 4\pi.$$

Misal 4. Birinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək,

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100} dx$$

İntegralını qiymətləndirin.

Həlli. $0 < x < 100$ olduqda

$$\frac{1}{200} < \frac{1}{x + 100} < \frac{1}{100}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliyin hər tərəfini e^{-x} -ə vuraq və $[0, 100]$ parçasında inteqrallayaq. Onda

$$\frac{1}{200} \int_0^{100} e^{-x} dx < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < \frac{1}{100} \int_0^{100} e^{-x} dx$$

bərabərsizliyini alırıq.

$$\int_0^{100} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{100} = 1 - \frac{1}{e^{100}} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{200} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right) < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right).$$

Misal 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ və $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$ ədədlərindən hansı

böyükdür?

Həlli. Aydındır ki, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda $\cos^2 x \geq \cos^{10} x$

bərabərsizliyi, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda isə $\cos^2 x > \cos^{10} x$

bərabərsizliyi doğrudur. Ona görə müəyyən integralın 10-cu xassəsindən çıxan nəticəyə əsasən, hökm edirik ki,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx.$$

Misal 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x} dx$ və $\frac{\pi}{2}$ ədədlərindən hansı böyükdür?

Həlli. Aydındır ki, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda $0 \leq \sin x \leq 1$ və yaxud $-1 \leq -\sin x \leq 0$ bərabərsizliyi ödənilir. Asanlıqla inanmaq

olar ki, $e^{-\sin x}$ funksiyası $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında azalandır. Ona görə

$$\text{də } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{-də} \quad e^{-1} \geq e^{-\sin x} \geq e^0$$

və yaxud $e^{-\sin x} \geq 1$ bərabərsizliyi doğrudur.

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda isə $e^{-\sin x} > 1$. Ona görə də müəyyən integralın 10-cu xassəsindən çıxan nəticəyə əsasən,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Misal 7. İkinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək

$$J = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

integralını qiymətləndirin.

Həlli. $f(x) = \sin x$, $x \in [100\pi, 200\pi]$ və

$g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [100\pi, 200\pi]$ funksiyalarına baxaq. Aydındır ki,

$f(x)$ funksiyası $[100\pi, 200\pi]$ parçasında kəsilməzdir. $g(x)$ funksiyası isə $[100\pi, 200\pi]$ parçasında kəsilməz diferensiallanandır və monoton azalandır. Onda Bonne düsturuna görə

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx + \frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x dx = \\ &= \frac{1}{100\pi} (-\cos x) \Big|_{100\pi}^{\xi} + \frac{1}{200\pi} (-\cos x) \Big|_{\xi}^{200\pi} = \\ &= -\frac{1}{100\pi} (\cos \xi - \cos 100\pi) - \frac{1}{200\pi} (\cos 200\pi - \cos \xi) = \\ &= -\frac{1}{100\pi} (\cos \xi - 1) - \frac{1}{200\pi} (1 - \cos \xi) = \end{aligned}$$

$$= (1 - \cos \xi) \left(\frac{1}{100\pi} - \frac{1}{200\pi} \right) = \frac{1 - \cos \xi}{200\pi}, \quad 100\pi < \xi < 200\pi.$$

Aydındır ki, $0 \leq 1 - \cos \xi \leq 2$. Onda müəyyən integralın 10-
xassəsinə görə $0 < J < \frac{1}{100\pi}$.

Misal 8. İkinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək

$$J = \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx \quad (\alpha \geq 0, \quad 0 < a < b)$$

integralını qiymətləndirin.

Həlli. $f(x) = \sin x$, $x \in [a, b]$ və $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$, $x \in [a, b]$

funksiyalarına baxaq. Aydındır ki, $f(x) = \sin x$ funksiyası

$[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$, $x \in [a, b]$ funksiyası

isə $[a, b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan, monoton
azalandır və müsbətdir. Onda Bonne düsturuna görə $\xi \in (a, b)$ nöqtəsi var ki,

$$J = \frac{1}{ae^{\alpha a}} \int_a^{\xi} \sin x \, dx = \frac{1}{ae^{\alpha a}} (-\cos x) \Big|_a^{\xi} = \frac{1}{ae^{\alpha a}} (\cos a - \cos \xi).$$

$$|J| = \left| \frac{1}{ae^{\alpha a}} (\cos a - \cos \xi) \right| \leq \frac{2}{ae^{\alpha a}}.$$

§ 24. Müəyyən integral üçün bəzi integral bərabərsizliklər.

Əvvəlcə köməkçi fakt kimi aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. $a \geq 0$, $b \geq 0$ və $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduqda

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad (24.1)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. $[0; +\infty)$ yarımoxunda

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t$$

funksiyasının ekstremum nöqtəsini axtaraq. $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1 = 0$ olsun. $t = 1$ ekstremum üçün şübhəli nöqtədir. $t = 1$ nöqtəsində tərəmə öz işarəsini mənfiyədən müsbətə dəyişər. $t = 1$ nöqtəsi $\varphi(t)$ funksiyanın $[0; +\infty)$ aralığında yeganə minimum nöqtəsidir. Ona görə də $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$.

$\frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} - t > 0$ bərabərsizliyindən

$$t < \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} \quad (24.2)$$

alırıq.

(24.2) bərabərsizliyində $t = a \cdot b^{\frac{1}{1-p}}$ qəbul etsək, alırıq:

$$a \cdot b^{\frac{1}{1-p}} \leq \frac{1}{p} a^p b^{\frac{p}{1-p}} + \frac{1}{q}.$$

Hər tərəfi $b^{\frac{1}{1-p}-1}$ -ə bölsək, tələb olunan (24.1) bərabərsizliyini alırıq. (24.1) bərabərsizliyi Yunq bərabərsizliyi adlanır.

Teorem 24.1. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında integrallanan funksiyalardır, $1 < p < +\infty$ istənilən

ədəddir, q ədədi isə $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bərabərliyindən təyin edilir.

Onda

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (24.3)$$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)| dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (24.4)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İsbatı. $f(x) = g(x) = 0$ olduqda (24.3) bərabərsizliyinin doğruluğu aydındır. Ona görə $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ hesab edək. Yunq bərabərsizliyində

$$A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}}, \quad B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \quad (24.5)$$

qəbul etsək,

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \leq \\ & \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \end{aligned}$$

bərabərsizliyini alırıq.

Bu bərabərsizliyi $[a, b]$ parçası üzrə integrallayıb, (24.5)

münasibətini və $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}} \leq 1$$

olar. Buradan tələb olunan (24.3) bərabərsizliyini alırıq.
 (24.3) bərabərsizliyi integral üçün Hölder bərabərsizliyi adlanır.
 Xüsusi halda $p = q = 2$ olduqda Hölder bərabərsizliyi

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \\ & \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (24.6)$$

şəklinə düşür. (24.6) bərabərsizliyi integral üçün Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi adlanır.

İndi isə (24.4) bərabərsizliyini isbat edək.

Aydındır ki,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \leq \\ & \leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \\ & + \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx. \end{aligned} \quad (24.7)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Sağ tərəfdəki integralların hər birinə Holder bərabərsizliyini tətbiq edək.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Onda (24.7)-dən

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

$(p-1) \cdot q = p$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} \times \\
& \times \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

alırıq. Bu bərabərsizliyin hər tərəfini

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} - \text{ifadəsinə bölsək, (24.4)}$$

bərabərsizliyini alırıq. (24.4) bərabərsizliyi inteqral üçün Minkovski bərabərsizliyi adlanır.

Misal 1. Bərabərsizliyi isbat edin: $\int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} \, dx \leq \sqrt{\frac{2\pi^5}{5}}$.

Həlli. $I = \int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} \, dx$ işarə edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə edək. Onda

$$I^2 \leq \left(\int_0^{\pi} x^4 \, dx \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin x \, dx \right) = \frac{x^5}{5} \Big|_0^{\pi} \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 2. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x^3+1} \, dx \leq \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Həlli. $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x^3+1} \, dx$ işarə edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$J^2 \leq \int_0^1 (1+x^2) \, dx \cdot \int_0^1 (x^3+1) \, dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 3. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3)} \sin x \, dx \leq \sqrt{2\pi + \frac{\pi^4}{2}}.$$

Həlli. $J = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3)} \sin x \, dx$ işarə edək. Koşi-

Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$J^2 \leq \int_0^{\pi} (1+x^3) dx \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = \left(x + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\pi} \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \left(\pi + \frac{\pi^4}{4} \right) \cdot 2 =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi^4}{2}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 4. İsbat edin ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

İsbatı. $0 < x < 1$ olduqda aydındır ki, $1 < 1+x < 2$ bərabərsizliyi ödənilir. Buradan, $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+x} < 1$.

Müəyyən integralın məlum xassəsinə görə

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

alırıq. Bu bərabərsizlikdə $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

Çalışmalar

1. Müəyyən inteqralın tərifindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. Müəyyən inteqralın həndəsi mənasından istifadə edərək,

a) $\int_1^5 (4x - 1) dx$, b) $\int_1^2 (2x + 1) dx$, c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

inteqrallarını hesablayın.

3. İnteqral cəmində limitə keçməklə, $I = \int_1^4 x^3 dx$ inteqralını

hesablayın. $[1, 4]$ parçasını bərabər hissələrə bölün və ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının

- a) sol uc nöqtələrini,
- b) sağ uc nöqtələrini,
- c) orta nöqtələrini seçin.

4. İsbat edin ki, istənilən natural n ədədi üçün

a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{y^n}{y+1} dy,$

$x \in (-1; +\infty)$;

b) $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{y^{2n}}{y^2+1} dy$,

$x \in (-\infty; +\infty)$ bərabərliyi doğrudur.

5. Aşağıdakı müəyyən inteqralları hesablayın:

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$; c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

e) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$; k) $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$;

$$l) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

6. Əvəzetmə üsulundan istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

$$a) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} ; \quad b) \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} ; \quad c) \int_0^2 \sin^3 x \cos x dx ;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{5 - 3 \cos x} ; \quad d) \int_2^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} ; \quad k) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}} .$$

7. Müəyyən inteqral üçün hissə-hissə inteqrallama düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

$$a) \int_1^e \ln^3 x dx ; \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx ; \quad c) \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx ;$$

$$e) \int_1^2 x^3 \ln x dx ; \quad d) \int_0^1 e^x \cos x dx ; \quad k) \int_0^1 \ln(1+x) dx .$$

8. Aşağıdakı funksiyaların x -ə nəzərən törəməsini tapın.

$$a) F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt ; \quad b) F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt ;$$

$$c) F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0)$$

9. Orta qiymət teoremindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

10. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$I < \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

11. $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ integralını qiymətləndirin. Bunun üçün

- a) müəyyən integral üçün orta qiymət teoremindən,
b) Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə edin.

12. Aşağıdakı funksiyaların ən kiçik qiymətini tapın.

a) $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$; b) $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^4 - 16}{1+t} dt$.

Cavablar

2. a) 44 ; b) 6 ; c) $\frac{9\pi}{2}$. 5. a) $\frac{7}{72}$; b) π ;

c) $\arctg e - \frac{\pi}{4}$; e) $\ln 2$; d) $\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4}$; k) $\frac{14}{15}$;

l) $\frac{4}{3}$. 6. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{1}{4} \ln \frac{32}{17}$; c) $\frac{1}{4}$;

e) $\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{1}{2} \lg \frac{\pi}{8} \right)$; d) $\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{3}$; k) $\frac{1}{6}$.

7. a) $6 - 2e$; b) $\pi - 2$; c) $-\frac{1}{e}$; e) $4 \ln 2 - \frac{15}{16}$;

d) $\frac{\cos 1 + \sin 1}{2} e - \frac{1}{2}$; k) $\ln \frac{4}{e}$. 8. a) $\frac{\sin 2x}{x}$;

b) $-\sqrt{1+x^4}$; c) $\ln x$; d) $\frac{2x}{1+x^6}$.

11. a) $I < J < \sqrt{2}$; b) $I < J < \sqrt{1,2}$.

12. a) $-\frac{17}{22}$; b) $\frac{1}{3} - 15 \ln 3$.

III FƏSİL

QEYRİ-MƏXSUSİ İNTEQRALLAR.

§ 25. I növ qeyri-məxsusi integral, tərfi, xassələri

Funksiyanın Riman mənada integralına tərif verərkən integrallama aralığının sonlu olduğunu qəbul etmişdik. Digər tərəfdən isbat etmişdik ki, əgər funksiya sonlu parçada qeyri-məhduddursa, onda Riman mənada integrallanan deyildir (bax, II fəsil, §14, teorem 14.1). Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyaının Riman mənada integrallanan olması üçün integrallama aralığının sonlu, $f(x)$ -in isə bu aralıqda məhdud olması zəruridir. Bu iki şərtədən birinin pozulduğu hal üçün integral anlayışını ümumiləşdirək.

Fərz edək ki, integrallama aralığı sonsuzdur. Ədəd oxunda üç növ sonsuz aralıq var: a və b sonlu ədədlər olduqda $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ aralıqları və $(-\infty, +\infty)$ ədəd oxu.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $(a, +\infty)$ aralığında təyin olunub və ixtiyari qeyd olunmuş $A \in (a, +\infty)$ ədədi üçün $[a, A]$ parçasında Riman mənada integrallananandır, yəni, $\int_a^A f(x) dx$

sonlu ədəddir.

Aydındır ki, bu integral A -dan asılı funksiya təyin edəcəkdir:

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx.$$

$F(A)$ funksiyaının $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitinin varlığını araşdıraraq.

Tərif. Əgər $A \rightarrow +\infty$ şərtində $F(A)$ funksiyaının sonlu limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyaının $[a, +\infty)$

aralığında I növ qeyri-məxsusi inteqralı deyilir və simvolik

olaraq $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kimi işarə olunur.

Beləliklə,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (25.1)$$

Bu halda deyirlər ki, (25.1) qeyri-məxsusi inteqralı yığılır və $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında (qeyri – məxsusi mənada) inteqrallanandır. Əks halda deyirlər ki, (25.1) qeyri-məxsusi inteqralı dağılır.

Qeyd 1. İxtiyari qeyd olunmuş $c > a$ üçün $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və

$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılır və ya

dağılır. Bu fakt $\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$ bərabərliyinə

əsaslanır. Belə ki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ inteqrallarından biri

yığılırsa o biri də yığılır və tərsinə biri dağılırsa, o biri də dağılır. Analogi olaraq $\forall b$ sonlu ədədi üçün $(-\infty, b]$ aralığında I növ qeyri – məxsusi inteqral təyin olunur.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx$$

$f(x)$ funksiyasının $(-\infty, +\infty)$ aralığında I növ qeyri-məxsusi inteqralı $a \in R$ ixtiyari qeyd olunmuş ədəd olduqda aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx. \quad (25.2)$$

Əgər (25.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki integralların hər ikisi yığılırsa, onda deyirlər ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralı yığılır və $f(x)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ ədəd oxunda (qeyri-məxsusi mənada) integrallanandır. Əgər (25.2) bərabərliyində sağ tərəfdəki integrallardan heç olmazsa biri dağılırsa, onda deyirlər ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralı dağılır. Beləliklə, $f(x)$ funksiyası ədəd oxunun istənilən sonlu $[A, B]$ parçasında integrallanırsa və bir-birindən asılı olmayaraq $A \rightarrow -\infty$, $B \rightarrow +\infty$ şərtində

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B f(x)dx$$

sonlu limiti varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ aralığında qeyri-məxsusi mənada integrallanandır. Beləliklə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B f(x)dx.$$

Müəyyənlik üçün biz (25.1) şəklində qeyri-məxsusi integrallara baxacağıq.

Göründüyü kimi, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri - məxsusi integralın

yığılması məsələsi $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ funksiyasının $A \rightarrow +\infty$

şərtinə sonlu limitinin varlığı məsələsinə gətirilir. Limitin varlığı üçün Koşi meyarına görə $F(A)$ funksiyasının $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $M > a$ ədədinin olmasıdır ki,

$A_1 > M$, $A_2 > M$ bərabərsizliklərini ödəyən istənilən A_1 , A_2 ədədləri üçün

$$|F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 25.1. (Qeyri-məxsusi integralın yığılması haqda Koşi meyarı).

" $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt, $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $M > a$ ədədinin olmasıdır ki, $\forall A_1 > M$, $\forall A_2 > M$ olduqda, $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$ olsun.

Misal 1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ qeyri-məxsusi integralını hesablayın.

Həlli. I növ qeyri-məxsusi integralın tərifinə

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= -\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2+x}{1-x} \right|_2^A = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln \left| \frac{2+A}{1-A} \right| - \ln \left| \frac{4}{-1} \right| \right] = -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2+A}{1-A} \right| + \frac{1}{3} \ln 4 = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\frac{2}{A} + 1}{\frac{1}{A} - 1} \right| + \frac{1}{3} \ln 4 = -\frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

Beləliklə, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{2}{3} \ln 2.$

Misal 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ qeyri-məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, istənilən sonlu $[A, B]$ parçasında $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$ funksiyası inteqrallanandır. Tərifə görə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Bu bərabərlikdə $x=0$ aralıq nöqtəsi əvəzinə ədəd oxunun istənilən digər nöqtəsi götürülə bilər. Biz sadəlik üçün $x=0$ nöqtəsi götürdük.

Aydındır ki,

$$(x^2 + x + 1)^2 = \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^2$$

eyniliyində $x + \frac{1}{2} = t$ əvəz etsək,

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Yuxarıda (bax, I fəsil, §8.)

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

qeyri-müəyyən integralını hesablamaq üçün

$$J_m = \frac{t}{2a^2(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)} J_{m-1}$$

rekurent bərabərliyini almışdıq.

J_m üçün alınmış bu bərabərlikdə $m = 2$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ götürək və nəzərə alaq ki,

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Onda

$$\rightarrow \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} =$$

$$= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{t}{2 \cdot \frac{3}{4} \left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)} + \frac{1}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \right] \Big|_B^0 =$$

$$= - \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{2B}{3 \left(B^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)} + \frac{1}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}} \operatorname{arctg} \frac{2B}{\sqrt{3}} \right] =$$

$$= - \frac{4}{3\sqrt{3}} \lim_{B \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{2B}{\sqrt{3}} = - \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(- \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Analoji qayda ilə göstərmək olur ki,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Beləliklə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Misal 3. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ qeyri-məxsusi inteqralını hesablayın.

Həlli. $\frac{1}{x^3 + 1}$, $x \in [0, +\infty)$ funksiyasını elementar rasional kəsrlərin cəmi şəklində göstərək.

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}.$$

Onda tərifi görə,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{dx}{x+1} - \int_0^A \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx \right).$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki integralları hesablayaq.

$$\int_0^A \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^A = \ln(A+1),$$

$$\int_0^A \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx = \int_0^A \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \int_0^A \frac{\frac{3}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{d\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{3}{2} \int_0^A \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) \Big|_0^A - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^A =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(A^2 - A + 1) - \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \sqrt{A^2 - A + 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\
 &= \ln \sqrt{A^2 - A + 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln(A+1) - \ln \sqrt{A^2 - A + 1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{A+1}{\sqrt{A^2 - A + 1}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

Misal 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ qeyri-məxsusi integralım hesablayın.

Həlli. Tərifə görə

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

Əvvəlcə $\int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ müəyyən integralını hesablayaq.

$$x^5 = t \text{ əvəz etsək, } x = t^{\frac{1}{5}}, \quad dx = \frac{1}{5} t^{-\frac{4}{5}} dt, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1;$$

$$x = A \Rightarrow t = A^5 \text{ olar.}$$

Onda

$$\begin{aligned}
 \int_1^{A^5} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} &= \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{1}{t^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{5}}} \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} dt = \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} = \\
 &= \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1}} = -\frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1}} = \\
 &= -\frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{d\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \\
 &= -\frac{1}{5} \ln \left(\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) \Bigg|_1^{A^5} = \\
 &= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) + \\
 &+ \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right).
 \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right).$$

Bu bərabərlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək alırıq:

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} &= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Misal 5. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ qeyri-məxsusi inteqralını

hesablayın.

Həlli. Tərifə görə,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$\int_0^A \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ müəyyən inteqralını hesablayaq.

$\arctg x = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x=0 \Rightarrow t=0$;

$$x=A \Rightarrow t = \arctg A, \quad x = \tg x, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$1+x^2 = 1+\tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ olar.}$$

Ona görə,

$$\int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\operatorname{arctg} A} t \cos t dt = t \cdot \sin t \Big|_0^{\operatorname{arctg} A} + \cos t \Big|_0^{\operatorname{arctg} A} =$$

$$= \operatorname{arctg} A \cdot \sin(\operatorname{arctg} A) + \cos(\operatorname{arctg} A) - 1.$$

Axırıncı bərabərlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçək və nəzərə alaq ki, $A \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} A \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Onda

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} A \cdot \sin(\operatorname{arctg} A) + \cos(\operatorname{arctg} A)] - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Beləliklə, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

Misal 6. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0)$ qeyri-məxsusi

inteqralını hesablayın.

Həlli. Tərifə görə

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-ax} \sin bx dx.$$

Əvvəlcə $J = \int_0^A e^{-ax} \sin bx dx$ müəyyən inteqralını hesablayaq. Bu

müəyyən inteqrala ardıcıl olaraq iki dəfə hissə-hissə inteqrallama metodunu tətbiq etməklə,

$$J = -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{-aA} \cos bA - \frac{a}{a^2 + b^2} e^{-aA} \sin bA + \frac{b}{a^2 + b^2}$$

alarıq. Onda aydındır ki,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} \cos bA = \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} \sin bA = 0$$

olduğundan,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Qeyd 2. Qeyri – məxsusi integrala həndəsi məna vermək olar. $f(x)$, $[a, +\infty)$ aralığında mənfi olmadığıda

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralının həndəsi mənası müəyyən

integralla oxşar olaraq $f(x)$ funksiyanın qrafikinə yaratdığı

$$P = \{(x, y): a \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

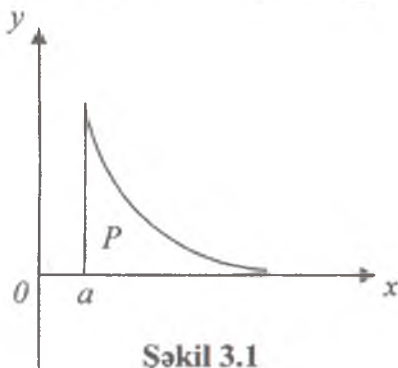
əyrixətli trapesiyanın sahəsinə bərabərdir (bax, şəkil 3.1) Aydındır ki, bu əyrixətli trapesiya qeyri-məhdud çoxluqdur.

Əgər $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integralı yığılırsa, bu əyrixətli

trapesiyanın sahəsi müəyyən ədədlə ifadə olunur.

Məsələn, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ olarsa, $a > 0$ olduqda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_a^A = \frac{1}{2a^2}$$



Şəkil 3.1

olduğundan, uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsi $\frac{l}{2a^2}$ - ədədi ilə

ifadə olunur. $f(x) = \frac{l}{x}$ olarsa,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A + \ln a) = +\infty,$$

olduğundan bu hala uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsi müəyyən ədədlə ifadə olunmur.

Qeyd 3. I növ qeyri – məxsusi inteqralın yığılması üçün $f(x)$ funksiyanın məhdudluğu zəruri deyil. Buna aid aşağıdakı misal göstəriləcəkdir. (bax, §28, qeyd 2)

Misal 7. $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\int_a^A \cos x dx = \sin x \Big|_a^A = \sin A$ və $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A$ limiti

olmadığından, $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ inteqralı dağılır.

Misal 8. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ ($a > 0$) inteqralının yığılmasını araşdırın.

λ - həqiqi ədəddir.

Həlli. Əvvəlcə fərz edək ki, $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A x^{-\lambda} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \text{ olarsa,} \\ +\infty, & \lambda < 1 \text{ olarsa.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ olsun. Onda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty.$$

Beləliklə, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ inteqralı $\lambda > 1$ olduqda yığılır, $\lambda \leq 1$ olduqda dağılır.

I növ qeyri-məxsusi inteqralın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı yığılırsa, c ixtiyari $\mathbb{R}$ qiyməti ədəd

olduqda $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ inteqralı da yığılır və

$$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Xassə 2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralları yığılırsa

$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$ inteqralı da yığılır və

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Bu faktların isbatı müəyyən inteqralın müvafiq xassələrindən və I növ qeyri-məxsusi inteqralın tərifindən alınır.

Xassə 3. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, A]$ aralığında kəsilməzdirsə, $F(x)$ bu aralıqda $f(x)$ -in ibtidai funksiyası

olduqda, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı yalnız və yalnız o halda yığılır ki,

$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ sonlu olsun.

İsbatı. Doğrudan da,

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a)$$

bərabərliyindən

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$$

alırıq. Burada, $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ işarə olunmuşdur.

Xassə 4. (Bərabərsizliyin integrallanması). Əgər $[a, +\infty)$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ bərabərsizliyi ödənirsə və

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi integralları yığılırsa onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (25.3)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Doğrudan da $\forall A > a$ üçün Riman integralının müvafiq xassəsinə görə

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx$$

bərabərsizliyi doğrudur. Sonuncu bərabərsizlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək tələb olunan (25.3) bərabərsizliyini alırıq.

§26. Mənfi olmayan funksiyanın I növ qeyri-məxsusi integralı

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mənfi deyildir. Onda aydındır ki,

$$F(A) := \int_a^A f(x)dx \quad (26.1)$$

funksiyası A -dan asılı artan funksiya.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \text{ olduğundan I növ qeyri-məxsusi}$$

integralın yığılan olması məsələsi $F(A)$ monoton funksiyanın $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limitinin olmasına gətirilir. Ona görə də monoton funksiyanın limitinin varlığı haqqında teoremi $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ limitinə tətbiq etməklə, I növ qeyri-məxsusi

integralın yığılması haqda aşağıdakı lemmaları alırıq.

Lemma 1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ aralığında mənfi deyildir. Onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi

integralının yığılması üçün $\int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, +\infty)$ integrallar çoxluğunun yuxarıdan məhdud olması, zəruri və kifidir.

$$\int_a^A f(x)dx \leq M, \exists M > 0, A \in [a, +\infty),$$

Bu halda, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sup_{a \leq A < +\infty} \int_a^A f(x)dx.$

Qeyd. Bu lemmadan alınır ki, mənfi olmayan $f(x)$ funksiyanın $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi integralının dağılan olması üçün zəruri və kafi şərt (26.1) bərabərliyi ilə təyin olunan $F(A)$ funksiyanın yuxarıdan qeyri-məhdud olmasıdır. Məlumdur ki, bu halda $F(A)$ artan olduğundan,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Teorem 26.1. Tutaq ki, $[a, +\infty)$ aralığında

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (26.2)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralı yığılırsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı da yığılır,

2) Əgər $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı dağılırsa, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralı da dağılır.

İsbatı. (26.2) bərabərsizliyinə görə istənilən $A > a$ üçün

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx \quad (26.3)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Tutaq ki, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi

inteqralı yığılandır. Onda lemma 1-ə görə $A \in [a, +\infty)$ olduqda

$\int_a^A g(x)dx$ inteqrallar çoxluğu yuxarıdan məhduddur və deməli

(26.3) bərabərsizliyinə görə, həm də $\int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, +\infty)$

inteqrallar çoxluğu yuxarıdan məhduddur. Onda lemma 1-ə

gərə $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyr-məxsusi inteqralı yığılır. Teoremin birinci

hissəsi isbat olundu.

İndi tutaq ki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı dağılır. Onda aydındır

ki, teoremin isbat olunmuş birinci hissəsinə görə $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

qeyri-məxsusi inteqralı yığıla bilməz. Çünki, əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı da

yığılardı. Bu isə ola bilməz. Deməli, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi

inteqralı dağılır.

Teorem 26.2. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ $[a, +\infty)$ aralığında müsbət funksiyalardır və sonlu və yaxud sonsuz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty) \quad (26.4)$$

limiti vardır.

Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa və

$0 \leq K < +\infty$ isə, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılırsa və

$0 < K \leq +\infty$ isə $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı da dağılır.

İsbatı. Tutaq ki, (26.4) şərti ödənilir və $0 \leq K < +\infty$.
 $\forall \varepsilon > 0$ götürək. Onda müsbət sonsuzluqda funksiyanın

limitinin tərifinə görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapılacaq ki, $x > \delta > a$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi və yaxud

$$0 < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Axıncı bərabərsizlikdən $f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$ bərabərsizliyini alırıq. Aydındır ki, I növ

qeyri-məxsusi integralın birinci xassəsinə görə əgər $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

integralı yığılırsa, onda $\int_{\delta}^{+\infty} (K + \varepsilon)g(x) dx$ qeyri-məxsusi

integralı da yığılır. Onda teorem 26.1-ə görə $\int_{\delta}^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-

məxsusi integralı və deməli, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integralı da yığılır.

Teoremin birinci hissəsi isbat olundu. Teoremin ikinci hissəsini isbat edək. Tutaq ki, (26.4) şərti $0 < K \leq +\infty$ olduqda ödənilir. $\forall \varepsilon > 0$ götürək. Onda müsbət sonsuzluqda funksiyanın limitinin tərifinə görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapılacaq ki,

$x > \delta > a$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün $\frac{f(x)}{g(x)} > K - \varepsilon$ və

yaxud $f(x) > (K - \varepsilon)g(x)$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir.

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılan olduğundan,

$\int_\delta^{+\infty} g(x) dx$ inteqralı da dağılındır və deməli, həm də

$\int_\delta^{+\infty} (K - \varepsilon) g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır. Onda teorem

26.1-ə görə $\int_\delta^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı və deməli, həm

də $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır. Teorem isbat olundu.

Misal 1. Göstərin ki, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx$, $\alpha \leq 1$, qeyri-məxsusi inteqralı dağılır.

Həlli. $\forall M \in (1, \infty)$ götürək. n -i elə seçək ki, $n\pi > M$ olsun. $A_1 = n\pi$ və $A_2 = 2n\pi$ götürək. Onda

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos^2 x}{x} dx \right| &= \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \cos^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4\pi n} (2\pi n - n\pi) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

eməli, $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ olduqda ixtiyari $M > 1$ üçün elə

$A_1 = \pi > M$ və $A_2 = 2\pi > M$ ədədləri var ki, $\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos^2 x}{x} dx \right| \geq \frac{1}{4}$

bərabərsizliyi ödənir.

Ona görə də Koşi meyarına görə $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ inteqralı dağılır.

$\alpha < 1$ olduqda $\frac{\cos^2 x}{x^\alpha} \geq \frac{\cos^2 x}{x}$ olduğundan, teorem 26.1-ə görə

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx$ inteqralı da dağılır.

Misal 2. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün $\sin^2 x \leq 1$ olduğundan aydındır ki, $1+x^2 \sin^2 x \leq 1+x^2$

bərabərsizliyi doğrudur. Axıncı bərabərsizlikdən $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün

$$\frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2}$$

bərabərsizliyini alarıq. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ inteqralı dağılan

olduğundan, teorem 26.1-ə görə baxılan inteqral dağılır.

§27. I növ qeyri-məxsusi integralın yığılması üçün kafi şərt

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında ixtiyarlı işarəli qiymətlər alır.

Teorem 27.1. (Ümumi müqayisə əlaməti). Fərz edək ki, $a \leq x < +\infty$ aralığında

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (27.1)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralı yığılırsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ integralı dağılırsa, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralı da dağılır.

İsbatı. Bu teoremin isbatı bilavasitə teorem 26.1-dən alınır. Bununla belə, bu teoremi Koşi kriteriyasından istifadə etməklə isbat edək. Fərz edək ki, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi integralı yığılır. Onda Koşi meyarına görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists M(\varepsilon) > a$ var ki, $A_1 > M$, $A_2 > M$ bərabərsizliyin ödəyən istənilən A_1 və A_2 ədədləri üçün

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

olacaqdır. (27.1) bərabərsizliyinə və müəyyən integralın məlum xassəsinə görə

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Sonuncu bərabərsizlikdən alırıq ki,

$$\forall A_1 > M, \forall A_2 > M \text{ olduqda, } \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \text{ Başqa sözlə,}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ inteqralı yığılır.}$$

Qeyd. (27.1) bərabərsizliyinin bütün $[a, +\infty)$ aralığında doğruluğu hökm deyil. Kifayətdir ki, elə $b > a$ ədədi olsun ki, $[b, +\infty)$ aralığında (27.1) bərabərsizliyi doğru olsun.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \text{ bərabərliyinə görə } \int_a^b f(x) dx$$

sonlu kəmiyyəti $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralının yığılmasına və

dağılmasına təsir edə bilməz. Ona görə də $\int_b^{+\infty} f(x) dx$

inteqralının yığılmasından, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralının yığılması alınır.

Teorem 27.1-də $g(x)$ funksiyası olaraq xüsusi halda

$\frac{c}{x^\lambda}$ -funksiyası qəbul etsək, aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə. (Müqayisə əlamətinin xüsusi halı). Fərz edək ki, $0 < a \leq x < +\infty$ aralığında $f(x)$ funksiyası üçün $|f(x)| < \frac{c}{x^\lambda}$ bərabərsizliyi ödənilir, burada $c > 0$ və $\lambda > 1$ müəyyən sabit ədədlərdir. Onda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılır. Əgər $\lambda \leq 1$

olduqda elə $c > 0$ sabiti varsa ki, $0 < a \leq x < +\infty$ aralığında

$|f(x)| \geq \frac{c}{x^2}$ bərabərsizliyi ödənilir, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ dağılır.

Tərif. Əgər $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ inteqralı yığılırsa, onda deyirlər ki,

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı mütləq yığılandır. Bu halda deyirlər ki,

$f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallanandır.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı yığılan, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ inteqralı isə

dağılan olduqda deyirlər ki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı şərti yığılandır.

Aşkar $f(x) \leq |f(x)|$ bərabərsizliyindən alınır ki, mütləq yığılan inteqral şərti yığılandır. Lakin şərti yığılan inteqralın mütləq yığılan olduğunu hökm etmək olmaz.

Bu fakta dair aşağıda misal göstəriləcəkdir (bax, § 28, misal 1).

Mütləq yığılan qeyri-məxsusi inteqralın aşağıdakı sadə xassəsini qeyd edək.

Lemma. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallananırsa, $g(x)$ funksiyası isə bu aralıqda məhduddursa, onda $f(x) \cdot g(x)$ hasili $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallananıdır.

İsbati. Doğurdan da, Riman mənada inteqrallanan iki funksiyanın hasili Riman mənada inteqrallanan olduğundan,

$\forall A > a$ üçün sonlu $[a, A]$ parçasında $\int_a^A f(x)g(x)dx$ inteqralı

vardır və deməli, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralından danışmaq olar.

$g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında məhdud olduğundan elə $c > 0$ sabiti var ki, istənilən $x \in [a, +\infty)$ üçün $|g(x)| \leq c$ bərabərsizliyi və deməli,

$$|f(x)g(x)| \leq c|f(x)|$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Onda $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ inteqralı yığılan

olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx$ inteqralı yığılandır.

Misal 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Əvvəlcə $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ inteqralının yığıldığını göstərək.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^A = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

olduğundan və $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ inteqralı yığıldığı üçün teorem 27.1-ə

görə $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ inteqralı yığılır.

Misal 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\int_0^A e^{-x^2} dx$ integralının (Puasson integralı) elementar funksiyalarla ifadə olunmadığı məlumdur. Əvvəlcə $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ integralının yığılmasını araşdıraraq.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$$

olduğundan, $\int_0^A e^{-x} dx$ -integralı yığılır.

$x > 1$ olduqda $e^{-x^2} < e^{-x}$ olduğundan, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integralı yığılır.

Onda teorem 27.1-dən sonrakı qeydi nəzərə alsaq, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integralı da yığılır. İntegralaltı funksiya cüt olduğundan $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ integralı da yığılır. Ona görə də $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integralı yığılır.

Misal 3. $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Mümkün olan üç hala baxaq. 1) $\alpha > 1$, 2) $\alpha = 1$, 3) $\alpha < 1$.

1) $\alpha > 1$ olsun, onda $\alpha = 1 + 2\delta$, $\delta > 0$ yazı bilərik.

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}} g(x), \quad g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x}$$

qəbul edək. İxtiyari β üçün $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} = 0$. Ona görə də elə

$x_0 > 2$ var ki, $x \geq x_0$ olduqda $0 < g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} < 1$. Sonuncu

bərabərsizlikdən alırıq ki, $x \in [x_0, +\infty]$ olduqda $0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta}}$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda $\delta > 0, x_0 > 2$ olduqda $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}$

inteqralı yığıldığından, $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılır. Ona görə

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\delta \ln^\beta x}$ inteqralı da yığılır.

2) $\alpha = 1$ olsun. Onda, $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$ inteqralında $\ln x = t$

əvəzləməsi aparsaq, $\int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ alırıq.

Məlumdur ki, $\beta > 1$ olduqda sonuncu inteqral yığılır. Deməli $\alpha = 1$ halında $\beta > 1$ olduqda J inteqralı yığılır, $\beta \leq 1$ olduqda dağılır.

3) $\alpha < 1$ olsun. Onda α ədədini $\alpha = 1 - 2\delta$, $\delta > 0$ şəklində

yaza bilərik. $f(x) = \frac{1}{x^{1-\delta}} g(x)$, $g(x) = x^\delta (\ln x)^{-\beta}$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Ona görə də $x \geq x_0 > 2$ olduqda $g(x) > 1$

yaza bilərik. $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\delta}} dx$ ($\delta > 0$) inteqralı dağıldığından,

$|f(x)| > \frac{1}{x^{1-\delta}}$ bərabərsizliyinə əsasən deyə bilərik ki,

$J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ -integralı dağılır. (bax, teorem 27.1-dən çıxan nəticə).

Nəticədə alırıq ki, J -integralı $\alpha > 1$, β ixtiyari olduqda və $\alpha = 1$, $\beta > 1$ olduqda yığılır, qalan hallarda dağılır.

§28. I növ qeyri-məxsusi integral üçün hissə-hissə integrallama düsturu və dəyişənin əvəz edilməsi.

Birinci növ qeyri – məxsusi integrallar üçün hissə - hissə integrallama düsturunu isbat edək.

Teorem 28.1. Fərz edək ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $[a, +\infty)$ aralığında kəsilməz törəmələrə malikdir və $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = L$ sonlu limiti vardır.

Onda,

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx \quad \text{və} \quad \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \quad (28.1)$$

integrallarının birinin yığılması digərinin də yığılmasını təmin edir və

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \quad (28.2)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. İxtiyari $[a, A]$ parçasına baxaq. Bu parçada $u(x)v'(x)$ və $u'(x)v(x)$ funksiyası kəsilməzdir. Ona görə də, müəyyən integral üçün $[a, A]$ parçasında hissə-hissə integrallama düsturuna əsasən

$$\int_a^A u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^A - \int_a^A u'(x)v(x)dx$$

$u(x)v(x)\Big|_a^A = u(A)v(A) - u(a)v(a)$ ifadəsinin $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitini hesablayaq.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} u(x)v(x)\Big|_a^A = L - u(a)v(a).$$

(28.3) bərabərliyindən alırıq ki, (28.1) integrallarından birinin yığılması digərinin yığılmasını təmin edir və (28.2) düsturu doğrudur.

Teorem 28.2. Fərz edək ki,

- 1) $f(x)$, $[a, +\infty)$ yarımxunda kəsilməzdir;
- 2) $x = \varphi(t)$ $[\alpha, +\infty)$ (və yaxud $(-\infty, \alpha]$) aralığında təyin olunmuş kəsilməz diferensiallanan, ciddi monoton funksiyaadır və qiymətləri çoxluğu $[a, +\infty)$ aralığına daxildir;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$.

$$\text{Onda} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{və} \quad \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (\text{yaxud}$$

$$\int_{-\infty}^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt) \quad \text{integrallarının birinin yığılması digərinin}$$

$$\text{yığılmasını təmin edir və} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$(\text{yaxud} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = - \int_{-\infty}^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)$$

İsbatı. Doğrudan, $\forall A > a$ üçün $[a, A]$ parçasında müəyyən integral üçün dəyişənin əvəz olunması teoreminin bütün tələbləri ödənilir. $\varphi(t)$ monoton olduğundan elə $[\alpha, \tau]$ parçası var ki, $t \in [\alpha, \tau]$ olduqda $x = \varphi(t)$ funksiyanın qiymətləri çoxluğu $[a, A]$ parçasını doldurur və $\varphi(\tau) = A$. Ona görə də $\varphi'(t) > 0$ olduqda

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (28.4)$$

$\varphi'(t) < 0$ olduqda

$$\int_a^A f(x)dx = -\int_\tau^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (28.5)$$

bərabərliyi doğrudur.

$x = \varphi(t)$ monoton olduğundan, $\varphi'(t) > 0$ olduqda $A \rightarrow +\infty$ olması $\tau \rightarrow +\infty$ olması ilə ekvivalentdir. $\varphi'(t) < 0$ olduqda $A \rightarrow +\infty$ və $\tau \rightarrow -\infty$ şərtləri ekvivalentdir. Ona görə də (28.4) və (28.5) bərabərliklərində $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

və ya

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

bərabərliklərini alırıq.

Misal 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralının mütləq və

şərti yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan, inteqralaltı funksiyayı

$x = 0$ nöqtəsinə kəsilməz davam etdirmək olar. Alınan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

funksiyası $[0, +\infty)$ aralığında kəsilməz funksiya olduğundan, istənilən $[0, A]$ ($A > 0$) parçasında Riman mənada

inteqrallanandır və deməli, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi

inteqralının mənası vardır. Aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ və

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılır və ya dağılır.

Göstərək ki, bu inteqral yığılandır. Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \left. \frac{\cos x}{x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ bərabərsizliyinin doğruluğundan və $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ qeyri-

məxsusi inteqralının yığılmasından, ümumi müqayisə əlamətinə

görə (bax, teorem 27.1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır. Deməli, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır. İndi göstərək ki, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ inteqralı mütləq yığılan

deyildir, başqa sözlə $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ qeyri-məxsusi inteqralı

dağılandır. Əksini fərz edək. Tutaq ki, bu qeyri-məxsusi inteqral yığılandır. Aşağıdakı aşkar

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bərabərsizliyindən istifadə edək. Aydındır ki, əgər $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılan olarsa, onda ümumi müqayisə əlamətinə görə (bax, teorem 27.1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ və deməli,

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx \text{ qeyri-məxsusi inteqralı yığılardı.}$$

Onda, sonuncu qeyri-məxsusi inteqralın üzərinə yığılan

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \text{ qeyri-məxsusi inteqralını əlavə etsək, alınan}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

qeyri-məxsusi inteqralı da yığılan olardı. Bu qeyri-məxsusi inteqral isə dağılındır. Alınan ziddiyyət onu göstərir ki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ qeyri-məxsusi inteqralı dağılındır. Deməli,}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ inteqralı da dağılındır. Beləliklə, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ qeyri-}$$

məxsusi inteqralı şərti yığılındır.

Misal 2. İsbat edin ki, $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılındır.

Həlli. $x = \sqrt{t}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki qeyri-məxsusi inteqralı iki inteqralın cəmi şəklində göstərək:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ olduğundan, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ inteqralı məxsusi inteqraldır. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama

düsturunu tətbiq edək. $u = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $dv = \sin t dt$ götürək.

$du = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt$, $v = -\cos t$ olar. Onda

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{\sqrt{t}} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$$

$\left| \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ olduğundan və $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılan olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ inteqralı mütləq yığılandır və deməli yığılandır.

Analoji qayda ilə isbat etmək olur ki, $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

inteqralı da yığılandır. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ və $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ inteqralları

riyazi ədəbiyyatlarda Frenel integralları adlanır və difraksiya nəzəriyyəsində rast gəlinir.

Qeyd 1. Yuxarıda baxdığımız $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ Frenel integralı yığılandır, ancaq aydındır ki, $f(x) = \sin x^2$ funksiyasının $x \rightarrow +\infty$ şərtində limiti yoxdur. Bu misal onu göstərir ki, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralının yığılan olmasına əsaslanıb, $x \rightarrow +\infty$ şərtində $f(x)$ -in sıfıra yaxınlaşmasını hökm etmək olmaz.

Misal 3. İsbat edin ki, $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralı yığılandır.

Həlli. $I = \int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralında $x^2 = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ alırıq. Yuxarıda göstərdik ki, bu integral yığılandır. Beləliklə, verilmiş $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralı yığılandır.

Qeyd 2. Aydındır ki, $f(x) = x \cdot \cos x^4$, $x \in [0, +\infty)$ funksiyası məhdud deyildir. Bu misal onu göstərir ki, əgər $f(x)$ funksiyası $x \rightarrow +\infty$ şərtində qeyri-məhdud olduqda da $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ integralı yığıla bilər.

Misal 4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $\sqrt{x} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$x = t^2$, $dx = 2t dt$ və

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+100} \cos t^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{100}{t^2+100}\right) \cos t^2 dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt - 200 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt \end{aligned}$$

olar. Yuxarıda göstərdik ki, $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır. Digər tərəfdən aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt$ qeyri-

məxsusi inteqralı yığılandır. Doğurdan da, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+100}$ qeyri-

məxsusi inteqralı yığılan olduğundan və $g(t) = \cos t^2$ funksiyası məhdud olduğundan, onda §27-də isbat olunan lemmaya əsasən,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt$$

inteqralı yığılandır. Beləliklə, baxılan inteqral yığılandır.

Göstərək ki, bu inteqral mütləq yığılan deyildir, yəni

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$ inteqralı dağılındır. Əksini fərz edək. Tutaq ki,

bu inteqral yığılandır. Aşkar $\cos^2 x \leq |\cos x|$ bərabərsizliyindən istifadə edək. $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün

$$\frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} \leq \frac{\sqrt{x}}{x+100} |\cos x|$$

bərabərsizliyi doğru olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə

görə $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ inteqralı və deməli $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

inteqralı yığıldı. Sonuncu inteqralı iki inteqralın cəmi şəklində yazaq:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx.$$

Aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$ inteqralı dağılındır. Ona görə

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ inteqralı yığıla bilməz. Bu isə onu göstərir ki,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$ inteqralı dağılındır. Beləliklə, baxılan inteqral

mütləq yığılan deyildir, şərti yığılındır.

§29. I növ qeyri-məxsusi inteqral üçün Dirixle və Abel əlamətləri

Teorem 29.1. (Dirixle əlaməti). Fərz edək ki, $[a, +\infty)$ aralığında

1) $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir və istənilən sonlu $[a, A]$ ($A > a$) parçasında məhdud ibtidai funksiyası vardır.

2) $g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında kəsilməz diferensiaslanandır, azalandır və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşır: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (29.1)$$

qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır.

İsbatı. Teoremin şərtinə görə $f(x) \cdot g(x)$ hasilı kəsilməzdir və deməli bu funksiya istənilən $[a, A]$ ($A > a$) parçasında Riman mənada inteqrallandır. Ona görə də $f(x) \cdot g(x)$ funksiyanın qeyri-məxsusi inteqralından danışmaq olar.

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiya baxaq. Teoremin şərtinə görə $F(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında məhduddur, yəni elə $M > 0$ ədədi var ki, $\forall x \in [a, +\infty)$ üçün $|F(x)| \leq M$ bərabərsizliyi ödənilir.

$\int_a^A f(x)g(x)dx$ ($a < A < +\infty$) inteqralına hissə - hissə inteqrallama düsturuna tətbiq edək

$$\begin{aligned} \int_a^A f(x)g(x)dx &= \int_a^A g(x)dF(x) = \\ &= F(A)g(A) - F(a)g(a) - \int_a^A F(x)g'(x)dx. \end{aligned} \quad (29.2)$$

$g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında azalan olduğundan $[a, +\infty)$ aralığında $g'(x) \leq 0$ bərabərsizliyi doğrudur. Onda

$$\begin{aligned} \int_a^A |F(x)g'(x)|dx &\leq M \int_a^A |g'(x)|dx = -M \int_a^A g'(x)dx = \\ &= -M(g(A) - g(a)) = M(g(a) - g(A)) \leq Mg(a). \end{aligned}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Çünki, $g(x)$ azalan və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşmasından alınırsak ki, $g(x) \geq 0$ olmalıdır. Deməli, xüsusi halda $g(A) \geq 0$.

Beləliklə, $\int_a^A |F(x)g'(x)| dx$ inteqralları $\forall A > a$ üçün məhduddur.

Onda aydındır ki, §26, lemma 1-ə görə $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x) dx$ inteqralı mütləq yığılandır və deməli, yığılandır. Ona görə, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A F(x)g'(x) dx$ limiti var və sonludur.

$|F(A)| \leq M$ olduğundan və $A \rightarrow +\infty$ şərtində $g(A) \rightarrow 0$ olduğundan, $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)g(A) = 0$.

Beləliklə, (29.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hər iki toplananın $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limiti vardır. Deməli (29.1) inteqralı yığılandır. Teorem isbat olundu.

Teorem 29.2. (Abel əlaməti). Tutaq ki, $[a, +\infty)$ aralığında

1) $f(x)$ kəsilməzdir və $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır

2) $g(x)$ kəsilməz differensiallanandır, məhduddur və monotondur.

Onda $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ inteqralı yığılandır.

İsbatı. Göstərək ki, Abel əlaməti Dirixle əlamətindən

alınırsak. Aydındır ki, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ və $\int_a^{+\infty} f(x)[-g(x)] dx$

inteqralları eyni zamanda yığılır və yaxud dağılır. $g(x)$ funksiyası monoton olduğundan, $g(x)$ və $-g(x)$ funksiyalarından biri azalandır. Müəyyənlik üçün tutaq ki, $g(x)$ azalandır. $g(x)$ monoton azalan və məhdud olduğundan onun sonlu limiti vardır: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = c$ olsun. Onda aydındır ki,

$g(x) - c$ fərqi $x \rightarrow +\infty$ şərtində monoton azalandır və sıfıra yaxınlaşır. $f(x) \cdot g(x)$ hasilini aşağıdakı şəkildə göstərək

$$f(x) \cdot g(x) = f(x)[g(x) - c] + cf(x) \quad (29.3)$$

Teoremin birinci şərtinə görə $\int_a^{+\infty} c f(x) dx$ inteqralı yığılandır.

Teoremin birinci şərtindən alınır ki, $x \geq a$ olduqda

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ inteqralları məhduddur. Doğurdan da,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

sonlu limitin varlığından çıxır ki, $F(x)$ funksiyası $+\infty$ sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin müəyyən $u(+\infty) = \{x : x > b\}$ ətrafında məhduddur. $[a, b]$ parçasında $F(x)$ kəsilməz olduğundan məhduddur. $F(x)$, $f(x)$ -in $[a, +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyadır. Deməli, $f(x)$ -in $[a, +\infty)$ aralığında məhdud ibtidai

funksiyası vardır. Beləliklə, $\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - c] dx$ inteqralı üçün

Dirixle əlamətinin bütün şərtləri ödənilir. Onda (29.3)

bərabərliyinə əsasən hökm edirik ki, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ inteqralı

yığılandır. Teorem isbat olundu.

Misal 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ ($\alpha > 0$)- inteqralının şərti və mütləq

yığılmasını araşdırın.

Həlli. $f(x) = \cos x$ olsun. Aydındır ki, bu funksiyanın $[1, +\infty)$ aralığında $F(x) = \sin x$ məhdud ibtidai funksiyası vardır. $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ götürək. Aydındır ki, bu funksiya $\alpha > 0$ olduqda monoton azalandır və $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Onda baxılan bu qeyri-məxsusi inteqral Dirixle əlamətinə görə yığılandır.

Misal 2. $J = \int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos(e^{2x}) dx$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $e^{2x} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x = \frac{1}{2} \ln t$,

$dx = \frac{dt}{2t}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = +\infty \Rightarrow t = +\infty$ olar. Onda

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos(e^{2x}) dx = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2} \ln t \right) \cos t \frac{dt}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \cos t dt. \end{aligned}$$

$\cos t$ funksiyasının $[1, +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyası

məhduddur: $|\sin x| \leq 1$. $\frac{1}{\sqrt{t}}$ və $\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ funksiyaları $t \rightarrow +\infty$

şərtində sıfıra yaxınlaşır. Dirixle əlamətinə görə bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki inteqral yığılır. Ona görə də baxılan inteqral yığılır. Mütləq yığılmanı araşdıraraq.

$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right)$ olsun. Onda

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} |\cos t| \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \varphi(t) |\cos t| dt \text{ olar.}$$

$$t \geq 1 \quad \text{olduqda} \quad \varphi(t) \geq \frac{1}{2}t, \quad |\cos t| \geq \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\text{olduğundan, } \varphi(t) |\cos t| \geq \frac{1 + \cos 2t}{4t} \text{ olar.}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos 2t}{4t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt$$

$$\text{Aydındır ki, } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt \text{ -integralı yığılır, } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{4t} \text{ integralı isə}$$

$$\text{dağılır. Ona görə də } \int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos 2t}{4t} dt \text{ integralı dağılır.}$$

Deməli, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} |\cos t| \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right) dt$ integralı dağılır. Beləliklə, baxılan integral yalnız şərti yığılandır.

§ 30. II növ qeyri-məxsusi integrallar.

Əvvəlki paraqraflarda integrallama aralığı sonsuz olduqda qeyri-məxsusi integral anlayışı təyin etdik. İndi isə integrallama aralığında funksiyanın qeyri-məhdud olduğu hala baxaq.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında təyin olunub. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında qeyri-məhdud, bu aralıqda yerləşən ixtiyari $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) parçasında məhdud-dursa, onda b - nöqtəsinə $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsi deyəcəyik.

Tutaq ki, hər bir $[a, b - \varepsilon] \subset [a, b)$ parçasında $f(x)$ integrallanıdır. Onda $[a, b - \varepsilon]$ parçasında aşağıdakı bərabərliklə ε -dan asılı funksiya təyin edək.

$$F(\varepsilon) := \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Tərif. Əgər $F(\varepsilon)$ funksiyanın $\varepsilon = 0$ nöqtəsində sonlu sağ limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyanın $[a, b]$ parçasında II növ qeyri-məxsusi inteqralı deyilir və simvolik olaraq

$$\int_a^b f(x) dx \quad (30.1)$$

kimi işarə olunur.

Beləliklə,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (30.2)$$

Bu halda deyirlər ki, (30.1) qeyri – məxsusi inteqralı yığılandır və $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında qeyri – məxsusi mənada inteqrallanandır. Əgər $F(\varepsilon)$ funksiyanın sonlu sağ limiti yoxdursa, onda deyirlər ki, (30.1) qeyri – məxsusi inteqralı dağılındır.

a -nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda, II növ qeyri – məxsusi inteqral

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \rightarrow 0+} \int_{a+\xi}^b f(x) dx$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər $[a, b]$ parçasının sonlu sayda daxili nöqtəsi $f(x)$ funksiyanın məxsusi nöqtəsidirsə, onda bu halda da II növ qeyri – məxsusi inteqral anlayışı təyin etmək olar.

Sadəlik üçün tutaq ki, $[a, b]$ parçasının a və b uc nöqtələri və $c \in (a, b)$ daxili nöqtəsi $f(x)$ funksiyanın məxsusi nöqtələridir. Onda

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[\int_{a+\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_2} f(x)dx + \lim_{\substack{\varepsilon_3 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_4 \rightarrow 0}} \int_{c+\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} f(x)dx \right].$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ε_i ($i = \overline{1,4}$) dəyişənlərinin biri digərindən asılı olmayaraq sıfıra yaxınlaşır.

Müəyyənlik üçün (30.2) bərabərliyi ilə təyin olunan II növ qeyri – məxsusi inteqralları öyrənəcəyik.

Misal 1. Göstərin ki, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyasının

$[0, 1)$ yarımintervalında qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi bu funksiya üçün məxsusi nöqtədir. Onda, tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında təyin olunmuşdur hər bir $[a, b-\varepsilon]$ parçasında kəsilməzdir və $x = b$ $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsidir. Əgər $f(x)$ -in $[a, b)$ aralığında $F(x)$ ibtidai funksiyası varsa, onda

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = F(b-\varepsilon) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon}. \quad (30.3)$$

Beləliklə, b nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi inteqralın varlığı, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b-\varepsilon)$ limitinin sonlu olmasına ekvivalentdir. Əgər sonuncu limit varsa, onda təbii olaraq bu limit $F(x)$ ibtidai funksiyasının $x = b$ nöqtəsində

$F(b)$ qiyməti kimi qəbul olunur və bununla da, $F(x)$ funksiyanın bütün $[a, b]$ parçasında kəsilməzliyi təmin olunur. Əgər (30.3) bərabərliyində $\varepsilon \rightarrow 0 +$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a) \quad (30.4)$$

alırıq. (30.4) düsturuna b məxsusi nöqtə olduqda II növ qeyri-məxsusi integral üçün Nyuton-Leybnis düsturu deyilir.

(30.4) düsturunda nəzərdə tutulur ki, $f(x)$ funksiyası hər bir $[a, b - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b - a$) parçasında Riman mənada integrallanandır. (a, b) aralığının daxili nöqtəsində $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsi varsa, onda, ümumiyyətlə desək, (30.4)

düsturu doğru olmaya bilər. Məsələn, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralında $x = 0$

nöqtəsi integralaltı $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyanın məxsusi nöqtəsidir

və $x = 0$ nöqtəsində $f(x)$ ∞ -a çevrilir. Əgər $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralına

formal olaraq Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etsək, onda

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ alırıq. Digər tərəfdən $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralını

aşağıdakı kimi iki integralın cəmi şəklində yazsaq,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2},$$

bilavasitə tərifdən istifadə etməklə, asanlıqla inanmaq olar ki,

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ və $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ integrallarının hər ikisi dağılındır. Doğurdan da,

$$\int_0^l \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^l \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty,$$

$$\int_l^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \int_l^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_l^{-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) = -\infty.$$

Beləliklə, $\int_{-l}^l \frac{dx}{x^2}$ integralına Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etmək olmaz. Bununla əlaqədar olaraq, ümumiləşmiş ibtidai funksiya anlayışı verək.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla müəyyən bir $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Əgər $[a, b]$ parçasında kəsilməz elə $F(x)$ funksiyası varsa ki, həmin sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir, onda $F(x)$ -ə $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında ümumiləşmiş (genişlənmiş), ibtidai funksiyası deyilir.

Qeyd. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda ibtidai funksiya üçün verilən bu “yeni” tərif, “əvvəlki” təriflə üst-üstə düşür. Doğrudan da, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də kəsilməz olarsa və $F(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $\forall x \in [a, b]$ üçün $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi doğrudur. $F(x)$ -in kəsilməzliyi isə onun diferensiallanmasıdan alınır.

Asanlıqla inanmaq olar ki, $F(x) = |x|$ funksiyası $f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiyasının ümumiləşmiş ibtidai funksiyasıdır. Həqiqətən, $F(x)$ $[-1, 1]$ parçasında kəsilməzdir və $x \neq 0$ olduqda $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir.

Məlumdur ki, bu funksiyanın “əvvəlki” tərif mənada ibtidai funksiyası yoxdur. Bununla belə bu funksiya $[-1,1]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz olduğundan integrallanandır.

Ümumiləşmiş ibtidai funksiya haqda aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 30.1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda $f(x)$ funksiyanın $[a,b]$ parçasında $F(x)$ ümumiləşmiş ibtidai funksiyası vardır və bu parçada

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (30.5)$$

Nyuton-Leybnis düsturu doğrudur.

Teorem 30.1-dən aydın olur ki, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralında Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etməyin mümkün olmaması, formal olaraq tapılmış $F(x) = \frac{1}{x}$ ibtidai funksiyanın $[-1,1]$ parçasında kəsilməzlik şərtinin pozulması ilə əlaqədardır. Başqa misala müraciət edək.

$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralında $x = 0$ nöqtəsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir. Bu funksiyanın $[-1, 8]$ parçasında formal olaraq ibtidai funksiyası $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ funksiyasıdır və $F(x)$ $[-1, 8]$ parçasında kəsilməzdir. Ona görə də bu qeyri-məxsusi integral üçün (30.5) düsturu doğrudur:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^8 = \frac{3}{2} \left(8^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{9}{2}.$$

II növ qeyri-məxsusi integral üçün hissə-hissə integrallama metodu və dəyişənin əvəz edilməsi metodu haqda aşağıdakı teoremləri qeyd edək.

Teorem 30.2. Tutaq ki, $u = u(x)$ və $v = v(x)$ funksiyaları $[a, b]$ aralığında kəsilməz diferensiallanandır. Onda

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (30.6)$$

bərabərliyi doğrudur. (30.6) bərabərliyindəki ifadələrdən ixtiyari ikisinin varlığından digərinin də varlığı çıxır.

Teorem 30.3. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ aralığında kəsilməzdir və $\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ aralığında kəsilməz diferensiallanandır, belə ki, $\alpha \leq t < \beta$ olduqda $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < b = \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$ münasibəti

ödənilir.

Onda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (30.7)$$

Misal 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ qeyri məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi integralaltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir. $x = \sin t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$. (30.6) düsturuna görə

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Misal 3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ integralının yığılmasını

müəyyənləşdirin və onu hesablayın.

Həlli. (30.6) hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edək. $u = \ln(\sin x)$, $dx = dv$ qəbul edək. Onda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = x \ln(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Burada,

$$\begin{aligned} x \ln(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} x \ln(\sin x) \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \cdot \ln \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0$ olduğundan,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$ integralı məxsusi integraldır. Beləliklə, baxılan

integral yığılandır. İndi isə verilmiş qeyri məxsusi integralı hesablayaq. $x = 2t$ əvəzləməsi apararaq. $dx = 2 dt$;

$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Onda (30.7) düsturuna görə

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln(\sin t) + \ln(\cos t)) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt.
 \end{aligned}$$

Sonuncu integralda $t = \frac{\pi}{2} - z$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$dt = -dz; t = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4}. \text{ Deməli,}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right) dz = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz.$$

Beləliklə,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J$$

Buradan,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Misal 4. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, $\lambda > 0$ integralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. İnteqralaltı ifadədən görünür ki, $x = b$ məxsusi nöqtədir. Aydındır ki, inteqralaltı funksiya istənilən $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) parçasında Riman mənada inteqrallanandır.

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda} - \varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \text{ olduqda,} \\ \ln(b-a) - \ln \varepsilon, & \lambda = 1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

$0 < \lambda < 1$ olduqda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

sonludur.

$\lambda \geq 1$ olduqda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

sonlu limiti yoxdur. Ona görə də baxılan inteqral $0 < \lambda < 1$ olduqda yığılır. $\lambda \geq 1$ olduqda dağılır.

Yuxarıda qeyd etdik ki, b nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda II növ qeyri-məxsusi inteqralın yığılması məsələsi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b - \varepsilon)$ sonlu limitinin olmasına ekvivalentdir. Ona görə də bu halda funksiya limitinin varlığı üçün Koşi meyarından II növ qeyri-məxsusi inteqralın varlığı üçün Koşi meyarını ala bilərik.

Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b)$ yarımintervalmda təyin olunmuşdur, b - onun məxsusi nöqtəsidir.

Teorem 30.4. $\int_a^b f(x)dx$ ikinci növ qeyri-məxsusi

inteqralın yığılması üçün $\forall \varepsilon > 0$ verildikdə $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari α', α'' ədədləri üçün

$$\left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyini təmin edən $\delta > 0$ ədədinin varlığı zəruri və kafidir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi inteqralı yığılır. Onda $F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x) dx$ bərabərliyi ilə təyin olunan $F(\alpha)$ funksiyası üçün $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha)$ -var. Limitin varlığı haqda Koşi meyarına görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən α', α'' üçün

$$|F(\alpha'') - F(\alpha')| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Beləliklə alırıq ki,

$$|F(\alpha') - F(\alpha'')| = \left| \int_a^{b-\alpha'} f(x) dx - \int_a^{b-\alpha''} f(x) dx \right| = \left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Kafilik. Fərz edək ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$ olduqda

$$\left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$\begin{aligned} \left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^{b-\alpha'} f(x) dx - \int_a^{b-\alpha''} f(x) dx \right| = \\ &= |F(\alpha') - F(\alpha'')| < \varepsilon \end{aligned}$$

Koşi meyarına görə sonlu $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha)$ limiti vardır. Ona

görə $\int_a^b f(x)dx$ integralı yığılır.

Misal 5. $\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$ qeyri-məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. $x = a$ nöqtəsində integralaltı funksiya sonsuzluğa çevrilir. $x = a$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. Verilmiş integralı aşağıdakı kimi iki integralın cəmi şəklində yazaq:

$$\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} + \int_a^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$x = a$ nöqtəsi bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki integral üçün məxsusi nöqtədir. Onda tərifi görə

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{d(x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left. \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_0^{a-\varepsilon} = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\left((a-\varepsilon)^2 - a^2 \right)^{\frac{1}{3}} - (-a^2)^{\frac{1}{3}} \right] = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-2a\varepsilon + \varepsilon^2 + \sqrt[3]{a^2} \right) = 3\sqrt[3]{a^2}; \\ \int_a^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^{3a} \frac{d(x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left. (x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right|_{a+\varepsilon}^{3a} = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[(9a^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} - ((a+\varepsilon)^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right] = \end{aligned}$$

$$= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[(8a^2)^{\frac{1}{3}} - (2a\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{3}} \right] = 3\sqrt[3]{8a^2} = 6\sqrt[3]{a^2}.$$

Beləliklə,

$$\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{a^2} + 6\sqrt[3]{a^2} = 9\sqrt[3]{a^2}.$$

Misal 6. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ qeyri-məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. $x = 1$ və $x = 3$ nöqtələri integralaltı funksiyanın məxsusi nöqtələridir. Bu integralı aşağıdakı kimi iki integralın cəmi şəklində göstərək:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

Qeyd edək ki, bu bərabərlikdə $x = 2$ nöqtəsi əvəzinə $[1, 3]$ parçasına daxil olan istənilən nöqtə götürülə bilər. Hər iki integralı hesablayaq.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [0 - \arcsin(\varepsilon - 1)] = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(x-2) \Big|_2^{3-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Misal 7. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ qeyri-məxsusi inteqralını hesablayın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi inteqraltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir, çünki $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = +\infty$. Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\sqrt{\ln 2} - \sqrt{\ln(1+\varepsilon)}) = 2\sqrt{\ln 2}. \end{aligned}$$

§31. Mənfi olmayan funksiyanın II növ qeyri-məxsusi inteqralı

Teorem 31.1. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b)$ yarımintervalında mənfi olmayan funksiya. Onda $\int_a^b f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralının yığılması üçün zəruri və kafi şərt, $\eta \in [a, b)$ olduqda $\int_a^\eta f(x)dx$ inteqrallar çoxluğunun yuxarıdan məhdud olmasıdır:

$$\int_a^\eta f(x)dx \leq M, \exists M > 0, \forall \eta \in [a, b)$$

İsbatı. $\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ olsun. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu funksiya $[a, b)$ aralığında monoton artandır. Digər tərəfdən aydındır ki, $\int_a^b f(x)dx$ II növ qeyri-məxsusi inteqralının varlığı, tərifə əsasən

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta) = \int_a^b f(x) dx$$

sonlu limitinin varlığı ilə ekvivalentdir. Monoton funksiyanın sonlu limitinin varlığı haqqında məlum teoremə görə isə sonuncu limitin sonlu olması üçün zəruri və kafi şərt $\varphi(\eta)$ funksiyanın yuxarıdan məhdud olmasıdır.

Qeyd. Əgər $\lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta)$ sonlu limiti yoxdursa onda bu limit $+\infty$ -a bərabərdir ($\varphi(\eta)$ yuxarıdan qeyri-məhdud olduqda). Bu halda $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ götürülür.

Teorem 31.2. (müqayisə əlaməti). Tutaq ki, $[a, b]$ aralığında

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad (31.1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Onda:

1) Əgər $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa, $\int_a^b g(x) dx$ inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^b g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılırsa, $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı da dağılır.

İsbatı. (31.1) bərabərsizliyinə görə $\forall \eta \in [a, b]$ üçün

$$\int_a^\eta g(x) dx \leq \int_a^\eta f(x) dx$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əgər $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılırsa, onda teorem 31.1-ə görə $\int_a^\eta f(x)dx$ inteqralları $\forall \eta \in [a, b)$ üçün yuxarıdan məhduddur və deməli, həm də $\int_a^\eta g(x)dx$ inteqralı $\forall \eta \in [a, b)$ üçün məhduddur. Onda teorem 31.1-ə görə $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılandır.

Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılırsa, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığıla bilməz. Çünki, əks halda teoremin isbat olunmuş birinci hissəsinə görə $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılardı. Bu isə ola bilməz.

Deməli, $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılındır. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı mühüm nəticə alınır.

Nəticə. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b)$ aralığında mənfə olmayan funksiyalardır və $\forall x \in [a, b)$ üçün $g(x) > 0$ və sonlu və yaxud sonsuz

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

limiti vardır.

Onda

1) Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılırsa və $0 \leq K < \infty$ isə,

$\int_a^b f(x)dx$ inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılırsa və $0 < K \leq \infty$ isə,

$\int_a^b f(x)dx$ inteqralı da dağılır.

Xüsusi halda, əgər

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

olarsa, yəni $x \rightarrow b$ şərti daxilində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları

ekvivalent olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ və $\int_a^b g(x)dx$ inteqralları eyni

zamanda yığılır və yaxud dağılır.

Praktikada II növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırarkən bir çox hallarda inteqralaltı funksiyayı

$$\frac{1}{(x-a)^\lambda}, \quad \frac{1}{(b-x)^\lambda}, \quad \frac{1}{x^\lambda}$$

funksiyaları ilə müqayisə etmək daha münasibdir. Çünki, bu funksiyaların λ -nin hansı qiymətlərində yığılması və dağılması məlumdur. Bununla əlaqədar aşağıdakı əlaməti qeyd edək.

Müqayisə əlamətinin xüsusi halı: Tutaq ki, x -in b -yə kifayət qədər yaxın qiymətlərində $f(x)$ funksiyası aşağıdakı şəkildə göstərilmişdir:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Onda:

1) Əgər $\lambda < 1$ və $g(x) \leq c < +\infty$ olarsa, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılır.

2) Əgər $\lambda \geq 1$ və $g(x) \geq c > 0$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı dağılır.

Misal 1. Göstərin ki, $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ inteqralı dağılındır.

Həlli. $x = 0$ nöqtəsi inteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir. $(0, 1]$ yarımintervalında

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x - \sin x}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ inteqralı dağılan olduğundan,

müqayisə əlamətinə görə $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ inteqralı da dağılındır.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ aralığında təyin olunmuşdur və b nöqtəsi məxsusi nöqtədir. Əgər

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

ikinci növ qeyri – məxsusi inteqralı yığılırsa, onda deyirlər ki,

$\int_a^b f(x)dx$ qeyri məxsusi inteqralı mütləq yığılındır.

Əgər $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılan, $\int_a^b |f(x)|dx$ inteqralı isə

dağılırsa, onda deyirlər ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı şərti yığılındır.

İndi tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ yarımintervalında ixtiyari işarəli qiymətlər alır.

Teorem 31.3. (Ümumi müqayisə əlaməti). Tutaq ki, $[a, b]$ aralığından götürülmüş istənilən x üçün

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ bərabərsizliyi ödənilir və } \int_a^b g(x) dx \text{ qeyri - məxsusi}$$

inteqralı yığılır. Onda $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı da yığılır.

Bu teoremdən alımr ki, əgər $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı mütləq yığılandırsa, onda yığılındır.

Misal 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi inteqralaltı $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir: $x \rightarrow 1$ şərti daxilində $\ln x = \ln[1 + (x - 1)] \sim (x - 1)$. Doğrudan da Lopital qaydasına

$$\text{görə } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1. \text{ Aydınır ki, } x \rightarrow 1 \text{ şərti daxilində}$$

$$\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x - 1}.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x - 1}$ inteqralı dağılan olduğundan, müqayisə

əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən, $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ inteqralı dağılındır.

Misal 3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\infty$ olduğundan, $x = 0$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir.

$x = 1$ nöqtəsi isə məxsusi nöqtə deyildir. Doğrudan da, $x \rightarrow 1-0$ şərti daxilində $\ln x \sim (x-1)$ olduğundan,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{\ln x}{1-x^2}$ funksiyasını $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiyası ilə müqayisə edək.

$$\frac{\frac{\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^\lambda \ln x}{1-x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\lambda \ln x}{1-x^2}$ tapaq. Aydındır ki, $0 < \lambda < 1$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\lambda \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (1-x^2) = 1. \text{ Ona görə } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\lambda \ln x}{1-x^2} = 0.$$

$0 < \lambda < 1$ olduqda $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ yığılan olduğundan, müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən baxılan inteqral yığılandır.

Misal 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\sin x) = -\infty$ olduğundan, $x = 0$ nöqtəsi $\ln(\sin x)$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir. İnteqralaltı funksiyanı $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiyası ilə müqayisə edək.

$\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\lambda}}$ nisbətinin $x \rightarrow 0+$ şərtində limitini tapaq. Lopital

qaydasına görə

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{-\lambda x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}}} = -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\lambda+1} \cdot \cos x}{\sin x}.$$

Sonuncu limitə Lopital qaydasını təkrar tətbiq etsək,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\lambda+1} \cdot \cos x}{\sin x} &= -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\lambda+1)x^\lambda \cos x - x^{\lambda+1} \sin x}{\cos x} = \\ &= -\frac{\lambda+1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\lambda + \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\lambda+1} \operatorname{tg} x = 0. \end{aligned}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ inteqralı $0 < \lambda < 1$ olduqda yığılan olduğundan, müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə baxılan inteqral

yığılandır. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ inteqralı riyazi ədəbiyyatlarda Eyler

inteqralı adlanır. Bu misal §30-da bilavasitə tərifdən istifadə etməklə hesablanmışdır. Burada, məqsəd müqayisə əlamətinin tətbiqini göstərməkdir.

Misal 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. Göstərək ki, $x = 0$ nöqtəsi inteqralaltı $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir.

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ limitini hesablayaq. $x \rightarrow 0$ şərtində $\sin x \sim x$

olduğundan, $\ln(\sin x) \sim \ln x$. Ona görə $J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ limitini

hesablamaq kifayətdir.

$J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{x}$ şəklində yazaq. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x = 0$

olduğundan, Lopital qaydasını tətbiq etməklə,

$$J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x} \cdot \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ = \frac{1}{2} J + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

alırıq. Buradan, $J = +\infty$ alırıq. Beləliklə, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Deməli, $x=0$ nöqtəsi həqiqətən, $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ funksiyasının

məxsusi nöqtəsidir. Bu funksiyanı $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiyası ilə müqayisə edək.

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Tutaq ki, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. $x \rightarrow 0+$ şərtində $\frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}}$ nisbətinin

limitini tapmaq üçün Lopital qaydasından istifadə edək.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(x^{\frac{1}{2}-\lambda}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x^{-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{x} = 0.$$

$\frac{1}{2} < \lambda < 1$ olduqda $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ integralı yığılan olduğundan, baxılan integral müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə yığılandır.

Misal 6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Integralaltı $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ funksiyası $(0,1]$ aralığında müsbətdir və $x=0$ nöqtəsində təyin olunmamışdır. $x \rightarrow 0$ şərtində $\sin x \sim x$ olduğundan $\sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$ alırıq.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Deməli, $x=0$ nöqtəsi $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsidir. Müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ yığılan olduğundan baxılan integral yığılandır.

Misal 7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $x=0$ nöqtəsi integralaltı $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir. Doğurdan da, $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$

olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = \infty$. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ funksiyası ε kifayət qədər kiçik müsbət ədəd olduqda $\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$ parçasında kəsilməzdir.

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| - \ln |\ln \varepsilon|$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln |\ln \varepsilon| = -\infty$ olduğundan, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$. Ona görə baxılan

integral dağılındır.

Misal 8. $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = +\infty$ olduğundan $x = 1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir və $\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ədəd olduqda $\frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$ funksiyası $[1 + \varepsilon, 2]$ parçasında kəsilməzdir. Tərifə görə,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= 2 \left(\sqrt{\ln 2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\ln(1+\varepsilon)} \right) = 2\sqrt{\ln 2} \end{aligned}$$

Deməli, baxılan integral yığılındır.

Misal 9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \cos x) = 0$ olduğundan, $x = 0$ nöqtəsi

integralaltı $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x}$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{e^x - \cos x} = +\infty. \quad x \rightarrow 0 \text{ şərti daxilində } e^x \sim 1 + x \text{ və}$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \text{ olduğundan, asanlıqla inanmaq olar ki,}$$

$$e^x - \cos x \text{ fərqi müsbətdir və } x + \frac{x^2}{2} \text{ funksiyası ilə}$$

$$\text{ekvivalentdir, yəni } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - \cos x}{x + \frac{x^2}{2}} = 1. \text{ Onda aydındır ki,}$$

$$x \rightarrow 0+ \text{ şərti daxilində } f(x) \sim \frac{1}{x + \frac{x^2}{2}} \sim \frac{1}{x}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ integralı dağılan olduğundan, müqayisə əlamətindən}$$

çıxan nəticəyə əsasən baxılan integral dağılındır.

Misal 10. $\int_0^1 \sqrt[4]{\frac{x}{1-x^4}} dx$ integralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt[4]{\frac{x}{1-x^4}} = +\infty. \text{ Integralaltı funksiyayı } g(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

funksiyası ilə müqayisə edək.

Integralaltı funksiyayı aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$\sqrt[4]{\frac{x}{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}}{(1-x)^{\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x}} \cdot \frac{(1-x)^{\lambda}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \text{ olduğundan}$$

və $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ qeyri-məxsusi integralı yığılan olduğundan,

müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən baxılan qeyri-məxsusi integral yığılandır.

Misal 11. İsbat edin ki, $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ integralı mütləq

yığılandır.

Həlli. $x = 0$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. $0 < x \leq 1$ olduqda

$$0 \leq \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralı yığılan olduğundan,

müqayisə əlamətinə görə $\int_0^1 \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right| dx$ integralı yığılandır və

deməli, baxılan integral mütləq yığılandır.

Misal 12. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ - integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Burada həm integrallama oblastı $(0, +\infty)$ qeyri – məhduddur, həm də bu oblastda integralaltı funksiya qeyri – məhduddur. $a > 0$ olsun. Onda

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Sağ tərəfdəki integrallardan birincisi $\alpha \geq 1$ olduqda, ikincisi

$\alpha < 1$ olduqda dağılır. Ona görə də $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ - integralı α - nın

ixtiyari qiymətində dağılır.

İntegralaltı funksiya üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər qoymaqla ikinci növ qeyri-məxsusi integralı birinci növ qeyri-məxsusi integrala gətirmək olur. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ aralığında kəsilməzdir və b məxsusi nöqtədir.

Onda $\int_a^{b-\alpha} f(x)dx$, $\alpha > 0$ integralında $x = b - \frac{1}{t}$

($x \in [a, b - \alpha]$) əvəzləməsi aparsaq,

$$dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{b-a} \leq t \leq \frac{1}{\alpha}$$

olar .

Onda yeni dəyişənə keçsək,

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt \quad (31.2)$$

bərabərliyini yazı bilərik. Tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx$ integralı yığılar.

Onda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_a^{b-\alpha} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

$\alpha \rightarrow 0+$ olduqda $\frac{1}{\alpha} \rightarrow +\infty$ və (31.2) bərabərliyindən görünür ki,

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt.$$

inteqralı da yığılır və

$$\lim_{\frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt.$$

Aydın ki, $\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt$ qeyri-məxsusi inteqralının

yığılmasından da $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralının yığılması

alınır. Beləliklə, $\int_a^b f(x) dx$ və $\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt$

inteqrallarından birinin yığılmasından digərinin yığılması və bu inteqralların bərabərliyi alınır.

Misal 13. $\int_{1 \sqrt{x^2-1}}^{+\infty} dx$ I növ qeyri-məxsusi inteqralı

hesablayın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. $x = \frac{1}{t}$ əvəzləməsi

aparaq. $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = +\infty \Rightarrow t = 0$; $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Onda

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_1^0 \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ inteqralı ikinci növ qeyri-məxsusi inteqraldır. $t=1$

nöqtəsi inteqralaltı $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir.

Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin t \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Beləliklə, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}.$

§ 32. Qeyri-məxsusi inteqralın baş qiyməti.

Tərif 1. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $-\infty < x < +\infty$ ədəd

oxunda təyin olunmuşdur və $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılındır. Əgər $f(x)$ funksiyası ədəd oxuna daxil olan istənilən parçada inteqrallandırsa və

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$$

limit varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası ədəd oxunda Koşi mənadı inteqrallanırdır. Bu limitə isə $f(x)$ funksiyasının

qeyri – məxsusi inteqralının Koşi mənadı baş qiyməti deyirlər və onu belə yazırlar:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

$$\int_{-A}^A f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ tek olduqda,} \\ 2 \int_0^A f(x) dx, & f(x) \text{ cüt olduqda,} \end{cases}$$

bərabərliyini nəzərə alsaq, əgər $f(x)$ funksiyası təkdirsə, Koşi mənadı inteqrallanıdır və inteqralın baş qiyməti sıfır bərabərdir.

$f(x)$ funksiyası cüt olduqda Koşi mənadı yalnız və yalnız o zaman inteqrallanıdır ki, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ yığılan olsun. Bu halda

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

$V.p$ – fransız sözü olan “Valeur principal” sözlərinin baş hərfləridir və “baş qiymət” mənasında başa düşülür.

$y = \sin x$ funksiyasının $(-\infty, +\infty)$ aralığındakı inteqralının Koşi mənadı baş qiymətini hesablayaq.

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \sin x dx = 0$$

Lakin, $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ – qeyri – məxsusi inteqralı dağılır.

Başqa bir misala baxaq. $f(x) = x$ funksiyası üçün $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

qeyri-məxsusi inteqralı dağılır, lakin $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$.

Koşi mənada inteqrallama anlayışı məxsusi nöqtə inteqrallama parçasının daxili nöqtəsi olduqda, II növ qeyri – məxsusi inteqral üçün də vermək olur.

Tərif 2. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında $c \in (a, b)$

nöqtəsi istisna olmaqla hər yerdə təyin olunub və $\int_a^b f(x) dx$

inteqralı dağılındır. Əgər kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$ və $\int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ inteqralları mövcuddursa və

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

limiti varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında

Koşi mənada inteqrallanır və bu limitə dağılan inteqralın Koşi

mənada baş qiyməti deyilir və $V.p. \int_a^b f(x) dx$ kimi işarə edirlər.

Beləliklə,

$$V.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Misal 1. $f(x) = \frac{1}{(x-c)}$, $x \in [a, b]$ funksiyası üçün

$c \in [a, b]$ olduqda $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi inteqral

dağılır. Lakin $f(x)$ Koşi mənada inteqrallananadır.

$$V.p. \int_a^b \frac{dx}{(x-c)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Misal 2. *V.p.* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx$ tapın.

Həlli. Əvvəlcə göstərək ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx$ I növ qeyri-məxsusi inteqral dağılandır. Bu inteqralı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{l+x}{l+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx$ inteqralının dağılan olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{l+x}{l+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{dx}{l+x^2} + \int_0^A \frac{x dx}{l+x^2} \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg \Big|_0^A + \frac{1}{2} \ln(l+x^2) \Big|_0^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg A + \frac{1}{2} \ln(l+A^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \infty = +\infty. \end{aligned}$$

Beləliklə, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx$ inteqralı dağılandır. Bununla belə, bu inteqral Koşi mənada yığılandır.

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l+x}{l+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{l+x}{l+x^2} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg x + \frac{1}{2} \ln(l+x^2) \right) \Big|_{-A}^A = \end{aligned}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg}(-A) + \frac{1}{2} \ln(1 + A^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + A^2) \right) =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{arctg} A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Misal 3. *V.p.* $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ tapın.

Həlli. $x^2 - 3x + 2$ kvadrat üçhədlisinin sıfırları $x = 1$ və

$x = 2$ nöqtələridir. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ qeyri-məxsusi inteqralını

aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad (32.1)$$

Ayındır ki, $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ I növ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır. Doğurdan da I növ qeyri-məxsusi inteqralın tərifinə görə $\forall A > 3$ üçün

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\int_3^A \frac{dx}{x-1} + \int_3^A \frac{dx}{x-2} \right] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-2}{x-1} \right) \Big|_3^A = \end{aligned}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{A-2}{A-1} \right) - \ln \frac{1}{2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 - \frac{2}{A}}{1 - \frac{1}{A}} \right) - \ln \frac{1}{2} = -\ln \frac{1}{2}$$

Beləliklə,

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\ln \frac{1}{2}. \quad (32.2)$$

Asanlıqla inanmaq olar ki, $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ II növ qeyri-məxsul integralı dağılındır. İntegralaltı funksiya $x=1$ və $x=2$ nöqtələrinin yaxın ətrafında qeyri-məhdududur. Ona görə (32.1)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} V.p. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \\ &= V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + V.p. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \quad (32.3) \end{aligned}$$

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = V.p. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + V.p. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} +$$

$$+ V.p. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{1+\varepsilon}^{2-\eta} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{2+\eta}^3 \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{1-\varepsilon-2}{1-\varepsilon-1} \right| - \ln \left| \frac{-2}{-1} \right| + \ln \left| \frac{2-\eta-2}{2-\eta-1} \right| - \right.$$

$$\left. - \ln \left| \frac{1+\varepsilon-2}{1+\varepsilon-1} \right| + \ln \left| \frac{3-2}{3-1} \right| - \ln \left| \frac{2+\eta-2}{2+\eta-1} \right| \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right| + \ln \left| \frac{\eta}{1-\eta} \right| - \ln \left| \frac{\eta}{1+\eta} \right| \right) - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} \right| + \ln \left| \frac{1+\eta}{1-\eta} \right| \right) - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 + \ln \frac{1}{2}.$$

Beləliklə,

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\ln 2 + \ln \frac{1}{2}. \quad (32.4)$$

(32.2) və (32.4)-ü (32.3)-də nəzərə alsaq,

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{1}{2}.$$

Çalışmalar

1. Tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı I növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın

a) $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2(l+x)}$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$;

e) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$; f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

2. Aşağıdakı I növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırın.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}} dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} dx$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x} dx$; d) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$.

3. $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ inteqralını hesablayın. (göstəriş:

$x = \frac{1}{t}$ əvəzləməsi aparın)

4. Tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı II növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın.

a) $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; b) $\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$; c) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

5. Aşağıdakı II növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırın.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$; c) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}$;
 e) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$; l) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3-x^5}$;
 m) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.

6. İsbat edin ki, $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ inteqralı mütləq yığılandır.

7. İsbat edin ki,

a) $-\frac{\pi}{4} < \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx < \frac{\pi}{4}$; b) $0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx < \frac{1}{n}$, $n > 1$.

Cavablar

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $1 - \ln 2$; c) π ; e) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2} \ln 2$; l) $\frac{1}{8}$.

2. a) dağılındır ; b) yığılandır ; c) dağılındır ;
 e) dağılındır ; d) yığılandır.

3. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) π ; 5. a) dağılındır ;

b) dağılındır ; c) yığılandır ; e) dağılındır ; d) yığılandır ;
 l) yığılandır ; m) yığılandır.

IV FƏSİL

MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ.

§33. Müəyyən integralın köməyi ilə bəzi limitlərin hesablanması

Tutaq ki, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcılığı verilmişdir və onun ümumi həddi $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ cəm şəklindədir, burada a_i ($i = \overline{1, n}$) həqiqi ədədlərdir. Bu şəkildə verilmiş ardıcılıqları bəzən sadə çevirmələr aparmaqla elə şəkildə göstərmək mümkündür ki, alınan x_n cəmi müəyyən bir funksiya üçün sonlu parçada integral cəmi olsun. Bu halda müəyyən integralın tərifinə görə verilmiş ardıcılığın limitinin hesablanması müəyyən integralın hesablanmasına gətirilir. Misallara müraciət edək.

Misal 1. Müəyyən integralın köməyi ilə aşağıdakı cəmin limitini hesablayın.

$$1) S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

Həlli. S_n cəmini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha.$$

$[0, 1]$ parçasında *

$T: x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$ bölgüsü

aparaq. Aydındır ki, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$ ($k = \overline{1, n}$), $d(T) = \frac{1}{n}$.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ aralıq nöqtələri olaraq $\xi_k = \frac{k}{n}$ götürüb,

$f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) funksiyasının integral cəmini yazsaq, tələri

$$J = -2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{2\pi} x d(\cos x) = 2 \left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx \right) = 3 \\ = 2 \left(2\pi \cos 2\pi - \sin x \Big|_0^{2\pi} \right) = 2(2\pi - 0) = 4\pi.$$

3). Verilmiş inteqralı

$$J = \int_{\frac{1}{e}}^e (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx \text{ şəklində yazaq. Bu inteqralların hər}$$

birinə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək.

$u = \ln x$, $dv = dx$ qəbul etsək, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ olar. Onda

$$J = - \left(x \cdot \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 x \cdot \frac{dx}{x} \right) + \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} \right) = \\ = - \left[\left(0 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} \right) - \left(1 - \frac{1}{e} \right) \right] + \left[(e \ln e - 0 - (e - 1)) \right] = \\ = \left(-\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} \right) + (e - e + 1) = -\frac{2}{e} + 2 = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Misal 3. Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etməklə

$$J = \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

inteqralını hesablayın.

Həlli. $u = x$, $dv = e^{-2x} dx$ qəbul etsək, $du = dx$, $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ olar. Onda

$$J = x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}.$$

Misal 4. $J = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ inteqralım hesablayın.

Həlli. Əvvəlcə $\sqrt{1+x} = t$ əvəzləməsi aparaq: $1+x = t^2$,
 $x = t^2 - 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$, $dx = 2t dt$ olar.
 Onda

$$J = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \arcsin(t^2 - 1) dt.$$

Sonuncu inteqralı hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə hesablayaq.

$$u = \arcsin(t^2 - 1), \quad dv = dt \quad \text{qəbul etsək,} \quad du = \frac{2dt}{\sqrt{2-t^2}}, \quad v = t$$

olar. Onda

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \arcsin(t^2 - 1) dt &= t \cdot \arcsin(t^2 - 1) \Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot \frac{2dt}{\sqrt{2-t^2}} = \\ &= \sqrt{2} \arcsin 1 - \arcsin 0 + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(2-t^2)}{\sqrt{2-t^2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2-t^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 2(0-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2. \end{aligned}$$

Misal 5. $J = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. Hissə-hissə inteqrallama metodundan istifadə edək.
 $u = \sin x$, $dv = e^x dx$ götürsək, $du = \cos x dx$, $v = e^x$ olar.
 $u = \sin x$ və $v = e^x$ funksiylarının özləri və törəmələri $[0, \pi]$
 parçasında kəsilməz olduğundan, hissə-hissə inteqrallama
 metodunu tətbiq etmək olar. Onda

$$J = e^x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama metodunu

tətbiq edək. $u = \cos x$, $dv = e^x dx$ götürsək, $du = -\sin x dx$, $v = e^x$ olar.

Onda

$$J = - \left(\cos x \cdot e^x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \right) = -(e^{\pi} + 1) - J$$

alırıq. J inteqralına nəzərən tənlik aldığımızdan, $2J = e^{\pi} + 1$

və yaxud $J = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$.

§ 23. Müəyyən inteqralın qiymətləndirilməsi.

Orta qiymət teoremləri.

Teorem 23.1. (Birinci orta qiymət teoremi). Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallanan və $g(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında mənfi olmayan (və yaxud müsbət olmayan) qiymətlər alır. $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri uyğun olaraq m və M olsun. Onda $m \leq \mu \leq M$ bərabərsizliyini ödəyən elə μ ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad (23.1)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. Dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə $\forall x \in [a, b]$ üçün $m \leq f(x) \leq M$ bərabərsizliyi doğrudur.

Müəyyənlik üçün tutaq ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün $g(x) \geq 0$. Onda aydındır ki, $\forall x \in [a, b]$ üçün

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad (23.2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Müəyyən inteqralın dördüncü və beşinci xassələrinə görə $m \cdot g(x)$, $M \cdot g(x)$ və $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında inteqrallanıdır.

Onda (23.2) bərabərsizliyini hədbəhd inteqrallaşaq,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (23.3)$$

bərabərsizliyini alırıq. Burada iki hal mümkündür:

$$1) \int_a^b g(x) dx = 0 ; 2) \int_a^b g(x) dx \neq 0.$$

Birinci halda (23.3) bərabərsizliyindən $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$

alardıq. Onda (23.1) bərabərsizliyi μ -nün istənilən qiymətində, o cümlədən $m \leq \mu \leq M$ bərabərsizliyini ödəyən

qiymətində də doğru olardı. Tutaq ki, $\int_a^b g(x) dx > 0$. Bu halda

(23.3) bərabərsizliyinin hər tərəfini $\int_a^b g(x) dx$ ədədinə bölsək,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

bərabərsizliyini alırıq.
$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$
 işarə etsək, tələb

olunan (23.1) bərabərsizliyini alırıq. $\int_a^b g(x)dx \leq 0$ olduğu hal da oxşar qayda ilə isbat olunur. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. $f(x)$, $[a, b]$ parçasında integrallanırsa, m və M onun bu parçada uyğun olaraq dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləridirsə, onda elə μ ($m \leq \mu \leq M$) ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (23.4)$$

İsbatı. (23.3) bərabərsizliyində $g(x) = 1$ qəbul edək.

$$\int_a^b 1 \cdot dx = b-a \text{ olduğundan,}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (23.5)$$

bərabərsizliyini alırıq.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ ədədini } \mu \text{ ilə işarə etsək, (23.4)-ü alırıq.}$$

μ ədədinə $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında orta qiyməti deyilir.

Əgər, xüsusi halda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda elə α, β ədədləri var ki, $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ və ona görə də $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ parçasında elə ξ nöqtəsi var ki, $f(\xi) = \mu$. Bu halda (23.4) düsturu aşağıdakı şəkildə düşər.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (23.6)$$

Nəticə 2. Fərz edək ki, $f(x)$, $[a, b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə $[a, b]$ parçasında inteqrallananıdır və istənilən $x \in [a, b]$ üçün $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) şərtini ödəyir. Onda elə $\xi \in (a, b)$ nöqtəsi var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (23.7)$$

İsbatı. Tutaq ki, $m = \inf_{[a, b]} f(x)$, $M = \sup_{[a, b]} f(x)$.

Müəyyənlik üçün tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx > 0$. Əgər $\int_a^b f(x)dx = 0$

olarsa, onda (23.7) bərabərliyi istənilən $\xi \in (a, b)$ üçün doğru olardı (23.1 bərabərliyinə əsasən). $m < \mu < M$ halına baxaq. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğundan, Veyerştrasın ikinci teoreminə görə elə $\bar{x} \in [a, b]$ və $\underline{x} \in [a, b]$ nöqtələri var ki, $f(\bar{x}) = m$, $f(\underline{x}) = M$. Parçada kəsilməz funksiyanın aralıq qiymətləri alması haqda teoremə görə $f(x)$ kəsilməz funksiyası m və M ədədləri arasındakı bütün aralıq qiymətləri alır. Ona görə elə $\xi \in (a, b)$ var ki, $f(\xi) = \mu$. Asanlıqla inanmaq olar ki, $\mu = M$ və $\mu = m$ halları üçün də (23.7) bərabərliyi doğrudur.

Qeyd 1. $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) olması şərti zəruridir. Əgər bu şərt pozularsa (23.1) düsturu doğru olmaz. Məsələn, $[0, 1]$ parçasında verilmiş

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{və}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

funksiyaları üçün

$$\int_0^1 g(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}$$

olduğundan, ixtiyari μ üçün $\int_0^1 f(x)g(x) dx \neq \mu \int_0^1 g(x) dx$.

Qeyd 2. (23.7) düsturunun doğruluğu üçün $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında kəsilməz olması şərtini azaltmaq olmaz. Başqa sözlə, $f(x)$ kəsilməz olmadıqda (23.7) bərabərliyi ümumiyyətlə desək, doğru deyil.

Məsələn, $[0, 1]$ parçasında kəsilməz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3, & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{və} \quad g(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

funksiyaları üçün

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 dx = 1,$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^{1/3} 3 dx + \int_{1/3}^1 \frac{1}{3} dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

olduğundan $[0,1]$ parçasında elə bir ξ nöqtəsi yoxdur ki,
 $f(\xi) = \frac{11}{9}$ olsun.

Teorem 23.2. (ikinci orta qiymət teoremi). Fərz edək ki,
 $f(x)$, $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə $[a,b]$ parçasında
kəsilməz diferensiasillanan funksiya və $g'(x) \geq 0$. Onda $[a,b]$
parçasında elə $\xi \in [a,b]$ var ki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx \quad (23.8)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. $u(x) = g(x)$, $dv(x) = f(x)dx$ qəbul edərək,
bərabərliyin sol tərəfinə hissə-hissə integrallama düsturunu
tətbiq edək:

$$v(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad u(x) = g(x), \quad du(x) = g'(x)dx.$$

Onda

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \left(g(x) \cdot \int_a^x f(t)dt \right) \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b \left(g'(x) \int_a^x f(t)dt \right) dx \end{aligned} \quad (23.9)$$

Sağ tərəfdəki ikinci integrala birinci orta qiymət
teoremini tətbiq edək.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiyası kəsilməzdir və $g'(x) \geq 0$. Ona görə də elə $\xi \in [a,b]$
nöqtəsi var ki,

$$\int_a^b \left(g'(x) \cdot \int_a^x f(t) dt \right) dx = \int_a^{\xi} f(t) dt \left(\int_a^b g'(x) dx \right) =$$

$$= (g(b) - g(a)) \int_a^{\xi} f(t) dt$$

Sonuncu bərabərliyi (23.9) – də nəzərə alaraq,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_a^b f(t) dt - (g(b) - g(a)) \int_a^{\xi} f(t) dt$$

alırıq.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{\xi} f(t) dt + \int_{\xi}^b f(t) dt$$

olduğunu nəzərə alıb, sadələşdirmə aparsaq, tələb olunan (23.8) düsturunu alırıq. Teorem isbat olundu.

(23.8) bərabərliyinə Bonne düsturu deyilir.

Misal 1. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının $[0, 100]$ parçasında μ orta qiymətini tapın.

Həlli.

$$\mu = \frac{1}{100-0} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = \frac{1}{100} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{100} = \frac{2}{300} 100^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{300} \cdot 1000 = 6 \frac{2}{3}.$$

Misal 2. $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ funksiyasının $[0, 2\pi]$ parçasında μ orta qiymətini tapın.

Həlli.

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2 \sin x + 3 \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} (10x - 2 \cos x + 3 \sin x) \bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [(20\pi - 2 \cos 2\pi + 3 \sin 2\pi) - (0 - 2 \cos 0 + 3 \sin 0)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (20\pi - 2 + 2) = 10.$$

Misal 3. Birinci orta qiymət teoremindən istifadə etməklə

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}$$

inteqralları qiymətləndirin.

Həlli. Yuxarıda göstərmişik ki, əgər $f(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ isə, onda (23.5) bərabərsizliyi doğrudur.

$[0, 2\pi]$ parçasında kəsilməz $f(x) = \frac{1}{1 + 0,5 \cos x}$ funksiyasının ən kiçik və ən böyük qiymətlərini tapaq. Asanlıqla inanmaq olar ki, $\min_{x \in [0, 2\pi]} \frac{1}{1 + 0,5 \cos x} = \frac{2}{3}$, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \frac{1}{1 + 0,5 \cos x} = 2$. Ona görə,

$$\frac{4\pi}{3} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} \leq 4\pi.$$

Misal 4. Birinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək,

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100} dx$$

inteqralları qiymətləndirin.

Həlli. $0 < x < 100$ olduqda

$$\frac{1}{200} < \frac{1}{x + 100} < \frac{1}{100}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliyin hər tərəfini e^{-x} -ə vuraq və $[0, 100]$ parçasında inteqrallayaq. Onda

$$\frac{1}{200} \int_0^{100} e^{-x} dx < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < \frac{1}{100} \int_0^{100} e^{-x} dx$$

bərabərsizliyini alırıq.

$$\int_0^{100} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{100} = 1 - \frac{1}{e^{100}} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{200} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right) < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right).$$

Misal 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ və $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$ ədədlərindən hansı böyükdür?

Həlli. Aydındır ki, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ olduqda $\cos^2 x \geq \cos^{10} x$ bərabərsizliyi, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ olduqda isə $\cos^2 x > \cos^{10} x$ bərabərsizliyi doğrudur. Ona görə müəyyən integralın 10-cu xassəsindən çıxan nəticəyə əsasən, hökm edirik ki,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx.$$

Misal 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x} dx$ və $\frac{\pi}{2}$ ədədlərindən hansı böyükdür?

Həlli. Aydındır ki, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ olduqda $0 \leq \sin x \leq 1$ və yaxud $-1 \leq -\sin x \leq 0$ bərabərsizliyi ödənilir. Asanlıqla inanmaq

olar ki, $e^{-\sin x}$ funksiyası $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında azalandır. Ona görə

$$\text{də } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ -də } e^{-1} \geq e^{-\sin x} \geq e^0$$

və yaxud $e^{-\sin x} \geq 1$ bərabərsizliyi doğrudur.

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda isə $e^{-\sin x} > 1$. Ona görə də müəyyən

integralın 10-cu xassəsindən çıxan nəticəyə əsasən,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Misal 7. İkinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək

$$J = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

integralını qiymətləndirin.

Həlli. $f(x) = \sin x$, $x \in [100\pi, 200\pi]$ və

$g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [100\pi, 200\pi]$ funksiyalarına baxaq. Aydındır ki,

$f(x)$ funksiyası $[100\pi, 200\pi]$ parçasında kəsilməzdir. $g(x)$ funksiyası isə $[100\pi, 200\pi]$ parçasında kəsilməz diferensiallanandır və monoton azalandır. Onda Bonne düsturuna görə

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx + \frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x dx = \\ &= \frac{1}{100\pi} (-\cos x) \Big|_{100\pi}^{\xi} + \frac{1}{200\pi} (-\cos x) \Big|_{\xi}^{200\pi} = \\ &= -\frac{1}{100\pi} (\cos \xi - \cos 100\pi) - \frac{1}{200\pi} (\cos 200\pi - \cos \xi) = \\ &= -\frac{1}{100\pi} (\cos \xi - 1) - \frac{1}{200\pi} (1 - \cos \xi) = \end{aligned}$$

$$= (1 - \cos \xi) \left(\frac{1}{100\pi} - \frac{1}{200\pi} \right) = \frac{1 - \cos \xi}{200\pi}, \quad 100\pi < \xi < 200\pi.$$

Ayındır ki, $0 \leq 1 - \cos \xi \leq 2$. Onda müəyyən inteqralın 10-cu xassəsinə görə $0 < J < \frac{1}{100\pi}$.

Misal 8. İkinci orta qiymət teoremindən istifadə edərək

$$J = \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx \quad (\alpha \geq 0, \quad 0 < a < b)$$

inteqralını qiymətləndirin.

Həlli. $f(x) = \sin x$, $x \in [a, b]$ və $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$, $x \in [a, b]$ funksiyalarına baxaq. Aydırdır ki, $f(x) = \sin x$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$, $x \in [a, b]$ funksiyası isə $[a, b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanandır, monoton azalandır və müsbətdir. Onda Bonne düsturuna görə elə $\xi \in (a, b)$ nöqtəsi var ki,

$$J = \frac{1}{ae^{\alpha a}} \int_a^{\xi} \sin x \, dx = \frac{1}{ae^{\alpha a}} (-\cos x) \Big|_a^{\xi} = \frac{1}{ae^{\alpha a}} (\cos a - \cos \xi).$$

$$|J| = \left| \frac{1}{ae^{\alpha a}} (\cos a - \cos \xi) \right| \leq \frac{2}{ae^{\alpha a}}.$$

§ 24. Müəyyən inteqral üçün bəzi inteqral bərabərsizliklər.

Əvvəlcə köməkçi fakt kimi aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. $a \geq 0$, $b \geq 0$ və $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduqda

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad (24.1)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. $[0; +\infty)$ yarımoxunda

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t$$

funksiyasının ekstremum nöqtəsini axtaraq. $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1 = 0$ olsun. $t = 1$ ekstremum üçün şübhəli nöqtedir. $t = 1$ nöqtəsində törəmə öz işarəsini mənfidən müsbətə dəyişər. $t = 1$ nöqtəsi $\varphi(t)$ funksiyasının $[0; +\infty)$ aralığında yeganə minimum nöqtəsidir. Ona görə də $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$.

$\frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} - t > 0$ bərabərsizliyindən

$$t < \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} \quad (24.2)$$

alırıq.

(24.2) bərabərsizliyində $t = a \cdot b^{\frac{1}{1-p}}$ qəbul etsək, alırıq:

$$a \cdot b^{\frac{1}{1-p}} \leq \frac{1}{p} a^p b^{\frac{p}{1-p}} + \frac{1}{q}.$$

Hər tərəfi $b^{\frac{1}{1-p}-1}$ -ə bölsək, tələb olunan (24.1) bərabərsizliyini alırıq. (24.1) bərabərsizliyi Yunq bərabərsizliyi adlanır.

Teorem 24.1. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında integrallanan funksiyalardır, $1 < p < +\infty$ istənilən

ədəddir, q ədədi isə $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bərabərliyindən təyin edilir.

Onda

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (24.3)$$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)| dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (24.4)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İsbatı. $f(x) = g(x) = 0$ olduqda (24.3) bərabərsizliyinin doğruluğu aydındır. Ona görə $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ hesab edək. Yunq bərabərsizliyində

$$A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}}, \quad B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \quad (24.5)$$

qəbul etsək,

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \leq \\ & \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \end{aligned}$$

bərabərsizliyini alırıq.

Bu bərabərsizliyi $[a, b]$ parçası üzrə inteqrallayıb, (24.5)

münasibətini və $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \leq 1$$

olar. Buradan tələb olunan (24.3) bərabərsizliyini alırıq. (24.3) bərabərsizliyi integral üçün Hölder bərabərsizliyi adlanır. Xüsusi halda $p = q = 2$ olduqda Hölder bərabərsizliyi

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx &\leq \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (24.6)$$

şəklinə düşür. (24.6) bərabərsizliyi integral üçün Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi adlanır.

İndi isə (24.4) bərabərsizliyini isbat edək.

Aydındır ki,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx &= \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \\ &+ \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx. \end{aligned} \quad (24.7)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Sağ tərəfdəki integralların hər birinə Holder bərabərsizliyini tətbiq edək.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Onda (24.7)-dən

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \\
& \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

$(p-1) \cdot q = p$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} \times \\
& \times \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

alırıq. Bu bərabərsizliyin hər tərəfini

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} - \text{ifadəsinə bölsək, (24.4)}$$

bərabərsizliyini alırıq. (24.4) bərabərsizliyi inteqral üçün Minkovski bərabərsizliyi adlanır.

Misal 1. Bərabərsizliyi isbat edin: $\int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} \, dx \leq \sqrt{\frac{2\pi^5}{5}}.$

Həlli. $I = \int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} \, dx$ işarə edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə edək. Onda

$$I^2 \leq \left(\int_0^{\pi} x^4 \, dx \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin x \, dx \right) = \frac{x^5}{5} \Big|_0^{\pi} \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 2. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x^3+1} \, dx \leq \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Həlli. $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x^3+1} \, dx$ işarə edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$J^2 \leq \int_0^1 (1+x^2) \, dx \cdot \int_0^1 (x^3+1) \, dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 3. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3) \sin x} \, dx \leq \sqrt{2\pi + \frac{\pi^4}{2}}.$$

Həlli. $J = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3) \sin x} \, dx$ işarə edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$J^2 \leq \int_0^{\pi} (1+x^3) dx \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = \left(x + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\pi} \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \left(\pi + \frac{\pi^4}{4} \right) \cdot 2 = 2\pi + \frac{\pi^4}{2}$$

Buradan, tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

Misal 4. İsbat edin ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

İsbatı. $0 < x < 1$ olduqda aydındır ki, $1 < 1+x < 2$ bərabərsizliyi ödənilir. Buradan, $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+x} < 1$.

Müəyyən inteqralın məlum xassəsinə görə

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

alırıq. Bu bərabərsizlikdə $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

Çalışmalar

1. Müəyyən inteqralın tərifindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. Müəyyən inteqralın həndəsi mənasından istifadə edərək,

$$a) \int_1^5 (4x-1)dx \quad , \quad b) \int_1^2 (2x+1)dx \quad , \quad c) \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

inteqrallarını hesablayın.

3. İnteqral cəmində limitə keçməklə, $I = \int_1^4 x^3 dx$ inteqralını

hesablayın. $[1,4]$ parçasını bərabər hissələrə bölün və ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının

- a) sol uc nöqtələrini,
- b) sağ uc nöqtələrini,
- c) orta nöqtələrini seçin.

4. İsbat edin ki, istənilən natural n ədədi üçün

$$a) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{y^n}{y^2+1} dy,$$

$$x \in (-1; +\infty) ;$$

$$b) \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{y^{2n}}{y^2+1} dy,$$

$$x \in (-\infty; +\infty) \text{ bərabərliyi doğrudur.}$$

5. Aşağıdakı müəyyən inteqralları hesablayın:

$$a) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3} ; \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx ; \quad c) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx ;$$

$$e) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} ; \quad d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx ; \quad k) \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}} ;$$

$$l) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

6. Əvəzetmə üsulundan istifadə etməklə aşağıdakı integralları hesablayın:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} ; \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} ; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx ; \\ \text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{5-3\cos x} ; \quad \text{d) } \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} ; \quad \text{k) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} . \end{aligned}$$

7. Müəyyən integral üçün hissə-hissə integrallama düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı integralları hesablayın:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^e \ln^3 x dx ; \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx ; \quad \text{c) } \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx ; \\ \text{e) } \int_1^2 x^3 \ln x dx ; \quad \text{d) } \int_0^1 e^x \cos x dx ; \quad \text{k) } \int_0^1 \ln(1+x) dx . \end{aligned}$$

8. Aşağıdakı funksiyaların x -ə nəzərən törəməsini tapın.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt ; \quad \text{b) } F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt ; \\ \text{c) } F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0) \end{aligned}$$

9. Orta qiymət teoremindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

10. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etməklə isbat edin ki,

$$1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

11. $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ integralım qiymətləndirin. Bunun üçün

a) müəyyən integral üçün orta qiymət teoremindən,

b) Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən

istifadə edin.

12. Aşağıdakı funksiyaların ən kiçik qiymətini tapın.

a) $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$; b) $f(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{1+t} dt$.

Cavablar

2. a) 44 ; b) 6 ; c) $\frac{9\pi}{2}$. 5. a) $\frac{7}{72}$; b) π ;

c) $\arctg e - \frac{\pi}{4}$; e) $\ln 2$; d) $\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4}$; k) $\frac{14}{15}$;

l) $\frac{4}{3}$. 6. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{1}{4} \ln \frac{32}{17}$; c) $\frac{1}{4}$;

e) $\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right)$; d) $\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{3}$; k) $\frac{1}{6}$.

7. a) $6 - 2e$; b) $\pi - 2$; c) $-\frac{1}{e}$; e) $4 \ln 2 - \frac{15}{16}$;

d) $\frac{\cos 1 + \sin 1}{2} e - \frac{1}{2}$; k) $\ln \frac{4}{e}$. 8. a) $\frac{\sin 2x}{x}$;

b) $-\sqrt{1+x^4}$; c) $\ln x$; d) $\frac{2x}{1+x^6}$.

11. a) $1 < J < \sqrt{2}$; b) $1 < J < \sqrt{1,2}$.

12. a) $-\frac{17}{22}$; b) $\frac{1}{3} - 15 \ln 3$.

III FƏSİL

QEYRİ-MƏXSUSİ İNTEQRALLAR.

§ 25. I növ qeyri-məxsusi integral, tərif, xassələri

Funksiyanın Riman mənada integralına tərif verərkən integrallama aralığının sonlu olduğunu qəbul etmişdik. Digər tərəfdən isbat etmişdik ki, əgər funksiya sonlu parçada qeyri-məhduddursa, onda Riman mənada integrallanan deyildir (bax, II fəsil, §14, teorem 14.1). Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyaının Riman mənada integrallanan olması üçün integrallama aralığının sonlu, $f(x)$ -in isə bu aralıqda məhdud olması zəruridir. Bu iki şərtədən birinin pozulduğu hal üçün integral anlayışını ümumiləşdirək.

Fərz edək ki, integrallama aralığı sonsuzdur. Ədəd oxunda üç növ sonsuz aralıq var: a və b sonlu ədədlər olduqda $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ aralıqları və $(-\infty, +\infty)$ ədəd oxu.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $(a, +\infty)$ aralığında təyin olunub və ixtiyari qeyd olunmuş $A \in (a, +\infty)$ ədədi üçün $[a, A]$ parçasında Riman mənada integrallananıdır, yəni, $\int_a^A f(x)dx$

sonlu ədəddir.

Aydınır ki, bu integral A -dan asılı funksiya təyin edəcəkdir:

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

$F(A)$ funksiyanın $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitinin varlığını araşdıraraq.

Tərif. Əgər $A \rightarrow +\infty$ şərtində $F(A)$ funksiyanın sonlu limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyanın $[a, +\infty)$

aralığında I növ qeyri-məxsusi inteqralı deyilir və simvolik olaraq $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kimi işarə olunur.

Beləliklə,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx . \quad (25.1)$$

Bu halda deyirlər ki, (25.1) qeyri-məxsusi inteqralı yığılır və $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında (qeyri – məxsusi mənada) inteqrallanandır. Əks halda deyirlər ki, (25.1) qeyri-məxsusi inteqralı dağılır.

Qeyd 1. İxtiyari qeyd olunmuş $c > a$ üçün $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və

$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılır və ya

dağılır. Bu fakt $\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$ bərabərliyinə

əsaslanır. Belə ki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ inteqrallarından biri

yığılırsa o biri də yığılır və tərsinə biri dağılırsa, o biri də dağılır. Analoji olaraq $\forall b$ sonlu ədədi üçün $(-\infty, b]$ aralığında I növ qeyri – məxsusi inteqral təyin olunur.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx$$

$f(x)$ funksiyasının $(-\infty, +\infty)$ aralığında I növ qeyri-məxsusi inteqralı $a \in R$ ixtiyari qeyd olunmuş ədəd olduqda aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx . \quad (25.2)$$

Əgər (25.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki integralların hər ikisi yığılırsa, onda deyirlər ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralı yığılır və $f(x)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ ədəd oxunda (qeyri-məxsusi mənada) integrallanandır. Əgər (25.2) bərabərliyində sağ tərəfdəki integrallardan hər biri dağılırsa, onda deyirlər ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralı dağılır. Beləliklə, $f(x)$ funksiyası ədəd oxunun istənilən sonlu $[A, B]$ parçasında integrallanırsa və bir-birindən asılı olmayaraq $A \rightarrow -\infty$, $B \rightarrow +\infty$ şərtində

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B f(x)dx$$

sonlu limiti varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ aralığında qeyri-məxsusi mənada integrallanandır. Beləliklə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B f(x)dx.$$

Müəyyənlik üçün biz (25.1) şəklində qeyri-məxsusi integrallara baxacağıq.

Göründüyü kimi, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri - məxsusi integralın

yığılması məsələsi $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ funksiyasının $A \rightarrow +\infty$

şərtinə sonlu limitinin varlığı məsələsinə gətirilir. Limitin varlığı üçün Koşi meyarına görə $F(A)$ funksiyasının $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $M > a$ ədədinin olmasıdır ki,

$A_1 > M$, $A_2 > M$ bərabərsizliklərini ödəyən istənilən A_1 , A_2 ədədləri üçün

$$|F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 25.1. (Qeyri-məxsusi inteqralın yığılması haqda Koşi meyarı).

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralının yığılan olması üçün zəruri

və kafi şərt, $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $M > a$ ədədinin

olmasıdır ki, $\forall A_1 > M$, $\forall A_2 > M$ olduqda, $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

olsun.

Misal 1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ qeyri-məxsusi inteqralını

hesablayın.

Həlli. I növ qeyri-məxsusi inteqralın tərifinə

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= - \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = - \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2+x}{1-x} \right| \Big|_2^A =$$

$$= - \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln \left| \frac{2+A}{1-A} \right| - \ln \left| \frac{4}{-1} \right| \right] = - \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2+A}{1-A} \right| + \frac{1}{3} \ln 4 =$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\frac{2}{A} + 1}{\frac{1}{A} - 1} \right| + \frac{1}{3} \ln 4 = -\frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

Beləliklə, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{2}{3} \ln 2.$

Misal 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ qeyri-məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, istənilən sonlu $[A, B]$ parçasında $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$ funksiyası inteqrallananıdır. Tərifə görə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Bu bərabərlikdə $x=0$ aralıq nöqtəsi əvəzinə ədəd oxunun istənilən digər nöqtəsi götürülə bilər. Biz sadəlik üçün $x=0$ nöqtəsi götürdük.

Aydındır ki,

$$(x^2 + x + 1)^2 = \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^2$$

eyniliyində $x + \frac{1}{2} = t$ əvəz etsək,

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Yuxarıda (bax, I fəsil, §8.)

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

qeyri-müəyyən integralını hesablamaq üçün

$$J_m = \frac{t}{2a^2(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)} J_{m-1}$$

rekurent bərabərliyini almışdıq.

J_m üçün alınmış bu bərabərlikdə $m = 2$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ götürək və nəzərə alaq ki,

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Onda

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} =$$

$$= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{t}{2 \cdot \frac{3}{4} \left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)} + \frac{1}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \right] \Big|_B^0 =$$

$$= - \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{2B}{3 \left(B^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)} + \frac{1}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}} \operatorname{arctg} \frac{2B}{\sqrt{3}} \right] =$$

$$= - \frac{4}{3\sqrt{3}} \lim_{B \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{2B}{\sqrt{3}} = - \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(- \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Analoji qayda ilə göstərmək olur ki,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Beləliklə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Misal 3. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ qeyri-məxsusi inteqralını hesablayın.

Həlli. $\frac{1}{x^3 + 1}$, $x \in [0, +\infty)$ funksiyasını elementar rasional kəşrlərin cəmi şəklində göstərək.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

Onda tərifə görə,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{dx}{x+1} - \int_0^A \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \right).$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki integralları hesablayaq.

$$\int_0^A \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^A = \ln(A+1),$$

$$\int_0^A \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \int_0^A \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \int_0^A \frac{\frac{3}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{d\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{3}{2} \int_0^A \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) \Big|_0^A - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^A =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(A^2 - A + 1) - \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \sqrt{A^2 - A + 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\
&= \ln \sqrt{A^2 - A + 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln(A+1) - \ln \sqrt{A^2 - A + 1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{A+1}{\sqrt{A^2 - A + 1}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} \right) + \\
&+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Misal 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ qeyri-məxsusi inteqralını

hesablayın.

Həlli. Tərifə görə

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

Əvvəlcə $\int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ müəyyən inteqralını hesablayaq.

$$x^5 = t \text{ əvəz etsək, } x = t^{\frac{1}{5}}, \quad dx = \frac{1}{5} t^{-\frac{4}{5}} dt, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1;$$

$$x = A \Rightarrow t = A^5 \text{ olar.}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} &= \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{1}{t^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{5}}} \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} dt = \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} = \\
&= \frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1}} = -\frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1}} = \\
&= -\frac{1}{5} \int_1^{A^5} \frac{d\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \\
&= -\frac{1}{5} \ln \left(\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) \Bigg|_1^{A^5} = \\
&= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right).
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right).$$

Bu bərabərlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək alırıq:

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} &= -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Misal 5. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx'$ qeyri-məxsusi inteqralları

hesablayın.

Həlli. Tərifə görə,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$\int_0^A \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ müəyyən inteqralları hesablayaq.

$\arctg x = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x=0 \Rightarrow t=0$;

$x=A \Rightarrow t = \arctg A$, $x = \tg x$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$,

$1+x^2 = 1+\tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ olar.

Ona görə,

$$\int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\operatorname{arctg} A} t \cos t dt = t \cdot \sin t \Big|_0^{\operatorname{arctg} A} + \cos t \Big|_0^{\operatorname{arctg} A} =$$

$$= \operatorname{arctg} A \cdot \sin(\operatorname{arctg} A) + \cos(\operatorname{arctg} A) - 1.$$

Axırıncı bərabərlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçək və nəzərə alaq ki, $A \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} A \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Onda

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} A \cdot \sin(\operatorname{arctg} A) + \cos(\operatorname{arctg} A)] - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Beləliklə, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

Misal 6. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0)$ qeyri-məxsusi

integralını hesablayın.

Həlli. Tərifə görə

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-ax} \sin bx dx.$$

Əvvəlcə $J = \int_0^A e^{-ax} \sin bx dx$ müəyyən integralını hesablayaq. Bu

müəyyən integrala ardıcıl olaraq iki dəfə hissə-hissə integrallama metodunu tətbiq etməklə,

$$J = -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{-aA} \cos bA - \frac{a}{a^2 + b^2} e^{-aA} \sin bA + \frac{b}{a^2 + b^2}$$

alırıq. Onda aydındır ki,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} \cos bA = \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} \sin bA = 0$$

olduğundan,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Qeyd 2. Qeyri – məxsusi integralın həndəsi mənni vermək olar. $f(x)$, $[a, +\infty)$ aralığında mənfə olmadığına

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralının həndəsi mənası müəyyən

integrala oxşar olaraq $f(x)$ funksiyanın qrafikinə yaratdığı

$$P = \{(x, y): a \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

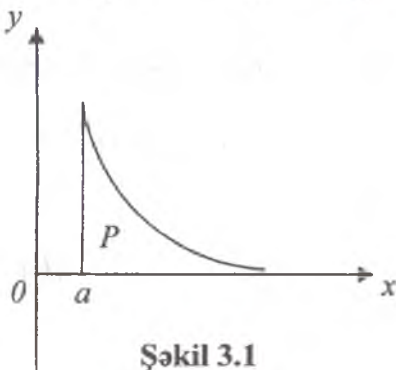
əyrixətli trapesiyanın sahəsinə bərabərdir (bax, şəkil 3.1) Aydındır ki, bu əyrixətli trapesiya qeyri-məhdud çoxluqdur.

Əgər $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integralı yığılırsa, bu əyrixətli

trapesiyanın sahəsi müəyyən ədədlə ifadə olunur.

Məsələn, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ olarsa, $a > 0$ olduqda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_a^A = \frac{1}{2a^2}$$



Şəkil 3.1

olduğundan, uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsi $\frac{1}{2a^2}$ - ədədi ilə

ifadə olunur. $f(x) = \frac{1}{x}$ olarsa,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A + \ln a) = +\infty,$$

olduğundan bu hala uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsi müəyyən ədədlə ifadə olunmur.

Qeyd 3. I növ qeyri – məxsusi integralın yığılması üçün $f(x)$ funksiyasının məhdudluğu zəruri deyil. Buna aid aşağıdakı misal göstəriləcəkdir. (bax, §28, qeyd 2)

Misal 7. $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\int_a^A \cos x dx = \sin x \Big|_a^A = \sin A$ və $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A$ limiti

olmadığından, $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ integralı dağılır.

Misal 8. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ ($a > 0$) integralının yığılmasını araşdırın.

λ - həqiqi ədəddir.

Həlli. Əvvəlcə fərz edək ki, $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A x^{-\lambda} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \text{ olarsa,} \\ +\infty, & \lambda < 1 \text{ olarsa.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ olsun. Onda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty.$$

Beləliklə, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ inteqralı $\lambda > 1$ olduqda yığılır, $\lambda \leq 1$ olduqda dağılır.

I növ qeyri-məxsusi inteqralın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı yığılırsa, c ixtiyari həqiqi ədəd olduqda $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ inteqralı da yığılır və

$$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Xassə 2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralları yığılırsa $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$ inteqralı da yığılır və

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Bu faktların isbatı müəyyən inteqralın müvafiq xassələrindən və I növ qeyri-məxsusi inteqralın tərifindən alınır.

Xassə 3. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, A]$ aralığında kəsilməzdirsə, $F(x)$ bu aralıqda $f(x)$ -in ibtidai funksiyası olduqda, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı yalnız və yalnız o halda yığılır ki,

$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ sonlu olsun.

İsbatı. Doğrudan da,

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a)$$

bərabərliyindən

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$$

alırıq. Burada, $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ işarə olunmuşdur.

Xəssə 4. (Bərabərsizliyin inteqrallanması). Əgər $[a, +\infty)$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ bərabərsizliyi ödənirsə və

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralları yığılırsa onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (25.3)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Doğrudan da $\forall A > a$ üçün Riman inteqralının müvafiq xəssəsinə görə

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx$$

bərabərsizliyi doğrudur. Sonuncu bərabərsizlikdə $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək tələb olunan (25.3) bərabərsizliyini alırıq.

§26. Mənfi olmayan funksiyanın I növ qeyri-məxsusi inteqralı

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mənfi deyildir. Onda aydındır ki,

$$F(A) := \int_a^A f(x)dx \quad (26.1)$$

funksiyası A -dan asılı artan funksiyaadır.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \text{ olduğundan I növ qeyri-məxsusi}$$

inteqralın yığılan olması məsələsi $F(A)$ monoton funksiyanın $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limitinin olmasına gətirilir. Ona görə də monoton funksiyanın limitinin varlığı haqqında teoremi $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ limitinə tətbiq etməklə, I növ qeyri-məxsusi

inteqralın yığılması haqda aşağıdakı lemmayı alırıq.

Lemma 1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyaası $[a, +\infty)$ aralığında mənfi deyildir. Onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi

inteqralın yığılması üçün $\int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, +\infty)$ inteqrallar çoxluğunun yuxarıdan məhdud olması, zəruri və kafidir.

$$\int_a^A f(x)dx \leq M, \exists M > 0, A \in [a, +\infty),$$

Bu halda, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sup_{a \leq A < +\infty} \int_a^A f(x)dx.$

Qeyd. Bu lemmadan alınır ki, mənfi olmayan $f(x)$ funksiyanın $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi inteqralın dağılan olması üçün zəruri və kafi şərt (26.1) bərabərliyi ilə təyin olunan $F(A)$ funksiyanın yuxarıdan qeyri-məhdud olmasıdır. Məlumdur ki, bu halda $F(A)$ artan olduğundan,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Teorem 26.1. Tutaq ki, $[a, +\infty)$ aralığında

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (26.2)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralı yığılırsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı da yığılır,

2) Əgər $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı dağılırsa, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ inteqralı da dağılır.

İsbatı. (26.2) bərabərsizliyinə görə istənilən $A > a$ üçün

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx \quad (26.3)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Tutaq ki, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır. Onda lemma 1-ə görə $A \in [a, +\infty)$ olduqda $\int_a^A g(x)dx$ inteqrallar çoxluğu yuxarıdan məhduddur və deməli

(26.3) bərabərsizliyinə görə, həm də $\int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, +\infty)$ inteqrallar çoxluğu yuxarıdan məhduddur. Onda lemma 1-ə görə $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyr-məxsusi inteqralı yığılır. Teoremin birinci hissəsi isbat olundu.

İndi tutaq ki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı dağılır. Onda aydındır

ki, teoremin isbat olunmuş birinci hissəsinə görə $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığıla bilməz. Çünki, əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı da yığılırdı. Bu isə ola bilməz. Deməli, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır.

Teorem 26.2. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ $[a, +\infty)$ aralığında müsbət funksiyalardır və sonlu və yaxud sonsuz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty) \quad (26.4)$$

limiti vardır.

Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa və

$0 \leq K < +\infty$ isə, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılırsa və

$0 < K \leq +\infty$ isə $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı da dağılır.

İsbatı. Tutaq ki, (26.4) şərti ödənilir və $0 \leq K < +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$ götürək. Onda müsbət sonsuzluqda funksiyanın

limitinin tərifinə görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapılacaq ki, $x > \delta > a$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi və yaxud

$$0 < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Axıncı bərabərsizlikdən $f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$ bərabərsizliyini alırıq. Aydınır ki, I növ

qeyri-məxsusi integralın birinci xassəsinə görə əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

integralı yığılırsa, onda $\int_{\delta}^{+\infty} (K + \varepsilon)g(x)dx$ qeyri-məxsusi

integralı da yığılır. Onda teorem 26.1-ə görə $\int_{\delta}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-

məxsusi integralı və deməli, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralı da yığılır.

Teoremin birinci hissəsi isbat olundu. Teoremin ikinci hissəsini isbat edək. Tutaq ki, (26.4) şərti $0 < K \leq +\infty$ olduqda ödənilir. $\forall \varepsilon > 0$ götürək. Onda müsbət sonsuzluqda funksiyanın limitinin tərifinə görə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapılacaq ki,

$x > \delta > a$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün $\frac{f(x)}{g(x)} > K - \varepsilon$ və

yaxud $f(x) > (K - \varepsilon)g(x)$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir.

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılan olduğundan,

$\int_\delta^{+\infty} g(x) dx$ inteqralı da dağılındır və deməli, həm də

$\int_\delta^{+\infty} (K - \varepsilon) g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır. Onda teoremi

26.1-ə görə $\int_\delta^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı və deməli, həm

də $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır. Teorem isbat olundu.

Misal 1. Göstərin ki, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx$, $\alpha \leq 1$, qeyri-məxsusi inteqralı dağılır.

Həlli. $\forall M \in (1, \infty)$ götürək. n -i elə seçək ki, $n\pi > M$ olsun. $A_1 = n\pi$ və $A_2 = 2n\pi$ götürək. Onda

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos^2 x}{x} dx \right| &= \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \cos^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2\pi n} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4\pi n} (2\pi n - n\pi) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

eməli, $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ olduqda ixtiyari $M > 1$ üçün elə

$A_1 = \pi n > M$ və $A_2 = 2\pi n > M$ ədədləri var ki, $\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos^2 x}{x} dx \right| \geq \frac{1}{4}$

bərabərsizliyi ödəyir.

Ona görə də Koşi meyarına görə $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ integralı dağılır.

$\alpha < 1$ olduqda $\frac{\cos^2 x}{x^\alpha} \geq \frac{\cos^2 x}{x}$ olduğundan, teorem 26.1-ə görə

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx$ integralı da dağılır.

Misal 2. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$ integralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün $\sin^2 x \leq 1$ olduğundan aydındır ki, $1+x^2 \sin^2 x \leq 1+x^2$

bərabərsizliyi doğrudur. Axıncı bərabərsizlikdən $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün

$$\frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2}$$

bərabərsizliyini alarıq. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ integralı dağılan

olduğundan, teorem 26.1-ə görə baxılan integral dağılır.

§27. I növ qeyri-məxsusi integralın yığılması üçün kafi şərt

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında ixtiyari işarəli qiymətlər alır.

Teorem 27.1. (Ümumi müqayisə əlaməti). Fərz edək ki, $a \leq x < +\infty$ aralığında

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (27.1)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda:

1) Əgər $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralı yığılırsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ integralı dağılırsa, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralı da dağılır.

İsbatı. Bu teoremin isbatı bilavasitə teorem 26.1-dən alınır. Bununla belə, bu teoremi Koşi kriteriyasından istifadə etməklə isbat edək. Fərz edək ki, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ I növ qeyri-məxsusi integralı yığılır. Onda Koşi meyarına görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists M(\varepsilon) > a$ var ki, $A_1 > M$, $A_2 > M$ bərabərsizliyin ödəyən istənilən A_1 və A_2 ədədləri üçün

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

olacaqdır. (27.1) bərabərsizliyinə və müəyyən integralın məlum xassəsinə görə

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Sonuncu bərabərsizlikdən alırıq ki,

$$\forall A_1 > M, \forall A_2 > M \text{ olduqda, } \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \text{ Başqa sözlə,}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ inteqralı yığılır.}$$

Qeyd. (27.1) bərabərsizliyinin bütün $[a, +\infty)$ aralığında doğruluğu hökm deyil. Kifayətdir ki, elə $b > a$ ədədi olsun ki, $[b, +\infty)$ aralığında (27.1) bərabərsizliyi doğru olsun.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \text{ bərabərliyinə görə } \int_a^b f(x) dx$$

sonlu kəmiyyəti $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralının yığılmasına və

dağılmasına təsir edə bilməz. Ona görə də $\int_b^{+\infty} f(x) dx$

inteqralının yığılmasından, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralının yığılması alınır.

Teorem 27.1-də $g(x)$ funksiyası olaraq xüsusi halda

$\frac{c}{x^\alpha}$ -funksiyası qəbul etsək, aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə. (Müqayisə əlamətinin xüsusi halı). Fərz edək ki,

$0 < a \leq x < +\infty$ aralığında $f(x)$ funksiyası üçün $|f(x)| < \frac{c}{x^\lambda}$ bərabərsizliyi ödənilir, burada $c > 0$ və $\lambda > 1$ müəyyən sabit ədədlərdir. Onda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılır. Əgər $\lambda \leq 1$

olduqda elə $c > 0$ sabiti varsa ki, $0 < a \leq x < +\infty$ aralığında $|f(x)| \geq \frac{c}{x^A}$ bərabərsizliyi ödənilir, onda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ dağılır.

Tərif. Əgər $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ inteqralı yığılırsa, onda deyirlər ki, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı mütləq yığılandır. Bu halda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallanandır.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılan, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ inteqralı isə dağılan olduqda deyirlər ki, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı şərti yığılandır.

Aşkar $f(x) \leq |f(x)|$ bərabərsizliyindən alınır ki, mütləq yığılan inteqral şərti yığılandır. Lakin şərti yığılan inteqralın mütləq yığılan olduğunu hökm etmək olmaz.

Bu fakta dair aşağıda misal göstəriləcəkdir (bax, § 28, misal 1).

Mütləq yığılan qeyri-məxsusi inteqralın aşağıdakı sadə xassəsini qeyd edək.

Lemma. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallanırsa, $g(x)$ funksiyası isə bu aralıqda məhduddursa, onda $f(x) \cdot g(x)$ hasili $[a, +\infty)$ aralığında mütləq inteqrallanandır.

İsbatı. Doğurdan da, Riman mənadı inteqrallanan iki funksiyanın hasili Riman mənadı inteqrallanan olduğundan,

$\forall A > a$ üçün sonlu $[a, A]$ parçasında $\int_a^A f(x)g(x) dx$ inteqralı

vardır və deməli, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralından danışmaq olar.

$g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında məhdud olduğundan elə $c > 0$ sabiti var ki, istənilən $x \in [a, +\infty)$ üçün $|g(x)| \leq c$ bərabərsizliyi və deməli,

$$|f(x)g(x)| \leq c|f(x)|$$

bərabərsizliyi ödənəcəkdir. Onda $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ inteqralı yığılan

olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx$ inteqralı yığılandır.

Misal 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Əvvəlcə $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ inteqralının yığıldığını göstərək.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^A = \frac{\pi}{2} \quad \cdot \quad \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

olduğundan və $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ inteqralı yığıldığı üçün teorem 27.1-ə

görə $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ inteqralı yığılır.

Misal 2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\int_0^A e^{-x^2} dx$ inteqralının (Puasson inteqralı) elementar funksiyalarla ifadə olunmadığı məlumdur. Əvvəlcə $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ inteqralının yığılmasını araşdıraraq.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$$

olduğundan, $\int_0^A e^{-x} dx$ -inteqralı yığılır.

$x > 1$ olduqda $e^{-x^2} < e^{-x}$ olduğundan, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ inteqralı yığılır.

Onda teorem 27.1-dən sonrakı qeydi nəzərə alsaq, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ inteqralı da yığılır. İnteqralaltı funksiya cüt olduğundan $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ inteqralı da yığılır. Ona görə də $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ inteqralı yığılır.

Misal 3. $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Mümkün olan üç hala baxaq. 1) $\alpha > 1$, 2) $\alpha = 1$, 3) $\alpha < 1$.

1) $\alpha > 1$ olsun, onda $\alpha = 1 + 2\delta$, $\delta > 0$ yazı bilərik.

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}} g(x), \quad g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x}$$

qəbul edək. İxtiyari β üçün $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} = 0$. Ona görə də elə

$x_0 > 2$ var ki, $x \geq x_0$ olduqda $0 < g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} < 1$. Sonuncu

bərabərsizlikdən alırıq ki, $x \in [x_0, +\infty]$ olduqda $0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta}}$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda $\delta > 0, x_0 > 2$ olduqda $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}$

inteqralı yığıldığından, $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılır. Ona görə

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\delta \ln^\beta x}$ inteqralı da yığılır.

2) $\alpha = 1$ olsun. Onda, $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$ inteqralında $\ln x = t$

əvəzləməsi aparsaq, $\int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ alırıq.

Məlumdur ki, $\beta > 1$ olduqda sonuncu inteqral yığılır. Deməli $\alpha = 1$ halında $\beta > 1$ olduqda J inteqralı yığılır, $\beta \leq 1$ olduqda dağılır.

3) $\alpha < 1$ olsun. Onda α ədədini $\alpha = 1 - 2\delta$, $\delta > 0$ şəklində

yaza bilərik. $f(x) = \frac{1}{x^{1-\delta}} g(x)$, $g(x) = x^\delta (\ln x)^{-\beta}$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Ona görə də $x \geq x_0 > 2$ olduqda $g(x) > 1$

yaza bilərik. $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\delta}} dx$ ($\delta > 0$) inteqralı dağıldığından,

$|f(x)| > \frac{1}{x^{1-\delta}}$ bərabərsizliyinə əsasən deyə bilərik ki,

$J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ -integralı dağılır. (bax, teorem 27.1-dən çıxan nəticə).

Nəticədə alırıq ki, J -integralı $\alpha > 1$, β ixtiyari olduqda və $\alpha = 1$, $\beta > 1$ olduqda yığılır, qalan hallarda dağılır.

§28. I növ qeyri-məxsusi integral üçün hissə-hissə integrallama düsturu və dəyişənin əvəz edilməsi.

Birinci növ qeyri – məxsusi integrallar üçün hissə - hissə integrallama düsturunu isbat edək.

Teorem 28.1. Fərz edək ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $[a, +\infty)$ aralığında kəsilməz törəmələrə malikdir və $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = L$ sonlu limiti vardır.

Onda,

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx \quad \text{və} \quad \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \quad (28.1)$$

integrallarının birinin yığılması digərinin də yığılmasını təmin edir və

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \quad (28.2)$$

düsturu doğrudur.

İsbati. İxtiyari $[a, A]$ parçasına baxaq. Bu parçada $u(x)v'(x)$ və $u'(x)v(x)$ funksiyası kəsilməzdir. Ona görə də, müəyyən integral üçün $[a, A]$ parçasında hissə-hissə integrallama düsturuna əsasən

$$\int_a^A u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^A - \int_a^A u'(x)v(x)dx$$

$u(x)v(x)\Big|_a^A = u(A)v(A) - u(a)v(a)$ ifadəsinin $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitini hesablayaq.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} u(x)v(x)\Big|_a^A = L - u(a)v(a).$$

(28.3) bərabərliyindən alarıq ki, (28.1) integrallarından birinin yığılması digərinin yığılmasını təmin edir və (28.2) düsturu doğrudur.

Teorem 28.2. Fərz edək ki,

- 1) $f(x)$, $[a, +\infty)$ yarımxunda kəsilməzdir;
- 2) $x = \varphi(t)$ $[\alpha, +\infty)$ (və yaxud $(-\infty, \alpha]$) aralığında təyin olunmuş kəsilməz diferensiallanan, ciddi monoton funksiya və qiymətləri çoxluğu $[a, +\infty)$ aralığına daxildir;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$.

Onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ və $\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (yaxud

$\int_{-\infty}^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$) integrallarının birinin yığılması digərinin

yığılmasını təmin edir və $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

(yaxud $\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$)

İsbatı. Doğrudan, $\forall A > a$ üçün $[a, A]$ parçasında müəyyən integral üçün dəyişənin əvəz olunması teoreminin bütün tələbləri ödənilir. $\varphi(t)$ monoton olduğundan elə $[\alpha, \tau]$ parçası var ki, $t \in [\alpha, \tau]$ olduqda $x = \varphi(t)$ funksiyanın qiymətləri çoxluğu $[a, A]$ parçasını doldurur və $\varphi(\tau) = A$. Ona görə də $\varphi'(t) > 0$ olduqda

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (28.4)$$

$\varphi'(t) < 0$ olduqda

$$\int_a^A f(x)dx = -\int_\tau^a f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (28.5)$$

bərabərliyi doğrudur.

$x = \varphi(t)$ monoton olduğundan, $\varphi'(t) > 0$ olduqda $A \rightarrow +\infty$ olması $\tau \rightarrow +\infty$ olması ilə ekvivalentdir. $\varphi'(t) < 0$ olduqda $A \rightarrow +\infty$ və $\tau \rightarrow -\infty$ şərtləri ekvivalentdir. Ona görə də (28.4) və (28.5) bərabərliklərində $A \rightarrow +\infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

və ya

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^a f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

bərabərliklərini alırıq.

Misal 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi integralının mütləq və

şərti yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan, integralaltı funksiyanı

$x = 0$ nöqtəsinə kəsilməz davam etdirmək olar. Alınan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

funksiyası $[0, +\infty)$ aralığında kəsilməz funksiya olduğundan, istənilən $[0, A]$ ($A > 0$) parçasında Riman mənada

İnteqrallananıdır və deməli, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi

İntegralının mənası vardır. Aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ və

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi İnteqralları eyni zamanda yığılır və ya dağılır.

Göstərək ki, bu İntegral yığılandır. Hissə-hissə İnteqrallama düsturunu tətbiq edək.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \left. \frac{\cos x}{x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ bərabərsizliyinin doğruluğundan və $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ qeyri-məxsusi İntegralının yığılmasından, ümumi müqayisə əlamətinə görə (bax, teorem 27.1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ qeyri-məxsusi İntegralı

yığılandır. Deməli, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-məxsusi İntegralı

yığılandır. İndi göstərək ki, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ İntegralı mütləq yığılan

deyildir, başqa sözlə $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ qeyri-məxsusi İntegralı

dağılındır. Əksini fərz edək. Tutaq ki, bu qeyri-məxsusi İntegral yığılandır. Aşağıdakı aşkar

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bərabərsizliyindən istifadə edək. Aydındır ki, əgər $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılan olarsa, onda ümumi müqayisə əlamətinə görə (bax, teorem 27.1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ və deməli,

$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılardı.

Onda, sonuncu qeyri-məxsusi inteqralın üzərinə yığılan $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralını əlavə etsək, alınan

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

qeyri-məxsusi inteqralı da yığılan olardı. Bu qeyri-məxsusi inteqral isə dağılındır. Alınan ziddiyyət onu göstərir ki,

$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılındır. Deməli,

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ inteqralı da dağılındır. Beləliklə, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qeyri-

məxsusi inteqralı şərti yığılındır.

Misal 2. İsbat edin ki, $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ qeyri-məxsusi

inteqralı yığılındır.

Həlli. $x = \sqrt{t}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki qeyri-məxsusi inteqralı iki inteqralın cəmi şəklində göstərək:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ olduğundan, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ inteqralı məxsusi

inteqraldır. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ inteqralına hissə-hissə inteqrallama

düsturunu tətbiq edək. $u = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $dv = \sin t dt$ götürək.

$du = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt$, $v = -\cos t$ olar. Onda

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{\sqrt{t}} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$$

$\left| \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ olduğundan və $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılan olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə görə

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ inteqralı mütləq yığılandır və deməli yığılandır.

Analoji qayda ilə isbat etmək olur ki, $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

inteqralı da yığılandır. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ və $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ inteqralları

riyazi ədəbiyyatlarda Frenel integralları adlanır və difraksiya nəzəriyyəsində rast gəlinir.

Qeyd 1. Yuxarıda baxdığınız $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ Frenel integralı yığılandır, ancaq aydındır ki, $f(x) = \sin x^2$ funksiyasının $x \rightarrow +\infty$ şərtində limiti yoxdur. Bu misal onu göstərir ki, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralının yığılan olmasına əsaslanıb, $x \rightarrow +\infty$ şərtində $f(x)$ -in sıfıra yaxınlaşmasını hökm etmək olmaz.

Misal 3. İsbat edin ki, $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralı yığılandır.

Həlli. $I = \int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralında $x^2 = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ alırıq. Yuxarıda göstərdik ki, bu integral yığılandır. Beləliklə, verilmiş $\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^4 dx$ integralı yığılandır.

Qeyd 2. Aydındır ki, $f(x) = x \cdot \cos x^4$, $x \in [0, +\infty)$ funksiyası məhdud deyildir. Bu misal onu göstərir ki, əgər $f(x)$ funksiyası $x \rightarrow +\infty$ şərtində qeyri-məhdud olduqda da $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integralı yığıla bilər.

Misal 4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $\sqrt{x} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x = t^2$, $dx = 2t dt$ və

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+100} \cos t^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{100}{t^2+100} \right) \cos t^2 dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt - 200 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt \end{aligned}$$

olar. Yuxarıda göstərdik ki, $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır. Digər tərəfdən aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt$ qeyri-

məxsusi inteqralı yığılandır. Doğurdan da, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+100}$ qeyri-

məxsusi inteqralı yığılan olduğundan və $g(t) = \cos t^2$ funksiyası məhdud olduğundan, onda §27-də isbat olunan lemmaya əsasən,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2+100} dt$$

inteqralı yığılandır. Beləliklə, baxılan inteqral yığılandır.

Göstərək ki, bu inteqral mütləq yığılan deyildir, yəni

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$$

inteqralı dağılındır. Əksini fərz edək. Tutaq ki, bu inteqral yığılandır. Aşkar $\cos^2 x \leq |\cos x|$ bərabərsizliyindən istifadə edək. $\forall x \in [0, +\infty)$ üçün

$$\frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} \leq \frac{\sqrt{x}}{x+100} |\cos x|$$

bərabərsizliyi doğru olduğundan, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ inteqralı və deməli $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$ inteqralı yığılardı. Sonuncu inteqralı iki inteqralın cəmi şəklində yazaq:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx.$$

Aydındır ki, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$ inteqralı dağılındır. Ona görə

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ inteqralı yığıla bilməz. Bu isə onu göstərir ki,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$ inteqralı dağılındır. Beləliklə, baxılan inteqral

mütləq yığılan deyildir, şərti yığılındır.

§29. I növ qeyri-məxsusi inteqral üçün Dirixle və Abel əlamətləri

Teorem 29.1. (Dirixle əlaməti). Fərz edək ki, $[a, +\infty)$ aralığında

1) $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir və istənilən sonlu $[a, A]$ ($A > a$) parçasında məhdud ibtidai funksiyası vardır.

2) $g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında kəsilməz diferensiallanandır, azalandır və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşır: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (29.1)$$

qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır.

İsbatı. Teoremin şərtinə görə $f(x) \cdot g(x)$ hasili kəsilməzdir və deməli bu funksiya istənilən $[a, A]$ ($A > a$) parçasında Riman mənada inteqrallananıdır. Ona görə də $f(x) \cdot g(x)$ funksiyasının qeyri-məxsusi inteqralından danışmaq olar.

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyasına baxaq. Teoremin şərtinə görə $F(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında məhduddur, yəni elə $M > 0$ ədədi var ki, $\forall x \in [a, +\infty)$ üçün $|F(x)| \leq M$ bərabərsizliyi ödənilir.

$\int_a^A f(x)g(x)dx$ ($a < A < +\infty$) inteqralına hissə - hissə inteqrallama düsturuna tətbiq edək

$$\begin{aligned} \int_a^A f(x)g(x)dx &= \int_a^A g(x)dF(x) = \\ &= F(A)g(A) - F(a)g(a) - \int_a^A F(x)g'(x)dx. \end{aligned} \quad (29.2)$$

$g(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ aralığında azalan olduğundan $[a, +\infty)$ aralığında $g'(x) \leq 0$ bərabərsizliyi doğrudur. Onda

$$\begin{aligned} \int_a^A |F(x)g'(x)|dx &\leq M \int_a^A |g'(x)|dx = -M \int_a^A g'(x)dx = \\ &= -M(g(A) - g(a)) = M(g(a) - g(A)) \leq Mg(a). \end{aligned}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Çünki, $g(x)$ azalan və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşmasından alınır ki, $g(x) \geq 0$ olmalıdır. Deməli, xüsusi halda $g(A) \geq 0$.

Beləliklə, $\int_a^A |F(x)g'(x)| dx$ inteqralları $\forall A > a$ üçün məhduddur.

Onda aydındır ki, §26, lemma 1-ə görə $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x) dx$ inteqralı mütləq yığılandır və deməli, yığılandır. Ona görə,

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A F(x)g'(x) dx$ limiti var və sonludur.

$|F(A)| \leq M$ olduğundan və $A \rightarrow +\infty$ şərtində $g(A) \rightarrow 0$ olduğundan, $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)g(A) = 0$.

Beləliklə, (29.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hər iki toplananın $A \rightarrow +\infty$ şərtində sonlu limiti vardır. Deməli (29.1) inteqralı yığılandır. Teorem isbat olundu.

Teorem 29.2. (Abel əlaməti). Tutaq ki, $[a, +\infty)$ aralığında

1) $f(x)$ kəsilməzdir və $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı

yığılandır

2) $g(x)$ kəsilməz differensiallanan, məhduddur və monotondur.

Onda $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ inteqralı yığılandır.

İsbatı. Göstərək ki, Abel əlaməti Dirixle əlamətindən alınır. Aydındır ki, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ və $\int_a^{+\infty} f(x)[-g(x)] dx$

inteqralları eyni zamanda yığılır və yaxud dağılır. $g(x)$ funksiyası monoton olduğundan, $g(x)$ və $-g(x)$ funksiyalarından biri azalandır. Müəyyənlik üçün tutaq ki, $g(x)$ azalandır. $g(x)$ monoton azalan və məhdud olduğundan onun sonlu limiti vardır: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = c$ olsun. Onda aydındır ki,

$g(x) - c$ fərqi $x \rightarrow +\infty$ şərtində monoton azalandır və sıfıra yaxınlaşır. $f(x) \cdot g(x)$ hasilini aşağıdakı şəkildə göstərək

$$f(x) \cdot g(x) = f(x)[g(x) - c] + cf(x) \quad (29.3)$$

Teoremin birinci şərtinə görə $\int_a^{+\infty} c f(x) dx$ inteqralı yığılandır.

Teoremin birinci şərtindən alınır ki, $x \geq a$ olduqda

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ inteqralları məhduddur. Doğurdan da,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

sonlu limitin varlığından çıxır ki, $F(x)$ funksiyası $+\infty$ sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin müəyyən $u(+\infty) = \{x : x > b\}$ ətrafında məhduddur. $[a, b]$ parçasında $F(x)$ kəsilməz olduğundan məhduddur. $F(x)$, $f(x)$ -in $[a, +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyadır. Deməli, $f(x)$ -in $[a, +\infty)$ aralığında məhdud ibtidai

funksiyası vardır. Beləliklə, $\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - c] dx$ inteqralı üçün

Dirixle əlamətinin bütün şərtləri ödənilir. Onda (29.3)

bərabərliyinə əsasən hökm edirik ki, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ inteqralı

yığılandır. Teorem isbat olundu.

Misal 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ ($\alpha > 0$)- inteqralının şərti və mütləq yığılmasını araşdırın.

Həlli. $f(x) = \cos x$ olsun. Aydındır ki, bu funksiyanın $[1, +\infty)$ aralığında $F(x) = \sin x$ məhdud ibtidai funksiyası vardır. $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ götürək. Aydındır ki, bu funksiya $\alpha > 0$ olduqda monoton azalandır və $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Onda baxılan bu qeyri-məxsusi inteqral Dirixle əlamətinə görə yığılandır.

Misal 2. $J = \int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos(e^{2x}) dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $e^{2x} = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x = \frac{1}{2} \ln t$,

$dx = \frac{dt}{2t}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = +\infty \Rightarrow t = +\infty$ olar. Onda

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos(e^{2x}) dx = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2} \ln t \right) \cos t \frac{dt}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \cos t dt. \end{aligned}$$

$\cos t$ funksiyanın $[1, +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyası məhduddur: $|\sin x| \leq 1$. $\frac{1}{\sqrt{t}}$ və $\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ funksiyaları $t \rightarrow +\infty$

şərtində sıfıra yaxınlaşır. Dirixle əlamətinə görə bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki inteqral yığılır. Ona görə də baxılan inteqral yığılır. Mütləq yığılmanı araşdıraraq.

$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right)$ olsun. Onda

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} |\cos t| \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \varphi(t) |\cos t| dt \text{ olar.}$$

$$t \geq 1 \quad \text{olduqda} \quad \varphi(t) \geq \frac{1}{2}, \quad |\cos t| \geq \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\text{olduğundan, } \varphi(t) |\cos t| \geq \frac{1 + \cos 2t}{4t} \text{ olar.}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos 2t}{4t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt$$

$$\text{Aydındır ki, } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt \text{ -integralı yığılır, } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{4t} \text{ integralı isə}$$

$$\text{dağılır. Ona görə də } \int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos 2t}{4t} dt \text{ integralı dağılır.}$$

Deməli, ümumi müqayisə əlamətinə görə $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} |\cos t| \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right)$ integralı dağılır. Beləliklə, baxılan integral yalnız şərti yığılandır.

§ 30. II növ qeyri-məxsusi integrallar.

Əvvəlki paraqraflarda integrallama aralığı sonsuz olduqda qeyri-məxsusi integral anlayışı təyin etdik. İndi isə integrallama aralığında funksiyanın qeyri-məhdud olduğu hala baxaq.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında təyin olunub. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında qeyri-məhdud, bu aralıqda yerləşən ixtiyari $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) parçasında məhdud-dursa, onda b - nöqtəsinə $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsi deyəcəyik.

Tutaq ki, hər bir $[a, b - \varepsilon] \subset [a, b)$ parçasında $f(x)$ inteq-rallanandır. Onda $[a, b - \varepsilon]$ parçasında aşağıdakı bərabərliklə ε -dan asılı funksiya təyin edək.

$$F(\varepsilon) := \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Tərif. Əgər $F(\varepsilon)$ funksiyanın $\varepsilon = 0$ nöqtəsində sonlu sağ limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyanın $[a, b]$ parçasında II növ qeyri-məxsusi inteqralı deyilir və simvolik olaraq

$$\int_a^b f(x) dx \quad (30.1)$$

kimi işarə olunur.

Beləliklə,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (30.2)$$

Bu halda deyirlər ki, (30.1) qeyri – məxsusi inteqralı yığılandır və $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında qeyri – məxsusi mənada inteqrallanandır. Əgər $F(\varepsilon)$ funksiyanın sonlu sağ limiti yoxdursa, onda deyirlər ki, (30.1) qeyri – məxsusi inteqralı dağılıandır.

a -nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda, II növ qeyri – məxsusi inteqral

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \rightarrow 0+} \int_{a+\xi}^b f(x) dx$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər $[a, b]$ parçasının sonlu sayda daxili nöqtəsi $f(x)$ funksiyanın məxsusi nöqtəsidirsə, onda bu halda da II növ qeyri – məxsusi inteqral anlayışı təyin etmək olar.

Sadəlik üçün tutaq ki, $[a, b]$ parçasının a və b uc nöqtələri və $c \in (a, b)$ daxili nöqtəsi $f(x)$ funksiyanın məxsusi nöqtələridir. Onda

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[\int_{a+\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_2} f(x) dx + \lim_{\substack{\varepsilon_3 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_4 \rightarrow 0}} \int_{c+\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} f(x) dx \right].$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ε_i ($i = \overline{1,4}$) dəyişənlərinin biri digərindən asılı olmayaraq sıfıra yaxınlaşır.

Müəyyənlik üçün (30.2) bərabərliyi ilə təyin olunan II növ qeyri – məxsusi integralları öyrənəcəyik.

Misal 1. Göstərin ki, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyasının

$[0, 1)$ yarımintervalında qeyri-məxsusi integralı yığılandır.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi bu funksiya üçün məxsusi nöqtədir. Onda, tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ aralığında təyin olunmuşdur hər bir $[a, b-\varepsilon]$ parçasında kəsilməzdir və $x = b$ $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsidir. Əgər $f(x)$ -in $[a, b)$ aralığında $F(x)$ ibtidai funksiyası varsa, onda

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = F(b-\varepsilon) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon}. \quad (30.3)$$

Beləliklə, b nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi integralın varlığı, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b-\varepsilon)$ limitinin sonlu olmasına ekvivalentdir. Əgər sonuncu limit varsa, onda təbii olaraq bu limit $F(x)$ ibtidai funksiyasının $x = b$ nöqtəsində

$F(b)$ qiyməti kimi qəbul olunur və bununla da, $F(x)$ funksiyasının bütün $[a, b]$ parçasında kəsilməzliyi təmin olunur. Əgər (30.3) bərabərliyində $\varepsilon \rightarrow 0 +$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a) \quad (30.4)$$

alırıq. (30.4) düsturuna b məxsusi nöqtə olduqda II növ qeyri-məxsusi integral üçün Nyuton-Leybnis düsturu deyilir.

(30.4) düsturunda nəzərdə tutulur ki, $f(x)$ funksiyası hər bir $[a, b - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b - a$) parçasında Riman mənada inteqrallanırdır. (a, b) aralığının daxili nöqtəsində $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsi varsa, onda, ümumiyyətlə desək, (30.4)

düsturu doğru olmaya bilər. Məsələn, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ inteqralında $x = 0$

nöqtəsi inteqralaltı $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir

və $x = 0$ nöqtəsində $f(x) \rightarrow \infty$ -a çevrilir. Əgər $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ inteqralını

formal olaraq Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etsək, onda

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ alırıq. Digər tərəfdən $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ inteqralını

aşağıdakı kimi iki inteqralın cəmi şəklində yazsaq,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2},$$

bilavasitə tərifdən istifadə etməklə, asanlıqla inanmaq olar ki,

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ və $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ inteqrallarının hər ikisi dağılındır. Doğrudan

da,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) = -\infty.$$

Beləliklə, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralma Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etmək olmaz. Bununla əlaqədar olaraq, ümumiləşmiş ibtidai funksiya anlayışı verək.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla müəyyən bir $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Əgər $[a, b]$ parçasında kəsilməz elə $F(x)$ funksiyası varsa ki, həmin sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir, onda $F(x)$ -ə $f(x)$ -in $[a, b]$ parçasında ümumiləşmiş (genişlənmiş), ibtidai funksiyası deyilir.

Qeyd. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda ibtidai funksiya üçün verilən bu “yeni” tərif, “əvvəlki” təriflə üst-üstə düşür. Doğrudan da, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də kəsilməz olarsa və $F(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də $f(x)$ -in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $\forall x \in [a, b]$ üçün $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi doğrudur. $F(x)$ -in kəsilməzliyi isə onun diferensiallanmasıdan alınır.

Asanlıqla inanmaq olar ki, $F(x) = |x|$ funksiyası $f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiyasının ümumiləşmiş ibtidai funksiyasıdır. Həqiqətən, $F(x)$ $[-1, 1]$ parçasında kəsilməzdir və $x \neq 0$ olduqda $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir.

Məlumdur ki, bu funksiyanın “əvvəlki” tərif mənada ibtidai funksiyası yoxdur. Bununla belə bu funksiya $[-1, 1]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz olduğundan inteqrallandır.

Ümumiləşmiş ibtidai funksiya haqda aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 30.1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda $f(x)$ funksiyanın $[a, b]$ parçasında $F(x)$ ümumiləşmiş ibtidai funksiyası vardır və bu parçada

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (30.5)$$

Nyuton-Leybnis düsturu doğrudur.

Teorem 30.1-dən aydın olur ki, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ inteqralında Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq etməyin mümkün olmaması, formal olaraq tapılmış $F(x) = \frac{1}{x}$ ibtidai funksiyanın $[-1, 1]$ parçasında kəsilməzlik şərtinin pozulması ilə əlaqədardır. Başqa misala müraciət edək.

$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ inteqralında $x = 0$ nöqtəsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir. Bu funksiyanın $[-1, 8]$ parçasında formal olaraq ibtidai funksiyası $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ funksiyasıdır və $F(x)$ $[-1, 8]$ parçasında kəsilməzdir. Ona görə də bu qeyri-məxsusi inteqral üçün (30.5) düsturu doğrudur:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^8 = \frac{3}{2} \left(8^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{9}{2}.$$

II növ qeyri-məxsusi integral üçün hissə-hissə integrallama metodu və dəyişənin əvəz edilməsi metodu haqda aşağıdakı teoremləri qeyd edək.

Teorem 30.2. Tutaq ki, $u = u(x)$ və $v = v(x)$ funksiyaları $[a, b]$ aralığında kəsilməz diferensiallanandır. Onda

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (30.6)$$

bərabərliyi doğrudur. (30.6) bərabərliyindəki ifadələrdən ixtiyari ikisinin varlığından digərinin də varlığı çıxır.

Teorem 30.3. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ aralığında kəsilməzdir və $\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ aralığında kəsilməz diferensiallanandır, belə ki, $\alpha \leq t < \beta$ olduqda $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < b = \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$ münasibəti ödəyir. Onda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (30.7)$$

Misal 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ qeyri məxsusi integralını hesablayın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi integralaltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir. $x = \sin t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$. (30.6) düsturuna görə

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Misal 3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ integralinin yığılmasını

müəyyənləşdirin və onu hesablayın.

Həlli. (30.6) hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edək. $u = \ln(\sin x)$, $dx = dv$ qəbul edək. Onda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = x \ln(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Burada,

$$\begin{aligned} x \ln(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} x \ln(\sin x) \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \cdot \ln \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0$ olduğundan,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$ integralı məxsusi integraldır. Beləliklə, baxılan

integral yığılandır. İndi isə verilmiş qeyri məxsusi integralı hesablayaq. $x = 2t$ əvəzləməsi aparaq. $dx = 2 dt$;

$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Onda (30.7) düsturuna görə

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln(\sin t) + \ln(\cos t)) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt.
 \end{aligned}$$

Sonuncu integralda $t = \frac{\pi}{2} - z$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$dt = -dz; t = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4}. \text{ Deməli,}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right) dz = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz.$$

Beləliklə,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J$$

Buradan,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Misal 4. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, $\lambda > 0$ integralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. İntegralaltı ifadədən görünür ki, $x = b$ məxsusi nöqtədir. Aydındır ki, inteqralaltı funksiya istənilən $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) parçasında Riman mənada inteqrallanandır.

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda} - \varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \text{ olduqda,} \\ \ln(b-a) - \ln \varepsilon, & \lambda = 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

$0 < \lambda < 1$ olduqda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

sonludur.

$\lambda \geq 1$ olduqda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

sonlu limiti yoxdur. Ona görə də baxılan inteqral $0 < \lambda < 1$ olduqda yığılır. $\lambda \geq 1$ olduqda dağılır.

Yuxarıda qeyd etdik ki, b nöqtəsi məxsusi nöqtə olduqda II növ qeyri-məxsusi inteqralın yığılması məsələsi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b-\varepsilon)$ sonlu limitinin olmasına ekvivalentdir. Ona görə də bu halda funksiya limitinin varlığı üçün Koşi meyarından II növ qeyri-məxsusi inteqralın varlığı üçün Koşi meyarını ala bilərik.

Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ yarımintervalında təyin olunmuşdur, b - onun məxsusi nöqtəsidir.

Teorem 30.4. $\int_a^b f(x)dx$ ikinci növ qeyri-məxsusi

inteqralın yığılması üçün $\forall \varepsilon > 0$ verildikdə $0 < \alpha'' < \alpha' < b$ bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari α', α'' ədədləri üçün

$$\left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyini təmin edən $\delta > 0$ ədədinin varlığı zəruri və kafidir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi integralı yığılır. Onda $F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x) dx$ bərabərliyi ilə təyin olunan $F(\alpha)$ funksiyası üçün $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha)$ -var. Limitin varlığı haqda Koşi meyarına görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən α', α'' üçün

$$|F(\alpha'') - F(\alpha')| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Beləliklə alırıq ki,

$$|F(\alpha') - F(\alpha'')| = \left| \int_a^{b-\alpha'} f(x) dx - \int_a^{b-\alpha''} f(x) dx \right| = \left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Kafilik. Fərz edək ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$ olduqda

$$\left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$\begin{aligned} \left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^{b-\alpha'} f(x) dx - \int_a^{b-\alpha''} f(x) dx \right| = \\ &= |F(\alpha') - F(\alpha'')| < \varepsilon \end{aligned}$$

Koşi meyarına görə sonlu $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha)$ limiti vardır. Ona

görə $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılır.

Misal 5. $\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$ qeyri-məxsusi inteqralını

hesablayın.

Həlli. $x = a$ nöqtəsində inteqralaltı funksiya sonsuzluğa çevrilir. $x = a$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. Verilmiş inteqralı aşağıdakı kimi iki inteqralın cəmi şəklində yazaq:

$$\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} + \int_a^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$x = a$ nöqtəsi bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki inteqral üçün məxsusi nöqtədir. Onda tərifi görə

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{d(x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left. \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_0^{a-\varepsilon} = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\left((a-\varepsilon)^2 - a^2 \right)^{\frac{1}{3}} - (-a^2)^{\frac{1}{3}} \right] = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-2a\varepsilon + \varepsilon^2 + \sqrt[3]{a^2} \right) = 3\sqrt[3]{a^2}; \\ \int_a^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^{3a} \frac{d(x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left. (x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right|_{a+\varepsilon}^{3a} = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[(9a^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} - \left((a+\varepsilon)^2 - a^2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \end{aligned}$$

$$= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[(8a^2)^{\frac{1}{3}} - (2a\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{3}} \right] = 3\sqrt[3]{8a^2} = 6\sqrt[3]{a^2}.$$

Beləliklə,

$$\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{a^2} + 6\sqrt[3]{a^2} = 9\sqrt[3]{a^2}.$$

Misal 6. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ qeyri-məxsusi integralını

hesablayın.

Həlli. $x = 1$ və $x = 3$ nöqtələri integralaltı funksiyanın məxsusi nöqtələridir. Bu integralı aşağıdakı kimi iki integralın cəmi şəklində göstərək:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

Qeyd edək ki, bu bərabərlikdə $x = 2$ nöqtəsi əvəzinə $[1, 3]$ parçasına daxil olan istənilən nöqtə götürülə bilər. Hər iki integralı hesablayaq.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [0 - \arcsin(\varepsilon - 1)] = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(x-2) \Big|_2^{3-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Misal 7. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ qeyri-məxsusi inteqralım hesablayın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi inteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir, çünki $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = +\infty$. Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\sqrt{\ln 2} - \sqrt{\ln(1+\varepsilon)}) = 2\sqrt{\ln 2}. \end{aligned}$$

§31. Mənfi olmayan funksiyanın II növ qeyri-məxsusi inteqralı

Teorem 31.1. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b)$ yarımintervalında mənfi olmayan funksiya. Onda $\int_a^b f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralının yığılması üçün zəruri və kafi şərt, $\eta \in [a, b)$ olduqda $\int_a^\eta f(x)dx$ inteqrallar çoxluğunun yuxarıdan məhdud olmasıdır:

$$\int_a^\eta f(x)dx \leq M, \quad \exists M > 0, \quad \forall \eta \in [a, b]$$

İsbati. $\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ olsun. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu funksiya $[a, b)$ aralığında monoton artandır. Digər tərəfdən aydındır ki, $\int_a^b f(x)dx$ II növ qeyri-məxsusi inteqralının varlığı, tərifə əsasən

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta) = \int_a^b f(x) dx$$

sonlu limitinin varlığı ilə ekvivalentdir. Monoton funksiyanın sonlu limitinin varlığı haqqında məlum teoremə görə isə sonuncu limitin sonlu olması üçün zəruri və kafi şərt $\varphi(\eta)$ funksiyaının yuxarıdan məhdud olmasıdır.

Qeyd. Əgər $\lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta)$ sonlu limiti yoxdursa onda bu limit $+\infty$ -a bərabərdir ($\varphi(\eta)$ yuxarıdan qeyri-məhdud olduqda). Bu halda $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ götürülür.

Teorem 31.2. (müqayisə əlaməti). Tutaq ki, $[a, b)$ aralığında

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad (31.1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Onda:

1) Əgər $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa, $\int_a^b g(x) dx$ inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^b g(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılırsa, $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı da dağılır.

İsbatı. (31.1) bərabərsizliyinə görə $\forall \eta \in [a, b)$ üçün

$$\int_a^{\eta} g(x) dx \leq \int_a^{\eta} f(x) dx$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əgər $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılırsa, onda teorem 31.1-ə görə $\int_a^\eta f(x)dx$ inteqralları $\forall \eta \in [a, b)$ üçün yuxarıdan məhduddur və deməli, həm də $\int_a^\eta g(x)dx$ inteqralı $\forall \eta \in [a, b)$ üçün məhduddur. Onda teorem 31.1-ə görə $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılıdır.

Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılırsa, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığıla bilməz. Çünki, əks halda teoremin isbat olunmuş birinci hissəsinə görə $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılardı. Bu isə ola bilməz. Deməli, $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılındır. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı mühüm nəticə alınır.

Nəticə. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a, b)$ aralığında mənfi olmayan funksiyalardır və $\forall x \in [a, b)$ üçün $g(x) > 0$ və sonlu və yaxud sonsuz

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

limiti vardır.

Onda

1) Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı yığılırsa və $0 \leq K < \infty$ isə,

$\int_a^b f(x)dx$ inteqralı da yığılır.

2) Əgər $\int_a^b g(x)dx$ inteqralı dağılırsa və $0 < K \leq \infty$ isə,

$\int_a^b f(x)dx$ inteqralı da dağılır.

Xüsusi halda, əgər

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

olarsa, yəni $x \rightarrow b$ şərti daxilində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları

ekvivalent olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ və $\int_a^b g(x)dx$ inteqralları eyni

zamanda yığılır və yaxud dağılır.

Praktikada II növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırarkən bir çox hallarda inteqralaltı funksiyanı

$$\frac{1}{(x-a)^\lambda}, \quad \frac{1}{(b-x)^\lambda}, \quad \frac{1}{x^\lambda}$$

funksiyaları ilə müqayisə etmək daha münasibdir. Çünki, bu funksiyaların λ -nın hansı qiymətlərində yığılması və dağılması məlumdur. Bununla əlaqədar aşağıdakı əlaməti qeyd edək.

Müqayisə əlamətinin xüsusi halı: Tutaq ki, x -in b -yə kifayət qədər yaxın qiymətlərində $f(x)$ funksiyası aşağıdakı şəkildə göstərilmişdir:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Onda:

1) Əgər $\lambda < 1$ və $g(x) \leq c < +\infty$ olarsa, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılır.

2) Əgər $\lambda \geq 1$ və $g(x) \geq c > 0$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı dağılır.

Misal 1. Göstərin ki, $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ inteqralı dağılındır.

Həlli. $x = 0$ nöqtəsi inteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtəsidir. $(0, 1]$ yarımintervalında

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x - \sin x}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ inteqralı dağılan olduğundan,

müqayisə əlamətinə görə $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ inteqralı da dağılındır.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b]$ aralığında təyin olunmuşdur və b nöqtəsi məxsusi nöqtədir. Əgər

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

ikinci növ qeyri – məxsusi inteqralı yığılırsa, onda deyirlər ki,

$\int_a^b f(x)dx$ qeyri məxsusi inteqralı mütləq yığılındır.

Əgər $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı yığılan, $\int_a^b |f(x)|dx$ inteqralı isə

dağılırsa, onda deyirlər ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı şərti yığılındır.

İndi tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b)$ yarımintervalında ixtiyari işarəli qiymətlər alır.

Teorem 31.3. (Ümumi müqayisə əlaməti). Tutaq ki, $[a, b)$ aralığından götürülmüş istənilən x üçün

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ bərabərsizliyi ödənilir və } \int_a^b g(x) dx \text{ qeyri - məxsusi}$$

inteqralı yığılır. Onda $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı da yığılır.

Bu teoremdən alınır ki, əgər $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi inteqralı mütləq yığılandırsa, onda yığılıdır.

Misal 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi inteqralaltı $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir: $x \rightarrow 1$ şərti daxilində $\ln x = \ln[1 + (x - 1)] \sim (x - 1)$. Doğurdan da Lopital qaydasına

$$\text{görə } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1. \text{ Aydınır ki, } x \rightarrow 1 \text{ şərti daxilində}$$

$$\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x - 1}.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x - 1}$ inteqralı dağılan olduğundan, müqayisə

əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən, $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ inteqralı dağılır.

Misal 3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\infty$ olduğundan, $x=0$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir.

$x=1$ nöqtəsi isə məxsusi nöqtə deyildir. Doğrudan da, $x \rightarrow 1-0$ şərti daxilində $\ln x \sim (x-1)$ olduğundan,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{\ln x}{1-x^2}$ funksiyasını $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiyası ilə müqayisə edək.

$$\frac{\ln x}{1-x^2} = \frac{x^\lambda \ln x}{\frac{1}{x^\lambda}}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\lambda \ln x}{1-x^2}$ tapıq. Aydındır ki, $0 < \lambda < 1$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\lambda \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (1-x^2) = 1. \text{ Ona görə } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\lambda \ln x}{1-x^2} = 0.$$

$0 < \lambda < 1$ olduqda $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ yığılan olduğundan, müqayisə

əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən baxılan inteqral yığılandır.

Misal 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\sin x) = -\infty$ olduğundan, $x=0$ nöqtəsi $\ln(\sin x)$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir. İnteqralaltı funksiyanı $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiyası ilə müqayisə edək.

$\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\lambda}}$ nisbətinin $x \rightarrow 0+$ şərtində limitini tapaq. Lopital

qaydasına görə

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{-\lambda x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}}} = -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\lambda+1} \cdot \cos x}{\sin x}.$$

Sonuncu limitə Lopital qaydasını təkrar tətbiq etsək,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\lambda+1} \cdot \cos x}{\sin x} &= -\frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\lambda+1)x^\lambda \cos x - x^{\lambda+1} \sin x}{\cos x} = \\ &= -\frac{\lambda+1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\lambda + \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\lambda+1} \lg x = 0. \end{aligned}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ integralı $0 < \lambda < 1$ olduqda yığılan olduğundan,

müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə baxılan integral

yığılandır. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ integralı riyazi ədəbiyyatlarda Eyler

integralı adlanır. Bu misal §30-da bilavasitə tərifdən istifadə etməklə hesablanmışdır. Burada, məqsəd müqayisə əlamətinin tətbiqini göstərməkdir.

Misal 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ integralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. Göstərək ki, $x=0$ nöqtəsi integralaltı $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$

funksiyasının məxsusi nöqtəsidir.

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ limitini hesablayaq. $x \rightarrow 0$ şərtində $\sin x \sim x$

olduğundan, $\ln(\sin x) \sim \ln x$. Ona görə $J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ limitini

hesablamaq kifayətdir.

$J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{x}$ şəklində yazaq. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x = 0$

olduğundan, Lopital qaydasını tətbiq etməklə,

$$J = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x} \cdot \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ = \frac{1}{2} J + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

alırıq. Buradan, $J = +\infty$ alırıq. Beləliklə, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Deməli, $x=0$ nöqtəsi həqiqətən, $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ funksiyanın

məxsusi nöqtəsidir. Bu funksiyanı $\frac{1}{x^\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) funksiya ilə müqayisə edək.

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Tutaq ki, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. $x \rightarrow 0+$ şərtində $\frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}}$ nisbətinin

limitini tapmaq üçün Lopital qaydasından istifadə edək.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(x^{\frac{1}{2}-\lambda}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x^{-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{x} = 0.$$

$\frac{1}{2} < \lambda < 1$ olduqda $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ integralı yığılan olduğundan, baxılan integral müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə yığılandır.

Misal 6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. İntegralaltı $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ funksiyası $(0,1]$

aralığında müsbətdir və $x=0$ nöqtəsində təyin olunmamışdır. $x \rightarrow 0$ şərtində $\sin x \sim x$ olduğundan $\sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$ alırıq.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Deməli, $x=0$ nöqtəsi $f(x)$ -in məxsusi nöqtəsidir. Müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə görə, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ yığılan olduğundan baxılan integral yığılandır.

Misal 7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $x=0$ nöqtəsi integralaltı $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidir. Doğrudan da, $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$

olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x \ln x} = \infty$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ funksiyası

kifayət qədər kiçik müsbət ədəd olduqda $\left[\varepsilon, \frac{1}{2} \right]$ parçasında kəsilməzdir.

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| - \ln |\ln \varepsilon|$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln |\ln \varepsilon| = -\infty$ olduğundan, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$. Ona görə baxılan

integral dağılındır.

Misal 8. $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = +\infty$ olduğundan $x = 1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir və $\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ədəd olduqda

$\frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$ funksiyası $[1 + \varepsilon, 2]$ parçasında kəsilməzdir. Tərifə görə,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= 2 \left(\sqrt{\ln 2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{\ln(1+\varepsilon)} \right) = 2\sqrt{\ln 2} \end{aligned}$$

Deməli, baxılan integral yığılındır.

Misal 9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \cos x) = 0$ olduğundan, $x = 0$ nöqtəsi

inteqralaltı $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x}$ funksiyanın məxsusi nöqtəsidir:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{e^x - \cos x} = +\infty. \quad x \rightarrow 0 \text{ şərti daxilində } e^x \sim 1 + x \text{ və}$$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ olduğundan, asanlıqla inanmaq olar ki,

$e^x - \cos x$ fərqi müsbətdir və $x + \frac{x^2}{2}$ funksiyası ilə

ekvivalentdir, yəni $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - \cos x}{x + \frac{x^2}{2}} = 1$. Onda aydındır ki,

$$x \rightarrow 0+ \text{ şərti daxilində } f(x) \sim \frac{1}{x + \frac{x^2}{2}} \sim \frac{1}{x}.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ inteqralı dağılan olduğundan, müqayisə əlamətindən

çıxan nəticəyə əsasən baxılan inteqral dağılındır.

Misal 10. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$ inteqralının yığılmasını

araşdırın.

Həlli. $x = 1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} = +\infty. \quad \text{İnteqralaltı funksiyanı } g(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

funksiyası ilə müqayisə edək.

İnteqralaltı funksiyanı aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$\sqrt{\frac{x}{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x}} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \text{ olduğundan}$$

və $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ qeyri-məxsusi integralı yığılan olduğundan,

müqayisə əlamətindən çıxan nəticəyə əsasən baxılan qeyri-məxsusi integral yığılandır.

Misal 11. İsbat edin ki, $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ integralı mütləq

yığılandır.

Həlli. $x = 0$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. $0 < x \leq 1$ olduqda

$$0 \leq \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralı yığılan olduğundan,

müqayisə əlamətinə görə $\int_0^1 \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right| dx$ integralı yığılandır və

deməli, baxılan integral mütləq yığılandır.

Misal 12. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ - integralının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Burada həm integrallama oblastı $(0, +\infty)$ qeyri - məhduddur, həm də bu oblastda integralaltı funksiya qeyri - məhduddur. $a > 0$ olsun. Onda

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Sağ tərəfdəki integrallardan birincisi $\alpha \geq 1$ olduqda, ikincisi

$\alpha < 1$ olduqda dağılır. Ona görə də $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ - integralı α - nın

ixtiyari qiymətində dağılır.

İntegralaltı funksiya üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər qoymaqla ikinci növ qeyri-məxsusi integralı birinci növ qeyri-məxsusi integrala gətirmək olur. Tutaq ki, $f(x)$ $[a, b)$ aralığında kəsilməzdir və b məxsusi nöqtədir.

$$\text{Onda} \quad \int_a^{b-\alpha} f(x) dx, \quad \alpha > 0 \quad \text{integralında} \quad x = b - \frac{1}{t}$$

$(x \in [a, b - \alpha])$ əvəzləməsi aparsaq,

$$dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{b-a} \leq t \leq \frac{1}{\alpha}$$

olar .

Onda yeni dəyişənə keçsək,

$$\int_a^{b-\alpha} f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt \quad (31.2)$$

bərabərliyini yazı bilərik. Tutaq ki, $\int_a^b f(x) dx$ integralı yığılar.

Onda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_a^{b-\alpha} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

$\alpha \rightarrow 0+$ olduqda $\frac{1}{\alpha} \rightarrow +\infty$ və (31.2) bərabərliyindən görünür ki,

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt.$$

integralı da yığılır və

$$\lim_{\frac{1}{a} \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt.$$

Aydındır ki, $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt$ qeyri-məxsusi integralının

yığılmasından da $\int_a^b f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralının yığılması

alınır. Beləliklə, $\int_a^b f(x) dx$ və $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt$

integrallarından birinin yığılmasından digərinin yığılması və bu integralların bərabərliyi alınır.

Misal 13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ I növ qeyri-məxsusi integralı hesablayın.

Həlli. $x=1$ nöqtəsi məxsusi nöqtədir. $x = \frac{1}{t}$ əvəzləməsi
aparaq. $x=1 \Rightarrow t=1$; $x=+\infty \Rightarrow t=0$; $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Onda

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_1^0 \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ integralı ikinci növ qeyri-məxsusi integraldır. $t=1$

nöqtəsi integralladı $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ funksiyası üçün məxsusi nöqtədir.

Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin t \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Beləliklə,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}.$$

§ 32. Qeyri-məxsusi integralın baş qiyməti.

Tərif 1. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $-\infty < x < +\infty$ ədəd

oxunda təyin olunmuşdur və $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi integralı dağılındır. Əgər $f(x)$ funksiyası ədəd oxuna daxil olan istənilən parçada integrallanırsa və

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$$

limit varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası ədəd oxunda Koşi mənasında integrallanırdır. Bu limitə isə $f(x)$ funksiyasının

qeyri – məxsusi integralın Koşi mənadı baş qiyməti deyirlər və onu belə yazırlar:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

$$\int_{-A}^A f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ tek olduqda,} \\ 2 \int_0^A f(x) dx, & f(x) \text{ cüt olduqda,} \end{cases}$$

bərabərliyini nəzərə alsaq, əgər $f(x)$ funksiyası təkdirsə, Koşi mənadı integrallananıdır və integralın baş qiyməti sıfıra bərabərdir.

$f(x)$ funksiyası cüt olduqda Koşi mənadı yalnız və yalnız o zaman integrallananıdır ki, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ yığılan olsun. Bu halda

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

$V.p$ – fransız sözü olan “Valeur principal” sözlərinin baş hərfləridir və “baş qiymət” mənasında başa düşülür.

$y = \sin x$ funksiyasının $(-\infty, +\infty)$ aralığındakı integralının Koşi mənadı baş qiymətini hesablayaq.

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \sin x dx = 0$$

Lakin, $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ - qeyri – məxsusi integralı dağılır.

Başqa bir misala baxaq. $f(x) = x$ funksiyası üçün $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

qeyri-məxsusi integralı dağılır, lakin $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$.

Koşi mənada inteqrallama anlayışı məxsusi nöqtə inteqrallama parçasının daxili nöqtəsi olduqda, II növ qeyri – məxsusi integral üçün də vermək olur.

Tərif 2. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında $c \in (a, b)$ nöqtəsi istisna olmaqla hər yerdə təyin olunub və $\int_a^b f(x) dx$ integralı dağılındır. Əgər kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$ və $\int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ inteqralları mövcuddursa və

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

limiti varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında Koşi mənada inteqrallanır və bu limitə dağılan integralın Koşi mənada baş qiyməti deyilir və $V.p. \int_a^b f(x) dx$ kimi işarə edirlər.

Beləliklə,

$$V.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Misal 1. $f(x) = \frac{1}{(x-c)}$, $x \in [a, b]$ funksiyası üçün

$c \in [a, b]$ olduqda $\int_a^b f(x) dx$ II növ qeyri-məxsusi integral dağılır. Lakin $f(x)$ Koşi mənada inteqrallananadır.

$$V.p. \int_a^b \frac{dx}{(x-c)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Misal 2. *V.p.* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ tapın.

Həlli. Əvvəlcə göstərək ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ I növ qeyri-məxsusi integral dağılındır. Bu integralı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1+x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ integralının dağılan olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tərifə görə

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^A \frac{x dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg x \Big|_0^A + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg A + \frac{1}{2} \ln(1+A^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \infty = +\infty. \end{aligned}$$

Beləliklə, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ integralı dağılındır. Bununla belə, bu integral Koşi mənadı yığılındır.

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{1+x}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-A}^A = \end{aligned}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg}(-A) + \frac{1}{2} \ln(1 + A^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + A^2) \right) =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{arctg} A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Misal 3. *V.p.* $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ tapın.

Həlli. $x^2 - 3x + 2$ kvadrat üçhədlisinin sıfırları $x = 1$ və $x = 2$ nöqtələridir. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ qeyri-məxsusi integralını aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad (32.1)$$

Aydındır ki, $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ I növ qeyri-məxsusi integralı yığılandır. Doğurdan da I növ qeyri-məxsusi integralın tərifinə görə $\forall A > 3$ üçün

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\int_3^A \frac{dx}{x-1} + \int_3^A \frac{dx}{x-2} \right] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-2}{x-1} \right) \Big|_3^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{A-2}{A-1} \right) - \ln \frac{1}{2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 - \frac{2}{A}}{1 - \frac{1}{A}} \right) - \ln \frac{1}{2} = -\ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\ln \frac{1}{2}. \quad (32.2)$$

Asanlıqla inanmaq olar ki, $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ II növ qeyri-məxsusi integralı dağılındır. İntegralaltı funksiya $x=1$ və $x=2$ nöqtələrinin yaxın ətrafında qeyri-məhduddur. Ona görə (32.1)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} V.p. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \\ &= V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + V.p. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \quad (32.3) \end{aligned}$$

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = V.p. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + V.p. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} +$$

$$+ V.p. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{1+\varepsilon}^{2-\eta} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{2+\eta}^3 \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{1-\varepsilon-2}{1-\varepsilon-1} \right| - \ln \left| \frac{-2}{-1} \right| + \ln \left| \frac{2-\eta-2}{2-\eta-1} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| \frac{1+\varepsilon-2}{1+\varepsilon-1} \right| + \ln \left| \frac{3-2}{3-1} \right| - \ln \left| \frac{2+\eta-2}{2+\eta-1} \right| \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right| + \ln \left| \frac{\eta}{1-\eta} \right| - \ln \left| \frac{\eta}{1+\eta} \right| \right) - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \eta \rightarrow 0+}} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} \right| + \ln \left| \frac{1+\eta}{1-\eta} \right| \right) - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 + \ln \frac{1}{2}.$$

Beləliklə,

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\ln 2 + \ln \frac{1}{2}. \quad (32.4)$$

(32.2) və (32.4)-ü (32.3)-də nəzərə alsaq,

$$V.p. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{1}{2}.$$

Çalışmalar

1. Tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı I növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın

a) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2(1+x)}$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$;

e) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + x^3}$; l) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

2. Aşağıdakı I növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırın.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x\sqrt{x}} dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} dx$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x} dx$; d) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$.

3. $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$ inteqralını hesablayın. (göstəriş:

$x = \frac{1}{t}$ əvəzləməsi aparın)

4. Tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı II növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın.

a) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; b) $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \ln x}$; c) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

5. Aşağıdakı II növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırın.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$; c) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}$;
 e) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$; l) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3-x^5}$;
 m) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.

6. İsbat edin ki, $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ inteqralı mütləq yığılandır.

7. İsbat edin ki,

a) $-\frac{\pi}{4} < \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx < \frac{\pi}{4}$; b) $0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx < \frac{1}{n}$, $n > 1$.

Cavablar

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $1 - \ln 2$; c) π ; e) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2} \ln 2$; l) $\frac{1}{8}$.

2. a) dağılıdır ; b) yığılıdır ; c) dağılıdır ;
 e) dağılıdır ; d) yığılıdır.

3. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) π ; 5. a) dağılıdır ;

b) dağılıdır ; c) yığılıdır ; e) dağılıdır ; d) yığılıdır ;
 l) yığılıdır ; m) yığılıdır.

IV FƏSİL MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ.

§33. Müəyyən integralın köməyi ilə bəzi limitlərin hesablanması

Tutaq ki, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcılığı verilmişdir və onun ümumi həddi $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ cəm şəklindədir, burada a_i ($i = \overline{1, n}$) həqiqi ədədlərdir. Bu şəkildə verilmiş ardıcılıqları bəzən sadə çevirmələr aparmaqla elə şəkildə göstərmək mümkündür ki, alınan x_n cəmi müəyyən bir funksiya üçün sonlu parçada integral cəmi olsun. Bu halda müəyyən integralın tərifinə görə verilmiş ardıcılığın limitinin hesablanması müəyyən integralın hesablanmasına gətirilir. Misallara müraciət edək.

Misal 1. Müəyyən integralın köməyi ilə aşağıdakı cəmin limitini hesablayın.

$$1) S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

Həlli. S_n cəmini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha.$$

$[0, 1]$ parçasında

$$T: x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \text{ bölgüsü}$$

$$\text{aparaq. Aydındır ki, } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n} \quad (k = \overline{1, n}), \quad d(T) = \frac{1}{n}.$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ aralıq nöqtələri olaraq } \xi_k = \frac{k}{n} \text{ götürüb,}$$

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha > 0) \text{ funksiyasının integral cəmini yazsaq, tələri}$$

olaraq $\xi_k = \frac{k}{n}$ götürüb, $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) funksiyasının
 inteqral cəmini yazsaq,

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha$$

olar. $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) funksiyası $[0, 1]$ -də inteqrallananıdır.
 Aydındır ki, $d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. Ona görə də,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

$S_n = \sigma_n$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\alpha+1}$$

alırıq.

Misal 2. Müəyyən inteqralın köməyi ilə

$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ cəminin limitini hesablayın.

Həlli. S_n cəmini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \quad [0, 1]\text{-parçasında}$$

$T: x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$ bölgüsü

aparaq. Aydındır ki, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ($k = \overline{1, n}$), $d(T) = \frac{1}{n}$ və

$d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. ξ_k ($k = \overline{1, n}$) aralıq nöqtələri olaraq,

$\xi_k = \frac{k}{n}$ götürüb, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ funksiyası üçün inteqral cəmi
 düzəldək:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

$\frac{1}{1+x}$ funksiyası $[0, 1]$ -də integrallanan olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

$S_n = \sigma_n$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$.

Misal 3. $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$

cəminin limitini hesablayın.

Həlli. Verilmiş cəmi aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Aytdıq ki, S_n cəmi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyasının $[0, 1]$ parçasında integral cəmidir.

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$ $[0, 1]$ parçasının bölgü nöqtələridir. Bu bölgü nöqtələri $[0, 1]$ parçasını uzunluğu

$x_i = \frac{i}{n}$ olan n bərabər hissəyə bölür. ξ_k aralıq nöqtələri olaraq

$\xi_k = x_k$ ($k = \overline{1, n}$) götürək. Bu bölgünün diametri

$d(T) = \frac{1}{n}$ olacaqdır. $d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$.

Onda müəyyən integralın tərifinə görə,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Misal 4. Müəyyən integralın tərifindən istifadə etməklə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$$

limitini hesablayın.

Həlli. $S_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$ cəmini aşağıdakı

şəkildə çevirək.

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n}} + \sqrt[3]{\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{n}{n}} \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}}.$$

$[0,1]$ parçasında $T: 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$ bölgüsü

aparaq. $[0,1]$ parçası $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = \overline{1, n}$) nöqtələri ilə n bərabər

hissəyə bölünmüşdür. ξ_k aralıq nöqtələri olaraq $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$

götürək. Hər bir elementar $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğu

$$\Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad d(T) = \max_k \Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \text{və} \quad d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty.$$

Aydındır ki, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}}$ cəmi $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyasının $[0,1]$

parçasında integral cəmidir. Onda müəyyən integralın tərifinə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4}.$$

Beləliklə,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{3}{4}.$$

Misal 5. Müəyyən integralın tərifindən istifadə etməklə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$$

limitini hesablayın.

Həlli.

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$$

işarə edək. $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək. Bu bölgünü T ilə işarə edək.

$T: x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2n}, x_2 = \frac{2\pi}{2n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{2n}, x_n = \frac{\pi}{2}$. Hər bir elementar $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) parçasının uzunluğu $\Delta x_k = \frac{\pi}{2n}$ -ə

bərabərdir. Aydın ki, $d(T) = \frac{\pi}{2n}$ və $d(T) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. ξ_k

aralıq nöqtələri olaraq $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarının sol uc nöqtələrini

götürək: $\xi_k = x_{k-1} = \frac{(k-1)\pi}{2n}$ ($k = \overline{1, n}$). Onda S_n cəmi

$f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ funksiyası üçün integral cəmi olur.

Müəyyən integralın tərifinə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§ 34. Müstəvi fiqurun sahəsi.

Orta məktəbin həndəsə kursundan bəzi müstəvi fiqurların, məsələn: düzbucaqlının, üçbucağın, dairənin və s. sahəsini hesablamağı bilirik. Məqsədimiz müstəvi üzərində yerləşən istənilən məhdud çoxluq üçün sahə anlayışı verməkdir. Müstəvi üzərindəki ixtiyari məhdud çoxluğu müstəvi fiqur adlandıracağıq. Xatırlayaq ki, müstəvi üzərində məhdud çoxluq dedikdə müstəvinin elə nöqtələr çoxluğu başa düşülür ki, bu çoxluğu müəyyən sonlu radiuslu dairə daxilinə almaq mümkün olsun.

Tutaq ki, A müstəvi üzərində ixtiyari qeyd olunmuş nöqtədir. Mərkəzi A nöqtəsində, radiusu $\varepsilon > 0$ olan dairənin daxilində yerləşən nöqtələr çoxluğuna A nöqtəsinin ε ətrafı deyilir. A nöqtəsinin ε ətrafını $U(A, \varepsilon)$ kimi işarə edəcəyik.

Tutaq ki, F müstəvi üzərində ixtiyari çoxluqdur və $A \in F$ müəyyən nöqtədir. Əgər elə $\varepsilon > 0$ varsa ki, $U(A, \varepsilon) \subset F$ olsun, onda A nöqtəsinə F çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir.

Tutaq ki, A nöqtəsi F çoxluğuna daxil deyildir. Əgər elə $\varepsilon > 0$ ədədi varsa ki, $U(A, \varepsilon)$ ətrafı da F -ə daxil olmasın, onda A nöqtəsinə F çoxluğunun xarici nöqtəsi deyilir.

Əgər A nöqtəsi F çoxluğunun həm daxili, həm də xarici nöqtəsi deyilsə, onda A nöqtəsinə F çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyilir. F çoxluğunun bütün sərhəd nöqtələri çoxluğuna F çoxluğunun sərhəddi deyilir və ∂F kimi işarə olunur.

Aydındır ki, A nöqtəsi F çoxluğunun yalnız və yalnız o halda sərhəd nöqtəsidir ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün A nöqtəsinin $U(A, \varepsilon)$ ətrafı özündə həm F çoxluğuna daxil olan, həm də daxil olmayan nöqtələri saxlasın.

Tutaq ki, F müstəvi üzərində verilmiş ixtiyari çoxluqdur. Əgər bu çoxluğun bütün sərhəd nöqtələri F -in özünə daxildirsə, onda F -ə qapalı çoxluq deyilir.

Müstəvi fiqurun sahəsi anlayışını verərkən çoxbucaqlı fiqurun sahəsi əsas olaraq götürülür. Çoxbucaqlının sahəsi onu əmələ gətirən üçbucaqlının sahələri cəmi kimi təyin olunur. Çoxbucaqlının sahəsi onun üçbucaqlara bölünməsi qaydasından asılı deyil. P çoxbucaqlı fiqurunun sahəsini $\mu(P)$ ilə işarə edək. Məlumdur ki, $\mu(P)$, P – dən asılı funksiya kimi aşağıdakı əsas dörd xassəni ödəyir.

1. $\mu(P)$ funksiyası mənfi deyildir və birqiymətli təyin olunmuşdur.

2. $\mu(P)$ funksiyası additivdir, yəni əgər P çoxbucaqlısı kəsişməyən P_1 və P_2 çoxbucaqlı fiqurlarının birləşməsindən ibarətdirsə ($P = P_1 \cup P_2$ və $P_1 \cap P_2 = \emptyset$) onda $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$.

3. $\mu(P)$ funksiyası müstəvidə aparılan bütün hərəkətə nəzərən invariantdır, başqa sözlə, P_1 və P_2 çoxbucaqlıları müəyyən tərpənməz nöqtə ətrafında dönmə əməlinin və yaxud paralel köçürmə əməlinin köməyi ilə üst – üstə düşərsə, onda $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

4. $\mu(P)$ funksiyası monotondur, yəni əgər $P_1 \subset P_2$ olarsa, onda $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

İndi isə ixtiyari qapalı məhdud F müstəvi fiqurunun sahəsi anlayışını verək.

Tamamilə F fiqurunun daxilinə çəkilmiş bütün mümkün çoxbucaqlıları (P) ilə işarə edək. F fiqurunun daxilinə alan bütün mümkün çoxbucaqlıları (Q) ilə işarə edək (bax, şəkil 4.1) Aydındır ki, $\{\mu(P)\}$ ədədi çoxluqdur və yuxarıdan məhduddur (məsələn, F çoxluğunu daxilinə alan istənilən Q çoxbucaqlısının $\mu(Q)$ sahəsi ilə). Eyni ilə $\{\mu(Q)\}$ ədədi

çoxluqdur və aşağıdan məhduddur (məsələn sıfırla). Ona görə $\{\mu(P)\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi, $\mu(Q)$ çoxluğunu isə dəqiq yuxarı sərhəddi var.

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup_{P \subset F} \mu(P) \quad (34.1)$$

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf_{Q \supset F} \mu(Q) \quad (34.2)$$

olsun.

(34.1), (34.2) bərabərlikləri ilə təyin olunan μ_* və μ^*

kəmiyyətlərinə uyğun olaraq F müstəvi fiqurunun daxili və xarici sahələri deyilir.

Aydınır ki, $\mu_*(F) \leq \mu^*(F)$.



Şəkil 4.1.

Tərif 1. Əgər F müstəvi fiqurunun μ^* xarici sahəsi μ_* daxili sahəsinə bərabər olarsa, onda F fiquruna kvadratlanan (yəni, sahəsi olan) fiqur deyilir. Bu halda $\mu = \mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$ ədədinə F fiqurunun sahəsi deyilir.

Aydınır ki, xüsusi halda F çoxbucaqlı olarsa, onda F fiquru yuxarıda verilən tərif 1 mənada kvadratlanandır və onun sahəsi üçün $\mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$ bərabərliyi doğrudur.

Beləliklə, biz çoxbucaqlı üçün bildiyimiz sahə anlayışını daha geniş müstəvi fiqurlar üçün davam etdirdik.

Qeyd edək ki, yuxarıda qeyd olan müstəvi fiqurun sahəsi anlayışı ilk dəfə C.Jordan tərəfindən verilmişdir və buna görə də F müstəvi fiqurunun sahəsinə F fiqurunun Jordan ölçüsü də deyirlər. Bu halda deyirlər ki, F müstəvi fiquru Jordan mənada kvadratlanandır.

Teorem 34.1. (Fiqurun kvadratlanan olması haqqında meyar). F müstəvi fiqurunun kvadratlanan olması üçün zəruri və kafi şərt $\forall \varepsilon > 0$ verildikdə uyğun olaraq F fiqurunu daxilinə alan və F fiqurunun daxilinə çəkilmiş elə Q və P çoxbucaqlılarının olmasıdır ki,

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon \quad (34.3)$$

bərabərsizliyi ödənsin.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, F fiquru kvadratlandı, yəni $\mu_*(F) = \mu^*(F) = \mu(F)$.

(34.1) və (34.2) – dən dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədlərin tərifinə görə ixtiyari qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ üçün uyğun olaraq F fiqurunun daxilinə çəkilmiş və F fiqurunu daxilinə alan elə P və Q çoxbucaqlı fiqurları tapılacaq ki,

$$\mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leq \mu_*, \quad \mu^* < \mu(Q) \leq \mu^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu iki bərabərsizlikdən və $\mu^* = \mu_*$ bərabərliyindən $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ bərabərsizliyini alırıq. Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Fərz edək ki, teoremin şərtində tələb olunan elə Q və P çoxbucaqlıları var ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün (34.3) bərabərsizliyi ödənilir. (34.3) bərabərsizliyindən və aşkar

$$\mu(P) \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu(Q)$$

bərabərsizliyindən

$$0 \leq \mu^* - \mu_* \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$$

alırıq.

$\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan $0 \leq \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ bərabərsizliyindən $\mu^* = \mu_*$ alırıq.

Teorem isbat olundu.

Kvadratlanan fiqurlar bir sıra xassələrə malikdir. Bu xassələri isbatsız qəbul edək.

1. Sahənin monotonluğu: İxtiyari F_1 və F_2 kvadratlanan fiqurları üçün $F_1 \subset F_2$ olduqda

$$\mu(F_1) \leq \mu(F_2).$$

2. Sahənin additivliyi (Birləşmənin kvadratlanması): İxtiyari F_1 və F_2 kvadratlanan fiqurları üçün $F_1 \cup F_2$ kvadratlanan fiqurdur. Əgər $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olarsa,

$$\mu(F_1 \cup F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2).$$

3. Fərqin kvadratlanması: İxtiyari F_1 və F_2 kvadratlanan fiqurları üçün $F_1 \subset F_2$ olduqda $F_2 \setminus F_1$ kvadratlanan fiqurdur və

$$\mu(F_2 \setminus F_1) = \mu(F_2) - \mu(F_1).$$

4. Kəsişmənin kvadratlanması: İxtiyari F_1 və F_2 kvadratlanan fiqurları üçün $F_1 \cap F_2$ kəsişməsi də kvadratlanan fiqurdur.

Qeyd. Teorem 34.1 –in şərtində Q və P çoxbucaqlıları əvəzinə kvadratlanan Q və P müstəvi fiqurları da götürmək olar. Bu halda da teorem öz gücündə qalır.

Tutaq ki, F ixtiyari məhdud müstəvi fiqurdur və $Q \subset F$ i daxilinə alan və öz sərhədi ilə birlikdə götürülən çoxbucaqlı fiqurdur. P isə F -in daxilinə çəkilməmiş və sərhəddən götürülmüş çoxbucaqlı fiqurdur. Onda $Q \setminus P$ fərqi çoxbucaqlı fiqurdur, sərhəddi özünə daxildir və F fiqurunun ∂F sərhəddini özündə saxlayır.

Çoxbucaqlı fiqurların sahələrinin additivlik xassəsinə görə

$$\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P)$$

münasibəti doğrudur.

Bununla əlaqədar olaraq teorem 34.1-də (34.3) bərabərsizliyi

$$\mu(Q \setminus P) < \varepsilon \tag{34.4}.$$

bərabərsizliyi şəklində də yazıla bilər.

Tərif 2. Verilmiş F müstəvi fiqurunun öz daxilinə alın və sahəsi istənilən qədər kiçik istənilən $\varepsilon > 0$ ədədindən kiçik olan çoxbucaqlı fiqur varsa, onda deyirlər ki, F müstəvi fiqurunun sahəsi sıfıra bərabərdir.

Teorem 34.2. F müstəvi fiqurunun kvadratlanan olması üçün onun ∂F sərhəddinin sahəsinin sıfır olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, F kvadratlanan müstəvi fiqurdur. Onda $\forall \varepsilon > 0$ verildikdə F -in daxilinə yerləşən elə P çoxbucaqlısı və F -i daxilində saxlayan elə Q çoxbucaqlısı var ki, $\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödəyir.

Deməli F – in sərhəddinin sahəsi sıfıra bərabərdir.

Kafilik. Tutaq ki, F müstəvi fiquru üçün $\mu(\partial F) = 0$. Onda tərif 2-yə görə ∂F sərhəddini öz daxilinə alan və sahəsi əvvəlcədən verilmiş $\forall \varepsilon > 0$ ədədindən kiçik elə S çoxbucaqlısı var ki, $\mu(S) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödəyir. Aydındır ki, F fiqurunun S -ə daxil olmayan nöqtələr çoxluğu çoxbucaqlı fiqur yaradır. Bu çoxbucaqlı fiquru P ilə işarə edək. Aydındır ki, $P \cup S = Q$ çoxbucaqlı fiquru F -i öz daxilində saxlayır: $F \subset Q$. Ona görə sahənin additivlik xassəsinə görə

$$\mu(P) = \mu(Q) - \mu(S) > \mu(Q) - \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdə P -lərə nəzərən supremuma keçsək, daxili sahənin tərifinə görə

$$\mu_*(F) \geq \mu(Q) - \varepsilon$$

bərabərsizliyini alırıq. Axırncı bərabərsizlikdə Q -lərə nəzərən infimuma keçsək, xarici sahənin tərifinə görə

$$\mu^*(F) \leq \mu_*(F) + \varepsilon$$

bərabərsizliyini alırıq. ε -nin ixtiyariliyindən

$$\mu^*(F) \leq \mu_*(F) \tag{34.5}$$

olar. Digər tərəfdən məlumdur ki, istənilən məhdud F müstəvi fiquru üçün

$$\mu_*(F) \leq \mu^*(F) \tag{34.6}$$

bərabərsizliyi doğrudur. (34.5) və (34.6) bərabərsizliklərində tələb olunan $\mu_*(F) = \mu^*(F)$ bərabərliyini alırıq. Teorem isbat olundu.

Təbii ki, hər dəfə sahə hesablayarkən müstəvi fiquru kvadratlanan olduğunu aydınlaşdırmağa ehtiyac yoxdur.

Təklif. Kəsilməz funksiyanın qrafiki (kəsilməz əyri) ilə əhatə olunmuş müstəvi fiqur kvadratlanandır.

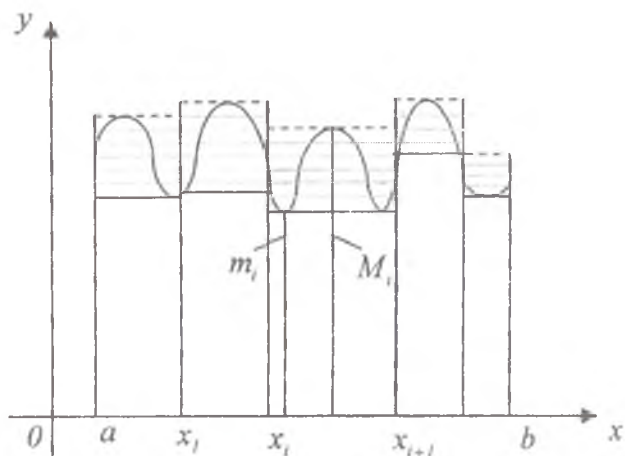
Bu faktı isbat etmək üçün göstərək ki, $y = f(x)$ $a \leq x \leq b$ kəsilməz əyrisinin sahəsi sıfırdır.

$[a, b]$ parçasında $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ bölgüsü aparaq. Belə ki, $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ parçalarında $f(x)$ -in rəqəbi $\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ olsun. Onda $M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, $m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ qəbul etsək, baxdığımız əyri $[x_{i-1}, x_i]$ parçaları ilə $[m_i, M_i]$ parçalarının əmələ gətirdiyi çoxbucaqlıların daxilində yerləşir (bax, şəkil 4.2).

Bu çoxbucaqlının sahəsi üçün

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

olar. Beləliklə, kəsilməz $f(x)$ funksiyanın qrafiki, sahəsi sıfır olan əyridir. Aydındır ki, müstəvi üzərində düz xətt parçası, çevrə və s. sahəsi sıfır olan müstəvi fiqurlarıdır. Buradan nəticə kimi alırıq ki, F fiquru bir və yaxud bir neçə kəsilməz əyri ilə məhdudlaşıbsa, o kvadratlanandır.



Şəkil 4.2.

§35. Müstəvi fiqurun sahəsinin integral vasitəsilə ifadəsi.

1. Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında müsbət, kəsilməz funksiyadır. Aşağıdan absis oxu, yuxarıdan $f(x)$ funksiyasının qrafiki, yanlardan $x = a$, $x = b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş P fiqurunun (əyrixətli trapesiyanın) sahəsini hesablayaq. Bu məqsədlə $[a, b]$ parçasında $\forall T$ bölgüsü aparaq: $T : a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$. $[x_i, x_{i+1}]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının ən böyük qiyməti M_i , ən kiçik qiyməti m_i olsun (bax, şəkil 4.2).

P əyrixətli trapesiyanının daxilindəki düzbucaqlılardan ibarət pilləvari fiqurun sahəsi

$$s_T = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i ,$$

P əyrixətli trapesiyanını daxilində saxlayan düzbucaqlılardan ibarət pilləvari fiqurun sahəsi isə

$$S_T = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

olacaqdır. $\lambda = \max_i \Delta x_i$ olsun. Aydındır ki, S_T və s_T $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında uyğun olaraq yuxarı və aşağı Darbu cəmləridir.

P əyrixətli trapesiyasının $\mu(P)$ sahəsi üçün

$$s_T \leq \mu(P) \leq S_T$$

bərabərsizliyi doğrudur.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_T = \int_a^b f(x) dx \text{ olduğundan,}$$

$$\mu(P) = \int_a^b f(x) dx. \quad (35.1)$$

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və müsbət deyilsə, onda

$P = \{(x, y): a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$ əyrixətli trapesiyasının sahəsi

$$\mu(P) = - \int_a^b f(x) dx \quad (35.2)$$

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da, əgər $f(x)$, $x \in [a, b]$ funksiyası əvəzinə $f^*(x) = -f(x)$, $x \in [a, b]$ funksiyasını, P əyrixətli trapesiyası əvəzinə $P^* = \{(x, y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f^*(x)\}$ əyrixətli trapesiyasını götürsək, yuxarıda isbat etdiyimizə görə

$$\mu(P^*) = \int_a^b f^*(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

olar. P^* və P müstəvi fiqurları absis oxuna nəzərən simmetrik olduğundan $\mu(P^*) = \mu(P)$. Deməli (35.2) düsturu doğrudur.

Beləliklə, əgər $f(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və
 işarəsini dəyişirsə, onda $\int_a^b f(x) dx$ integralının qiyməti ox absis

oxundan yuxarıda və aşağıda yerləşən əyrixətli trapesiyaların sahələrinin cəbri cəminə bərabər olacaqdır. Bu halda ox oxundan yuxarıda yerləşən əyrixətli trapesiyaların sahələri $+$ işarə ilə, ox oxundan aşağıda yerləşən əyrixətli trapesiyaların sahələri isə mənfi işarəsi ilə götürülür.

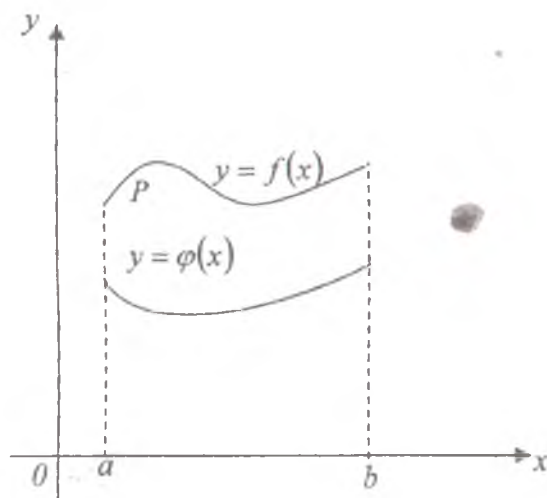
Tutaq ki, $y = f(x)$ və $y = \varphi(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır və $x \in [a, b]$ olduqda $f(x) > \varphi(x)$ bərabərsizliyi doğrudur. Aşağıdan $y = \varphi(x)$, yuxarıdan $y = f(x)$ funksiyalarının qrafikləri, yanlardan isə $x = a$ və $x = b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş P fiqurunun sahəsi

$$\mu(P) = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \quad (35.3)$$

düsturu ilə hesablanır. (bax, şəkil 4.3)

Misal 1. $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = -2x$ xətləri ilə əhatə edilmiş müstəvi fiqurun sahəsini hesablayın.

İsbatı. Verilmiş xətlərin kəsişmə nöqtələrini tapaq. $y = 2 - x$ və $y = -2x$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsinin kordinantları $x = -2$, $y = 4$ olacaqdır. $y = -2x$ düz xətti ilə $y = \sqrt{x}$ əyrisinin kəsişmə nöqtəsi $O(0, 0)$ nöqtəsidir. $y = 2 - x$ düz xətti ilə $y = \sqrt{x}$ əyrisinin kəsişmə nöqtəsi $(1, 1)$ nöqtəsidir.

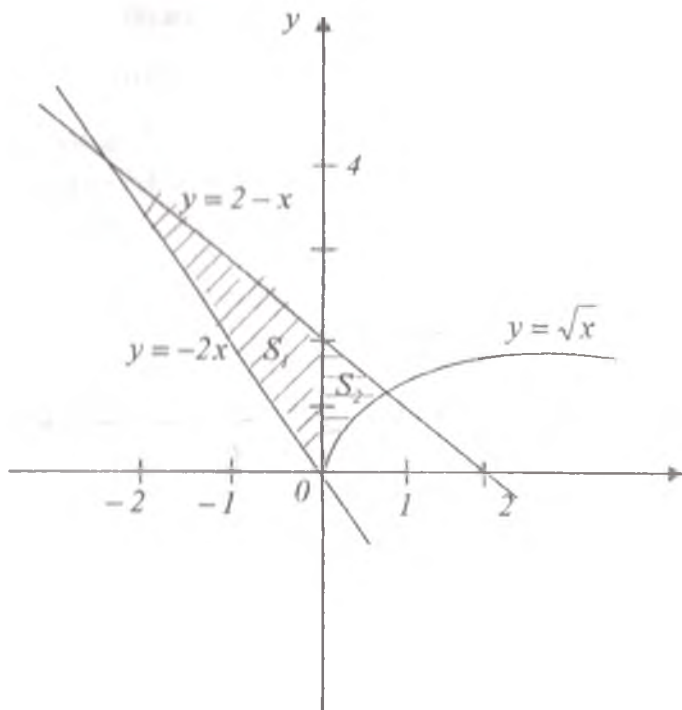


Şəkil 4.3

Alınmış S müstəvi fiqurunu $S = S_1 + S_2$ şəklində göstərmək olar (bax, şəkil 4.4). Burada,

$$\begin{aligned}\mu(S_1) &= \int_{-2}^0 (2 - x + 2x) dx = \int_{-2}^0 (2 + x) dx = \int_{-2}^0 2 dx + \int_{-2}^0 x dx = \\ &= 2x \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 = 4 - 2 = 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(S_2) &= \int_0^1 (2 - x - \sqrt{x}) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 3 - 4}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$



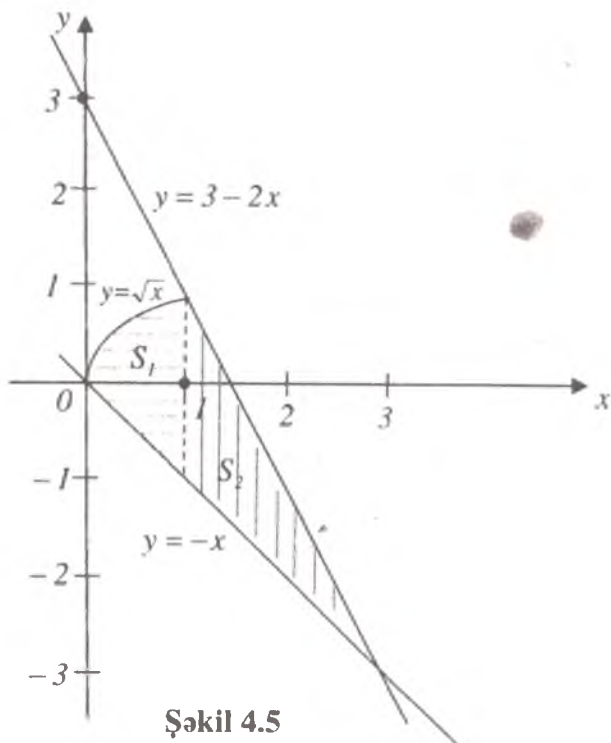
Şəkil 4.4

Onda, axtarılan sahə $\mu(S) = 2 + \frac{5}{6} = 2\frac{5}{6}$ olar.

Misal 2. $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \text{ olduqda,} \\ 3 - 2x, & 1 \leq x \leq 3 \text{ olduqda} \end{cases}$

əyrisi və $y = -x$, $0 \leq x \leq 3$ düz xətti ilə məhdud olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli. Alınmış S fiqurunun iki S_1 və S_2 fiqurlarının cəmi şəklində göstərək (bax, şəkil 4.5). S_1 fiqurunun sahəsi



Şekil 4.5

$$\begin{aligned} \mu(S_1) &= \int_0^1 [\sqrt{x} - (-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_0^1 x dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} = 1 \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

S_2 fiğurunun sahəsi isə

$$\begin{aligned} \mu(S_2) &= \int_1^{1.5} [3 - 2x - (-x)] dx = \int_1^{1.5} (3 - x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{1.5} = \\ &= \left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(3 - \frac{1}{2} \right) = 2. \end{aligned}$$

Beləliklə, S fiqurunun sahəsi,

$$\mu(S) = \mu(S_1) + \mu(S_2) = 1 \frac{1}{6} + 2 = 3 \frac{1}{6}.$$

Misal 3. $y = 2x - x^2$ və $x + y = 0$ əyriləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

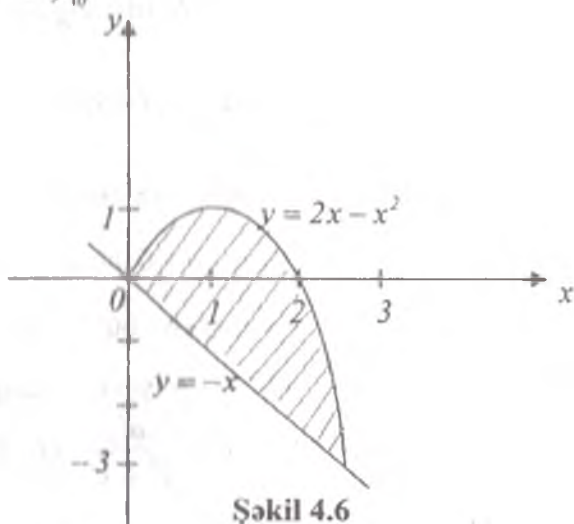
Həlli. $y = 2x - x^2$ parabolası ilə $y = -x$ düz xəttinin kəsişmə nöqtələrini tapaq. $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$ sistemini həll etsək,

kəsişmə nöqtələri $O(0,0)$ və $A(3,-3)$ nöqtələri olacaqdır.

$y = 2x - x^2$ əyrisi, təpəsi $(1,1)$ nöqtəsində və qanadları aşağı istiqamətlənmiş paraboladır (bax, şəkil 4.6)

Onda alınmış S fiqurunun sahəsi (35.3) düsturuna görə

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int_0^3 [2x - x^2 - (-x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \\ &= \left(3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = 4 \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Şəkil 4.6

Misal 4. $y = |\lg x|$ əyrisi və $y = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$ düz xətləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. $|\lg x| = \begin{cases} \lg x, & 1 \leq x \leq 10, \\ -\lg x, & \frac{1}{10} \leq x \leq 1, \end{cases}$ olduğundan, axtarılan

S fiqurunun sahəsi

$$\mu(S) = - \int_{\frac{1}{10}}^1 \lg x \, dx + \int_1^{10} \lg x \, dx$$

olacaqdır. Hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edək.

$u = \lg x$, $dv = dx$ götürək. Onda $du = \frac{1}{x} \lg e \, dx$, $v = x$ olar.

$$\begin{aligned} \mu(S) &= -x \lg x \Big|_{\frac{1}{10}}^1 + \lg e \int_{\frac{1}{10}}^1 dx + x \lg x \Big|_1^{10} - \lg e \int_1^{10} dx = \\ &= \frac{1}{10} \lg \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \lg e + 10 \lg 10 - 9 \lg e = \\ &= \left(10 - \frac{1}{10}\right) - \left(9 - \frac{9}{10}\right) \lg e = 9,9 - 8,1 \lg e. \end{aligned}$$

Misal 5. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ əyrisi və $y = 0$ düz xətti ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın ($a > 0$ hesab olunur).

Həlli. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir və qrafiki absis oxu ilə kəsişmir. Ancaq absis oxu bu əyrinin üfüqi asimptotudur: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} = 0$ (bax, şəkil

4.7). Ona görə $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ funksiyasının qrafiki və absis

oxunun əmələ gətirdiyi fiqur adı mənada kvadratlanan deyildir.

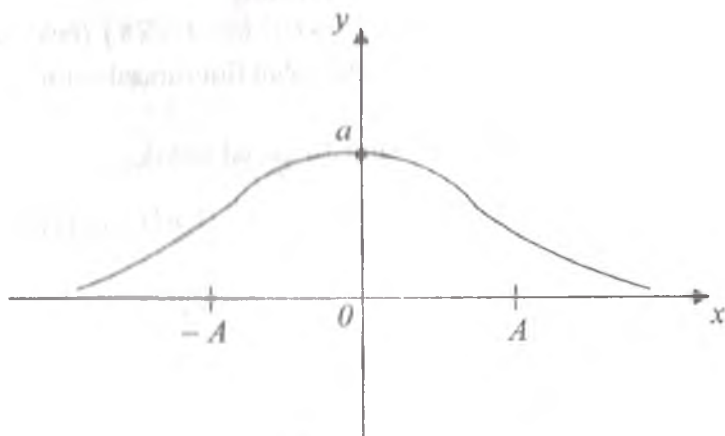
$A \in (0, +\infty)$ istənilən ədəd olduqda $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ funksiyasının

qrafiki və $|x| \leq A$ parçasının əmələ gətirdiyi fiquru $S(A)$ ilə işarə edək. Axtarılan sahəni

$\mu(S) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \mu(S(A)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx$ kimi qəbul etmək olar.

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx &= 2a^3 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{a^2 + x^2} = \\ &= 2a^3 \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \Big|_0^A = 2a^2 \frac{\pi}{2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Beləliklə, axtarılan sahə $\mu(S) = \pi a^2$.



Şəkil 4.7

Tutaq ki, S müstəvi üzərində birrəbitəli oblastdır və qapalı, hamar Γ əyrisi ilə əhatə olunmuşdur və Γ əyrisi parametrik $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$) şəklində verilmişdir.

(Xatırlayaq ki, əgər hər bir $t \in [t_0, T]$ nöqtəsində $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyaları kəsilməz diferensiallandırsa və $\varphi'(t) + \psi'(t) \neq 0$ olarsa, onda Γ əyrisinə hamar əyri deyilir). İsbat etmək olur ki, hamar əyrinin sahəsi sıfıra bərabərdir və deməli, əgər S müstəvi fiquru hamar əyri ilə məhduddursa, onda bu fiqur kvadratlandır.

Əgər əyrixətli trapesiyanın məhdud olduğu əyri parametrik şəkildə verilərsə, onda (35.1) düsturundan istifadə etmək olar. Doğurdan da, (35.1) integralında dəyişəni əvəz etsək və nəzərə alsaq ki, $t = t_0$ olduqda $x = a$; $t = T$ olduqda isə $x = b$ olur, onda (35.1) düsturundan alırıq:

$$\mu(S) = \int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (35.4)$$

Misal 6. Parametrik şəkillə verilmiş $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$), $(0 \leq t \leq 2\pi)$ (tsikloid) əyrisi və $y = 0$ absis oxu ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. (35.4) düsturundan istifadə edəcəyik.

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right] = \\ &= a^2 \left[2\pi - 2 \sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = a^2 \left[2\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \right] = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Misal 7. $x = a \sin t$, $y = b \sin 2t$ ($a, b > 0$) əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. Parametrik şəkildə verilmiş əyrini aşkar şəkildə yazaq:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \sin^2 2t = b^2 \cdot 4 \sin^2 t \cos^2 t = \\ &= 4b^2 \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{4b^2}{a^4} x^2 (a^2 - x^2) \end{aligned}$$

olduğundan, $y = \pm \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ alarıq. Beləliklə,

$y = \pm \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini

tapaq. $y = \pm \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ funksiyasının təyin oblastı

$-a \leq x \leq a$ parçasıdır. Bu funksiyanın qrafiki $(0,0)$ kordinat başlanğıcından və $(a,0)$ və $(-a,0)$ nöqtələrindən keçir. Bu əyri kordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Doğrudan da,

$y = \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ funksiyasında x -i $-x$ ilə əvəz

etdikdə $y = -\frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$,

$x \in [-a, 0]$ funksiyasını alarıq, yəni y dəyişəni öz qiymətini dəyişmir. Analoji olaraq, $y = -\frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$,

$x \in [0, a]$ funksiyasında x -i $-x$ ilə əvəz etdikdə y öz işarəsini dəyişmir. Bu isə o deməkdir ki, $y = \pm \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ əyrisi oy oxuna nəzərən simmetrikdir.

Eyni qayda ilə göstərmək olur ki, $y = \pm \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$

funksiyası ox oxuna nəzərən simmetrikdir. Bu funksiyanın qrafikini quraq. Simmetrikliyə görə

$y = \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ funksiyasının qrafikini qurmaq kifayətdir. $x = 0$ olduqda $y = 0$ olur, yəni bu funksiyanın qrafiki $(0, 0)$ kordinat başlanğıcından keçir. $x = a$ olduqda $y = 0$ olur, yəni bu funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $(a, 0)$ nöqtəsidir. Bu funksiyanın ekstremumunu tapaq.

$$y' = \frac{2b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{a^2 - x^2} \quad \text{olar.} \quad y' = 0 \quad \text{götürək.} \quad a^2 - 2x^2 = 0$$

olmasından $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ alarıq. Beləliklə, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nöqtəsi

$$y = \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a] \quad \text{funksiyasının böhran nöqtəsidir.}$$

Asanlıqla inanmaq olar ki, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nöqtəsinin solundan sağına keçərkən $y'(x)$ törəməsi öz işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişir, yəni, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nöqtəsi maksimum nöqtəsidir.

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{olduqda} \quad y = \frac{b}{a} \quad \text{olur. Beləliklə,} \quad \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b}{a} \right) \quad \text{nöqtəsi}$$

$$y = \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a] \quad \text{funksiyasının ekstremum}$$

nöqtəsidir. $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ olduqda $y' \geq 0$ olur, $\frac{a\sqrt{2}}{2} < x \leq a$

olduqda isə $y' < 0$ olur, yəni bu funksiya $\left[0, \frac{a\sqrt{2}}{2} \right]$ parçasında

artan, $\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}, a \right]$ parçasında isə azalandır.

$y = \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ funksiyasının qabarıqlıq və çöküklüyünü araşdıraq.

$$y'' = \frac{2b}{a} \frac{-2a^2 x}{(a^2 - x^2)^2} = -\frac{4abx}{(a^2 - x^2)^2} < 0.$$

Deməli, $y = \frac{2b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ funksiyası

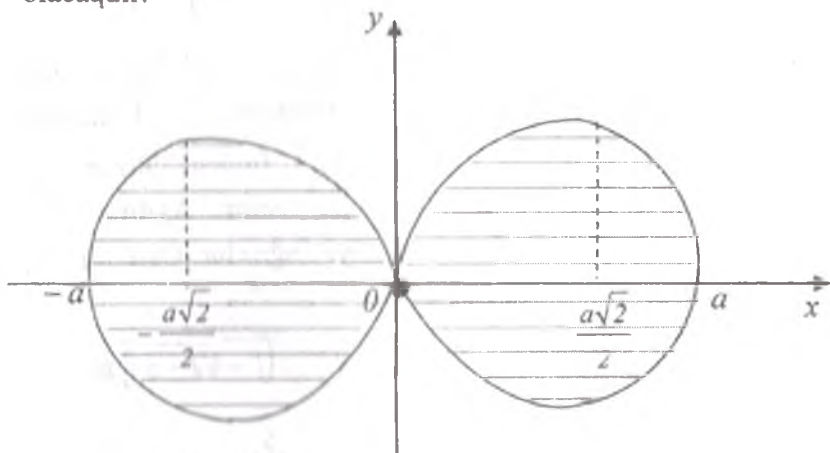
qabarıqdır.

Bütün bu deyilənləri nəzərə alaraq verilmiş funksiyanın qrafikini quraq (bax, şəkil 4.8).

Aydınır ki, axtarılan sahə simmetrikliliyə əsasən

$$\begin{aligned} \mu(S) &= 4 \int_0^a \frac{2b}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{8b}{a^2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} d(a^2 - x^2) = \\ &= -\frac{4b}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^a = -\frac{4b}{a^2} \cdot \frac{2}{3} \left(- (a^2)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8b}{3a^2} \cdot a^3 = \frac{8}{3} ab \end{aligned}$$

olacaqdır.



Şəkil 4.8.

Misal 8. Parametrik şəkildə verilmiş $x = 2t - t^2$,
 $y = 2t^2 - t^3$ əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. Parametrik şəkildə verilmiş bu əyrini aşkar şəkildə yazaq. $y = 2t - t^3 = t(2t - t^2) = tx$. Digər tərəfdən $x = 2t - t^2$ ifadəsindən $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$ alarıq. Beləliklə, aşkar şəkildə verilmiş $y = x(1 + \sqrt{1-x})$ və $y = x(1 - \sqrt{1-x})$ əyrilərinin əmələ gətirdiyi sahəni tapmaq lazımdır.

$y_{1,2} = x(1 \pm \sqrt{1-x})$ funksiyalarının təyin oblastı $(-\infty, 1]$ aralığıdır. Aydınır ki, $0 \leq x \leq 1$ olduqda $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$ və deməli $1 - \sqrt{1-x} \geq 0$, $1 + \sqrt{1-x} \geq 1$ olur. Ona görə hökm edirik ki, $x \in [0, 1]$ olduqda bu funksiyaların qrafiki I rübdə yerləşir. Bu funksiyalar $x = 0$ və $x = 1$ olduqda kəsişirlər.

$-\infty < x < 0$ olduqda $y_1 = x(1 + \sqrt{1-x})$ funksiyasının aldığı qiymətlər mənfi, $y_2 = x(1 - \sqrt{1-x})$ funksiyasının aldığı qiymətlər isə müsbətdir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 + \sqrt{1-x}) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - \sqrt{1-x}) = +\infty.$$

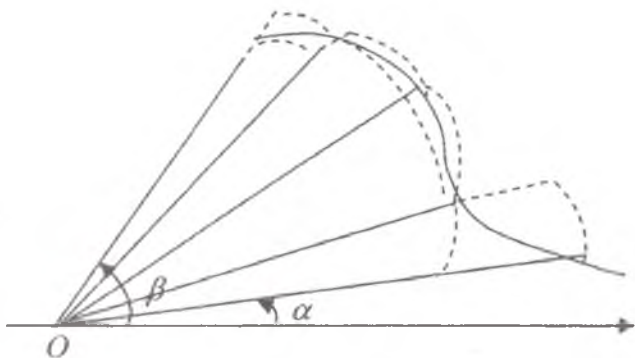
Ona görə $y_1 = x(1 + \sqrt{1-x})$ və $y_2 = x(1 - \sqrt{1-x})$ funksiyaları $(-\infty, 0)$ aralığında kəsişə bilməzlər. Beləliklə, $y_1 = x(1 + \sqrt{1-x})$ və $y_2 = x(1 - \sqrt{1-x})$ funksiyalarında x dəyişəninin dəyişmə aralığı $[0, 1]$ parçasıdır. Aydınır ki, $x \in [0, 1]$ olduqda $y_1 \geq y_2$ bərabərsizliyi doğrudur. Ona görə də axtarılan sahə (35.3) düsturuna görə

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int_0^1 [y_1 - y_2] dx = \int_0^1 [x(1 + \sqrt{1-x}) - x(1 - \sqrt{1-x})] dx = \\ &= 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = 2 \int_0^1 (x - 1 + 1) \sqrt{1-x} dx = 2 \int_0^1 (x - 1) \sqrt{1-x} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + 2 \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx &= 2 \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} d(1-x) - 2 \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} d(1-x) = \\
 &= 2 \cdot \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5}(0-1) - \frac{4}{3}(0-1) = \\
 &= -\frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

Beləliklə, axtarılan sahə: $\mu(S) = \frac{8}{15}$.

İndi isə polyar kordinat sistemində tənliyi $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ olan kəsilməz, mənfi olmayan L əyrisi və $\theta = \alpha, \theta = \beta$ şüaları ilə əhatə olunmuş əyrixətli G sektorun sahəsini hesablayaq. (bax, şəkil 4.9) Əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanmasına analoji üsuldən istifadə edək. $[\alpha, \beta]$ parçasının ixtiyari $T = \{\theta_k\}_{k=0}^n$ bölgüsünü aparaq. $\xi_k \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$, $k = \overline{0, (n-1)}$ aralıq nöqtələri olsun.



Şəkil 4.9

Hər bir $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ parçasında $f(\theta)$ funksiyanın ən böyük qiyməti M_k , ən kiçik qiyməti m_k olsun. $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$ şüaları və $r = m_k$, $r = M_k$ radiuslu çevrələrlə əhatə olunmuş iki dairəvi sektora baxaq. Radiusu r və mərkəzi bucağı θ olan dairəvi sektorun sahəsi $\frac{1}{2}r^2\theta$ olduğundan, radiusları m_k -yə bərabər olan dairəvi sektorların sahələri cəmi

$$s(T) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta\theta_k, \quad \Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k,$$

radiusları M_k -olan dairəvi sektorların sahələri cəmi isə

$$S(T) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta\theta_k, \quad \Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k.$$

$G = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq f(\theta)\}$ ayrışatlı sektorunun daxilində yerləşən pilləvari fiqurun sahəsi $s(T)$, bu sektoru daxilində saxlayan pilləvari fiqurun sahəsi isə $S(T)$ olacaqdır.

Nəzərə alaq ki, $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ funksiyanı $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməzdir və $s(T)$ bu funksiyanın aşağı Darbu cəmi, $S(T)$ - isə yuxarı Darbu cəmidir. $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ funksiyanı $[\alpha, \beta]$

parçasında integrallanan olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ elə T bölgüsü var ki, $S(T) - s(T) = \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ doğrudur. Burada, A G ayrışatlı sektorun daxilinə çəkilmiş pilləvari fiqur, B isə G ayrışatlı sektorunu daxilinə alan pilləvari fiqur işarə olunmuşdur. Onda teorem 34.2-yə görə G ayrışatlı sektoru kvadratlandır.

Aydın ki, $A \subset G \subset B$ olduğundan, bu fiqurların sahələri üçün

$$\mu(A) \leq \mu(G) \leq \mu(B) \text{ və yaxud } s(T) \leq \mu(G) \leq S(T)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdə $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək və nəzərə alsaq ki,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} s(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S(T) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta,$$

onda, G əyrixətli sektorunun sahəsi

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta \quad (35.5)$$

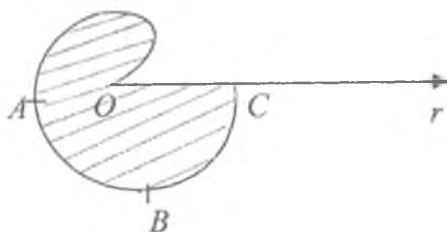
olar.

Misal 9. Polyar ox və $r = a\theta$ Arximed spiralının bir burumunun əhatə etdiyi sahəni tapın.

Həlli. Aydındır ki, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ qəbul edəcəyik (bax, şəkil 4.10). (35.5) düsturuna görə $G = OABC$ müstəvi fiqurunun sahəsi

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^2 a^2.$$

Misal 10. Polyar kordinatlarla verilmiş $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) lemnistikatı ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.



Şəkil 4.10

Həlli. Düzbucaqlı kordinat sistemində keçək: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$ götürək. Onda lemniskat əyrisinin tənliyi düzbucaqlı kordinat sistemində qeyri-aşkar şəkildə verilmiş

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

şəklinə düşər. Asanlıqla inanmaq olar ki, bu əyri ox və oy kordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Bu əyri $(0,0)$ kordinat başlanğıcından keçir. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ bərabərliyində sağ tərəfin müsbət olması üçün $\cos 2\theta \geq 0$ olmalıdır. Bu bərabərsizlikdən

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{və yaxud} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{alırıq. Simmetrikliliyə}$$

görə $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ parçası üzrə alınan sahənin iki mislini götürmək

lazımdır. Onda (35.5) düsturuna görə

$$\begin{aligned} \mu(G) &= 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = \\ &= \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \end{aligned}$$

Misal 11. Polyar kordinat sistemində verilmiş $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) əyrisi (kardioid) ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. Düzbucaqlı kordinat sisteminə keçək: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Onda asanlıqla göstərmək olar ki, bu əyrinin düzbucaqlı kordinatlarla tənliyi

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$$

olar. Burada y -i $-y$ ilə əvəz etdikdə tənliyin şəkli dəyişmir. Bu isə o deməkdir ki, bu əyri ox oxuna nəzərən simmetrikdir.

$y = 0$ olduqda $x = 0$ və $x = 2a$ alırıq. Beləliklə, bu əyri $(0,0)$ kordinat başlanğıcından və $(2a, 0)$ nöqtələrindən keçir.

$x=0$ olduqda $y=0$ və $y=\pm a$ olur. Başqa sözlə bu əyri oy oxunu $(0,a)$ və $(0,-a)$ nöqtələrində kəsir.

r polyar kordinat ən böyük qiymətini $(2a,0)$ nöqtəsində olur. Bu nöqtədə $r=2a$ olur. $r=2a$ olması üçün $\varphi=0$ götürülməlidir. $\varphi=\pi$ olduqda r özünün ən kiçik qiymətini alır. Beləliklə, φ polyar bucağının dəyişmə oblastı olaraq $[0,\pi]$ aralığı götürülməlidir. Onda simmetrikliliyə görə (35.5) düsturuna əsasən $[0,\pi]$ parçası üzrə alınan sahənin iki misli axtarılan sahə olacaqdır.

$$\begin{aligned}\mu(S) &= 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left[\int_0^\pi d\varphi + 2 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right] = \\ &= a^2 \left[\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2} a^2.\end{aligned}$$

Misal 12. $r = a \sin \theta$ ($a > 0$) əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. Bu əyrini düzbucaqlı kordinatlarla ifadə edək:

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

$$x^2 + y^2 - ay = x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \text{ olduğundan, axtarılan əyri}$$

mərkəzi $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ nöqtəsində, radiusu $r = \frac{a}{2}$ olan çevrədir. Bu

əyri oy oxuna nəzərən simmetrikdir. $\theta = \frac{\pi}{2}$ olduqda r özünün ən böyük qiymətini alır: $r = a$. Əyrinin oy oxuna nəzərən simmetrikliliyini nəzərə alsaq, (35.5) düsturuna əsasən, axtarılan

sahəni tapmaq üçün $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçası üzrə alınan sahənin iki mislini götürmək lazımdır.

$$\begin{aligned}\mu(G) &= 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

§ 36. Əyri qövsünün uzunluğu

Əvvəlcə müstəvi üzərində sadə əyri anlayışı verək. (x, y) müstəvisinə, yəni x və y həqiqi ədədlər olduqda bütün mümkün nizamlanmış (x, y) cütlər külliyyatına baxaq. x və y qeyd olunmuş ədədlər olduqda (x, y) cütü müstəvinin nöqtəsi adlanır, x və y -ə isə bu nöqtənin kordinatları deyilir. Adətən (x, y) nöqtəsini müəyyən bir hərflə işarə edirlər. Məsələn, $M(x, y)$ yazılışı müstəvi üzərində M nöqtəsinin kordinatlarının x və y olduğunu göstərir. Tutaq ki, x və y dəyişənlərinin özləri də başqa bir t dəyişənindən asılı funksiyalardır: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Bu funksiyaların arqumentini gələcəkdə parametr adlandıracağıq. Tutaq ki, $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyaları müəyyən bir $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır. Aydındır ki, t parametrinin hər bir qeyd olunmuş $t_0 \in [\alpha, \beta]$ qiyməti müstəvi üzərində müəyyən bir $M(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ nöqtəsini təyin edir.

Tərif 1. t parametri müəyyən bir $[\alpha, \beta]$ parçasında dəyişdikdə, kordinatları $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ kəsilməz

funksiyalarının qiymətlərindən ibarət müstəvinin $M(\varphi(t), \psi(t))$ nöqtələr çoxluğuna müstəvi əyrisi deyilir.

Bu müstəvi əyrisini L ilə işarə edək. Xatırlayaq ki, $[\alpha, \beta]$ parçasının uc nöqtələrində kəsilməzlik dedikdə birtərəfli kəsilməzlik nəzərdə tutulur.

Tərif 2. Tutaq ki, L əyrisi parametrik şəkildə verilmişdir və $c = (c_1, c_2) \in L$. Əgər t parametrinin $[\alpha, \beta]$ parçasından götürülmüş heç olmazsa iki müxtəlif $t_1 \neq t_2$ qiymətləri üçün $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = c_1$, $\psi(t_1) = \psi(t_2) = c_2$ ödənərsə, onda $c = (c_1, c_2) \in L$ nöqtəsinə L əyrisinin təkrarlanma (öz- özünü kəsmə) nöqtəsi deyilir. Əgər t parametrinin $[\alpha, \beta]$ parçasından götürülmüş müxtəlif qiymətlərinə L əyrisi üzərində müxtəlif nöqtələr uyğun gəlirə, onda L əyrisinə sadə əyri deyilir.

t parametrinin α və β uc qiymətlərinə uyğun L əyrisi üzərindəki nöqtələrə L əyrisinin sərhəd nöqtələri deyilir. Əgər yalnız t parametrinin $t = \alpha$ və $t = \beta$ uc nöqtələrində $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ olarsa, onda parametrik şəkildə verilmiş L əyrisinə qapalı sadə əyri deyilir.

Əgər L əyrisinin yalnız sonlu sayda təkrarlanma nöqtəsi varsa, onda L əyrisinə parametrləşdirilə bilən əyri deyilir. Bu tərifə başqa şəkildə söyləyək.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (36.1)$$

tənlikləri ilə təyin olunan L əyrisi verildikdə, $[\alpha, \beta]$ parçasını elə sonlu sayda $[t_{i-1}, t_i]$ parçalarına bölmək mümkündürsə ki, bu parçaların hər birində (36.1) tənlikləri sadə əyri təyin etsin, onda L əyrisinə parametrləşdirilə bilən əyri deyəcəyik. Aydınır ki, hər bir sadə əyriyə parametrləşdirilə bilən əyrinin xüsusi halı kimi baxmaq olar.

Lemma 1. Hər bir parametrləşdirilə bilən əyrini sonlu sayda sadə əyrilərin birləşməsi şəklində göstərmək olar.

Lemmanı isbat etmək üçün $[\alpha, \beta]$ parçasını uc nöqtələri verilmiş əyrinin təkrarlanma nöqtələrində olan sonlu sayda hissələrə bölmək kifayətdir.

Parametrləşdirilə bilən əyriyə aid misal göstərək.

Tutaq ki, L müstəvi əyrisi

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (36.2)$$

parametrik şəkildə verilmişdir.

Aydındır ki, (36.2) parametrik tənliyi mərkəzi kordinat başlanğıcında, radiusu 1 -ə bərabər olan çevrədir. $[0, 2\pi]$ parçasını $[0, \pi]$ və $[\pi, 2\pi]$ parçalarının birləşməsi şəklində göstərək. t dəyişəni $[0, \pi]$ -də dəyişdikdə yuxarı yarımçevrəni, t dəyişəni $[\pi, 2\pi]$ -də dəyişdikdə aşağı yarımçevrəni alırıq və bu yarımçevrələrin hər biri sadə əyrilərdir və deməli (36.2) tənlikləri müstəvi üzərində qapalı sadə əyridir.

$[a, b]$ parçasında kəsilməz $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki sadə əyridir. Onu $x = t, y = y(t), a \leq t \leq b$, kimi parametrik şəkildə yazı bilərik.

İndi isə parametrləşə bilən əyri qövsünün uzunluğu anlayışını verək. Biz sadəlik nəminə sadə müstəvi əyri qövsünün uzunluğu anlayışını verəcəyik.

Fərz edək ki, L sadə əyrisi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leq t \leq \beta$$

tənliyi ilə verilib. $[\alpha, \beta]$ parçasında

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$$

şəklində $\forall T$ bölgüsü aparaq. $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \quad i=0, \dots, n$ nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirək. Alınan $M_0 M_1 \dots M_n$ sınıq xəttinə L -əyrisinin daxilinə çəkilmiş, T bölgüsünə uyğun sınıq xətt deyirlər. Onu $l(T)$ - ilə işarə edək.

$l_i = M_{i-1} M_i$ - parçasının uzunluğu

$$|l_i| = |M_{i-1} M_i| = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

olacaqdır. Onda bütün $l(T) = M_0 M_1 \dots M_n$ sınıq xəttinin uzunluğu

$$|l(T)| = \sum_{i=1}^n |l_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

olacaqdır.

Tərif 3. $[\alpha, \beta]$ parçasının bütün mümkün T bölgülərinə uyğun L əyrisinin daxilinə çəkilmiş sınıq xəttlərinin uzunluqları çoxluğu $\{l(T)\}$ məhdud olduqda L -ə düzlənən əyri, $\{l(T)\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddinə isə bu əyrinin uzunluğu deyirlər.

Bilavasitə tərifdən görünür ki, parametrik şəkildə verilmiş əyrinin uzunluğu müsbət ədəddir.

Düzləndirilməsi mümkün olmayan əyri də vardır.

Lemma 2. Fərz edək ki, $|l(T)|$, $[\alpha, \beta]$ parçasının T -bölgüsünə uyğun L əyrisinin daxilə çəkilmiş sınıq xəttinin uzunluğudur. $|l(T^*)|$ isə T bölgüsünə yeni nöqtələrin əlavə edilməsi ilə alınan T^* bölgüsünə uyğun L -in daxilinə çəkilmiş sınıq xəttin uzunluğudur.

Onda

$$|l(T)| \leq |l(T^*)|.$$

İsbatı. Kifayətdir ki, T^* bölgüsü olaraq T -yə bir ξ nöqtəsi əlavə etməklə alınan bölgü götürək. $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$ olsun. Onda T bölgüsünə uyğun sınıq xətdə $M_{i-1} M_i$ bölgüsü $M_{i-1} M'$ və $M' M_i$ parçalarının cəmi ilə əvəz olunacaqdır. Üçbucağın bir tərəfinin uzunluğu iki tərəfin uzunluqları cəmindən böyük olmadığından,

$$|l(T)| \leq |l(T^*)|.$$

Teorem 36.1. Əgər $x = \varphi(t)$ və $y = \psi(t)$ funksiyalarının $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməz törəmələri varsa, onda

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

tənlikləri ilə təyin olunan L -əyrisi düzlənə biləndir və onun uzunluğu

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (36.3)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. Əvvəlcə L əyrisinin düzlənən olduğunu isbat edək. $[\alpha, \beta]$ parçasında $\forall T$ bölgüsü aparaq. Yuxarıda göstəriləndiyi kimi $[\alpha, \beta]$ parçasının $\forall T = \{t_i\}_0^n$ bölgüsünə uyğun L əyrisinə çəkilmiş $l(T)$ sınıq xəttinin uzunluğu

$$l(T) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyaları $[\alpha, \beta]$ parçasında diferensiallanan olduğundan hər bir $[t_{i-1}, t_i]$ elementar parçasında Laqranj teoreminin bütün şərtləri ödənilir. Ona görə də hər bir $[t_{i-1}, t_i]$ parçasında Laqranj teoremini tətbiq etsək, alarıq:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \Delta t_i, \quad t_{i-1} < \xi_i < t_i,$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\eta_i) \Delta t_i, \quad t_{i-1} < \eta_i < t_i$$

Deməli,

$$l(T) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} \Delta t_i. \quad (36.4)$$

Teoremin şərtinə görə $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyalarının $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməz törəmələri olduğu üçün elə $M > 0$ ədədi

var ki, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ üçün $|\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M$ bərabərsizlikləri ödənilir. Ona görə də

$$0 < |l(T)| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} \Delta t_i \leq \sqrt{2} M \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \sqrt{2} M (\beta - \alpha).$$

Buradan alırıq ki, $[\alpha, \beta]$ parçasının $\forall T$ bölgüsü üçün daxilə çəkilmiş sınıq xətlərin $\{|l(T)|\}$ uzunluqları çoxluğu məhduddur. Ona görə də əyri düzlənə biləndir. İndi isə (36.3) düsturunun doğruluğunu göstərək.

Əgər (36.4) cəmində $\eta_i = \xi_i$ götürsək, onda

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i \quad \text{cəmi} \quad \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

kəsilməz funksiyasının $[\alpha, \beta]$ parçasının T bölgüsünə uyğun integral cəmidir. Göstərək ki, $d(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i \rightarrow 0$ şərtində

(36.4) cəminin limiti, $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ funksiyasının $[\alpha, \beta]$ parçasında integralı olacaqdır. Ona görə də $|l(T)|$ -ilə $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ funksiyasının σ -integral cəminin fərqi qiymətləndirək.

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} ||l(T)| - \sigma| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \right| \Delta t_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)| \Delta t_i \end{aligned}$$

$\psi(t)$ -funksiyası $[t_{i-1}, t_i]$ parçasında kəsilməz olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists \delta > 0$ ədədi var ki, $\forall \xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$

üçün $|\xi_i - \eta_i| < \delta$ olduqda $|\psi'(\xi_i) - \psi'(\eta_i)| < \varepsilon$ olacaqdır. Buradan alarıq ki,

$$||l(T)| - \sigma| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Teorem isbat olundu.

Əgər L əyri düzbucaqlı koordinat sistemində $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ tənliyi ilə verilmişdirsə və $f(x)$ $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməz törəməyə malikdirsə onda x -i parametr kimi qəbul etsək, $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ əyrisini $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$ parametrik şəkildə yazsaq, L əyrisinin uzunluğu üçün

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (36.5)$$

düsturunu alarıq.

Əgər L əyrisinin tənliyini $r = g(\theta)$, $(\theta_0 < \theta \leq \theta_1)$ şəklində polyar kordinatlarla verilmişdirsə və $g(\theta)$ $[\theta_0, \theta_1]$ parçasında kəsilməzdirsə və kəsilməz $g'(\theta)$ törəməyə malikdirsə, onda L əyrisi düzlənəndir və onun uzunluğu

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)} d\theta \quad (36.6)$$

düsturu ilə hesablanır.

Bunu göstərmək üçün

$x = r \cos \theta = g(\theta) \cos \theta$, $y = r \sin \theta = g(\theta) \sin \theta$ dekart koordinat sisteminə keçək. Onda L əyrisini

$\varphi = g(\theta) \cos \theta$, $\psi = g(\theta) \sin \theta$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ parametrik şəkildə gətirə bilərik. Bu halda

$$x'_\theta = r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta, \quad y'_\theta = r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta$$

olduğundan,

$$x'_\theta{}^2 + y'_\theta{}^2 = (r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)^2 = r^2 + r'^2_\theta.$$

alırıq.

Beləliklə,

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{g(\theta)^2 + [g'(\theta)]^2} d\theta$$

alırıq.

Misal 1. Parametrik şəkildə verilmiş

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (a > 0)$$

tsikloidasının uzunluğunu tapın.

Həlli. $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$ olduğundan,
(36.3) düsturuna görə

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

Misal 2. Parametrik şəkildə verilmiş

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ əyri}$$

qövsünün uzunluğunu tapın.

Həlli. $x'_t = a t \cos t$, $y'_t = a t \sin t$ olduğundan,

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} = a t$$

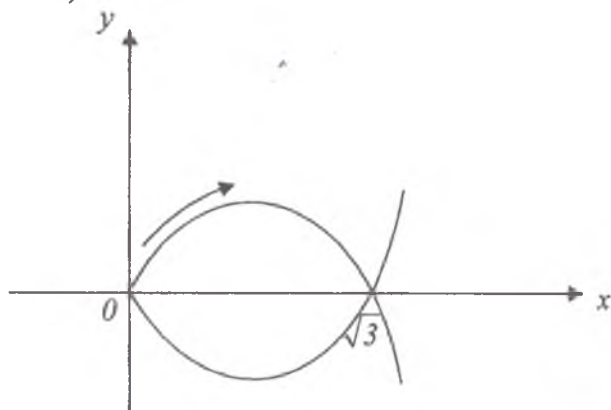
olar. Onda (36.3) düsturuna görə,

$$l = \int_0^{2\pi} a t dt = a \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a^2.$$

Misal 3. $x = \sqrt{3} t^2$, $y = t - t^3$ əyrisinin bir ilgəyinin uzunluğunu tapın.

Həlli. t parametrinin dəyişmə aralığını tapıq. $x(t)$ və $y(t)$ funksiyalarının hər ikisi t -nin bütün qiymətlərində təyin

olunmuşdur. $x(t) = \sqrt{3}t^2 \geq 0$ olduğundan, bu əyri sağ yarımmüstəvidə yerləşir. t parametri öz işarəsini dəyişdikdə $x(t)$ öz qiymətini dəyişmir, $y(t)$ isə işarəsini dəyişdiyindən baxılan əyri ox oxuna nəzərən simmetrikdir. Bu əyrinin ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq. $y = 0$ götürək. Onda $t - t^3 = 0$ tənliyindən $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm 1$ alırıq. $t = 0$ olduqda $x(t) = 0$ olur, yəni bu əyri kordinat başlanğıcından keçir. $x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3}$ olduğundan $(\sqrt{3}, 0)$ nöqtəsi bu əyrinin yeganə öz-özünə kəsmə nöqtəsidir və bu nöqtə absis oxu üzərində yerləşir. Bu isə onu göstərir ki, t -nin dəyişmə aralığı $[-1, 1]$ parçası götürülməlidir. (bax, şəkil 4.11)



Şəkil 4.11

$x'_t = 2\sqrt{3}t$, $y'_t = 1 - 3t^2$ olduğundan, $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 1 + 3t^2$ olar. Onda (36.3) düsturuna görə

$$l = \int_{-1}^1 (1 + 3t^2) dt = 4.$$

Misal 4. $y^2 = 2px$, $(0 \leq x \leq x_0)$ əyri qövsünün uzunluğunu tapın.

Həlli. Aydındır ki, $x \in [0, x_0]$ olduqda $y^2 = 2px$ əyrisinin əmələ gətirdiyi müstəvi fiquru ox oxuna nəzərən simmetrikdir. Ona görə də $y = \sqrt{2px}$, $x \in [0, x_0]$ əyrisinin uzunluğunun iki mislini götürmək lazımdır.

$y^2 = 2px$ tənliyindən $y = \pm \sqrt{2px}$, $y' = \pm \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \pm \frac{p}{\sqrt{2px}}$ alırıq.

Onda (36.3) düsturuna görə

$$l = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p^2}{2px}} dx = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2 \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}} dx =$$

$$= 2 \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}}{\sqrt{2x}} dx = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{p + (\sqrt{2x})^2} d(\sqrt{2x})$$

alırıq.

Sonuncu integralda $\sqrt{2x} = t$ əvəzləməsi aparaq.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = x_0 \Rightarrow t = \sqrt{2x_0}$. Onda,

$$2 \int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{p + (\sqrt{2x})^2} d(\sqrt{2x}) = 2 \int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{p + t^2} dt =$$

$$= \left(t \sqrt{p + t^2} + p \ln(t + \sqrt{p + t^2}) \right) \Big|_0^{\sqrt{2x_0}} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} + p \ln \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}.$$

$$\text{Beləliklə, } l = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} + p \ln \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}.$$

Misal 5. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, ($1 \leq y \leq e$) əyri qövsünün uzunluğunu tapın.

Həlli. Verilmiş əyrinin tənliyində y dəyişəni argument, x isə y -dən asılı funksiyadır. Bu funksiya $[1, e]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır və kəsilməz törəməyə malikdir. Aydındır ki, bu əyri qövsünün uzunluğu

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + x_y'^2} dy \quad (36.7)$$

düsturu ilə hesablanır.

$x_y' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$ olduğundan, $1 \leq y \leq e$ olduqda

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x_y'^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{4y^2}} = \sqrt{\frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4y^2}} = \frac{y^2 + 1}{2y} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

olar.

Onda (36.7) düsturuna görə

$$l = \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln y \right) \Big|_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Misal 6. $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$) əyri qövsünün uzunluğunu tapın.

Həlli. $y'_x = \frac{-1}{\cos x} \cdot \sin x = -\operatorname{tg} x$ olduğundan, $x \in [0, a]$

olduqda $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos x}$ olar . Onda (36.5)

düsturuna görə

$$l = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^a = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \right|.$$

Misal 7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) astroidinin uzunluğunu tapın.

Həlli. Məlumdur ki, astroid əyrisi ox və oy koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Astroidin dörd təpə nöqtəsi vardır: $A_1(0, a)$, $A_2(0, -a)$, $A_3(a, 0)$, $A_4(-a, 0)$. Birinci rübdə

astroid əyrisinin tənliyi $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq a$ şəklində olar.

$$y' = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < x \leq a,$$

$$y'^2 = x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right), \quad 0 < x \leq a,$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)} = \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

$\left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$ funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunmadığından, astroid əyrisinin I rübdə yerləşən hissəsinin uzunluğu adı

mənada yox, $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ funksiyasının $[0, a]$ parçasında II növ qeyri-məxsusi inteqralı kimi başa düşülür:

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} a^{\frac{1}{3}} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \bigg|_{\varepsilon}^a \\ &= a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[a^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{2} a. \end{aligned}$$

Bütöv astroid əyrisinin uzunluğunu tapmaq üçün I rübdə yerləşən hissənin uzunluğunu 4-ə vurmaq lazımdır. Beləliklə,

$$l = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a.$$

Misal 8. $r = a \cdot \theta$ ($a > 0$) Arximed spiralinin $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olduqda uzunluğunu tapın.

Həlli. $r'_\theta = a$ olduğundan,

$$\sqrt{r^2 + r'^2_\theta} = \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} = a\sqrt{1 + \theta^2} \text{ olar. Onda (36.6)}$$

düsturuna görə

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$ inteqralını hissə-hissə inteqrallama metodu ilə

hesablayaq. $u = \sqrt{1 + \theta^2}$, $d\theta = dv$ götürək. Onda

$$du = \frac{\theta dt}{\sqrt{1 + \theta^2}}, v = \theta \text{ olar.}$$

$$I = \theta\sqrt{1 + \theta^2} \bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2 dt}{\sqrt{1 + \theta^2}} = \theta\sqrt{1 + \theta^2} \bigg|_0^{2\pi} - I + \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

$$2l = \theta \sqrt{1 + \theta^2} \Big|_0^{2\pi} + \ln \left| \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right| \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$$

Buradan,

$$l = \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$$

alırıq. Onda

$$l = a \left(\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right).$$

Misal 9. $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) kardioid əyri qövsünün uzunluğunu tapın.

Həlli. $r'_\theta = -a \sin \theta$ olduğundan,

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} = a\sqrt{2 + 2\cos \theta} =$$

$$= a\sqrt{2(1 + \cos \theta)} = a\sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} =$$

$$= 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \begin{cases} 2a \cos \frac{\theta}{2}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -2a \cos \frac{\theta}{2}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Onda (36.6) düsturuna görə

$$l = 2a \int_0^\pi \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta - 2a \int_\pi^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= 2a \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi - 2a \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_\pi^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

§37. Fəza cisminin həcmi.

Üç ölçülü R^3 Euklid fəzasında $M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ nöqtəsini qeyd edək.

$$|M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq R$$

bərabərsizliyini ödəyən $M(x, y, z)$ nöqtələr çoxluğuna mərkəzi M_0 - nöqtəsində olan R – radiuslu qapalı kürə deyilir.

Mərkəzi M_0 nöqtəsində, radiusu ε olan kürənin daxilində yerləşən nöqtələr çoxluğuna M_0 nöqtəsinin ε ətrafı deyilir. Tutaq ki, üç ölçülü fəzada müəyyən bir $\{M\}$ çoxluğu verilmişdir.

Əgər A nöqtəsi hər hansı ε ətrafı ilə birlikdə $\{M\}$ çoxluğuna daxil olarsa, onda A nöqtəsinə bu çoxluğun daxili nöqtəsi deyirlər. Əgər A nöqtəsinin elə ε ətrafı varsa ki, bu ətrafın $\{M\}$ çoxluğu ilə heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur, onda A -ya $\{M\}$ çoxluğunun xarici nöqtəsi deyirlər.

Əgər A - çoxluğunun ixtiyari ətrafında həm $\{M\}$ çoxluğuna daxil olan, həm də daxil olmayan nöqtələr varsa, onda A –ya $\{M\}$ çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyirlər. Sərhəd nöqtələri çoxluğuna isə $\{M\}$ çoxluğunun sərhəddi deyilir.

Əgər $\{M\}$ çoxluğunu sonlu radiuslu kürə daxilinə almaq mümkündürsə, onda $\{M\}$ - ə məhdud çoxluq və ya məhdud cisim deyirlər.

Orta məktəbdən belə cisimlərdən piramida, prizma, kub, konus, silindir və digər çoxüzvlülərlə tanış. Bu cisimlərin həcmələrinin hesablanması qaydasını bilirik. Bu cisimlərin həcmələri additivlik, invariantlıq, monotonluq xassələrinə malikdir. Digər fiqurların həcm anlayışını da elə təyin etməliyik ki, bu xassələrə malik olsun. İxtiyari məhdud F – cisminə baxaq. Bu cismin daxilində yerləşən bütün mümkün çoxüzvlü

cisimləri P , onu daxilində saxlayan çoxüzlü cisimləri Q ilə işarə edək. P və Q – nin həcmi məlumdur.

F – in daxilində yerləşən P çoxüzlülərinin həcmələri çoxluğu olan $\{\mu(P)\}$ ədədi çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddinə, yəni $\mu_* = \mu_*(F) = \sup_{P \subset F} \mu(P)$ ədədinə F cisminin aşağı həcmi deyilir.

F cismini daxilinə alan Q çoxüzlülərinin həcmələri çoxluğu olan $\{\mu(Q)\}$ ədədi çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddinə, yəni $\mu^* = \mu^*(F) = \inf_{Q \supset F} \mu(Q)$ ədədinə F çoxluğunun yuxarı həcmi deyilir.

Tərif 1. Əgər $\mu_* = \mu^*$ olarsa F fəza cisminə kublanan cisim (yəni, həcmi olan) deyilir. $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ ədədinə isə F cisminin həcmi deyilir.

Teorem 37.1. F – cisminin kublanan olması üçün zəruri və kafi şərt, $\forall \varepsilon > 0$ üçün F – i daxilində saxlayan elə Q və F – in daxilində yerləşən elə P – çoxüzlüsünün varlığıdır ki, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ olsun.

Bu teoremin isbatı müstəvi fiqurların kvadratlanan olması haqqında teorem 34.1-ə analoji qaydada aparılır.

Qeyd. Bu teoremdə P və Q çoxüzlüləri əvəzinə ixtiyari kublanan P və Q cisimləri götürsək, onda teorem yenə də öz gücündə qalır.

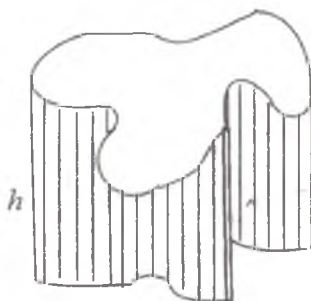
Tərif 2. Əgər fəzada verilmiş nöqtələr çoxluğunu həcmi kifayət qədər kiçik olan çoxüzlü daxilinə almaq mümkündürsə, onda deyirlər ki, bu nöqtələr çoxluğunun həcmi sıfıra bərabərdir.

Bununla əlaqədar yuxarıda qeyd olunan teoremi aşağıdakı şəkildə də demək olar.

Teorem 37.2. F cisminin kublanan olması üçün zəruri və kafi şərt, onun sərhəddinin həcmi sıfır olmasıdır.

Kublanan cisimlərə misal olaraq silindrik cismi göstərə bilərik. Silindrik cisim doğuranı kordinat oxlarından hər hansı birinə paralel olan silindrik səthlə və həmin kordinat oxuna perpendikulyar müstəvilərlə əhatə olunmuş fəza cisminə deyilir.

Müstəvilərin silindrik səthlə kəsişməsi müstəvi fiquru yaradır və bu müstəvi fiqurlar silindrik cismə oturacaqları adlanır. Silindrik cismin oturacaqları arasındakı h məsafəsinə silindrik cismin hündürlüyü deyilir. (şəkil, 4.12)



Şəkil 4.12

Teorem 37.3. Əgər F silindrik cisminin oturacağı kvadratlanan G müstəvi fiqurudursa, onda F kublanandır və onun həcmi G oturacağının sahəsi ilə silindrik cismin hündürlüyü hasilinə bərabərdir: $\mu(F) = \mu(G) \cdot h$.

Həcmi sıfır olan səthə misal olaraq f, g, φ kəsilməz funksiyalar olduqda, $z = f(x, y)$, $y = g(z, x)$, $x = \varphi(y, z)$ şəklində aşkar verilmiş səthləri göstərə bilərik.

Qeyd edək ki, F – cismi bir neçə kəsilməz funksiyalarla məhdudlaşmışdırsa, onun həcmi vardır.

Fərz edək ki, F cismi qapalı səth ilə məhdudlaşıb və onun kordinat oxlarına perpendikulyar kəsiyinin sahəsi məlumdur. Ümumiliyi pozmadan tutaq ki, ox oxuna x nöqtəsində perpendikulyar kəsiyin sahəsi $S(x)$ – məlumdur. Cismin ox

oxuna paralel $x = a$ və $x = b$ müstəviləri arasında yerləşdiyini fərz edək və tutaq ki, $a < b$.

Cismi $x_0 = a$, $x = x_1, \dots, x_n = b$ müstəviləri ilə hissələrə bölək.

$x = x_i$ və $x = x_{i+1}$ müstəviləri arasındakı qata baxaq. $[x_i, x_{i+1}]$ parçasında $S(x)$ funksiyanın maksimum qiyməti $M_i(x)$, minimum qiyməti isə $m_i(x)$ olsun. Onda $m_i \leq S(x) \leq M_i$ və baxılan cismin oturacaqları $x = x_i$ və $x = x_{i+1}$ müstəviləri olan hissələri, $M_i(x_i - x_{i+1})$ düz silindirin daxildə yerləşəcək və o $m_i(x_{i+1} - x_i)$ düz silindirini daxilində saxlayacaq. Bu

silindirlərin də həcmi uyğun olaraq $\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ və $\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ olar. Bu cəmlər $S(x)$ funksiyanın $[a, b]$ parçasında uyğun olaraq yuxarı və aşağı Darbu cəmləridir. Onda $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək, axtarılan F cisminin həcmi

$$\mu(F) = \int_a^b S(x) dx \quad (37.1)$$

olar.

Misal 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidinin həcmi tapın.

Həlli. Ellipsoidi $x = \text{const}$ müstəvisi ilə kəsək. $-a \leq x \leq a$. Onda ellipsoidin tənliyindən

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

alırıq. Bu isə yarım oxları $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ və $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ olan

ellipsdir. Məlumdur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsinin sahəsi $S = \pi ab$

düsturu ilə hesablanır. Ona görə də kəsikdə alınan ellipsin sahəsi

$$S(x) = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (-a \leq x \leq a)$$

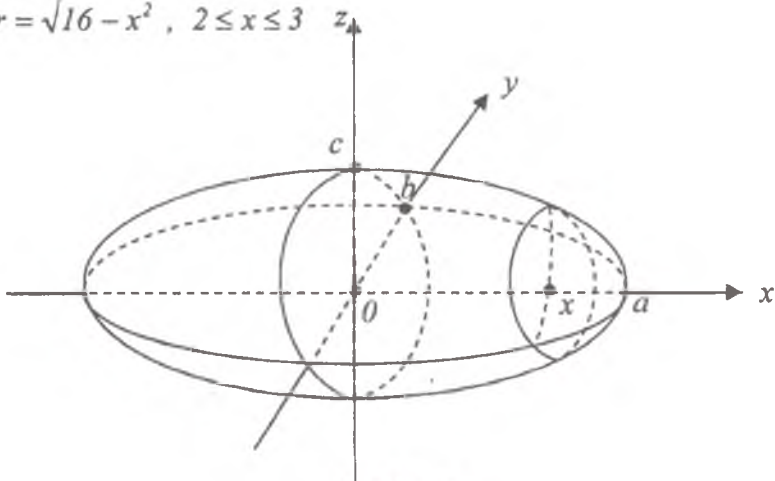
olacaqdır (bax, şəkil 4.13). Onda (37.1) düsturuna görə ellipsoidin həcmi

$$\mu(F) = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Xüsusi halda $a = b = c$ götürsək, onda kürənin həcmi üçün məlum $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ düsturunu alırıq.

Misal 2. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ kürəsinin $x = 2$ və $x = 3$ müstəviləri arasında qalan hissəsinin həcmi tapın.

Həlli. Verilmiş kürəni $x = \text{const}$ müstəvisi ilə kəsək. $2 \leq x \leq 3$. Aydındır ki, kəsikdə dairə alınacaqdır. Kürənin tənliyindən $y^2 + z^2 = 16 - x^2$ alırıq. $y^2 + z^2 = 16 - x^2$ radiusu $r = \sqrt{16 - x^2}$, $2 \leq x \leq 3$



Şəkil 4.13

olan çevrədir. Kəsikdə alınan dairənin sahəsi

$$S(x) = \pi \cdot r^2 = \pi(16 - x^2), \quad x \in [2, 3]$$

olacaqdır. Onda (37.1) düsturuna əsasən, axtarılan həcm

$$\mu(F) = \int_2^3 S(x) dx = \pi \int_2^3 (16 - x^2) dx = \pi \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = 9\frac{2}{3}\pi.$$

Misal 3. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = \sqrt{3}y$, ($y \geq 0$), $z = 0$ səthləri ilə məhdud olan cismin həcmi tapın.

Həlli. Verilmiş cismi $x = \text{const}$ müstəvisi ilə kəsək. Kəsikdə düzbucaqlı üçbucaq alınır. Bu üçbucağın sahəsi

$$S(x) = \frac{1}{2} y(x) \cdot z(x) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - x^2),$$

$-a \leq x \leq a$ olacaqdır. Onda (37.1) düsturuna görə, axtarılan həcm

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_{-a}^a S(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= \sqrt{3} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3. \end{aligned}$$

Misal 4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$ səthləri ilə məhdud olan cismin həcmi tapın.

Həlli. Bu fəza cismi xoy müstəvisinə nəzərən simmetrikdir. Ona görə də cismin $z \geq 0$ yarımfəzasında yerləşən hissəsinin həcmi tapıb, iki mislini götürmək lazımdır. Bu cismi $z = \text{const}$ müstəvisi ilə kəsək. $0 \leq z \leq c$ ödənməlidir. Səthin tənliyindən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

və yaxud

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1$$

Bu isə yarımoxları uyğun olaraq $a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$ və $b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$ olan ellipsdir. Məlumdur ki, yarımoxları uyğun olaraq a və b olan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsinin sahəsi $S = \pi ab$ -dir. Ona görə də

yarımoxları $a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$ və $b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$ olan ellipsin sahəsi

$S(z) = \pi ab \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$ olacaqdır. Onda (37.1) düsturuna görə,

axtarılan həcm

$$\begin{aligned} \mu(F) &= 2 \int_0^c S(z) dz = 2\pi ab \int_0^c \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left(z + \frac{1}{c^2} \frac{z^3}{3}\right) \Big|_0^c = \\ &= 2\pi ab \left(c + \frac{1}{3}c\right) = \frac{8}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Misal 5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$ səthləri ilə

məhdud olan cismin həcmi tapın.

Həlli. Verilmiş cismi $y = \text{const}$ müstəvisi ilə kəsək: $-b \leq y \leq b$. Kəsikdə düzbucaqlı üçbucaq alınacaqdır. Kəsikdə alınan üçbucağın sahəsini tapaq. Ellipsin tənliyindən

$$x(y) = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)}$$

alırıq.

Onda kəsikdə alınan düzbucaqlı üçbucağın sahəsi

$$S(y) = \frac{1}{2} x(y) z(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)} \cdot \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)} = \\ = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \frac{c}{a} (b^2 - y^2) = \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} (b^2 - y^2).$$

(37.1) düsturunu görə axtarılan həcm

$$\mu(F) = \int_{-b}^b S(y) dy = \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} \cdot 2 \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \\ = \frac{ac}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{2}{3} abc.$$

§38. Fırlanmadan alınan cismin həcmnin hesablanması.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. $f(x)$ -in qrafiki, $x = a$ və $x = b$ düz xətləri arasında qalan müstəvi fiqurun (əyrixətli trapesiyanın) ox -oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi hesablayaq.

Teorem 38.1. $[a, b]$ parçasında kəsilməz $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki, $x = a, x = b$ və $y = 0$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi əyrixətli trapesiyanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan F cismi kublanandır və onun həmi

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (38.1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. $[a, b]$ parçasında

$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ bölgüsü aparaq. $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında $f(x)$ -in ən kiçik qiyməti m_i , ən böyük qiyməti M_i olsun. Oturacaqları $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$) parçası, hündürlükləri isə

uyğun olaraq m_i və M_i olan düzbucaqlılara baxaq. Beləliklə, iki pilləvari müstəvi fiqur alırıq. Bu pilləvari fiqurlardan biri əyrixətli trapesiyanı daxilinə alır, digəri isə əyrixətli trapesiyanın daxilində yerləşir.

Əyrixətli trapesiyanın və bu iki pilləvari fiqurun ox oxu ətrafında fırlanmasından F cismi və iki pilləvari cisim alınır.

Hər iki pilləvari cisim oturacaqları $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ ($i = \overline{1, n}$)

olan, hündürlükləri isə uyğun olaraq, m_i və M_i olan silindirlərdən ibarətdir. Bu cisimlərdən biri F cisminin daxilində yerləşəcək. Onun həcmi

$$V_d = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i.$$

Digəri, F – cismini daxilində saxlayacaq. Onun həcmi

$$V_x = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i$$

olacaqdır. Bu cəmlər isə $\pi f^2(x)$ funksiyanının uyğun olaraq aşağı və yuxarı Darbu cəmləridir. $\pi f^2(x)$ kəsilməz olduğundan inteqrallanandır. Ona görə bu cəmlərin fərqi $[a, b]$ parçasının müəyyən bir bölgüsü üçün əvvəlcədən verilmiş kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədindən kiçik olacaqdır.

$$V_x - V_d < \varepsilon.$$

Beləliklə, baxılan cisim kublanandır. V_d və V_x cəmlərinin limiti isə $d(T) = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ şərtində

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

olacaqdır. Teorem isbat olundu.

Teorem 38.2. $[a, b]$ parçasında kəsilməz, mənfi olmayan $f(x)$ funksiyanının qrafiki, $x = a$, $x = b$ və $y = 0$

düz xətlərinin əmələ gətirdiyi əyrixətli trapesiyanın oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (38.2)$$

düsturu ilə hesablanır.

Misal 1. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) əyrisinin ox oxu

ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi tapın.

Həlli. (38.1) düsturuna görə axtarılan həcm

$$V = \pi \int_0^a b^2 \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} dx = \frac{\pi b^2}{a^{\frac{4}{3}}} \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{\pi b^2}{a^{\frac{4}{3}}} \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} \bigg|_0^a = \frac{3}{7} \pi a b^2.$$

Misal 2. $y = 2x - x^2$, $y = 0$ əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi tapın.

Həlli. $y = 2x - x^2$ əyrisi ilə $y = 0$ absis oxunun kəsişmə nöqtələri $x_1 = 0$ və $x_2 = 2$ nöqtələridir. Beləliklə, x dəyişəni $[0, 2]$ parçasında dəyişir. (38.1) düsturuna görə

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(4 \frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Misal 3. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi tapın.

Həlli. Verilmiş əyri mərkəzi $(0, b)$ nöqtəsində və radiusu a -ya bərabər olan çevrədir və aydındır ki, bu əyri həm oy oxuna nəzərən simmetrikdir və həm də $y = b$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir. Çevrənin $y = b$ düz xəttindən yuxarıda

qalan hissəsinin tənliyi $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, aşağıda qalan hissəsinin tənliyi isə $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ şəklindədir və $|x| \leq a$.

Onda (38.1) düsturuna görə axtarılan həcm

$$V = \pi \int_{-a}^a (y_1^2(x) - y_2^2(x)) dx = \pi \int_{-a}^a 4b\sqrt{a^2 - x^2} dx = 8b\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Sonuncu integralı hesablamaq üçün $x = a \sin t$ əvəzləməsi aparaq:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad dx = a \cos t dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Onda} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə, } V = 8b\pi \cdot \frac{\pi a^2}{4} = 2\pi^2 a^2 b.$$

Misal 4. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$) müstəvi fiqurunun oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

Həlli. (38.2) düsturuna görə

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = -2\pi \int_0^{\pi} x d(\cos x) = -2\pi \left(x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = \\ &= -2\pi \left(x \cos x \Big|_0^{\pi} - \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = -2\pi (-\pi) = 2\pi^2. \end{aligned}$$

Misal 5. $(y - x)^2 = x^3$ əyrisinin iki budağı və $x = 1$ düz xəttinin əmələ gətirdiyi müstəvi fiqurunun ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

Həlli. $(y - x)^2 = x^3$ əyrisinin budaqlarını tapaq.

$y - x = \pm\sqrt{x^3}$. $y_1 = x + \sqrt{x^3}$, $y_2 = x - \sqrt{x^3}$. Əyrinin tənliyindən aydındır ki, $x \geq 0$ olmalıdır. Beləliklə, x arqumentinin dəyişmə aralığı $0 \leq x \leq 1$ olmalıdır. Aydındır ki, $y_1 = x + x\sqrt{x}$ və $y_2 = x - x\sqrt{x}$ funksiyaları $[0, 1]$ parçasında kəsilməz, mənfi olmayan funksiyalardır və $\forall x \in [0, 1]$ üçün $0 \leq y_2(x) \leq y_1(x)$ bərabərsizliyi doğrudur (bax, şəkil 4.14).

Ona görə də axtarılan həcm

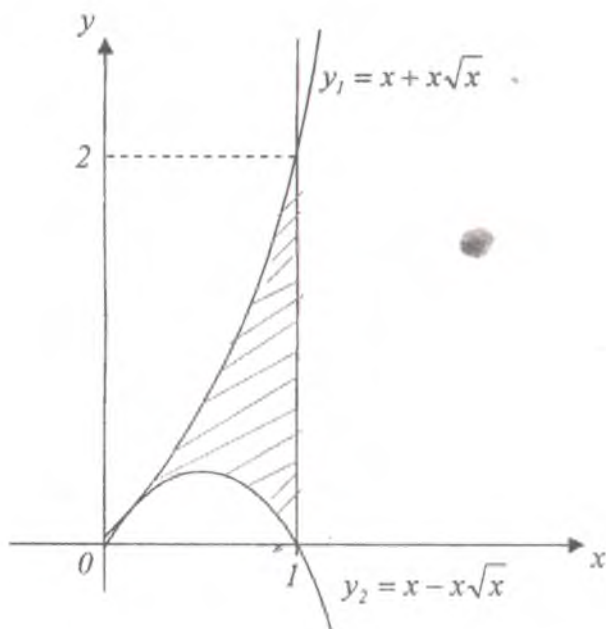
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [y_1^2(x) - y_2^2(x)] dx = \pi \int_0^1 [(x + x\sqrt{x})^2 - (x - x\sqrt{x})^2] dx = \\ &= \pi \int_0^1 4x^2 \sqrt{x} dx = 4\pi \left. \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right|_0^1 = \frac{8\pi}{7}. \end{aligned}$$

Misal 6. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$

$(0 \leq t \leq 2\pi)$ əyrisinin və $y = 0$ düz-xəttinin əmələ gətirdiyi fiqurun ox oxy ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

Həlli. t parametri $[0, 2\pi]$ parçasında dəyişdikdə x dəyişəni $[0, 2\pi a]$ parçasında dəyişir.

Ona görə bu müstəvi fiqurunun ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi



Şəkil 4.14

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

düsturu ilə hesablanacaq.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 z dz. \end{aligned}$$

Yuxarıda göstərmişik ki, $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ (bax, II fəsil, §21). Ona görə

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$$

Digər tərəfdən yuxarıda göstərmişik ki, (bax, I fəsil, §12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{5x}{16} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Deməli,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz = \frac{5x}{16} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{64} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{48} \sin^3 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{32}$$

Beləliklə,

$$V = 16\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz = 32\pi a^3 \frac{15\pi}{48 \cdot 2} = 5\pi^2 a^3$$

Misal 7. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$

($0 \leq t \leq 2\pi$) və $y = 0$ düz-xəttinin əmələ gətirdiyi müstəvi fiqurunun oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi tapın.

Həlli. t parametri $[0, 2\pi]$ parçasında dəyişdikdə x dəyişəni 0 -dan $2\pi a$ -ya kimi dəyişir. Bu müstəvi fiqurunun oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismnin həcmi (38.2) düsturu ilə hesablayacağıq:

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} x y dx.$$

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} x y dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot (1 - \cos t)^2 dt = \\
&= 2\pi a^3 \left(\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2 dt - \int_0^{2\pi} \sin t(1 - \cos t)^2 dt \right)
\end{aligned}$$

Aydındır ki,

$$\int_0^{2\pi} \sin t(1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d(1 - \cos t) = \frac{(1 - \cos t)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2 dt &= \int_0^{2\pi} t(1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} t dt - 2 \int_0^{2\pi} t \cos t dt + \int_0^{2\pi} t \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
&= \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} t d(\sin t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) t^2 \Big|_0^{2\pi} + \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} t d(\sin 2t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) t^2 \Big|_0^{2\pi} = 3\pi^2.
\end{aligned}$$

(Burada hissə-hissə inteqrallama metodunun köməyi ilə asanlıqla göstərmək olur ki, $\int_0^{2\pi} t d(\sin t)$ və $\int_0^{2\pi} t d(\sin 2t)$ inteqralları sıfıra bərabərdir). Onda aydındır ki,

$$V = 2\pi a^3 \cdot 3\pi^2 = 6\pi^3 a^3.$$

§39. Fırlanmadan alınan cismin yarı səthinin sahəsi

Orta məktəbdən r - radiuslu kürənin səthinin sahəsini $S = 4\pi r^2$ düsturu ilə, hündürlüyü h və oturacağının radiusu r olan silindirin yarı səthinin sahəsini $S = 2\pi r h$, radiusları r və R , hündürlüyü h olan kəsik konusun səthinin sahəsinin $S = \pi(R + r)$ düsturu ilə hesablayırıq.

İndi isə bəzi sadə əyrilərin müəyyən bir ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini hesablayaq.

Teorem 39.1. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir və kəsilməz törəməyə malikdir. Onda əyrixətli tərpəsiyanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan F cisminin yarı səthi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (39.1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. $[a, b]$ parçasında $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölgüsü aparaq. $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, n-1$) parçasında ξ_i aralıq nöqtələri

olaraq $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ götürək. $(\xi_i, f(\xi_i))$ nöqtəsində $y = f(x)$

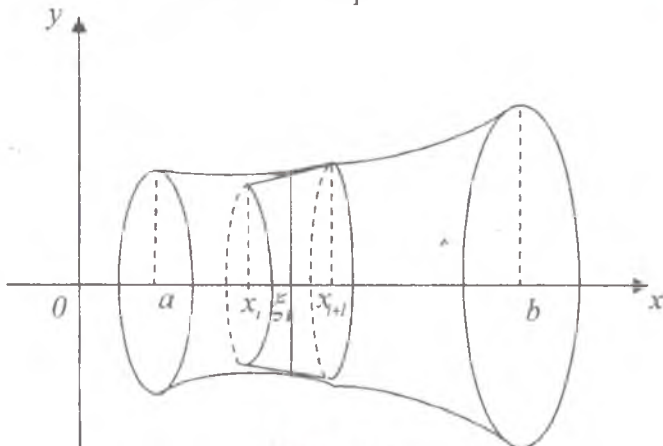
funksiyasının qrafikinə toxunan çəkək. (şəkil 4.15) Bu toxunanın tənliyi $y = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x - \xi_i)$ şəklindədir. Bu toxunanın $x = x_i$ və $x = x_{i+1}$ düz xətləri arasında qalan hissəsinin uzunluğunu tapaq. $(x_i, f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_i - \xi_i))$ və $(x_{i+1}, f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_{i+1} - \xi_i))$ nöqtələri arasındakı məsafə

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)]^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) olacaqdır.

Aydındır ki, bu toxunanın $x = x_i$ və $x = x_{i+1}$ düz xətləri arasında qalan hissəsinin ox oxu ətrafında fırlanmasından kəsik konus yaranır və bu kəsik konusun yan səthinin sahəsi təqribən, $\pi(f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i$ olacaqdır.

i indeksinə 0 – dan $(n-1)$ -ə qədər qiymətlər verib cəmləsək, bütün kəsik konusların yan səthlərinin sahələri cəmini alarıq:



Şəkil 4.15

$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i \quad (39.2)$$

Aydındır ki, G əyrixətli trapesiyanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan F cisminin yan səthinin sahəsi olaraq təqribən (39.2) cəmi götürülə bilər:

$$S \approx \pi \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i$$

$$d(T) = \max \Delta x_i, \quad T \text{ bölgüsünün diametri olsun.}$$

Aydındır ki, (39.2) ifadəsindəki, $\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i$,

və

$\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i$ toplananların hər ikisi

$\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funksiyası üçün Riman inteqral cəmidir.

Teoremin şərtinə görə $\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanan olduğundan, (39.2) cəmində $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək, G əyrixətli trapesiyanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin yan səthinin sahəsini alırıq.

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i + \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

Teorem isbat olundu.

Misal 1. Mərkəzi kordinat başlanğıcında radiusu r olan yarımçevrənin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

Həlli. Mərkəzi kordinat başlanğıcında, radiusu r olan yarımçevrənin tənliyi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) şəklindədir. Onda (39.1) düsturuna əsasən,

$$S = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-a}^a r dx = 2\pi x \Big|_{-a}^a = 4\pi r^2.$$

Tutaq ki, xoy kordinat müstəvisinin yuxarı yarım müstəvisində düzlənən AB əyrisi verilmişdir. Tutaq ki, AB əyrisi

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(l) \\ y = \psi(l) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq l \leq \mu \quad (39.3)$$

parametrik şəkildə verilmişdir. Burada l parametri A nöqtəsindən bu əyri üzərində olan dəyişən $M(x, y)$ nöqtəsinə qədər olan qövsün uzunluğu götürülür. Aydındır ki, M nöqtəsi əyri boyunca A nöqtəsindən B nöqtəsinə dəyişdikdə l parametri 0 – dan μ - yə qədər dəyişəcəkdir. Burada μ AB əyrisinin uzunluğudur.

Tutaq ki, $\varphi(l)$ və $\psi(l)$ funksiyaları $[0, \mu]$ parçasında kəsilməzdir və kəsilməz törəmələrə malikdir. AB əyrisi düzlənən olduğundan $A(\varphi(0), \psi(0))$ və $M(\varphi(l), \psi(l))$, $0 \leq l \leq \mu$ nöqtələrini birləşdirən AM qövsü də düzlənəndir. AM qövsünün uzunluğu l - dən asılı artan funksiyadır.

AB əyrisi üzərində A nöqtəsindən başlayaraq $A = A_0, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ nöqtələrini qeyd edək və $AA_1, \dots, A_{n-1}B$ sınıq xəttini çəkək (bax, şəkil 4.16).

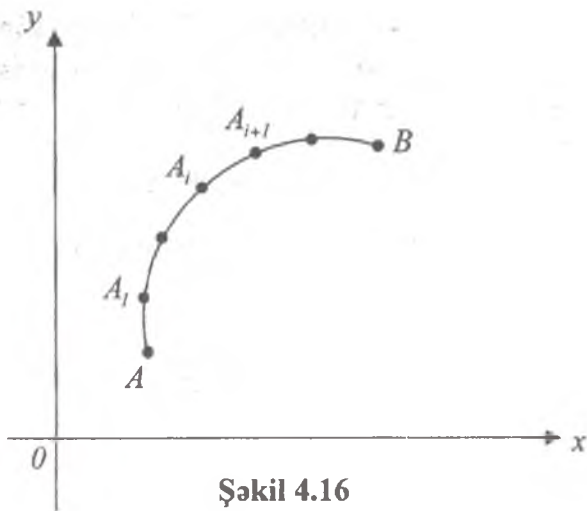
$[0, \mu]$ parçasında $\forall T$ bölgüsü aparaq:

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n = \mu$$

$$A_i(\varphi(l_i), \psi(l_i)) \quad i = \overline{0, n} \quad \text{nöqtələrini} \quad A_i A_{i+1} \quad (i = \overline{0, n})$$

düz xətt parçaları ilə birləşdirsək, AB əyrisinə çəkilmiş $AA_1, \dots, A_{n-1}B$ sınıq xəttini alarıq. $\sigma(T)$ - ilə bu sınıq xəttin fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsini işarə edək.

Aydındır ki, bu sınıq xəttin hər bir $A_i A_{i+1} \quad (i = \overline{0, n})$



Şəkil 4.16

hissəsinin ox oxu ətrafında fırlanmasından kəsik konus yaranır və bu kəsik konusun yan səthinin sahəsini elementar həndəsədən məlum olan düstur vasitəsilə hesablaya bilərik. A_i və A_{i+1} nöqtələrinin kordinatları uyğun olaraq $\psi(l_i) = y_i$ və $\psi(l_{i+1}) = y_{i+1}$ ilə, $A_i A_{i+1}$ qövsünün uzunluğunu l_i ilə işarə etsək, onda $A_i A_{i+1}$ qövsünün ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan kəsik konusun yan səthinin sahəsi

$$\sigma_i = \pi [y_i + y_{i+1}] \cdot l_i$$

olacaqdır.

Aydındır ki, $A A_1 \dots A_{n-1} B$ sınıq xəttinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsi

$$\sigma(T) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} [y_i + y_{i+1}] l_i$$

olacaqdır.

$\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$ olsun. $\max_i \Delta l_i = d(T)$ T bölgüsünün diametri olsun.

Göstərək ki, $d(T) \rightarrow 0$ şərtində $\sigma(T)$ kəmiyyətinin sonlu σ limiti vardır. Təbii olaraq bu σ limiti AB əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsi qəbul edilir:

$$\sigma = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(T).$$

$\sigma(T)$ cəmində aşağıdakı kimi çevirmə apararaq:

$$\sigma(T) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i \quad (39.4)$$

$y = \psi(l)$ funksiyası $[0, \mu]$ parçasında kəsilməz olduğundan, müntəzəm kəsilməzdir. Onda $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ var ki, $d(T) < \delta$ olduqda $|y_{i+1} - y_i| < \varepsilon$ bərabərsizliyi istənilən i üçün ödənəcəkdir.

Onda (39.4) ifadəsindəki ikinci toplanan üçün

$$\left| \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i \right| \leq \varepsilon \pi \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leq \varepsilon \pi \cdot \mu$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Aydındır ki, $\max_i \Delta l_i \rightarrow 0$ şərtində bu cəm sıfıra yaxınlaşır. (39.4) ifadəsində birinci toplananı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta l_i - 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta l_i - l_i) \quad (39.5)$$

$y = \psi(l)$ funksiyası $[0, \mu]$ parçasında kəsilməz olduğundan, məhduddur. Ona görə də elə $M > 0$ ədədi vardır ki, bütün i -lər üçün $|y_i| \leq M$ bərabərsizliyi doğrudur. Onda (39.5) ifadəsində ikinci toplanan üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$2\pi \left| \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta l_i - l_i) \right| \leq 2\pi M \left(\mu - \sum_{i=0}^{n-1} l_i \right)$$

Burada, μ AB əyrisinin uzunluğu, $\sum_{i=0}^{n-1} l_i$ isə $AA_1 \dots A_{n-1}B$ sınıq xəttinin uzunluğudur. Qövsün uzunluğunun tərifinə əsasən $\max \Delta l_i \rightarrow 0$ şərtində $\mu - \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ kəmiyyəti sıfıra yaxınlaşır.

(39.5) ifadəsindəki $\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta l_i$ cəmi isə, $[0, \mu]$ parçasında $y = \psi(l)$ kəsilməz funksiyanın integral cəmidir. Ona görə

$$\lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta l_i = \int_0^{\mu} \psi(l) dl.$$

Beləliklə, (39.3) parametrik şəkildə verilmiş AB düzlənən əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsi üçün

$$S = 2\pi \int_0^{\mu} y dl \quad (39.6)$$

düsturunu aldıq.

Əgər verilmiş AB əyrisinin tənliyi aşkar $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ şəklində verilibsə və $f(x)$ kəsilməz törəməyə malikdirsə onda

dl qövs diferensialı $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ olduğundan AB əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsi üçün

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (39.7)$$

düsturu doğrudur.

Əgər verilmiş AB əyrisinin tənliyi

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T$$

parametrik şəkildə verilmişdirsə və $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyaları $[t_0, T]$ parçasında kəsilməz törəməyə malikdirsə, onda dl qövs diferensialı $dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ olduğundan, AB əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun yan səthinin sahəsi üçün

$$S = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (39.8)$$

düsturu doğrudur.

Əgər verilmiş AB əyrisinin tənliyi $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ polyar kordinatlarla verilmişsə və $f(\theta)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməz törəməyə malikdirsə, onda $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ olduğundan (39.6) düsturu aşağıdakı şəkllə düşər.

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \quad (39.9)$$

Misal 1. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) tsikloida qövsünün ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun səthinin sahəsini tapın. ($a > 0$).

Həlli. (39.8) düsturundan istifadə edəcəyik.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t)) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -16\pi^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -16\pi^2 \left[\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \Big|_0^{2\pi} \right] = \\
 &= -16\pi^2 \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = -16\pi^2 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{64}{3} \pi^2.
 \end{aligned}$$

Misal 2. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ əyrisinin ox oxu

ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini tapın.

Həlli. Əyrinin tənliyi aşkar şəkildə verildiyindən (39.7) düsturundan istifadə edəcəyik.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1 + \cos^4 x}{\cos^4 x},$$

$$y \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\sin x}{\cos x} \sqrt{\frac{1 + \cos^4 x}{\cos^4 x}} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \sqrt{1 + \cos^4 x}$$

Onda (39.7) düsturuna görə

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \sqrt{1 + \cos^4 x} \, dx = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^3 x} \, d(\cos x).$$

$\cos x = t$ əvəzləməsi aparaq.

$$x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Onda

$$S = -2\pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^3} \sqrt{1 + t^4} \, dt = 2\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^{-3} (1 + t^4)^{\frac{1}{2}} \, dt.$$

Sonuncu integralı hesablamaq üçün binomial diferensialın inteqrallanmasından istifadə edəcəyik. Məlumdur

ki, (bax, I fəsil, §11) $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ inteqralında $\frac{m+n}{n} + p$

tam ədəd olduqda $a + bx^n = x^n t^\alpha$ əvəzləməsi aparılır. Burada α , p kəsrinin məxrəcidir. Bu hal üçün $m = -3$, $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$

olduğundan, $\frac{m+1}{n} + p = 0$ tam ədəddir. Ona görə $1 + t^4 = t^4 z^2$

əvəzləməsi aparaq. Buradan, $t = \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}$,

$$(1 + t^4)^{\frac{1}{2}} = t^2 z = \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$dt = -\frac{z dz}{2(z^2 - 1)^{\frac{5}{4}}} \text{ alırıq. } t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \sqrt{5}, \quad t = 1 \Rightarrow z = \sqrt{2}.$$

Ona görə

$$S = 2\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^{-3} (1 + t^4)^{\frac{1}{2}} dt = -2\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{5}} (z^2 - 1)^{\frac{3}{4}} \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{z dz}{2(z^2 - 1)^{\frac{5}{4}}} =$$

$$= \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{z^2}{z^2 - 1} dz = \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{z^2 - 1} \right) dz = \pi \left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} dz + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{dz}{z^2 - 1} \right) =$$

$$= \pi \left(z + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \pi \left[\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right) \right] = \pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) &= \pi \left[(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}} \right] = \\
 &= \pi \left[(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2(\sqrt{2}+1)^2}{4 \cdot 1}} \right] = \\
 &= \pi \left[(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$S = \pi \left[(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2} \right].$$

Misal 3. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$) əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini tapın.

Həlli. $y^2 = 2px$ parabolası absis oxuna nəzərən simmetrikdir. Ona görə də bu parabolanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini tapmaq üçün $y = \sqrt{2px}$ parabolasının ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapmaq kifayətdir.

Parabolanın tənliyini diferensiallasaq,

$$2y \cdot y' = 2p$$

alırıq. Buradan, $y' = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$,

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{2px}} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$$

Onda (39.7) düsturuna görə

$$S = 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{2x+p} dx =$$

$$= \pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} (2x+p)^{\frac{1}{2}} d(2x+p) = \pi \sqrt{p} \frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x_0} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \sqrt{p} \left[(2x_0+p) \sqrt{(2x_0+p)} - p \sqrt{p} \right]$$

Beləliklə,

$$S = \frac{2\pi}{3} \left[(2x_0+p) \sqrt{2x_0 p + p^2} - p^2 \right].$$

Misal 4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$) ellipsinin ox oxu

ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

Həlli. Ellipsin tənliyindən $y \geq 0$ üçün alırıq:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \text{ Buradan,}$$

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \text{ olar.}$$

Onda (39.7) düsturuna görə

$$S = 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x^2} dx.$$

$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \varepsilon$ işarə edək. ε kəmiyyəti ellipsin ekscentrisi adlanır.

Onda

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^a \sqrt{a^2 - (\varepsilon x)^2} d(\varepsilon x) = \\
&= \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon x}{2} \sqrt{a^2 - (\varepsilon x)^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right] \Big|_0^a = \\
&= \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon a^2}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \varepsilon \right] \Big|_0^a = \\
&= \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon a^2}{2} \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right] = 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$S = 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

Misal 5. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

Həlli. Aydındır ki, bu əyri mərkəzi $(0, b)$ nöqtəsində, radiusu a olan çevrədir. Bu çevrənin parametrik şəkildə tənliyini yazaq:

$$x = acost, \quad y - b = asint, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$x'_t = -asint, \quad y'_t = acost, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{(-asint)^2 + (acost)^2} = a$$

olduğundan, (39.8) düsturuna görə

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + asint) \cdot a dt = \\
&= 2\pi a(bt - acost) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a[(2\pi b - a) - (0 - a)] = 4\pi^2 ab.
\end{aligned}$$

Misal 6. $y = \frac{x^3}{3}$, $x \in [-2, 2]$ əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. $y' = x^2$, $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^4}$ olduğundan (39.7) düsturuna görə

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \frac{x^3}{3} \sqrt{1 + x^4} dx = \frac{4\pi}{3} \int_0^2 x^3 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Məlumdur ki, $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ şəklində inteqralları

hesablayarkən $\frac{m+1}{n}$ tam ədəd olduqda, $a + bx^n = t^\alpha$ əvəzləməsi ilə binomal ifadələrin hesablanması rəşional ifadələrin inteqrallanmasına gətirilir (burada α , p kəsrinin məxrəcidir). Baxdığımız hal üçün $m=3$, $n=4$, $p=\frac{1}{2}$

olduğundan $\frac{m+1}{n}$ tam ədəddir. Ona görə $1 + x^4 = t^2$

əvəzləməsi aparaq. Buradan $x = \sqrt[4]{t^2 - 1}$,

$$dx = \frac{t dt}{2(t^2 - 1)^{\frac{3}{4}}}, \quad x^3 = (t^2 - 1)^{\frac{3}{4}} \text{ alırıq.}$$

$$x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=2 \Rightarrow t=\sqrt{17}.$$

Bu ifadələri sonuncu inteqralda nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\pi}{3} \int_0^2 x^3 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4\pi}{3} \int_1^{\sqrt{17}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{4}} \cdot t \cdot \frac{t}{2(t^2 - 1)^{\frac{3}{4}}} dt = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_1^{\sqrt{17}} t^2 dt = \frac{2\pi}{3} \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{17}} = \frac{2\pi}{9} (17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

Misal 7. Parametrik şəkildə verilmiş

$x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ əyrinin ox oxu

ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

Həlli. $x'_t = e^t (\sin t + \cos t)$; $y'_t = e^t (\cos t - \sin t)$,

$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{2} e^t$ olduğundan, axtarılan sahə (39.8)

düsturuna görə

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} e^t \cos t \cdot \sqrt{2} e^t dt = 2\sqrt{2} \pi \int_0^{2\pi} e^{2t} \cos t dt .$$

olacaqdır.

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t dt$ integralına hissə-hissə integrallama metodunu

ardıcıl olaraq iki dəfə tətbiq edək.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} d(\sin t) = e^{2t} \cdot \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot e^{2t} dt = \\ &= e^{\pi} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} d(\cos t) = e^{2\pi} + 2 \left(e^{2t} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot e^{2t} dt \right) = \\ &= e^{\pi} - 2 - 4J . \end{aligned}$$

Bu rekurent münasibətdən $J = \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2)$ alırıq. Onda axtarılan sahə

$$S = 2\sqrt{2} \pi \cdot \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2) = \frac{2\sqrt{2}}{5} \pi (e^{\pi} - 2) .$$

Misal 8. $r = 2a \sin \theta$ ($a > 0$) əyrisinin polyar oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

Həlli. Aydındır ki, r -in mənfi olmayan qiymətlər alması üçün $\sin\theta \geq 0$ olmalıdır, yəni $0 \leq \theta \leq \pi$ götürmək lazımdır. Əyrinin qövs diferensialı

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{4a^2 \sin^2 \theta + 4a^2 \cos^2 \theta} = 2a$$

olacaqdır. Bundan başqa, $y = r \sin\theta = 2a \sin^2 \theta$.

Onda (39.6) düsturuna görə axtarılan S sahəsi

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi y dl = 2\pi \int_0^\pi 2a \sin^2 \theta \cdot 2a d\theta = 8\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = 4\pi a^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi = 4\pi^2 a^2 \end{aligned}$$

olacaqdır.

§40. Müstəvi əyrisinin və müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinantlarının tapılması

Tutaq ki, xoy müstəvisində

$A(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrə maddi nöqtə kimi baxacağıq. Tutaq ki, bu nöqtələrdə uyğun olaraq $m_1, m_2, \dots, m_n$ kütləsi paylanmışdır. Mexanikadan məlumdur ki, verilmiş maddi nöqtələr sisteminə uyğun $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ kütləsinin $C(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzinin kordinantları

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad (40.1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Fərz edək ki,

$$x = x(l), \quad y = y(l), \quad 0 \leq l \leq \mu$$

uzunluğu μ olan AB düzlənən əyrisinin tənliyidir. $x(l)$ və $y(l)$ funksiyaları $[0, \mu]$ parçasında kəsilməzdir. Hesab edəcəyik ki, AB əyrisi maddi əyridir, yəni AB əyrisi boyunca müəyyən m kütləsi paylanmışdır. m kütləsinin ağırlıq mərkəzini tapmaq tələb olunur. $[0, \mu]$ parçasında ixtiyari T bölgüsü aparaq:

$$0 < l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n = \mu.$$

Onda $A_k(x(l_k), y_k(l_k))$, $k = \overline{1, n}$ nöqtələri vasitəsilə AB əyrisi elementar $A_k A_{k+1}$ ($k = \overline{0, n-1}$) ($A_0 = A, A_n = B$) hissələrinə bölünər. Tutaq ki, $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$ və m_k elementar $A_k A_{k+1}$ qövsünün kütləsidir. Sadəlik üçün hesab edəcəyik ki, verilmiş kütlə bircinslidir, yəni ρ xətti sıxlığı sabitdir. (Xatırlayaq ki, sıxlıq vahid uzunluğa uyğun gələn kütlədir). $\rho = 1$ götürək. Onda

$$\Delta m_k = \rho \cdot \Delta l_k = \Delta l_k$$

olar.

Hesab edəcəyik ki, $\Delta m_k A_k(x_k, y_k)$ ($k = \overline{0, n-1}$) nöqtəsində cəmlənən kütlədir. Onda (40.1) düsturuna görə $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ maddi nöqtələr sisteminin ağırlıq mərkəzinin kordinatları

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x(c_k) \Delta l_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y(c_k) \Delta l_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k} \quad (40.2)$$

olacaqdır, burada $c_k \in [l_k, l_{k+1}]$ ixtiyari nöqtədir.

(40.2) düsturu ağırlıq mərkəzi kordinatlarının təqribi qiymətləridir. (40.2) düsturlarının sürətlərinə diqqət yetirək:

$\sum_{k=1}^n x(c_k) \Delta l_k$ və $\sum_{k=1}^n y(c_k) \Delta l_k$ uyğun olaraq $x(l)$ və $y(l)$ funksiyalarının $[0, \mu]$ parçasında integral cəmidir. $x(l)$ və $y(l)$

kəsilməz funksiyalar olduğundan, $d(T) = \max_k \Delta l_k \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x(c_k) \Delta l_k = \int_0^{\mu} x(l) dl, \quad \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y(c_k) \Delta l_k = \int_0^{\mu} y(l) dl,$$

olar. Beləliklə,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\mu} x(l) dl}{\mu}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{\mu} y(l) dl}{\mu}. \quad (40.3)$$

Qeyd. Əgər AB əyrisi $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ aşkar şəkildə verilibsə, onda (40.3) düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\mu}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\mu}. \quad (40.4)$$

Burada, μ , AB əyrisinin uzunluğudur.

Əgər AB əyrisi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_0 \leq t \leq T)$ parametrik şəkildə verilibsə, onda (40.3) düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\bar{x} = \frac{\int_{t_0}^T x(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}{\mu}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{t_0}^T y(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}{\mu}. \quad (40.5)$$

(40.3)-də ikinci bərabərliyin hər tərəfini 2π -yə vursaq alarıq:

$$2\pi \bar{y} \mu = 2\pi \int_0^{\mu} y(l) dl.$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfi AB əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsidir. Sol tərəf isə $c(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzinin ox oxu ətrafında bir dəfə fırlanmasından alınan yolun uzunluğu ilə AB qövsünün uzunluğu hasilinə bərabərdir. Beləliklə, AB müstəvi əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun səthinin sahəsini S ilə işarə etsək,

$$S = 2\pi\bar{y} \cdot \mu.$$

Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olundu.

Teorem (Güldenin I teoremi). Müstəvi üzərində yerləşən və fırlanma oxunu kəsməyən AB müstəvi əyrisinin bu ox ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun səthinin sahəsi bu əyrinin μ uzunluğu ilə $C(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzinin bu ox ətrafında fırlanmasından alınan çevrənin $2\pi\bar{y}$ uzunluğu hasilinə bərabərdir.

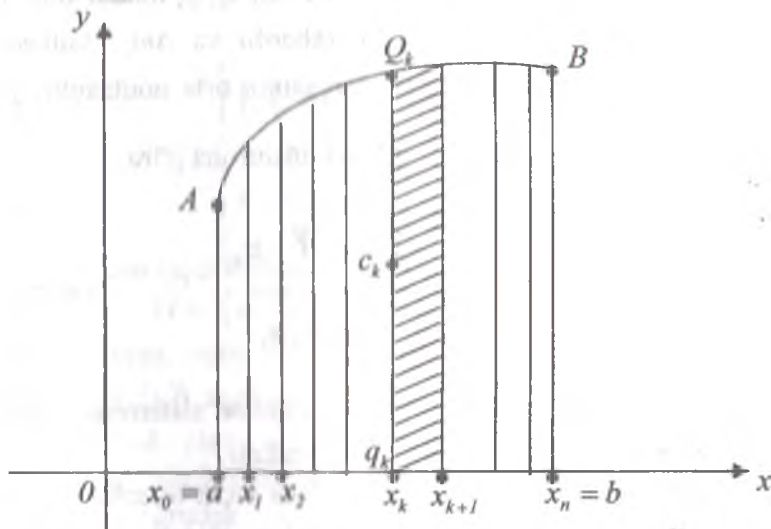
İndi tutaq ki, xoy müstəvisində kvadratlanan müstəvi fiquru (oblastı) verilmişdir və bu oblastda bircinsli kütlə paylanmışdır. Bu bircins müstəvi oblastının ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapmaq tələb olunur.

Müəyyənlik üçün tutaq ki, verilmiş müstəvi fiqur

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

əyrixətli trapesiyadır. (bax, şəkil 4.17) Hesab edirik ki, $f(x)$ $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir.

$[a, b]$ parçasının ixtiyari T bölgüsünü götürək.



Şəkil 4.17

$$T: a = x_0 < x_1 < \dots x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b.$$

$x = x_k \left(k = \overline{0, n} \right)$ düz xətləri vasitəsilə bu əyrixətli trapesiyanı

elementar hissələrə bölək. Aydındır ki, bu əyrixətli trapesiya üzərində paylanmış kütlə də elementar hissələrə bölünəcəkdir.

$[x_k, x_{k+1}]$ parçasına uyğun elementar hissənin sahəsini ΔS_k ilə işarə edək. ΔS_k sahəsi üzərində paylanmış kütlə Δm_k olsun. Sadəlik üçün kütlənin sıxlığını $\rho = 1$ qəbul edək. Onda $\Delta m_k = \Delta S_k$ olar. $[x_k, x_{k+1}] \left(k = \overline{0, n-1} \right)$ parçalarını daha kiçik hissələrə bölməklə, ona nail olmaq olar ki, bu əyrixətli trapesiyanı təşkil edən elementar hissələrə düzbucaqlı kimi baxmaq olar, yəni $\Delta S_k \approx f(x_k) \cdot \Delta x_k$ götürmək olar ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$). Ona görə əyrixətli trapesiyanın kütləsi Δm_k olan hər bir maddi hissəsini $q_k Q_k$ maddi düz xətt parçası ilə əvəz edək. Bu halda hesab edəcəyik ki, $q_k Q_k$ maddi düz xətt parçasının kütləsi də Δm_k -ya bərabərdir və Δm_k kütləsinin ağırlıq mərkəzi $q_k Q_k$ düz xətt parçasının orta nöqtəsidir, yəni

$C_k \left(x_k, \frac{1}{2} f(x_k) \right)$ nöqtəsidir. (40.1) düsturuna görə

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k) \cdot \Delta x_k}{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k}, \quad \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} [f(x_k)]^2 \cdot \Delta x_k}{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k} \quad (40.6)$$

nisbətləri C_k , $k = \overline{0, n-1}$ maddi nöqtələr sisteminin ağırlıq mərkəzlərinin kordinatlarını ifadə edəcəkdir.

Nəzərə alaq ki, $[a, b]$ parçasını daha kiçik hissələrə bölsək, onda əyrixətli trapesiyanı təşkil edən elementar hissələrə

düzbucaqlı kimi baxmaq olar və bu halda Δm_k kütləsinin ağırlıq mərkəzi C_k nöqtələrinə daha yaxın olacaqdır.

$\max_k \Delta x_k = d(T)$ işarə edək. Əyrixətli trapesiyanın ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını uyğun olaraq $\bar{x}, \bar{y}$ ilə işarə edək. Aydındır ki, (40.6) nisbətlərində $d(T) \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\bar{x} = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k) \Delta x_k}{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k}, \quad \bar{y} = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} [f(x_k)]^2 \cdot \Delta x_k}{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k}$$

Buradan, maddi əyrixətli trapesiyanın $C(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzi üçün aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad (40.7)$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b x f(x) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

Asanlıqla inanmaq olar ki, əgər G müstəvi fiquru

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

şəklindədirsə, yəni G müstəvi fiquru $y = f_1(x), y = f_2(x), (f_1(x) \leq f_2(x))$ ayrılırları və $x = a, x = b$ düz xətləri ($a \leq x \leq b$) ilə məhdud olan müstəvi fiqurudursa, onda G müstəvi fiqurunun ağırlıq mərkəzinin kordinatları üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x)) dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx} \quad (40.8)$$

(40.8) – in ikinci düsturundan

$$\bar{y} \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

alarıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini 2π - yə vursaq və nəzərə alsaq ki, $\int_a^b f(x) dx$ ifadəsi baxılan əyrixətli trapesiyanın sahəsidir, onda

$$2\pi \bar{y} \cdot S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (40.9)$$

alarıq. (40.9) bərabərliyinin sağ tərəfi $aABb$ əyrixətli trapesiyanın ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmi, sol tərəfi isə $aABb$ əyrixətli trapesiyanın sahəsi ilə, bu trapesiyanın $C(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir.

Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olundu.

Teorem (Güldenin II teoremi). Müstəvi üzərində yerləşən və fırlanma oxunu kəsməyən müstəvi fiqurun bu ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin V həcmi, müstəvi fiqurun S sahəsi ilə bu fiqurun $C(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlıq mərkəzinin həmin ox ətrafında fırlanmasından alınan çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir:

$$V = S \cdot 2\pi \bar{y}.$$

Aşağıda həll olunan bütün misallarda hesab edəcəyik ki, kütlə əyri boyunca və həmçinin müstəvi üzrə müntəzəm paylanmışdır və sıxlıq vahidə bərabərdir.

Misal 1. ox oxundan yuxarıda yerləşən $x^2 + y^2 = a^2$ yarımçevrəsinin ağırlıq mərkəzini tapın.

Həlli. Absis oxundan yuxarıda yerləşən $x^2 + y^2 = a^2$ yarımçevrəsinin tənliyi $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$ şəklindədir və bu yarımçevrənin uzunluğu πa -ya bərabərdir. (40.4) düsturundan istifadə edəcəyik. Baxılan yarımçevrə oy oxuna nəzərən simmetrik olduğundan onun ağırlıq mərkəzi oy oxu üzərində yerləşir. Ona görə $\bar{x} = 0$ olacaqdır. $\bar{y}$ -ni tapaq. (40.4)-ə görə

$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^a y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx}{\pi a}.$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

olduğundan,

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a}{\pi a} \int_{-a}^a dx = \frac{2}{\pi a} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}.$$

Beləliklə, ox oxundan yuxarıda yerləşən $x^2 + y^2 = a^2$ yarımçevrəsinin ağırlıq mərkəzi $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ nöqtəsidir.

Misal 2. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ tsikloid əyrisinin ağırlıq mərkəzini tapın.

Həlli. (40.5) düsturundan istifadə edəcəyik. Yuxarıda göstərmişik ki, (bax, §36, misal 1) verilmiş tsikloid əyrisinin uzunluğu $\mu = 8a$. $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = \\ &= \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} = 2a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{8a} \cdot 2a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{a}{4} \int_0^{2\pi} t \cdot \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{4} \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} dt.\end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi} t \cdot \sin \frac{t}{2} dt$ integralını hesablamaq üçün hissə-hissə

inteqrallama metodundan istifadə edək. $u = t$, $dv = \sin \frac{t}{2} dt$

qəbul edək. $du = dt$, $v = -2 \cos \frac{t}{2} dt$ olar. Onda

$$\int_0^{2\pi} t \cdot \sin \frac{t}{2} dt = -2t \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 4\pi + 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

$\int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} dt$ integralını hesablamaq üçün hasilin cəmə

çevrilməsi düsturundan istifadə etmək lazımdır. Asanlıqla inanmaq olar ki, bu integral sıfıra bərabərdir.

Beləliklə,

$$\bar{x} = \frac{a}{4} \cdot 4\pi = a\pi.$$

İndi isə $\bar{y}$ -ni hesablayaq.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(t - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{4} \int_0^{2\pi} (t - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{a}{4} \cdot 2 \int_0^{2\pi} t \sin^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = a \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -a \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -a \int_0^{2\pi} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) + a \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{2} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \\
&= -a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + a \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \Big|_0^{2\pi} = -a(\cos \pi - \cos 0) + \\
&+ \frac{a}{3}(\cos^3 \pi - \cos^3 0) = 2a - \frac{2a}{3} = \frac{4}{3}a.
\end{aligned}$$

Beləliklə, verilmiş tsikloidin ağırlıq mərkəzi $C\left(a\pi, \frac{4}{3}a\right)$ nöqtəsidir.

Misal 3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroidinin birinci kordinat bucağında (I rübdə) yerləşən hissəsinin ağırlıq mərkəzini tapın.

Həlli. Məlumdur ki, I rübdə astroid əyrisinin tənliyi $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq a$ şəklindədir. Yuxarıda göstərmişik ki, (bax, §36, misal 7) astroid əyrisinin I rübdə yerləşən hissəsinin uzunluğu $\mu = \frac{3}{2}a$ -ya bərabərdir. Əyrinin tənliyi aşkar şəkildə verildiyindən (40.4) düsturundan istifadə edəcəyik.

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Onda (40.4) düsturuna görə,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2}{3a} \int_0^a x \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{2}{3a} \cdot a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \Bigg|_0^a = \\ &= \frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{3}{5} a^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} a,\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3a} \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{2}{3a} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx.$$

Sonuncu integralı hesablamaq üçün $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ binomal diferensialın inteqrallanmasından istifadə edəcəyik. Baxdığımız hal üçün $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{3}{2}$ və $\frac{m+1}{n} = 1$ tam ədəd

olduğundan, $a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = t^2$ əvəzləməsi aparaq: $x = 0 \Rightarrow t = a^{\frac{1}{3}}$; $x = a \Rightarrow t = 0$; Əvəzləmədən $-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = 2t dt$ və yaxud

$$x^{-\frac{1}{3}} dx = -3t dt \text{ alarıq.}$$

Onda

$$\frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}} \cdot 3 \int_{a^{\frac{1}{3}}}^0 t^4 dt = \frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{t^5}{5} \Bigg|_{a^{\frac{1}{3}}}^0 = \frac{2}{5a^{\frac{2}{3}}} \cdot a^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} a$$

Beləliklə, baxılan əyrinin ağırlıq mərkəzi $C\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$ nöqtəsidir.

Misal 4. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ parabolası və kordinat oxları ilə məhdud olan fiqurun ağırlıq mərkəzini tapın.

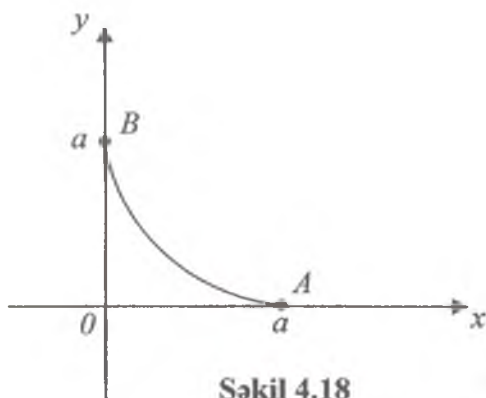
Həlli. Verilmiş parabolanın tənliyindən alırıq.

$$y = \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq a$$

Aydınır ki, bu parabola absis oxunu $(a, 0)$ nöqtəsində, ordinat oxunu isə $(0, a)$ nöqtəsində kəsir (bax, şəkil 4.18).

$OABO$ əyrixətli trapesiyanın ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını (40.7) düsturunun köməyi ilə tapacağıq.

Əvvəlcə bu əyrixətli trapesiyanın sahəsini tapaıq.



Şəkil 4.18

$$\begin{aligned} \int_0^a xy \, dx &= \int_0^a x(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x) \, dx = \left[a \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3} \right] \bigg|_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{4}{5}a^3 + \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{30}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^a [(a+x) - 2\sqrt{a}\sqrt{x}]^2 dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^a [(a+x)^2 - 2(a+x) \cdot 2\sqrt{a}\sqrt{x} + 4ax] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^a \left[a^2 + 6ax + x^2 - 4a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} \right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[a^2x + 6a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4a^{\frac{3}{2}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \\
&= \frac{1}{2} \left(a^3 + 3a^3 + \frac{a^3}{3} - \frac{8}{3}a^3 - \frac{8}{5}a^3 \right) = \frac{a^3}{30}.
\end{aligned}$$

Onda (40.7) düsturuna görə verilmiş müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinatları $\bar{x} = \bar{y} = \frac{a}{5}$ olar.

Misal 5. Güldenin I teoremindən istifadə edərək radiusu R -ə bərabər olan yarımçevrənin ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapın.

Həlli. Kordinat oxlarını şəkil 4.19-da olduğu kimi seçək. Radiusu R -ə bərabər olan yarımçevrənin uzunluğu $\mu = \pi R$, bu yarımçevrənin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan kürənin səthinin sahəsi $S = 4\pi R^2$. Onda Güldenin I teoreminə görə

$$4\pi R^2 = 2\pi \bar{y} \cdot \pi a.$$

Buradan, $\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$ alırıq.

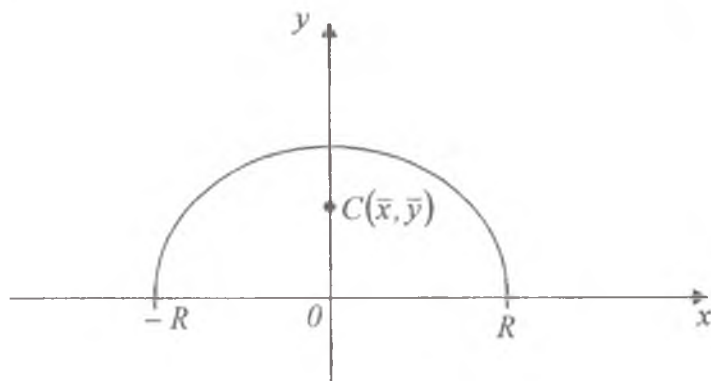
$\bar{x}$ -ni tapmaq üçün (40.4) -ün birinci düsturundan istifadə edək. Verilmiş yarımçevrənin tənliyi

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R] \text{ şəklindədir.}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

olduğundan,



Şəkil 4.19

$$\bar{x} = \frac{\int_{-R}^R x dx}{\pi R} = 0.$$

Beləliklə, radiusu R -ə bərabər olan yarımçevrənin ağırlıq mərkəzinin kordinatları $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$.

Misal 6. $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipsi və $x^2 + y^2 = 9$ çevrəsi ilə məhdud olan və birinci rübdə yerləşən müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipsinin yarımoxları $a = 3$ və $b = 2$. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Bu ellipslə

$x^2 + y^2 = 9$ çevrəsinin I rübdə əmələ gətirdiyi müstəvi fiquru şəkil 4.20-də göstərilmişdir.

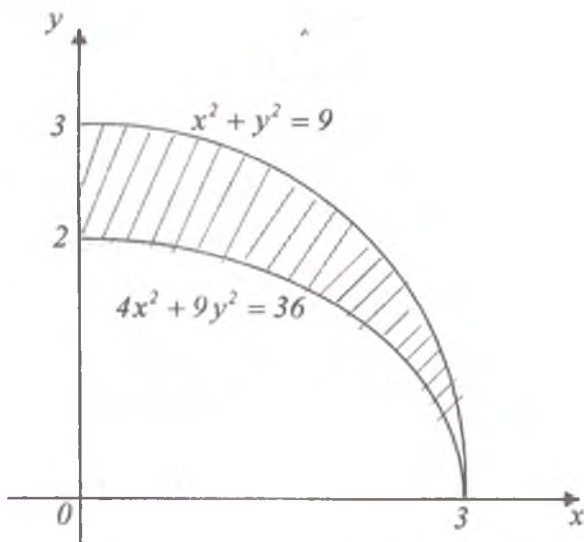
Şəkil 4.20-də göstərilmiş ştrixlənmiş hissənin ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapmaq üçün (40.8) düsturlarından istifadə edəcəyik. Əvvəlcə axtarılan ştrixlənmiş hissənin sahəsini tapaq:

$$S = \int_0^3 \left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$I = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \text{ integralını hissə-hissə inteqrallama}$$

metodu ilə hesablayaq. $u = \sqrt{9-x^2}$, $dv = dx$ qəbul edək.

$$du = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} dx, v = x \text{ olar. Onda,}$$



Şəkil 4.20

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = x\sqrt{9-x^2} \Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \\
 &= -\int_0^3 \frac{9-x^2-9}{\sqrt{9-x^2}} dx = -\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx + 9 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= -I + 9 \cdot \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^3 = -I + 9(\arcsin 1 - \arcsin 0) = -I + \frac{9\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Buradan, $2I = \frac{9\pi}{2}$ və yaxud $I = \frac{9\pi}{4}$ alırıq. Onda axtarılan müstəvi fiqurun sahəsi

$$S = \frac{1}{3} I = \frac{3\pi}{4}$$

olacaqdır.

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x(f_2(x) - f_1(x)) dx &= \int_0^3 x \left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx = -\frac{1}{6} \frac{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = -\frac{1}{9} \left(0 - 9^{\frac{3}{2}} \right) = 3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left[(9-x^2) - \frac{4}{9} (9-x^2) \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9} x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \left[5x - \frac{5}{9} \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (15 - 5) = 5.
 \end{aligned}$$

Beləliklə, (40.8) düsturlarına görə verilmiş müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinatları

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi}, \quad \bar{y} = \frac{20}{3\pi}.$$

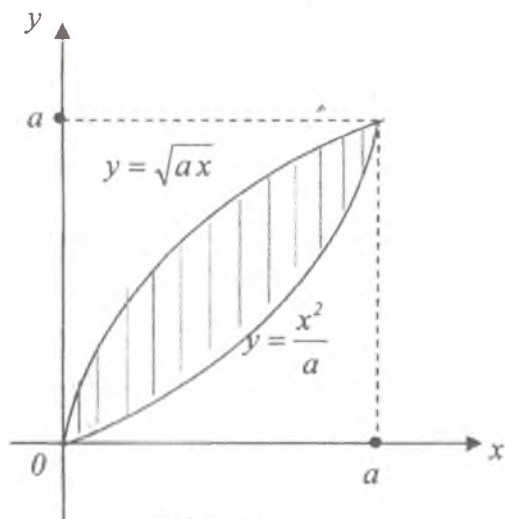
Misal 7. $ax = y^2$ və $ay = x^2$ paraboluları ilə məhdud olan müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapın.

Həlli. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu parabolalar $O(0,0)$ və $A(a,a)$ nöqtələrində kəşisir (bax şəkil 4.21).

Ştrixlənmiş müstəvi oblastının ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapmaq üçün (40.8) düsturlarından istifadə edəcəyik. Aydınır ki, ştrixlənmiş fiqurun sahəsi

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \sqrt{a} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \bigg|_0^a = \frac{a^2}{3}$$

olacaqdır.



Şəkil 4.21

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx &= \sqrt{a} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{a} \int_0^a x^2 dx = \\ &= \sqrt{a} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^a = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{a}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a - \frac{1}{2a^2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^a = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{10} = \frac{3a^3}{20}.$$

Onda (40.8) düsturlarına görə verilmiş fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinatları $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9a}{20}$.

Misal 8. Gülənin ikinci teoremindən istifadə etməklə, R radiuslu yarımdairənin ağırlıq mərkəzinin kordinatlarını tapın.

Həlli. Kordinat oxlarını şəkil 4.19-da olduğu kimi seçək. Verilmiş müstəvi fiquru Oy oxuna simmetrik olduğundan, onun ağırlıq mərkəzi Oy oxu üzərində olacaqdır və deməli $\bar{x} = 0$. $\bar{y}$ -ni tapaq. Bunun üçün Gülənin ikinci teoremindən istifadə edək. Bu yarımdairənin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Bu

yarımdairənin sahəsi isə $S = \frac{\pi R^2}{2}$. Onda Gülənin ikinci teoreminə görə

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi \bar{y}$$

bərabərliyi doğrudur. Buradan,

$$\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Beləliklə, R radiuslu yarımdairənin ağırlıq mərkəzinin kordinatları $\bar{x} = 0$ və $\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$.

Çalışmalar

1. $y = 2x^2 + x + 1$ parabolası, $x = 1$, $x = 3$ düz xətləri və absis oxu ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.
2. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiylarının qrafikləri və $x = 0$, $x = 2\pi$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.
3. $y = x^\alpha$, $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ ($\alpha > 1$) funksiylarının qrafikləri və $x = 0$, $x = 1$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.
4. $y = \ln(x+6)$, $y = 3 \ln x$ funksiylarının qrafikləri və $x = 0$, $y = 0$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.
5. $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$ funksiylarının qrafikləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.
6. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ funksiylarının qrafikləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.
7. $y = \cos x$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{4}\right]$ və $y = 1 + \frac{2x}{\pi}$ funksiylarının qrafikləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.
8. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ və $x^2 + y^2 = 5$ əyriləri ilə məhdud olan fiqurun I rübdə olan hissəsinin sahəsini tapın.
9. $y^2 = (1 - x^2)^3$ qapalı əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.
10. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($a, b > 0$) ellipsi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

11. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($a, b > 0$) əyrisi ilə məhdud olan fiqurun sahəsini tapın.

12. $y = \ln x$ əyrisinin $x = \sqrt{3}$ -dən $x = \sqrt{8}$ -ə qədər olan qövsünün uzunluğunu tapın.

13. $y = 2\sqrt{x}$ parabolasının $x = 0$ -dan $x = 1$ -ə qədər olan qövsünün uzunluğunu tapın.

14. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ parametrik şəkildə verilmiş əyridə $t = 0$ -dan $t = 2\pi$ -yə qədər dəyişdikdə alınan qövsün uzunluğunu tapın.

15. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroidasının ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

16. $y = \operatorname{tg} x$ tangensoidinin $x = 0$ -dan $x = \frac{\pi}{4}$ -ə qədər dəyişdikdə ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

17. $y = e^{-x}$ əyrisinin $x = 0$ -dan $x = +\infty$ -a qədər dəyişdikdə ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın.

18. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan ellipsoidin həcmi tapın.

19. $y = e^x$ əyrisi və $x = 0$, $y = 0$ düz xətləri ilə məhdud olan fiqurun ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

20. $y = \sin x$ sinusoidi, absis oxu və $y = 1$ düz xətti ilə məhdud olan fiqurun oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

Cavablar

1. $23\frac{1}{3}$; 2. $4\sqrt{2}$; 3. $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$; 4. $12\ln 2 - 6\ln 3 + 1$;
5. $\frac{8}{3}$; 6. $\frac{1}{3}$; 7. $\frac{3\pi-4}{4}$; 8. $\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}$;
9. $0,75\pi$; 10. πab ; 11. $\frac{3}{8}\pi ab$; 12. $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;
13. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$; 14. $2a\pi^2$; 15. $\frac{12}{5}\pi a^2$;
16. $\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \pi \ln \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$; 17. $\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$;
18. $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 19. $\frac{\pi}{2}$; 20. $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$.

MÜNDƏRİCAT

1. Giriş	3
I FƏSİL	
QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL	5
§1. İbtidai funksiya anlayışı	5
§2. Qeyri-müəyyən integral və onun xassələri.....	8
§3. İnteqrallar cədvəli	12
§4. Dəyişənin əvəz edilməsi üsulu ilə inteqrallama	19
§5. Hissə-hissə inteqrallama üsulu	30
§6. Cəbri çoxhədlilərin vuruqlara ayrılması	39
§7. Düzgün rəşional kəsrlərin sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərilməsi	46
§8. Rəşional kəsrlərin inteqrallanması	
1.Elementar rəşional kəsrlərin inteqrallanması	57
§ 9. Bəzi irrasional ifadələrin inteqrallanması. Xətti və kəsir-xətti irrasionallıqların inteqrallanması	66
§ 10. Eyler əvəzləmələri	71
§11. Diferensial binomun inteqrallanması	80
§ 12. Bəzi triqonometrik ifadələrin inteqrallanması	84
II FƏSİL	
MÜƏYYƏN İNTEQRAL	101
§ 13. Müəyyən inteqrala gətirilən məsələlər. Müəyyən inteqralın tərifi	101
§14. İnteqrallanan funksiyanın məhdudluğu	113
§ 15. Yuxarı və aşağı Darbu cəmləri	115
§ 16. Funksiyanın inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt teoremləri	123
§17. Riman mənada inteqrallanan funksiyalar sinfi	135
§ 18. Müəyyən inteqralın əsas xassələri	143
§ 19. Yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən inteqral. İbtidai funksiyanın varlığı	154
§20. Nyuton-Leybnis düsturu	162
§ 21. Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi	165
§22. Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama	178

§ 23. Müəyyən integralın qiymətləndirilməsi. Orta qiymət teoremləri	182
§ 24. Müəyyən integral üçün bəzi integral bərabərsizliklər.....	192
III FƏSİL	
QEYRİ-MƏXSUSİ İNTEQRALLAR	202
§ 25. I növ qeyri-məxsusi integral, tərif, xassələri	202
§ 26. Mənfi olmayan funksiyanın I növ qeyri-məxsusi integralı	217
§ 27. I növ qeyri-məxsusi integralın yığılması üçün kafi şərt.....	224
§ 28. I növ qeyri-məxsusi integral üçün hissə-hissə integrallama düsturu və dəyişənin əvəz edilməsi	230
§ 29. I növ qeyri-məxsusi integral üçün Dirixle və Abel əlamətləri	238
§ 30. II növ qeyri-məxsusi integrallar	243
§ 31. Mənfi olmayan funksiyanın II növ qeyri-məxsusi integralı	256
§ 32. Qeyri-məxsusi integralın baş qiyməti	271
IV FƏSİL	
MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ	279
§ 33. Müəyyən integralın köməyi ilə bəzi limitlərin hesablanması	279
§ 34. Müstəvi fiqurun sahəsi	284
§ 35. Müstəvi fiqurun sahəsinin integral vasitəsilə ifadəsi	291
§ 36. Əyri qövsünün uzunluğu	310
§ 37. Fəza cisminin həcmi	324
§ 38. Fırlanmadan alınan cismin həcmnin hesablanması	331
§ 39. Fırlanmadan alınan cismin yan səthinin sahəsi.....	339
§ 40. Müstəvi əyrisinin və müstəvi fiqurun ağırlıq mərkəzinin kordinantlarının tapılması	354

M.S.CƏBRAYILOV, B.Ə.ƏLİYEV

**RİYAZİ ANALİZ.
BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN
İNTEQRAL HESABI**

DƏRS VƏSAİTİ

Nəşriyyatın direktoru: Hüseyn Hacıyev
Texniki redaktor: Gülbəniz Məmmədova
Dizayn: Müşfiq Hacıyev
Cildçi: Azad Həmzəyev
Montajçı: Elmira İsmayılova

Çapa imzalanmış 22.01.2016-cı il
Kağız formatı 60x84 1/16, çap vərəqi 25
Sifariş 16, sayı 200

ADPU-nun mətbəəsi
Bakı, Ü.Hacıbəyov küçəsi, 68
Tel: (+912) 493-74-10
E.mail. ADPU@Box.az