

N.Ə.Neymətov

ƏDƏDİ SİRALAR

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi
Gəncə Dövlət Universitetinin 08.04.2021-ci il tarixli,
5/97 sayılı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.*

Gəncə - 2021

Elmi redaktor

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,

Prof. Ə.U.Quliyev

(Gəncə Dövlət Universiteti)

Rəyçilər:

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,

Dosent əv. T.Məmmədov

(Gəncə Dövlət Universiteti)

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Dosent D.Bağırzadə

(Azərbaycan Dövlət AQRAR Universiteti)

N.Ə.Neymətov

**“Ədədi sıralar” Dərs vəsaiti. GDU nəşriyyatı 2021-ci il.
103 səh.**

Kitab ali məktəblərdə dərs vəsaiti olaraq nəzərdə tutulmuşdur. Dərs vəsaiti “Riyazi analiz-3” kursunun ədədi sıralar və sonsuz hasillər bölmələrini əhatə edir.

Tədris planına uyğun hazırlanmış vəsaiti Universitetlərin bakalavr və magistr təhsil pilləsinin tələbələri, habelə riyaziyyatla maraqlanan bütün şəxslər istifadə edə bilərlər.

Giriş

Son illərdəki elmi-texniki tərəqqi, beynəlxalq standartlara uyğunlaşmaq və təhsil islahatları ilə əlaqədar olaraq, çoxpilləli təhsil sisteminə keçid prosesi başa çatmışdır. Bununla əlaqədar tədrisin yeni xüsusiyyətləri nəzərə alınmaqla yeni tədris planları və proqramları işlənib hazırlanmışdır. Təbiidir ki, tədrisin bakalavr və magistr pillələrində təhsil alan tələbələr üçün, qeyd etdiyimiz plan və proqramlara uyğun yeni metodiki vəsaitlər, dərs vəsaitləri və dərsliklər yazılması zərurəti yaranır.

Sonsuz ədədi və funksional sıralar nəzəriyyəsi riyazi analizin və başqa fənlərin əsas anlayışı və mühüm qanunlarını öyrənməkdə köməkçi aparat rolunu ifa etməklə bərabər, müasir riyazi analiz kursunun çox əhəmiyyətli bir sahəsi olaraq qalır.

Riyazi analiz-1 kursunda riyazi analizin əsas məsələsi olan funksiyaların öyrənilməsinə baxılır. Belə ki, diferensial hesabının köməkliyi ilə funksiyaların bir çox xüsusiyyətlərini (artması və azalması, ekstremumları, əyilmə nöqtələri, təqribi qiymətlərinin hesablanması) anlayışları öyrənilir. Ancaq elə məsələlər var ki, onları diferensial hesabının köməyi ilə tədqiq etmək mümkün olmur.

Məsələn, kəsilməz olan, ancaq heç bir nöqtədə diferensiasillanmayan funksiyaların varlığı və bu cür funksiyaların qurulması belə məsələlərdəndir. Bu cür məsələlərin həlli və riyazi analizinin bir çox problemləri, riyazi aparat, sıralar nəzəriyyəsinin köməyiylə həll edilir.

Təqdim olunan dərs vəsaitində həm riyaziyyatın özünün müxtəlif bölmələrində, həm də onun bir çox tətbiqlərində hesablamalar və tədqiqatlar üçün istifadə olunan mühüm riyazi apparata ədədi sıralara baxılır.

İndiyə kimi sonlu sayda ədədlərin cəmindən danışılmışdır. Burada sonlu sayda ədədlərin cəmi anlayışı “sonsuz sayda” ədədlər (toplananlar) üçün ümumiləşdirilir və belə cəm anlayışının bir sıra xassələri öyrənilir.

Dərs vəsaitində ədədi sıralar üçün əsas anlayışlar göstərilmişdir. Belə ki, yığılan sıraların sadə xassələri, sıranın qalığı, ədədi sıraların yığılması üçün zəruri şərt, eyni işarəli sıraların yığılması üçün kafi şərtlər, müsbət hədli, eyni zamanda sıraların yığılan olması üçün müqayisə teoremlərinə, Koşi və Dəlamber əlamətlərinə, ədədi sıranın yığılması üçün Koşi meyarına, işarəsini dəyişən sıraların bəzi yığılma əlamətlərinə, mütləq və şərti yığılan sıralara aid

məsələlərə baxılır. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıralar üçün Leybnis əlamətinə, kompleks hədlı sıralara, sonsuz hasillərə baxılmışdır. Vəsaitdə nəzəri məsələlər haqqında qısa məlumatlar verildikdə sonra, nəzəri hissənin tətbiqinə aid misallar həll edilmişdir.

Nəzəri hissəni öyrənib mənimsədikdən sonra oxucu hər dərslin sonunda verilən misalları həll edir. Bundan sonra nəzəri suallarına cavab verməklə həmin fəslin öyrənilərək mənimsənilməsini tamamlayır və öz biliyini yoxlamış olur.

Dərs vəsaiti Riyazi analiz-3-də öyrənilən sıralar nəzəriyyəsinin ədədi sıralar və sonsuz hasillər bölməsinə aiddir. Dərs vəsaiti ali məktəblərin tələbələri üçün nəzərdə tutulsa da, ondan kolleclərin uyğun ixtisaslarında təhsil alan tələblər və ali riyaziyyatı sərbəst öyrənmək istəyənlər də istifadə edə bilərlər.

1. Ədədi sıra anlayışı.

Yığılan sıranın əsas xassələri.

Sıranın qalığı

1.1. Ədədi sıranın tərif. İndiyə kimi sonlu sayda ədədlərin cəmindən danışılmışdır. Burada sonlu sayda ədədlərin cəmi anlayışı sonsuz sayda toplananlar üçün ümumiləşdirilir və belə cəm anlayışının bir sıra xassələri öyrənilir.

Tutaq ki, hər hansı sonsuz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ və ya $\{a_n\}$ ədədlər ardıcılığı verilmişdir. Bu ədədlərdən düzəldilmiş

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ və ya } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.1)$$

ifadəsinə (simvoluna və ya formal olaraq düzəldilmiş «cəmə») *sonsuz ədədi sıra* və ya sadəcə olaraq *ədədi sıra*, ya da *sıra* deyilir. a_k ($k=1, 2, \dots$) ədədləri sıranın hədləri, a_1 ədədi sıranın birinci, a_n həddi n qeyd edildikdə sıranın n -ci həddi, n qeyd edilmədikdə sıranın *ümumi həddi* adlanır. a_n ümumi həddi verildikdə sıra

verilmiş hesab olunur.

(1.1) sırasının hədlərini ardıcıl toplamaqla sonsuz sayda

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

şəklində cəmlər düzəldək. Bu cəmlərə (1.1) sırasının *xüsusi cəmi* deyilir və S_n ilə işarə edilir. (1.1) sırasının S_n xüsusi cəmlər ardıcılığının $n \rightarrow \infty$ olduqda, sonlu və ya sonsuz $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limitinə (1.1) sırasının cəmi deyilir və

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

şəklində yazılır.

Misal 1. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$

Həlli. Sıranın xüsusi cəminə əsasən

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} >$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} > \\
&> \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Deməli, verilmiş sıra dağılır.

1.2. Yığılan ədədi sıralar. Əgər (1.1) sırası sonlu cəmə malikdirsə, həmin sıra *yığılandır*. Əks halda, yəni $S = \pm\infty$, ya da S cəmi olmadıqda sıra *dağılan* adlanır. Beləliklə, tərifə görə (1.1) sırasının yığılması məsələsi (1.2) ardıcılığının sonlu limitinin varlığı məsələsinə gətirilir. Tərsinə qabaqcadan verilmiş $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ardıcılığının sonlu limitinin varlığı məsələsi xüsusi cəmləri bu ardıcılığın elementləri olan

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots$$

sırasının yığılmasına gətirilə bilər, bu sıranın cəmi ardıcılığın limiti ilə üst-üstə düşür.

Misal 2. $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ həndəsi silsiləni götürək.

Əgər $q \neq 1$ olarsa onun xüsusi cəmi

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

şəklində olar. $|q| < 1$ olduqda $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olduğundan

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

sonlu limiti var. Yəni sıra yığılandır, cəm isə

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

bərabərdir. $|q| \geq 1$ olanda sıra dağılındır. Əgər $q \geq 1$ olarsa, onda a -nın işarəsindən asılı olaraq sıranın cəmi $+\infty$ və ya $-\infty$ olacaqdır. Qalan hallarda isə sıranın cəmi yoxdur.

Misal 3. $a=1, q=-1$ götürsək, onda

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

xüsusi cəmi aşağıdakı şəkildə olar:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

Deməli,

$$S_n = \begin{cases} 0, & n - \text{cüt olarsa,} \\ 1, & n - \text{tək olarsa.} \end{cases}$$

$\{S_n\}$ ardıcılığının limiti yoxdur, yəni $q = -1$ olduqda baxılan sıra dağılındır. $a=1, q=1$ olduqda

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1, S_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = +\infty$$

olur, bu halda da sıra dağılındır.

1.3. Yığılan ədid sıraların əsas xassələr.

Xassə 1.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

sırası yığılan və S cəminə bərabədirsə, onda istənilən $c \neq 0$ ədədi üçün

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots \quad (1.3)$$

Nəticə. (1.1) sırası dağılındırsa, ixtiyari $c \neq 0$ ədədi üçün (1.3) sırası da dağılındır. Doğrudan da, əgər (1.3) sırası yığılan olarsa, onun bütün hədlərini $\frac{1}{c}$ ədədinə vurduqda alınan (1.1) sırası da yığılardır, bu isə (1.1) sırasının dağılan olması şərtinə ziddir. Burada da $c \neq 0$ şərti mühümdür, çünki $c=0$ olarsa, (1.3) sırası yalnız sıfırlardan düzəldiyi üçün yığılan olacaqdır. Belə sıra üçün n ixtiyari olduqda,

$$S_n = 0 \text{ və } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

olur.

Xassə 2.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

və

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (1.4)$$

sıraları yığılandır və uyğun olaraq S və S' cəminə malikdirlərsə, onda həmin sıraların cəbri cəmi adlanan

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots \quad (1.5)$$

sırası da yığılandır və $S \pm S'$ bərabərdir.

Qeyd edək ki, (1.1) və (1.4) sıralarının biri yığılan digəri dağılan olduqda (1.5) sırası dağılan olar. (1.1) və (1.4) sıralarının hər ikisi dağılan olduqda (1.5) sırası haqqında ümumiyyətlə heç nə demək olmaz, sıra yığıla da bilər, dağıla da.

Misal 4. Dağılan

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{və} \quad -1 - 1 - 1 - \dots - 1 - 1 - \dots$$

sıralarının cəmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

olduğu üçün yığılandır, fərqi isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 2 + 2 + \dots + 2 + \dots$$

olduğu üçün dağılandır bu teorem göstərir ki, yığılan sıraları hədbəhəd toplamaq və çıxmaq olar.

Misal 5. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ və $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sıra-

ları yığılırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

sıralarıda yığılır.

Həlli. $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ elementar bərabərsizlik-

dən istifadə edək, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_k^2 \right) = c.$$

Buradan alınır ki, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ sırası yığılır. Onda ikinci

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ sırası

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq 2 \left(c + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \right)$$

yığılır. Üçüncü sıranın yığılması birincidən alınır,

lakin burada $b_n = \frac{1}{n}$ əvəz etmək və $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sırasının

yığılmasından istifadə edəcəyik.

1.3. Ədədi siranın qalığı. Verilmiş

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.1)$$

sırasının k sayda qeyd edilmiş həddini atdıqda yeni

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m} + \dots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \quad (1.6)$$

sırası alınır ki, bu sıra (1.1) sırasının qalıq sırası və ya k -cı qalığı adlanır. (1.1) və (1.6) sıraları bir-biri ilə sıx əlaqəlidir.

Teorem. (1.1) və (1.6) sıraları eyni zamanda ya yığılandır, ya da dağılandır.

Bu teoremi aşağıdakı kimi söyləmək olar: *sıranın başlanğıcından sonlu sayda həddin atılması və sıranın başlanğıcına sonlu sayda həddin əlavə edilməsi, sıranın yığılan və ya dağılan olmasına təsir etmir, yəni sıranın vəziyyəti dəyişmir.*

Nəticə. Bir-birindən sonlu sayda hədləri ilə fərqlənən iki sıra ya eyni zamanda yığılan, ya eyni zamanda dağılan olurlar.

1.4. Sıranın yığılmasının zəruri şərti. Verilmiş

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m} + \dots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \quad (1.6)$$

sırasının

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırasından birinci k həddinin atılmasından alındığını

göstərmək üçün (1.1) sırasının k -cı qalığını, yəni (1.6) sırasının S' cəmini, r_k ilə işarə edilməsini qəbul edək. Onda (1.1) sırasının cəmi onun birinci k həddinin cəminə və r_k qalığının cəminə bərabər olar, yəni $S = S_k + r_k$ və ya $r_k = S - S_k$. Əgər k -nı sonsuz artırısaq $S_k \rightarrow S$ olar və $r_k \rightarrow 0$ olar. Beləliklə, alırıq: *əgər (1.1) sırası yığılandırsa, onda onun k -cı həddindən sonrakı qalığı k -nin artması ilə sıfıra yaxınlaşır.*

Yuxarıda dediklərimiz sıranın yığılan və ya dağılan olmasını aydınlaşdırmaq üçün bəzən mürəkkəb olur, çünki bu üsulla limitin hesablanması asan olmur.

Teorem (sıranın yığılması üçün zəruri şərt).

Əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.1)$$

sırası yığılandırsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

olur.

Nəticə. Əgər (1.1) sırasının ümumi həddi, onun nömrəsinin qeyri-məhdud olması ilə sıfırdan fərqli limitə malik olarsa, yəni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

və ya heç biri limitə malik olmazsa, onda bu sıra dağılındır.

Misal 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ sırası

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

olduğu üçün dağılındır.

Onu da qeyd edək ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

olmasından sıranın yığılması çıxmır, yəni sıranın yığılmasının bu zəruri şərti kafi deyildir.

Misal 7. Harmonik sıra adlanan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

sırasının ümumi həddinin limiti sıfıra bərabərdir, yəni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Lakin sıra dağılındır. Doğrudan da $\forall n \geq 1$ ədədi üçün

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \\ &+ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \\ &- 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \\ &+ \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geq \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Yəni $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ olmur. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = \frac{1}{2} \neq 0$$

olur. Lakin harmonik sıra yığılsaydı,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

olardı. Bu isə harmonik sıranın dağılan olmasını göstərir.

2. Müsbəthədli ədədi sıralar və onların yığılması

2.1. Müsbət hədlili sıranın tərifli. Bütün hədləri eyni işarəli olan sıralara sabit işarəli sıralar, bütün hədləri mənfi olmayan sıralara müsbəthədli sıralar, bütün hədləri müsbət olan sıralara müsbət sıralar deyilir. Bütün hədləri müsbət olmayan sıraların bütün hədlərini (-1) -ə vurmaqla müsbət sıralar alınır. Bu halda sıranın xarakteri (yığılmaya nəzərən) dəyişmir. *Müsbət sıraların xüsusi cəmlər ardıcılığı azalmayıdır.*

2.2. Müsbət hədlili sıranın yığılması üçün zəruri və kafi şərt.

Teorem. Müsbəthədli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.1)$$

sırasının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun xüsusi cəmlər ardıcılığının yuxarıdan məhdud olmasıdır.

Nəticə. Müsbəthədli sıralar həmişə sonlu və ya

sonsuz cəmə malikdir.

Qeyd edək ki, sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığının məhdud olması istənilən sıranın yığılması üçün zəruri şərtidir, kafi deyildir. Lakin sabit işarəli olmayan sıralar üçün teoremin yalnız zərurilik şərti ödənilir. Məsələn,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$$

sırasının xüsusi cəmlər ardıcılığının məhdud olmasına baxmayaraq $|S_n| \leq 1$, həmin sıra dağılındır.

2.3. Sıranın yığılmasının Koşi meyarı.

Teorem.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.1)$$

sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə natural N ədədinin göstərilməsidir ki, $\forall n > N$ olduqda və p istənilən natural qiymətlər olduqda

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

və ya başqa şəkildə

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad (2.2)$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Koşi meyarı nəzəri araşdırılmalarda həmişə səmərəlidir. Onun köməkliyi ilə sıralar haqqında bir çox teoremlər isbat edilir, lakin praktiki nöqteyi nəzərdən az əhəmiyyətliyəldir.

Misal 1. Koşi meyarından istifadə edərək aşağıdakı sıranın yığılan olduğunu isbat edin:

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$$

Həlli. $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $n > n_0$ və $p > 0$ üçün $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ olar. Burada $\{S_n\}$ verilmiş ədədi sıranın cəmidir. Onda

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \right. \\ &+ \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \dots + \left. \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n+3)x}{n+2} + \right. \\ &+ \frac{\cos(n+3)x}{n+3} - \frac{\cos(n+4)x}{n+3} + \dots + \frac{\cos(n+p-1)x}{n+p-1} - \frac{\cos(n+p)x}{n+p-1} + \\ &+ \left. \frac{\cos(n+p)x}{n+p} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \dots \right. \\
&\quad \left. \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n+1} |\cos(n+1)x| + \frac{1}{(n+1)(n+2)} |\cos(n+2)x| + \\
&\quad + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} |\cos(n+p)x| + \frac{1}{n+p} |\cos(n+p+1)x| \leq \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Buradan alırıq ki, $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, əgər $n_{0-1} \frac{2}{\varepsilon}$ kimi qeyd

edək. Beləliklə, Koşi meyarına görə sıra yığılır.

Misal 2. Koşi meyarından istifadə edərək aşağıdakı sıranın yığılan olduğunu isbat edin:

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$$

Həlli. Elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $n > n_0$ və $p > 0$ üçün $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ bərabərsizliyi doğrudur. Onda

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\
& = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \\
& = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Beləliklə, $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ qəbul edək və Koşi meyarına əsasən sıra yığılır.

2.4. Müqayisə əlamətləri.

Teorem 1. Müsbəthədli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (2.1)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (2.3)$$

sıralarının uyğun hədləri arasında heç olmazsa hər hansı nömrədən $\forall n > N$ başlayaraq

$$a_n \leq c b_n \quad (n > N, 0 < c < +\infty)$$

münasibətləri ödənilərsə, onda (2.3) sırası yığıldıqda, (2.1) sırası da yığılır.

Teorem 2. Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k < +\infty; \quad b_n > 0)$$

limiti varsa, onda $0 \leq k < +\infty$ olduqda (2.3) sırası yığılan olduqda, (2.1) sırası da yığılar; $0 < k \leq +\infty$ olduqda (2.3) sırası dağılan olduqda, (2.1) sırası da dağılar. Beləliklə, $0 < k < +\infty$ hər iki sıra eyni zamanda yığılan, ya da dağılan olur.

Teorem 3. Əgər heç olmazsa hər hansı nömrədən başlayaraq

$$\forall n > N, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad (2.4)$$

burada

$$a_n, b_n \neq 0, \quad a_n > 0, \quad b_n > 0$$

olarsa, yəni (2.1) və (2.3) sıraları ciddi müsbət olar. Əgər (2.4) bərabərsizliyi ödənilərsə, onda (2.3) sırası yığılan olduqda (2.1) sırası da yığılar, (2.1) sırası dağılan olduqda, (2.3) sırası da dağılar.

Misal 3. Verilmiş

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

olduğu üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}$$

sırası yığılır (teorem 1-ə əsasən). Teorem 2-yə əsasən

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} \quad (0 < x < \pi)$$

dağılır, çünki,

$$\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Misal 4.

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$$

sıranın yığılan olmasını göstərin.

Həlli. Qeyd edək ki, sıranın ümumi həddi aşağıdakı şəkildədir:

$$a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}, \quad n \in N.$$

$\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ olduğunu qəbul etsək

$$a_n = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$$

alırıq. Belə ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ sırası yığılır və deməli sıra yığılır.

3. Müsbət həddli ədədi sıraların yığılma əlamətləri.

3.1. Dəlambert əlaməti. Verilmiş müsbəthəddli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1)$$

sırasının yığılması qabaqcadan məlum olan və həndəsi silsilə-nin elementlərindən düzəldilən

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots + q^n + \dots, \quad (0 < q < 1) \quad (3.2)$$

sırası ilə digər tərəfdən dağılması məlum olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

sırası ilə müqayisə edərək, aşağıdakı əlamətləri söyləmək olar.

Teorem 1. (3.1) sırası üçün

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (a_n > 0)$$

nisbətinə baxaq. Əgər heç olmazsa müəyyən nömrədən başlayaraq q sabitinin vahiddən kiçik qiymətlərində

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad (q = \text{const}, 0 < q < 1, a_n > 0)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, (3.1) sırası yığılandır. $D_n \geq 1$ olduqda (3.1) sırası dağılandır.

Teorem 2. Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D \quad (3.3)$$

limiti varsa (sonlu və ya sonsuz), onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası $D < 1$ olduqda yığılır, $D > 1$ olduqda dağılır, $D = 1$ halında araşdırılmalıdır.

Misal 1.

$$\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

sıranın yığılan olduğunu göstərin.

Həlli. Belə ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{(n!)^2 \cdot 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$$

olur, deməli, Dalamber əlamətinə görə sıra dağılır.

Misal 2. $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$ sırasının yığılan

olduğunu göstərin.

Həlli. Qeyd edək ki, sıranın a_n həddi aşağıdakı kimi olar:

$$a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}.$$

Buradan alırıq ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Beləliklə, Dalamber əlamətinə əsasən sıra yığılır.

Misal 3. Harmonik sıra adlanan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

sıra və

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

sırası üçün $D=1$. Lakin harmonik sıra dağılındır, ikinci sıra isə yığılındır.

Lakin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

olanda hər hansı nömrədən başlayaraq bütün $n \geq N$ -lər üçün $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olarsa, sıra dağılan olar. Buradan alınır

ki, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olduqda,

$$a_n < a_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

alınır.

Misal 4. Verimliş

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

sırası üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1$$

olur. Bu halda bütün $n \geq N$ -lər üçün

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1$$

olduğundan sıra dağılan olar.

3.2. Koşi əlaməti.

Teorem 1. Müsbəthədli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1)$$

sırası üçün

$$K_n = \sqrt[n]{a_n} \quad (a_n > 0) \quad (3.4)$$

ifadəsinə baxaq.

I. Əgər heç olmazsa müəyyən nömrədən başlayaraq q sabitinin vahiddən kiçik qiymətlərində

$$K_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (q = \text{const}, 0 < q < 1) \quad (3.5)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə (3.1) sırası yığılandır.

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

olduqda (3.1) sırası dağılandır.

II. Əgər sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K \quad (3.6)$$

limiti varsa, onda $K < 1$ olanda (3.1) sırası yığılan, $K > 1$ olanda isə (3.1) sırası dağılandır, $K = 1$ halında araşdırılmalıdır.

Misal 5. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$ sırasının yığılan oldu-

ğunu göstərin.

Həlli. Koşi əlamətinə əsasən

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2 \frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1 \end{aligned}$$

alınır. Deməli, Koşi əlamətinə əsasən sıra yığılır.

Misal 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

sırası üçün

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right] = 1$$

olur. Ona görə də Koşi əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını təyin etmək olmur. Bu halda əsasən müqayisələr əlamətindən istifadə olunur.

Verilmiş sıranı yığılan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sırası ilə müqayisə etsək, belə ki, verilmiş sıranın birinci həddini atmaqla onun yerdə qalan hədləri yığılan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sırasının uyğun hədlərini aşmır. Ona görə də verilmiş sıra yığılandır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

sırasının hədlərini aşmır. Burada

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, (3.1) sırası üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

limiti varsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

limiti də var və onların qiymətləri bərabər olur.

Qeyd. Koşi əlaməti Dalamber əlamətinə nəzərən “güclü”dür. Belə ki, əgər hər hansı sıra Dalamber əlamətinə əsasən yığılırsa, onda həmin sıranın yığılan olduğunu Koşi əlamətinə əsasən də ala bilərik. Çünki

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

yəni sıra Dalamber əlamətinə əsasən yığılırsa, onda həmin sıra Koşi əlamətinə əsasən də yığılır. Əksi isə ümumiyyətlə götürsək doğru deyil. Belə ki, elə sıralar var ki, onlar Koşi əlamətinə əsasən yığılır. Dalamber əlamətinə əsasən isə bu sıraların yığılan olduğunu hökm edə bilmərik.

Misal 7. Verilmiş

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$$

sırasının Koşi əlamətinə görə limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K = \frac{1}{2}$$

olduğu üçün sıra yığılandır, Dalamber əlamətinə görə isə limiti yoxdur, sıra dağılır.

3.3. Raabe və Qauss əlamətləri. Əgər $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q \quad (3.7)$$

limiti varsa, onda $q > 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır, $q < 1$ olduqda isə sıra dağılır.

Əgər $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) və

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}}, \quad |\gamma_n| < c, \delta > 0, \quad (3.8)$$

onda 1) $\alpha > 1$ -dirsə, sıra yığılır, $\alpha < 1$ olarsa, sıra dağılır;
2) $\alpha = 1$ və $\beta > 1$ olarsa, sıra yığılır, $\alpha = 1$ və $\beta \leq 1$ olduqda sıra dağılır.

Misal 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ sıranın yığılmasını tədqiq edin.

Həlli. Sıranın $(n+1)$ -ci həddini hesablayıb, Dalamber əlamətini tətbiq edək

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{[2(n+1)]!!} = \frac{(2n-1)!! \cdot (2n+1)}{(2n)!! \cdot (2n+2)} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \right) = 1.$$

Limiti 1-ə bərabər olduğundan, Dəlamber əlamətinin köməyi ilə bu sıranın yığılması barədə heç nə demək olmur. Lakin bu sərəya Raabe əlamətini tətbiq etsək,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2} < 1$$

alarıq. Beləliklə, Raabe əlamətinə görə hökm edə bilərik ki, verilən sıra yığılır.

Misal 9. Qauss əlamətinini köməyi ilə ümumi həddi

$$a_n = (2 - \sqrt{a})(2 - \sqrt[3]{a}) \cdots (2 - \sqrt[n]{a}), \quad a > 0$$

olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olan ədədi sıranın yığılmasını tədqiq edin.

Həlli. Əvvəlcə qeyd edək ki,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2 - \sqrt[n+1]{a}}.$$

Digər tərəfdən $\sqrt[n+1]{a}$ üçün elə asimptotik düstur ala bilərik:

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{a} &= \exp\left(\frac{\ln a}{n+1}\right) = \\ &= 1 + \frac{\ln a}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \ln^2 a + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \end{aligned}$$

burada γ_n məhdud kəmiyyətdir: $|\gamma_n| < c$. Beləliklə, hədlərin nisbəti üçün belə qiymətlənmə alırıq:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln a}{n} - \frac{\gamma_n}{n^2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\bar{\gamma}_n}{n^2},$$

burada $|\bar{\gamma}_n| < M$. Odur ki, Qauss əlamətinə görə əgər $\ln a > 1$ və ya $a > e$ olarsa, onda verilən sıra yığılır, yox əgər $a \leq e$ olarsa, onda dağılır.

3.4. Koşi - Makloren (integral) əlaməti. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, Dalamber və Koşi əlamətləri sıranın xarakterini tam aydınlaşdırma bilmir. Qeyd edilən əlamətlər yaramadığı hallarda müsbəthədli sıraların bəzən yığılması məsələsi Koşi-Maklorenin integral əlaməti ilə təmin edilir. Bu əlamət arqumenti tam ədədlər ardıcılığına bərabər qiymətlər aldıqda xüsusi qiymətləri verilən sıranın bütün hədlərini $f(x)$ funksiyasının hər hansı birinci növ qeyri-məxsusi integralı ilə həmin sıranın müqayisəsinə əsaslanır.

Teorem. Tutaq ki, $a \in N$ hər hansı natural ədəd olduqda bütün $x \geq a$ -lar üçün $f(x)$ kəsilməyən, mənfi olmayan, artmayan funksiyaadır. Onda

$$f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) \quad (3.9)$$

ədədi sırası

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

qeyri-məxsusi integralı ilə eyni zamanda ya yığılandır, ya da dağılandır.

Misal 10. Verilmiş

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$$

sırasında $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ götürsək, teoremin şərtləri ödənilir.

$a=1$ olsun

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \alpha > 1, \\ \alpha \leq 1, \end{cases}$$

yəni sıra $\alpha > 1$ olduqda yığılan, $0 < \alpha \leq 1$ olduqda dağılandır.

Misal 10. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$, $n > 1$ sırası-

nin yığılan olduğunu göstərin.

Həlli. Sıranın ümumi a_n həddini $(1+x)^m$ və $\ln(1+x)$ funksiylarının Makloren sırasına ayrılışının qalıq həddinin Peano şəklindən istifadə etməklə aşağıdakı kimi çevirək:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \\ &= n^{-\frac{p}{2}} \left(2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p} \left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= n^{-\frac{p}{2}} 2^{-p} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Deməli, $p > 0$ olduqda sıra yığılır.

4. İşarəsini növbə ilə dəyişən ədədi sıralar.

Leybnis əlaməti. Mütləq və şərti yığılan ədədi sıralar

4.1. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların tərif.

Əvvəllərdə bütün hədələri eyni işarəli olan sıralara baxılmışdır. İndi isə hədləri istənilən işarəli həqiqi ədədlər olan sıraların tədqiq olunmasına baxaq. Hər hansı nömrədən başlayaraq bütün hədələri eyni işarəli olan sıraların yığılması və ya dağılması məsələsinə baxılarkən sonlu sayda həmin hədlərə baxmamaq sıranın xarakterinə heç bir təsir etməyəcəkdir. Sonsuz sayda həm müsbət həm də mənfi hədləri olan sıralara baxmaq yeni əhəmiyyət kəsb edir. Belə sıralar işarəsini dəyişən sıralar adlanır. Onların yığılması müxtəlif üsullarla tədqiq olunur.

Bu bölmədə hədləri həqiqi ədədlər olan və nömrələri dəyişdikcə işarələri də dəyişən sıralara baxacağıq. Belə sıralar işarələri dəyişən sıralar adlanır.

Əvvəlcə işarələri dəyişən sıraların xüsusi halı

olan işarəsini növbə ilə dəyişən sıralara baxaq. *Hədləri növbə ilə müsbət və mənfi həqiqi ədədlər olan sıralara işarəsini növbə ilə dəyişən sıralar deyilir.* Belə sıralarda iki qonşu hədd əks işarəli olur, yəni işarəsini növbə ilə dəyişən sıranın hədləri növbə ilə müsbət və mənfi ədədlər olur və aşağıdakı kimi işarə olunur

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2k-1} - u_{2k} + \dots$$

Birinci həddin müsbət olması hesab edilir. Əks halda (-1)-ə vurmaqla onu müsbət etmək olar. Burada $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sıranın hədlərinin mütləq qiymətləridir.

4.2. Leybnis əlaməti. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların yığılmasının kafi şərti Leybnis və Nyüton tərəfindən daxil edilmişdir.

Teorem. Əgər işarəsini növbə ilə dəyişən

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots \quad (4.1)$$

sırasının hədləri mütləq qiymətcə monoton azalandırsa, yəni $\forall n \in N, u_{n+1} < u_n$ bərabərsizliyi ödənilərsə və sıranın ümumi həddi $n \rightarrow \infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşarsa $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, onda işarəsini növbə ilə dəyi-

şəh $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ sırası (Leybnis sırası) yığılandır.

4.3. Abel əlaməti. Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılandırsa

və b_n ardıcılığı monoton məhduddursa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

sırası yığılandır.

Misal 1. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$ sıranın yığılmasını araşdırın və cəmini tapın.

Həlli. Qeyd edək ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

sırası üçün

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

xüsusi cəmini tapırıq. Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2 < +\infty$$

olar və $\sum |a_n|$ sırası yığılır, deməli, $\sum a_n$ sırası mütləq yığılır.

İndi isə sıranın S_n cəmini tapaq:

$$S_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{8^n} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

$$A_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{8^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

$$B_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \dots + \left(\frac{1}{2^{3n-2}} - \frac{1}{2^{3n-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{3n-2}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{2^{3n-1}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$S_n = \frac{8}{7} + \frac{2}{7} = \frac{10}{7}$$

4.4. Drixle əlaməti. Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots$$

sırası verilmişdir. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə,

a) $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ xüsusi cəmlər ardıcılığı məhduddur

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcılığı monotondur

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sırası yığılır.

Qeyd. Abel əlaməti Dirixle əlamətindən alınır, yəni Dirixle əlaməti Abel əlamətindən güclüdür. Leybnis əlaməti isə Dirixle əlamətinin xüsusi halıdır.

Misal 2.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

sıranın yığılma-sını göstərin və cəmini tapın.

Həlli. Sıranın ümumi həddi

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}; n = 1, 2, \dots$$

şəklindədir. Leybnis əlamətinə görə sıranın yığılması aşkardır, odur ki, onun cəmini tapaq. Bunun üçün sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığının limitini hesablayaq. Belə bir alt ardıcılığa baxaq:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - (C + \ln n + \varepsilon_n) = \\ = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n,$$

burada C -sabitdir, $\varepsilon_n, \varepsilon_{2n}$ -lər isə n sonsuzluğa yaxınlaşanda sonsuz kiçik ardıcılıqlardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$$

olduğundan burada S_n verilmiş sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığıdır. Yekun nəticədə verilmiş sıranın cəmini almış olarıq:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2.$$

Misal 3. Sıranın yığılmasını tədqiq edin:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Həlli. İlk öncə cəmin altındakı ifadənin surətini aşağıdakı kimi çevirək:

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos \left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1} - \pi n \right) = (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{n+1}$$

onda verilmiş sıra

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

şəklinə düşər və

$$a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}, \quad b_n = \cos \frac{\pi}{n+1}$$

əvəzləmələri edək. Onda sıra $\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n$ şəklində olar.

Leybnis əlamətinə əsasən $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ sırası yığılır,

$\{b_n\} = \left\{ \cos \frac{\pi}{n+1} \right\}$ ədədi ardıcılığı isə monoton

məhduddur. Deməli, Abel əlamətinin hər iki şərti ödənilir. Onda sıra yığılır.

4.5. Mütləq və şərti yığılan sıralar. İndi isə ümumiyyətlə işarəsini dəyişən sıralara, yəni bütün hədləri ixtiyari işarəli həqiqi ədədlər olan sıralara baxaq. Məsələn,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.1)$$

sırasına baxaq. Burada $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ istənilən işarəli həqiqi ədədlərdir. İndi isə (4.1) sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4.2)$$

sırasına baxaq.

Tərif 1. Hər hansı ədədi sıranın hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş sıra yığılan olduqda, ilkin ədədi sıraya *mütləq (şərtsiz, şübhəsiz) yığılan sıra* deyilir.

Başqa sözlə desək, əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (4.1)$$

sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən tərtib olunmuş

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (4.2)$$

sırası yığılandırsa, onda verilmiş (4.1) sırası *mütləq yığılan* sıra adlanır.

Tərifdən aydın olur ki, yığılan müsbəthədli istənilən sıra mütləq yığılandır.

Sıranın yığılması üçün Koşi kriteriyasını (4.2) sırasına tətbiq edərək alarıq: (4.1) sırasının *mütləq yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə n_ε nömrəsinin varlığıdır ki, n -in $n \geq n_\varepsilon$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən natural qiymətlərində və $p \geq 0$ tam ədədləri üçün*

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \quad (4.3)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

İndi isə mütləq yığılan sıralar üçün aşağıdakı teoremlərlə tanış olaq.

Teorem 1. Əgər sıra mütləq yığılandırsa, o yığılındır.

Mütləq yığılan sıraların tərifindən və mütləq yığılan sıraların yığılması haqqında teoremdən aydın olur ki, (4.2) müsbət sırasının yığılan olması istənilən işarəli (4.1) sırasının yığılan olması üçün *yalnız kafi şərt*dir, *zəruri deyildir*. Başqa sözlə (4.1) sırasının yığılan olmasından onun hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş (4.2) sırasının yığılan olması çıxır.

Teorem 2. (4.1) sırasının mütləq yığılan olması üçün onun uyğun olaraq müsbət və mənfi hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş sıraların yığılan olması *zəruri və kafi şərt*dir.

Teorem 3 (Koşi). Mütləq yığılan sıranın hədlərinin yerini istənilən qaydada dəyişdikdə alınan yeni sıra da mütləq yığılındır və onun cəmi verilmiş

sıranın cəminə bərabərdir.

Qeyd 1. Sıra (sonsuz cəm) sonlu cəmdən limitə keçmə əməliyyatı ilə fərqləndiyindən sonlu cəmlərin ödədiyi xassələri sıralar üçün biləvasitə tətbiq oluna bilməz.

Qeyd 2. Mütləq yığılan sıralar üçün qruplaşdırma və yerdəyişmə xassələri ödənilir.

Tərif. Hər hansı ədədi sıranın özü yığılan, onun hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş sıra dağılan olarsa, onda ilkin yığılan sıraya *şərti yığılan sıra* deyilir.

Misal 4. İsbat edin ki, iki dağılan

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{və} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sıralarının hasili mütləq yığılan sıradır.

Həlli. İki sıranın bir-birinə vurulması qaydasından istifadə edək:

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1},$$

burada

$$a_1 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right), b_1 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right), n = 2, 3, 4, \dots$$

Göstərilən qayda ilə hasildə alınan sıranın ümumi həddini, yəni, c_n -ləri hesablayaq:

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \\ - 4 \cdot 3^{n-2} \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} \cdot \sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Beləliklə, hasildə alınan sıra yığılır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$$

və cəmi 4-ə bərabərdir.

Şərti yığılan sıralar üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 4. Şərti yığılan (4.1) sırasının uyğun olaraq müsbət hədlərindən və mənfi hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş sıraların hər ikisi dağılındır.

Teorem 5 (Riman). Şərti yığılan (4.1) sırasının hədlərinin yerini elə dəyişmək olar ki, alınan yeni sıranın cəmi qabaqcadan verilmiş istənilən A

$(-\infty \leq A \leq \infty)$ ədədinə bərabər olsun.

Teorem 6. (4.1) sırasının şərtsiz yığılması üçün zəruri və kafi şərt onun mütləq yığılmasıdır.

Teorem 7. Əgər (4.1) sırasının bütün yerdəyişmələri yığılırsa, onda onlar eyni cəmə malikdirlər.

Qeyd. Mütləq yığılan sıralarda hədlərin yerini ixtiyari qayda ilə dəyişmək olar. Mütləq yığılan sıra yerdəyişmə qanununu ödəyir. Şerti yığılan sıra isə yerdəyişmə qanununu ödəmir.

Misal 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

işarəsini dəyişən sıra yığılan olduğuna (Leybnis əlamətinə əsasən) baxmayaraq, bu sıranın hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sırası dağılındır (harmonik sıra olduğu üçün). Deməli, verilmiş sıra şərti yığılan sıradır.

5. Kompleks hədlı sıralar

Tutaq ki, $z = x + iy$ şəklində kompleks ədədi verilmişdir. Məlumdur ki, x kompleks ədədin həqiqi, y isə xəyali hissəsidir ($x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$), $i = \sqrt{-1}$ xəyali vahiddir. Hər bir kompleks ədəd üçün $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ ardıcılığının cəmini düzəldə bilərik.

Hər bir həddi kompleks ədəd olan sıraya *kompleks hədlı sıra* deyilir:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (5.1)$$

burada, $z_n = x_n + iy_n$ kompleks ədəd, $x_n = \operatorname{Re} z_n$ onun həqiqi, $y_n = \operatorname{Im} z_n$ xəyali hissəsi, $i = \sqrt{-1}$ isə xəyali vahiddir.

Hədləri həqiqi ədədlər olan sıralara analoji olaraq kompleks hədlı sıraların yığılması üçün *zəruri şərt* onun ümumi həddinin limitinin sıfıra bərabər olmasıdır. Yəni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Hədləri həqiqi ədədlər olan sıralara analoji olaraq kompleks hədlı sıraların xüsusi cəmlər ardıcılığının sonlu limiti varsa, ona *yığılan sıra*, əgər bu limit yoxdursa və ya vadır, ancaq sonsuzluğa bəra-

bədirsə, onda bu sərəya *dağılan sıra* deyilir.

Kompleks hədlı sıra ancaq və ancaq o vaxt yığılır ki, onun hədlərinin həm həqiqi, həm də xəyali hissələrindən düzəldilmiş ədədi sıralar yığılmış olsun. Belə ki,

$$\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + \cdots + \operatorname{Re} z_n + \cdots \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 + \cdots + \operatorname{Im} z_n + \cdots \quad (5.3)$$

Əgər (5.2) sırasının cəmi S_1 , (5.3) sırasının cəmini isə S_2 olarsa, onda (5.1) sırasının cəmi $S = S_1 + iS_2$ olacaq.

Kompleks hədlı sıranın hədlərinin modullarından (yəni mütləq qiymətlərindən) düzəldilmiş

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \quad (5.4)$$

sırası yığılırsa, onda (5.1) sırası da yığılır. Deməli, (5.1) sırası *mütləq yığılan* adlanır.

Misal 1. Sıranın yığılmasını tədqiq edin:

$$\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2^2}i\right) + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2^3}i\right) + \cdots$$

Həlli. Göstərdiyimiz sıranın hədlərinin həm həqiqi, həm də xəyali hissələrindən düzəldilmiş həqiqi hədlı sıralara baxaq:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Buradan sıranın yığılması üçün zəruri şərtlər ödənilir, yəni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Birinci sıra Dirixle sırası ilə müqayisə əlamətinə görə

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1,$$

ikinci sıra isə ortağ vuruğu $\frac{1}{2}$ olan sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi olduğundan, yığılan olurlar. Buna görə də verilən kompleks hədlı sıra da yığılır.

Misal 2. Sıranın yığılmasını tədqiq edin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}.$$

Həlli. Əvvəlcə sıranın ümumi həddinin limitini hesablayaq.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{i}{2} \right) \neq 0.$$

Deməli, sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmir. Buna görə də verilən kompleks hədlı sıra dağılır.

Misal 3. Sıranın yığılmasını tədqiq edin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i} \right]^n.$$

Həlli. Verilmiş sıranın ümumi həddinin n -ci də-

rəcədən kökünü iki kompleks ədədin nisbəti kimi çevirək:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z_n} &= \frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i} = \frac{2n+1-ni}{3n-i(2n+3)} = \\ &= \frac{3n(2n+1)+n(2n+3)}{(3n)^2=(2n+3)^2} + i \frac{-3n^2+(2n+1)(2n+3)}{(3n^2)+(2n+3)^2} = \\ &= \frac{8n^2+6n}{13n^2+12n+9} + \frac{n^2+8n+3}{13n^2+12n+9}i.\end{aligned}$$

Deməli, verilən sıra mütləq yığılır.

Misal 4. Verilmiş sıranın yığılma oblastını tapın:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-i) + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2 (z-i)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^3 (z-i)^3 + \dots$$

Həlli. Verilmiş sıranın n -ci və $n+1$ -ci hədlərinin nisbətini tapaq. Yəni,

$$\begin{aligned}a_n &= \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n, \quad a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1}, \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}+i}, \\ \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \left|\frac{3}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{3}{\sqrt{3+1}} = \frac{3}{2}, \quad R = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Bu o deməkdir ki, $|z-i| < \frac{3}{2}$ dairəsi verilən sıranın yığılma oblastıdır.

6. Sonsuz hasillər

Fərz edək ki, ixtiyari $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ ədədlər ardıcılığı verilmişdir. Bu ədədlərdən düzəldilmiş

$$U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdots U_n \cdots \quad (6.1)$$

hasilinə *sonsuz hasil* deyilir və

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n$$

kimi işarə olunur. $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ ədədlərinə *sonsuz hasilin hədləri* deyilir. (6.1) sonsuz hasilinin hədlərindən

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 \\ P_2 &= U_1 \cdot U_2 \\ P_3 &= U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$P_n = U_1 \cdot U_2 \cdots U_n = \prod_{k=1}^n U_k$$

xüsusi hasillərini düzəldək.

Tərif. Xüsusi hasil ardıcılığının sıfırdan fərqli sonlu limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = U \neq 0$$

varsa, onda (6.1) sonsuz hasilinə yığılan hasil deyilir.

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n \text{ ədədi isə həmin hasilin qiyməti olur.}$$

Əgər $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$ ya $P_n \rightarrow \pm\infty$ isə və yaxud limit heç yoxdursa, onda (6.1) sonsuz hasilinə *dağılan hasil* deyilir.

Vuruqlardan birinin sıfıra bərabər olması sonsuz hasilin sıfıra bərabər olması üçün kafidir.

Yuxarıda verilən tərif misallarla izah edək.

Misal 1.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots$$

hasilinin yığılan olmasını göstərməli.

Həlli. Doğrudan da,

$$P_{2n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \dots \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$P_{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \dots \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{2}$$

olduğu üçün sonsuz hasilin yığılan və qiyməti $\frac{1}{2}$ -ə

bərabərdir.

Misal 2. $U_n = \frac{n+2}{n+1}$ olmaq üzrə

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots$$

sonsuz hasilinin yığılan və ya dağılan olmasını araşdırmalı.

Həlli.

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2}$$

və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2} = \infty$$

olduğundan sonsuz hasil dağılındır.

Misal 3. Xüsusi hasili $P_n = (-1)^n$ olan sonsuz hasilin yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli. Verilmiş hasil üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ -1 & n = 2k-1 \end{cases}$$

bərabərdir, yəni xüsusi hasilin limiti yoxdur. Deməli, sonsuz hasil dağılır.

Misal 4. Ümumi həddi

$$U_n = \frac{n}{n+1}$$

olan

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

sonsuz hasilin yığılan və ya dağılan olmasını tədqiq edin.

Həlli. Sonsuz hasil üçün, xüsusi hasil

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

olar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan, sonsuz hasil dağılındır.

Sonsuz hasillərin yığılmasını öyrənmək üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. Sonsuz hasilin yığılması üçün onun ümumi hədləri ardıcılığının vahidə yığılması, yəni $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$ olması zəruridir.

İsbatı. Fərz edək ki, (6.1) sonsuz hasili yığılır və qiyməti U -ya bərabərdir. Yəni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = U \quad \text{və} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1} = U \quad (U \neq 0).$$

Digər tərəfdən, sonsuz hasilin ümumi həddi

$$U_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n} = \frac{U}{U} = 1$$

olur. Teorem isbat olundu.

Bu teoremə əsaslanaraq sonsuz hasilin hər bir həddini

$$U_n = 1 + a_n$$

kimi göstərmək olar.

Bu halda (6.1) sonsuz hasilini

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad (6.3)$$

kimi yazmaq olar.

Teorem 1-ə əsasən (6.3) sonsuz hasilinin yığılan olması üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (6.4)$$

zəruri olması aydındır. Ancaq bu şərt sonsuz hasilin yığılan olması üçün kafi deyildir.

Doğrudan da, misal 2-də

$$U_n = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

kimidir, deməli,

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{və} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduqda, həmin sonsuz hasilin dağılan olduğunu gördük.

Teorem 2. a_n ədədlərinin hamısı eyni işarəlidirə, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ hasilinin yığılan olması üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6.5)$$

sırasının yığılan olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \quad (6.6)$$

sırası yığılır və cəm L ədədinə bərabərdir. Onda (6.6) sırasının xüsusi cəminin $L_n = \ln P_n$ ilə işarə etsək, $P_n = e^{L_n}$ olar, loqarifmik və üstlü funksiyanın kəsilməzliyinə əsaslanıb, hər iki tərəfdə $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} L_n} = e^L$$

alarıq.

Deməli, (6.6) sırasının yığılan olmasından (6.3) hasilinin yığılması çıxır.

İndi (6.5) sırasının yığılması ilə (6.3) hasilinin yığılan olmasını göstərək. Həqiqətən (6.5) sırası yığılarsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

olur. Digər tərəfdən,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ilə } \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$$

sıraları eyni zamanda ya yığılandır və yaxud eyni zamanda dağılandır. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

münasibəti doğru olar. Deməli, (6.5) sırasının yığılmasından (6.3) hasilinin yığılması çıxır.

Teorem 3. Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (5.5) sırası ilə birlikdə

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (6.7)$$

sırası da yığılarsa, onda sonsuz

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

hasili də yığılar.

İsbatı. Doğrudan da (6.5) sırası yığılarsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

olur. $\ln(1+x)$ funksiyanın $x=0$ nöqtəsində Teylor düsturunun təfriqini yada salsaq və $\ln(1+a_n)$ funksiyası üçün onun iki həddi ilə kifayətlənsək,

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$$

alarıq. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \quad (6.8)$$

Onda ümumi hədləri

$$a_n^2 \text{ və } a_n - \ln(1+a_n) \text{ olan } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

və

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)] \quad (6.9)$$

sıraları eyni zamanda yığılırlar. Şərtə görə (6.7) sırası yığıldığından, (6.9) sırası da yığılır. (6.5) sırasının

yığılan olması fərz edildiyindən və (6.9) sırasının yığılan olmasından

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

yığılması alınır ki, onda teorem 2-yə əsasən $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ hasilinin yığılan olmasını hökm etmək olur. Teorem isbat olunur.

Tərif. Əgər

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+|a_n|)$$

hasili yığılarsa, onda

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

sonsuz hasilinə mütləq yığılan hasil deyilir.

Teorem 4. Sonsuz hasilin mütləq yığılan olmasından onun yığılan olması alınır.

İsbatı. Tutaq ki, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|a_n|)$ hasili yığılır. Onda ixtiyari kiçik $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $n_0(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n > n_0$ və $k \geq 1$ olanda, (teorem 1)

$$|(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1| < \varepsilon$$

olar. Həm də

$$\begin{aligned} & |(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1| \leq \\ & \leq |(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1| < \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

sonsuz hasilinin yığılan olması isbat olunur.

Teorem 5.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

hasilinin mütləq yığılması üçün zəruri və kafi şərt

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının mütləq yığılmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$

sonsuz hasili mütləq yığılır, yəni

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+|a_n|)$$

hasili yığılandır.

Onda teorem 2-yə əsasən $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sırası yığılar.

Buradan isə $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının yığılan olması alınır.

Deməli, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ hasilinin mütləq yığılan olmasından

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının mütləq yığılması zəruriyyətlə alınır.

Kafilik. Fərz edək ki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası mütləq yığılır, yəni $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sırası yığılandır, onda teorem 2-yə

görə, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ hasili yığılır, buradan da $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$

hasilinin yığılan olması alınır. Deməli, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$

hasili mütləq yığılan hasil olur. Teorem isbat olunur.

İndi yuxarıda qeyd etdiyimiz teoremlərin tətbiqinə aid misal göstərək.

Misal 5.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^s} \right) \quad (s > 0)$$

hasilinin yığılmasını araşdırmalı.

Həlli. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ sırasının yığılmasını araşdıraq.

Sıraların müqayisə əlamətinə görə, həmin sıra $s > 1$ olduğundan yığılır və $s \leq 1$ olanda isə sıra dağılır.

Misal 6. s -in hansı qiymətlərində

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right)$$

hasilinin yığıldığını, həm də mütləq və ya şərti yığılan olmasını araşdırmalı.

Həlli. Həmin hasilə uyğun, işarəsi dəyişən sıra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

əsasən araşdırsaq, $s > 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ mütləq

yığılır. Deməli, $s > 1$ olanda verilən hasil mütləq

yığılan olmur. Lakin $\frac{1}{2} < s \leq 1$ qiymətlərində

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad \text{və} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}$$

sıraları yığılandır, onda verilən hasil $\frac{1}{2} < s \leq 1$ qiymət-

lərində qeyri-mütləq yığılır.

Nəhayət, $0 < s \leq \frac{1}{2}$ qiymətlərində bu sonuncu

sıralardan birincisi yığılan, ikincisi dağılan, hasilin qiyməti isə sıfıra bərabər olur, yəni hasil dağılandır.

Misal 7. $(\alpha > \beta)$ olmaq üzrə

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta + n}{\alpha + n} \equiv \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + n} \right)$$

hasilinin yığılmasını araşdırmalı.

Həlli. Həmin hasilə uyğun sıranı yazmaq:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + n}$ bu sıranın dağılan olmasını harmonik sıra ilə

müqayisədən almaq olar. Onda verilən

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + n} \right)$$

hasili də dağılır.

Misal 8. $|x| < 1$ olmaq üzrə

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{1-x}$$

olduğunu isbat etməli.

Həlli. Sonsuz hasil üçün xüsusi hasili

$$P_n(x) = (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$$

kimi yazmaq olar.

Bu xüsusi hasilin hər iki tərəfini $1-x$ vursaq:

$$(1-x)P_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$$

alarıq. Buradan

$$P_n(x) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$$

olur.

$n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |x| < 1}} P_n(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |x| < 1}} \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

alarıq.

Bəzi məşhur sıralar

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e = 2.71828\dots$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{e} = 0.36787\dots$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots - dağılır$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 = 0.69314\dots$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} = 0.78539\dots$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493\dots$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} = 0.82246\dots$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232\dots$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720} = 0.94703\dots$$

Yoxlama sualları

1. Ədədi sıra nəyə deyilir?
2. Ədədi sıranın xüsusi cəmi nəyə deyilir?
3. Ədədi sıranın cəmi nəyə deyilir?
4. Yığılan və dağılan ədədi sıra nəyə deyilir?
5. Sıranın qalıq həddi nəyə deyilir?
6. Sıranın yığılması üçün zəruri şərt nəyə deyilir?
7. Sıranın yığılması üçün zəruri və kafi şərt nəyə deyilir?
8. Yığılan ədədi sıraların əsas xassələri hansılardır?
9. Ədədi sıranın yığılması üçün Koşi meyarı nəyə deyilir?
10. Sabit işarəli sıralar nəyə deyilir?
11. Müsbət işarəli sıraların yığılması üçün zəruri və kafi şərt nədən ibarətdir?
12. Müsbət işarəli sıralar üçün müqayisə teoremləri hansılardır?
13. Müsbət işarəli sıraların yığılmasını bilavasitə yoxlamaq üçün əsas əlamətlər hansılardır?
14. Müsbət sıralar üçün Koşi və Dəlamber əlamətləri

necə ifadə olunur?

15. Müsbət sıralar üçün Raabe və Qauss əlamətləri necə ifadə olunur?

16. Koşinin integral əlaməti nəyə deyilir?

17. Müsbət hədli sıraların yığılması üçün zəruri əlamət nədən ibarətdir?

18. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların yığılması üçün kafi əlamət nədən ibarətdir?

19. Leybnis teoremi nəyə deyilir?

20. Mütləq yığılan sıra nəyə deyilir?

21. Şerti yığılan sıra nəyə deyilir?

22. Mütləq yığılan sıralar üçün hansı xassələri bilirsiniz?

23. Şerti yığılan sıralar üçün toplanmanın yerdəyişmə və paylama qanunları doğru ola bilərmi?

24. Mütləq yığılan sıralar üçün Koşi teoremi nəyə deyilir?

25. Şerti yığılan sıralar üçün Riman teoremi nəyə deyilir?

26. Kompleks ədədlər hansılardır?

27. Kompleks hədli sıra nəyə deyilir?

28. Kompleks hədli sıra nə zaman yığılan olur?
29. Kompleks hədli sıra nə zaman dağılan olur?
30. Kompleks hədli sıra nə zaman mütləq yığılan olur?
31. Sonsuz hasil nəyə deyilir?
32. Yığılan və dağılan sonsuz hasil nəyə deyilir?
33. Sonsuz hasilin yığılması üçün zəruri əlamət nədən ibarətdir?
34. Sonsuz hasilin yığılması üçün zəruri və kafi əlamət nədən ibarətdir?
35. Mütləq yığılan hasil nəyə deyilir?
36. Sonsuz hasilin mütləq yığılması üçün zəruri və kafi şərt nədən ibarətdir?

Çalışmalar

Aşağıdaki sıraların yığılmasını və cəmini tapın.

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$

2. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$

3. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

4. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

5. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

6. $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots$

7. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

8. $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots$

9. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

10. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

11. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$

$$12. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

$$13. 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

$$14. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$$

$$15. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

Koşi meyarına əsasən aşağıdakı sıraların yığılan olduğunu göstərin

$$16. \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$$

$$17. \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$$

$$18. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

Dalamber və ya Koşi əlamətlərinə əsasən sıranın yığılmasını təyin edin.

$$19. \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$$

$$20. \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$$

$$21. \frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots$$

$$22. \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \cdots$$

$$23. \frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + \cdots$$

$$24. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots$$

$$25. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots$$

$$26. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

$$32. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

$$33. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5} \right)^n \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$$

İsbat edin ki, sıra yığılır və onun cəmini tapın

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^{n-2}} - \frac{2}{5^{n+1}} \right)$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$39. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 15n - 4}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

İsbat edin ki, sıra dağılındır.

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{1+n^2}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\frac{1}{1+n^2}}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} n [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(1+n)}$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Koşi meyarına əsasən sıranın yığılan olduğunu isbat edin.

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{a^n} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, a > 1)$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha}{n} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Koşi meyarına əsasən sıranın dağılan olduğunu isbat edin.

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$$

Müqayisə əlaməti ilə sıranın yığılmasını araşdırın.

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{1+n^2}$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2n^2 - 1}}$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n^3}$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\alpha}$$

Dalamber əlaməti ilə sıranın yığılmasını araşdırın

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2}$$

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$$

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{2^n n!}$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 5^{3n}}$$

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$$

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{2^{2n} \cdot n!}$$

$$79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5^n}$$

Koşî əlaməti ilə sıranın yığılmasını araşdırın

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n$$

$$81. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$82. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3}$$

$$83. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-3} \right)^{\sqrt{n^4+1}}$$

$$84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n} \right)^n}$$

$$85. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n}{\sqrt{1+9n^2}}$$

Raabe əlaməti ilə sıranın yığılmasını araşdırın

$$86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$87. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!}$$

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdots (n^2+1)}$$

Qauss əlaməti ilə sıranın yığılmasını araşdırın

$$89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^{n+p}}$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{q(q+1) \cdots (q+n)} \cdot \frac{1}{n^p}, \quad q > 0$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a(a+d) \cdots (a+nd)}{b(b+d) \cdots (b+nd)} \right)^p, \quad a, b, d > 0$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+\alpha) \cdot \ln(3+\alpha) \cdots \ln(n+1+\alpha)}, \quad \alpha > 0$$

Leybnis əlaməti ilə sıranın yığılmasını isbat edin.

$$94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{n+1}$$

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n\sqrt{n}}$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$$

$$98. 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$$

$$100. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

Abel və ya Dirixle əlamətlərini tətbiq etməklə aşağıdakı sıraların yığılmasını isbat edin.

$$102. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n+1}$$

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$$

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{n}$$

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n^2}$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^n n}{n}$$

$$108. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n e^{-n}$$

Sıranın yığılmasını tədqiq edin.

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$$

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$111. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right)$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + n}$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$114. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$115. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2})$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

$$120. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$$

İsbat edin ki, sıra mütləq yığılır

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2}$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} \right)^3$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{1-n} \right)^n$$

İsbat edin ki, sıra şərti yığılır.

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$127. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+k^2})$$

$$128. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Sıranın mütləq və şərti yığılmasını araşdırın

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + n + 1}}$$

$$131. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

$$132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$$

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n} \right)$$

$$134. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 n \cdot \arcsin \frac{n}{1 + n^3}$$

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$$137. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

$$138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$$

$$139. \sum_{n=1}^{\infty} n \cos n e^{-\sqrt{n}}$$

$$140. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{1-3n} \right)^n$$

$$141. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{1-2n} \right)^n$$

$$142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln^2 n}$$

$$143. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

$$144. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \arccos \frac{n}{n+1}$$

$$145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\alpha}}$$

$$146. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n \ln^{\alpha} n}$$

Kompleks həddli sıraların yığılmasını tədqiq edin.

$$147. (1+i) + \left(\frac{1}{2} + i \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + i \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} + i \frac{1}{27} \right) + \dots$$

$$148. (1+0.1i) + \left(\frac{1}{2} + 0.01i \right) + \left(\frac{1}{3} + 0.001i \right) + \dots$$

$$149. \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i \right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}i \right) + \dots$$

$$150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$$

$$151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$$

$$152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}}$$

$$154. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

$$155. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$$

$$156. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{n} \right)$$

Kompleks hədlı sıraların cəmini tapın.

$$157. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right)$$

$$158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{4^n}$$

$$159. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2+in}{n(n+1)(n+2)}$$

$$160. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-i)^n}$$

Aşağıdakı sonsuz hasillərdən hansının mütləq və hansının şərti yığılan olmasını tədqiq etməli.

$$161. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]$$

$$162. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$163. \prod_{n=1}^{\infty} n (-1)^n$$

$$164. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]$$

Testlər

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$ sırasının n -ci xüsusi cəmi hansıdır?

A) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}$

B) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$

C) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

D) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$

E) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$

2. Xüsusi cəmlər ardıcılığı $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ olan sıranın cəmi hansıdır?

A) $S = m - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

B) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1})$

C) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_{n+1})$

D) $S = m + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

E) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

3. $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ sırasının cəmi S olduqda $Ca_1 + Ca_2 + \dots + Ca_n + \dots$ sırasının cəmi hansıdır?

A) CS

B) $C + S$

C) $C - S$

D) $S - C$

E) $S - 2C$

4. $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ və $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sıralarının uyğun hədlərinin

cəmindən və fərqindən düzəldilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ sıra-

larının cəmi necə olar?

A) $A \pm B - C$

B) $S + A \pm B$

C) $S - A \pm B$

D) $A \pm B$

E) $A \pm B - 2C$

5. $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots$ sırası $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

sırasının

n -ci nəyi adlanır?

A) qalığı

B) fərq sırası

C) ikiqat sırası

D) qonşu sırası

E) sonradan yazılmış sırası

6. Yığılan sıranın qalığının limiti nəyə bərabərdir?

A) A ədədinə

B) Sıfıra

C) $S + A$

D) $A + B$

E) $S - A$

7. $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots (1)$ və $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots (2)$

sıralarının yığılan və ya dağılan olması haqqında nə demək olar?

A) (1) və (2) sıralarının heç bir əlaqəsi yoxdur

B) (1) sırası yığılan olduqda, (2) sırası dağılır

C) (1) sırası dağılan olduqda, (2) sırası yığılır

D) (1) sırası (2) sırasının majorant sırasıdır

E) (1) və (2) sırası eyni zamanda yığılan, ya da dağılındır

8. $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$ sırası q -nün hansı qiymətlərində yığılan olar?

A) $-1 < q < 1$

B) $-\infty < q < -1, 1 < q < +\infty$

C) $-\infty < q \leq -1, 1 \leq q < +\infty$

D) $q = 1$ olduqda

E) $q = -1$ olduqda

9. Sıranın ilk n dənə həddini atmaq onun yığılan olub olmamasına necə təsir edər?

A) təsir etməz

B) onun cəmi artır

C) onun cəmi n dəfə artır

D) onun cəmi n dəfə azalar

E) onun cəmi ancaq sıfıra çevrilər

10. Yığılan sıranın ümumi həddinin limiti nəyə bərabərdir?

A) qeyri məhdud olar

B) sıfırdan fərqlidir

C) hər hansı sonlu ədədə

D) sıfıra

E) sonsuz böyüyən olar

11. Ümumi həddinin limiti sıfırdan fərqli olan sıranın yığılan və ya dağılan olması haqqında nə demək olar?

A) cəmi sonlu ədədə bərabərdir

B) cəmi sıfıra bərabərdir

C) dağılan

D) cəmi vahidə bərabərdir

E) cəmi (-1) -ə bərabərdir

12. Müsbət hədlı sıraların yığılması üçün onun xüsusi cəmlər ardıcılığının hansı şərti ödəməsi zəruri və kafi şərtədir?

A) yuxarıdan qeyri məhdud olması

B) yuxarıdan məhdud olması

C) aşağıdan qeyri məhdud olması

D) ancaq aşağıdan məhdud olmalıdır

E) aşağıdan məhdud, yuxarıdan qeyri məhdud olmalıdır

13. Xüsusi cəmlər ardıcılığının köməyi ilə sıranın cəmini

tapın? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) 3

14. Xüsusi cəmlər ardıcılığının köməyi ilə sıranın

cəmini tapın? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

A) 3

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{3}$

15. Xüsusi cəmlər ardıcılığının köməyi ilə sıranın

cəmini tapın? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$

A) $-\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) 3

16. Xüsusi cəmlər ardıcılığının köməyi ilə sıranın

cəmini tapın? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}$

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) 3

17. Xüsusi cəmlər ardıcılığının köməyi ilə sıranın

cəmini tapın? $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^2} \cos \frac{3}{2^n}$

A) $3 \sin x$

B) $\frac{1}{2} \sin 3$

C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{2} \sin 2$

18. Müsbəthədli sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığının monotonluğa haqqında nə demək olar?

- A) monoton azalmayan
- B) ciddi monoton azalan
- C) ciddi monoton artan
- D) nə artan, nə də azalan
- E) ancaq monoton artmayan

19. Müsbəthədli sıra yığılan olmadıqda onun xüsusi cəmlər ardıcılığı necə olar?

- A) nə artan, nə də azalan
- B) ciddi monoton azalan
- C) ciddi monoton artan
- D) qeyri məhdud
- E) ancaq monoton artmayan

20. Müsbəthədli sıranın xüsusi cəmləri ardıcılığı üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ olduqda həmin sıra haqqında nə demək olar?

- A) xüsusi ardıcılığı məhduddur
- B) hədləri azalandır
- C) cəmi sıfıra bərabərdir
- D) sonlu ədədə yığılır

E) dağılındır

21. $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{n^2}{1+n^2} + \dots$ sırasının yığılan və ya dağılan olması haqqında aşağıdakılardan hansı doğrudur?

A) cəmi sıfıra bərabərdir

B) cəmi 1-ə bərabərdir

C) dağılındır

D) sıranın cəmi $\sqrt{2}$ -dir

E) sıranın cəmi $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir

22. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ sırasının yığılan olması haqqında nə demək olar?

A) dağılan

B) cəmi sıfıra bərabərdir

C) cəmi 1-ə bərabərdir

D) cəmi $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir

E) cəmi (-1)-ə bərabərdir

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

A) mütləq yığılır

- B) dağılır
- C) yığılan deyil
- D) şərti yığılır
- E) yığılır

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

- A) yığılır
- B) şərti yığılır
- C) dağılır
- D) mütləq yığılır
- E) mütləq dağılır

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$

- A) dağılır
- B) şərti yığılır
- C) yığılır
- D) mütləq yığılır
- E) mütləq dağılır

Çalışmaların cavabları

1. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{2}$

3. 3

4. 1

5. $\frac{1}{3}$

6. $\frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$

7. Dağılır

8. Dağılır

9. Yığılır

10. Dağılır

11. Dağılır

12. Dağılır

13. Yığılır

14. Yığılır

15. Dağılır

16. Yığılır

17. Yığılır

18. Dağılır

19. Yığılır

20. Yığılır

21. Yığılır

22. Yığılır

23. Dağılır

24. Yığılır

25. Yığılır

26. Yığılır

27. Yığılır

28. Yığılır

29. Dağılır

30. Dağılır

31. Yığılır

32. Yığılır

33. Yığılır

34. Yığılır

35. Dağılır

36. 2

37. 17,9

38. $\frac{1}{2}$

39. $\frac{1}{4}$

40. $\frac{1}{4}$

41. $\frac{1}{20}$

42. $\frac{1}{8}$

43. $1 - \sqrt{2}$

44. 1

45. $-\ln 2$

60. Dağılır

61. Dağılır

62. Yığılır

63. Yığılır

64. Yığılır

65. Dağılır

66. Yığılır

67. Dağılır

68. Yığılır

69. $\alpha > 0$ olduğunda yığılır, $\alpha \leq 0$ olduğunda dağılır

70. Yığılır

71. Dağılır

72. Yığılır

73. Yığılır

74. Dağılır

75. Yığılır

76. Yığılır

77. Yığılır

78. Dağılır

79. Yığılır

80. Yığılır

81. Dağılır

82. Yığılır

83. Dağılır

84. Dağılır

85. Yığılır

86. Dağılır

87. Dağılır

88. Dağılır

89. $p > \frac{3}{2}$ olduqda yığılır, $p \leq \frac{3}{2}$ olduqda dağılır

90. $p + q > 1$ olduqda yığılır, $p + q \leq 1$ olduqda dağılır

91. $\frac{p}{d}(b-a) > 1$ olduqda yığılır, $\frac{p}{d}(b-a) \leq 1$ olduqda dağılır

92. $\frac{p}{2} + q > 1$ olduqda yığılır, $\frac{p}{2} + q \leq 1$ olduqda dağılır

93. Dağılır

109. Yığılır

110. Yığılır

111. Yığılır

112. α mənfi olmayan tam ədəd olmadıqda yığılır

113. Dağılır

114. Dağılır

115. Yığılır

116. Dağılır

117. Yığılır

118. Dağılır

119. *yığılır*

120. $\alpha > 0$ və ya $\alpha = 0$, $\beta > 0$ olduqda yığılır, qalan hallarda dağılır

129. Mütləq yığılır

130. Şərti yığılır

131. Dağılır

132. Mütləq yığılır

133. Mütləq yığılır

134. Mütləq yığılır

135. Şərti yığılır

136. Şərti yığılır

137. Dağılır

138. Mütləq yığılır

139. Mütləq yığılır

140. Mütləq yığılır

141. Dağılır

142. Şərti yığılır

143. Şərti yığılır

144. Şərti yığılır

145. $\alpha > 1$ olduqda mütləq yığılır, $0 < \alpha \leq 1$ olduqda şərti yığılır, $\alpha \leq 1$ olduqda dağılır

146. $\alpha > 1$ olduqda mütləq yığılır, $\alpha \leq 1$ olduqda şərti yığılır

147. Sıra yığılır və cəmi $S = 2 + i \frac{3}{2}$ olur.

148. Sıra dağılır

149. Sıra dağılır

150. Sıra mütləq yığılır

151. Sıra mütləq yığılır

152. Sıra şərti yığılır

153. Sıra dağılır

154. Sıra mütləq yığılır

155. Sıra mütləq yığılır

156. *Sıra dağılır*

157. $\frac{-1+i}{4}$

158. $\frac{1+2i}{5}$

159. $1 + \frac{1}{2}i$

160. $-1 + i$

161. Şərti yığılır

162. Dağılır

163. Dağılır

164. $p > 1$ mütləq yığılandır

Testin cavabları

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. C) | 14. E) |
| 2. E) | 15. D) |
| 3. A) | 16. A) |
| 4. D) | 17. E) |
| 5. A) | 18. A) |
| 6. B) | 19. D) |
| 7. E) | 20. E) |
| 8. A) | 21. C) |
| 9. A) | 22. A) |
| 10. D) | 23. E) |
| 11. C) | 24. C) |
| 12. B) | 25. A) |
| 13. A) | |

İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı

1. И.П.Натансон – Краткий курс высшей математики., Москва, 1968.
2. В.Н.Никольский – Сборник задач по математическому анализу., М., 1973.
3. R.Məmmədov – Ali riyaziyyat kursu., T-1,2,3. Bakı, 1978.
4. F.Ələsgərov – Riyazi analiz I-II., Bakı, 2009.
5. Б.П.Демидович – Сборник задач и упражнений по математическому анализу., М., 1972.
6. G.N.Berman – Riyazi analizdən məsələlər., Bakı, 1961.
7. Л.Д.Кудрявцев и др. - Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3. 2-е изд., М., Физматлит, 2003.
8. С.И.Ляшко, А.К.Боярчук, И.Н.Александрович, А.И.Молодцов, Д.А.Номировский, Б.В.Рублев. - Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1., М.: Вильямс, 2001.
9. Г.Н.Берман - Сборник задач по курсу математического анализа., М., 1972.
10. П.Данко, А.Попов, Т. Кожевникова - Высшая математика в упражнениях и задачах», М., Том 1-2, 1986-1999.

MÜNDƏRİCAT

Giriş.....	3
1. Ədədi sıra anlayışı. Yığılan sıranın əsas xassələri. Sıranın qalığı.....	6
2. Müsbəthədli ədədi sıralar və onların yığılması.....	17
3. Müsbət hədləli ədədi sıraların yığılma əlamətləri.....	24
4. İşarəsini növbə ilə dəyişən ədədi sıralar. Leybnis əlaməti. Mütləq və şərti yığılan ədədi sıralar. Dirixle və Abel əlamətləri.....	36
5. Kompleks hədləli sıralar.....	48
6. Sonsuz hasillər.....	52
Bəzi məşhur sıralar.....	66
Yoxlama sualları.....	67
Çalışmalar.....	70
Testlər.....	87
Çalışmaların cavabları.....	97
Testin cavabları.....	101
İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı.....	102

Nazim Əsədulla oğlu Neymətov

ƏDƏDİ SİRALAR

Dərs vəsaiti

Çapa verildiyi tarix 01.05.2021

Kağızın növü: A3, snequroçka

Çap vərəqi: 6,4 ç.v.

Tiraj: 150 ədəd

Gəncə Dövlət Universitetinin nəşriyyatı

Ünvan: Gəncə şəhəri, Heydər Əliyev prospekti, 429

