

M.A. NƏCƏFOV

**DİFERENSİAL HƏNDƏSƏDƏN
MÜHAZİRƏLƏR**

Bakı-2016

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZIRLIYI
AZƏRBAYCAN DÖVLƏT PEDAQOJI UNIVERSITETI

MAQSUD AĞAQLU OĞLU NƏCƏFOV

DIFERENSIAL HƏNDƏSƏDƏN MÜHAZİRƏLƏR

*Azərbaycan Respublikası Təhsil
Nazirliyinin sayılı əmri ilə dərs
vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.*

Bakı-2016

ÖN SÖZ

Diferensial həndəsə həndəsənin fiqurları (əyrilər, səthlər və s.) riyazi analizin üsulları ilə tədqiq edən bölməsidir və onun inkişafı diferensial hesabının yaranmasından başlanır. Belə ki, hələ Leybnis (1646-1716) öz işlərində əyrilərin öyrənilməsi üçün diferensial hesabını tətbiq etmişdir. Onun tələbəsi İ.Bernulli (1667-1748) səthlər üzərində geodezik əyrilər üçün diferensial tənliklər almışdır. Bundan əlavə diferensial həndəsədə xətlər və səthlər ailələrinin də xassələri öyrənilir.

Diferensial həndəsə riyazi analizlə sıx əlaqədə inkişaf edib. Ancaq, riyazi analiz özü də, əsasən həndəsə məsələlərinə görə yaranıb. Belə ki, toxunan anlayışı funksiyanın törəməsi anlayışının, inteqral anlayışı isə sahə və həcm anlayışlarının yaranmasına səbəb olub.

Diferensial həndəsənin bir elm kimi yaranması, əsasən XVIII əsrdə İ.Bernullinin tələbəsi Y.Eylerin (1707-1783) və Q.Monjun (1746-1828) adı ilə bağlıdır. Belə ki, səthin verilmiş nöqtəsində normal kəsiyinin ayrılıyının tədqiqi, eləcə də səthin baş istiqamətlərinin, baş əyriliklərinin hasili kimi səthin tam ayrılıyının təyini kimi gözəl nəticələr Eylerə, səthin xətlərdən təşkil olmasının tədqiqi isə Monja məxsusdur.

Diferensial həndəsənin əsas anlayışlarından bəziləri, məsələn, toxunan və asimptot anlayışları hələ bizim eradan əvvəl yunan həndəsəçilərinə məlum idi. Amma bu anlayışlara verilən müasir təriflərdə istifadə olunan hərəkət və onunla bağlı limit anlayışları qədim yunan həndəsəçilərinə məlum deyildir.

Diferensial həndəsənin səthlər nəzəriyyəsi XIX əsrdə Almaniya və başqa ölkələrdə Qaussun (1829), Fransada isə Monjun əsərlərində (1867) öz əksini tapmışdır.

Təqdim olunan dərs vəsaiti dörd fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsildə topologiyanın elementləri və metrik fəza anlayışları, ikinci fəsildə skalyar arqumentli vektor funksiyalar, əyri, hamar əyri, əyriyə toxunan, əyrinin ayrılığı, əyrinin

buruqluğu, çoxtoxunan müstəvi kimi anlayışlar verilmiş, ayrinin verilmə üsulları göstərilmiş, hər paraqrafın sonunda nümunə kimi məsələlər göstərilmiş və çalışmalar təqdim edilmişdir.

Üçüncü fəsildə evklid fəzasında səthlər, hamar səth anlayışı, səthin verilmə üsulları, səthə toxunan müstəvi və normalı, səthin I və II kvadratik formaları, səth üzərində ayrinin ayrılığı, baş ayrılık, səthin tam və orta ayrılığı öyrənilmiş, hər paraqrafın sonunda məsələlər həll edilmiş və çalışmalar verilmişdir.

Dördüncü fəsil səthin daxili həndəsəsinə həsr olunmuş, derivation düsturlar çıxarılmış, geodezik xətlər, səth üzərində qapalı oblastın sahəsi öyrənilmiş, hər paraqrafın sonunda məsələlər həll edilmiş və uyğun çalışmalar verilmişdir.

Dərs vəsaiti Pedaqoji Universitetin “Riyaziyyat müəllimliyi” – 050106, “Riyaziyyat və informatika müəllimliyi” – 050105 ixtisasları üçün “Diferensial həndəsə və topologiya” fənnin proqramı əsasında tərtib edilmişdir. Vəsaitdən texniki ali məktəb və riyaziyyat və informatika ixtisası verən ali məktəbin müəllimləri və tələbələri istifadə edə bilərlər.

Sonda kitabı diqqətlə oxuyub etdiyi düzəlişlərə görə vəsaitin elmi redaktoru, ADPU-nun “Cəbr və həndəsə” kafedrasının dosenti A.İ.Şahbazova, verdiyi dəyərli məsləhətlərə görə həmin kafedranın müdiri, dosent Z.Q.Sadıxova, rəyçilər BDU-nun “Həndəsə” kafedrasının dosentləri N.Y.Əliyevə və H.D.Fəttayevə öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

I FƏSİL

TOPOLOGİYANIN ELEMENTLƏRİ

§1. Metrik fəzalar

Tutaq ki, E boş olmayan çoxluqdur. Əgər E çoxluğunun ixtiyari x və y elementləri cütünə qarşı mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi qoymaq olarsa ki,

$$1^0. \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2^0. \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in E$$

$$3^0. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in E$$

şərtləri ödənsin, onda deyirlər ki, E çoxluğunda ρ metrikanı təyin edilmişdir. 1^0 - 3^0 - şərtlərinə məsafə aksiomları deyilir. E çoxluğu onda verilən ρ metrikanı ilə birlikdə, yəni (E, ρ) cütünü metrik fəza adlanır. Onun x, y, z, \dots elementləri isə E çoxluğunun nöqtələri adlanır. Mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi x, y nöqtələri arasında məsafə adlanır. ρ funksiyasının ödədiyi 1^0 - 3^0 xassələri metrik fəzanın aksiomları adlanır.

1^0 - Xassəsi eynilik aksiomu,

2^0 - Xassəsi simmetriklik aksiomu,

3^0 - Xassəsi üçbucaq aksiomu adlanır.

İstənilən boş olmayan E çoxluğunda ixtiyari $(x, y) \in E \times E$ nöqtələr cütünü

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{яэяp} \quad x \neq y \\ 0, & \text{яэяp} \quad x = y \end{cases}$$

ədədini qarşı qoymaqla trivial adlanan metrika təyin etmək olar.

Aydındır ki, belə təyin olunmuş metrika 1^0 - 3^0 aksiomlarını ödəyir. Beləliklə, hər bir boş olmayan çoxluğunu metrik fəzaya çevirmək olar. Qeyd edək ki, birdən çox elementi özündə saxlayan çoxluqda müxtəlif metrikalar vermək olar. Doğrudanda, əgər çoxluqda ρ metrikanı verilmişsə, k vahiddən fərqli müsbət

ədəddirsə, onda k_p - da həmin çoxluqda təyin olunmuş metrikdir və bu metrika ρ metrikasından fərqlidir.

İndi isə metrik fəzaya aid misallara baxaq.

Misal 1. $E_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ evklid fəzası üçün $\rho: E_n \times E_n \rightarrow R_+$ inikasını $\forall M, N \in E_n$ üçün

$$\rho(M, N) = |\overline{MN}| \text{ (harada ki, } \left| \overrightarrow{MN} \right| \text{ ifadəsi } \overrightarrow{MN} \text{ vektorunun}$$

uzunluğunu göstərir) təyin edək. Bu halda vektorun uzunluğunun xassələrinə görə metrik fəzanın 1^0 - 3^0 aksiomları ödənilir.

Deməli, E_n evklid fəzası metrik fəzadır.

Misal 2. Tutaq ki, E ədədi parçadır, yəni $a \leq x \leq b$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğudur, hardakı $a < b$ şərti ödənilir. x və y nöqtələri arasındakı məsafəni $\rho(x, y) = |x - y|$ kimi təyin edək. Aydındır ki, bu halda metrik fəzanın $1^0, 2^0$ -ci aksiomları ödənilir. İndi isə, 3^0 -cu aksiomun ödənilməsini yoxlayaq. Əgər $\forall x_1, x_2, x_3 \in E$ isə onda aydındır ki, $|(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ şərti ödənilir. Deməli, $\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)$ olur, yəni 3^0 -cü aksiomda ödənilir. Deməli, $[a, b]$ parçası nöqtələr arasında adi məsafəyə görə metrik fəzadır.

Misal 3. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş həqiqi kəsilməz funksiyaların E çoxluğundan $\forall f, g \in E$ funksiyaları üçün metrikanı $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ kimi təyin edək.

Metrik fəzanın $1^0, 2^0, 3^0$ aksiomlarının ödənildiyini asanlıqla yoxlamaq olar.

Bu metrik fəza, nöqtələri funksiyalar olan metrik fəzadır və adətən $C_{[a, b]}$ şəklində işarə edilir. $C_{[a, b]}$ fəzası funksional fəzaya aid nümunədir.

Qeyd. Qeyd edək ki, afin və proyektiv fəza metrik fəza deyil, belə ki, bu fəzalarda metrika təyin olunmayıb.

Tərif 1. $\forall x_0 \in E$ üçün $\rho(x_0, x) < r$ bərabərsizliyini ödəyən bütün $x \in E$ nöqtələr çoxluğuna, mərkəzi x_0 nöqtəsində, radiusu isə $r (r > 0)$ olan açıq kürə deyilir və $B(x_0, r)$ kimi işarə olunur.

Tərif 2. $\forall x_0 \in E$ üçün $\rho(x_0, x) \leq r$ bərabərsizliyini ödəyən bütün $x \in E$ nöqtələr çoxluğuna mərkəzi x_0 , radiusu r olan qapalı kürə deyilir və $\bar{B}(x_0, r)$ şəklində işarə olunur.

Tərif 3. $\forall x_0 \in E$ üçün $\rho(x_0, x) = r$ şərtini ödəyən bütün $x \in E$ nöqtələr çoxluğuna mərkəzi x_0 , radiusu r olan sfera deyilir və sfera $S(x_0, r)$ kimi işarə olunur. $B(x_0, \varepsilon)$ açıq kürəsi $x \in E$ nöqtəsinin ε ətrafı adlanır.

Tutaq ki, A çoxluğu (E, ρ) metrik fəzasının boş olmayan alt çoxluqudur. Əgər, $a \in A$ nöqtəsi özünün müəyyən ε ətrafı ilə bütünlüklə A -ya daxil olarsa, a -ya A çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir. A çoxluğunun bütün daxili nöqtələr çoxluğu, onun daxili və ya daxili hissəsi adlanır, $\overset{\circ}{A}$ və ya $\text{int } A$ şəklində işarə olunur.

Tərif 4. Əgər çoxluğun bütün nöqtələri daxili nöqtələr isə, başqa sözlə çoxluq özünün daxili hissəsi ilə üst-üstə düşərsə, belə çoxluğa açıq çoxluq deyilir.

Açıq çoxluğa misal olaraq ədəd oxunda $]a, b[$ şəklində ədədi intervalları və bu intervalların birləşmələrini, E_2 müstəvisində açıq dairələri, açıq yarımüstəviləri, sadə çoxbucaqlıların daxillərini göstərmək olar.

Tərif 5. Əgər $a \in E$ nöqtəsinin elə ε ətrafı varsa ki, orada $A \subset E$ çoxluğunun elementi yoxdur, onda a nöqtəsinə A çoxluğunun xarici nöqtəsi deyilir.

Bu tərifdən alınır ki, $a \in E$ nöqtəsinin $A \subset E$ çoxluğunun xarici nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt, a nöqtəsinin $CA = E \setminus A$ tamamlayıcı çoxluğunun daxili nöqtəsi olmasıdır.

Tərif 6. $a \in E$ nöqtəsinin istənilən ε ətrafının, həm A çoxluğu ilə, həm də onun tamamlayıcı çoxluğu ilə kəsişməsi boş deyilsə, onda a nöqtəsinə A çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyilir.

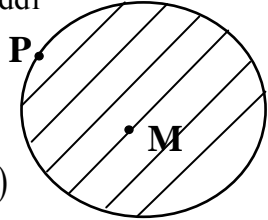
Bütün sərhəd nöqtələr çoxluğuna A çoxluğunun sərhədi deyilir və $b(A)$, yaxud da ∂A kimi işarə olunur.

Tutaq ki, A fiquru E_2 evklid müstəvisində, şəkildə göstərilən hər hansı $B(O;r)$ açıq dairəsidir. Bu fiqurun hər bir M nöqtəsi, A çoxluğunun daxili nöqtəsidir. Deməli, açıq dairə evklid müstəvisində açıq çoxluqdur.

N nöqtəsi E_2 müstəvisində A çoxluğunun xarici nöqtəsi, P nöqtəsi isə bu çoxluğun sərhəd nöqtəsidir. • N

Açıq $B(O;r)$ dairəsinin sərhəddi $S(O;r)$ çevrəsidir.

Analoji olaraq, qeyd edək ki, E_3 evklid fəzasında açıq $B(O;r)$ kürəsi də açıq çoxluqdur, onun sərhədi isə $S(O;r)$ sferasıdır.



Tərif 7. Əgər (E, ρ) metrik fəzasında elə sonlu radiuslu kürə varsa ki, A çoxluğunu daxilində saxlayır, onda A çoxluğuna məhdud çoxluq deyilir.

Evklid müstəvisində istənilən çoxbucaqlı, istənilən dairə və ellips məhdud çoxluqdur; hiperbola, parabola sinisoid isə qeyri-məhdud çoxluqlardır.

(E, ρ) metrik fəzasında bütün açıq çoxluqlar çoxluğunu Q –ilə işarə edək. Aydındır ki, $E \in Q$. Boş çoxluğu da açıq çoxluq hesab edəcəyik, yəni $\emptyset \in Q$. Q çoxluğunun əsas xassəsi aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem.1 Metrik fəzada 1) istənilən qədər açıq çoxluqların birləşməsi də açıq çoxluqdur. 2) Sonlu sayda açıq çoxluqların kəsişməsi də açıq çoxluqdur.

İsbati. Tutaq ki, U_λ çoxluqlar sistemi (E, ρ) metrik fəzasında açıq çoxluqlardan ibarətdir, yəni $U_\lambda \in \mathcal{Q}$ və burada λ hər hansı bir Λ çoxluğunda qiymətlər alır (Λ ola bilsin ki, sonsuzdur). U_λ çoxluqlarının bütün birləşmələrinə baxaq və bu çoxluğu U ilə işarə edə

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad (1)$$

$\forall x_0 \in U$ nöqtəsini götürək. (1) bərabərliyinə əsasən heç olmazsa elə bir $\lambda = \lambda_0$ qiyməti var ki, $x_0 \in U_{\lambda_0}$ olar. U_{λ_0} açıq çoxluqdur, onda x_0 nöqtəsinin elə $B(x_0, \varepsilon)$ ətrafı var ki, $B(x_0, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ olur. $U_{\lambda_0} \subset U$ olduğundan alırıq ki, $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ olar.

Beləliklə alırıq ki, $\forall x_0 \in U$ nöqtəsi üçün elə ε ətrafı var ki, həmin ətraf bütünlüklə U ya daxildir. Deməli, U açıq çoxluqdur. İkinci xassəni iki çoxluq üçün isbat etmək kifayətdir. Tutaq ki, U_1, U_2 açıq çoxluqlardır. Əgər $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olarsa, onda bizim təklifimiz doğrudur; çünki boş çoxluq açıq çoxluqdur. İndi isə, o hala baxaq ki, $U_1 \cap U_2 = V \neq \emptyset$. V - çoxluğundan ixtiyari $x_0 \in V$ elementi götürək. Onda aydındır ki, $x_0 \in U_1$ və $x_0 \in U_2$ olur. U_1 və U_2 açıq çoxluqlar olduğundan x_0 nöqtəsinin U_1 -ə daxil olan, $B(x_0, \varepsilon_1) - \varepsilon_1$ ətrafı, U_2 -yə daxil olan $B(x_0, \varepsilon_2) - \varepsilon_2$ ətrafı var.

Tutaq ki, ε ədədi ε_1 və ε_2 - ədədlərinin ən kiçiyidir. Onda aydındır ki, $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_1) \subset U_1$ və $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_2) \subset U_2$ olar. Buradan alırıq ki, $B(x_0, \varepsilon) \subset V$ olar.

Beləliklə alırıq ki, V -də hər bir nöqtə özünün müəyyən ətrafı ilə V -yə daxildir. Deməli, V açıq çoxluqdur.

§2. Topoloji fəzalar

Metrik fəzada Teorem 1 ilə ifadə olunan çoxluqların əsas xassələrinə əsaslanaraq ümumi topoloji fəza anlayışını vermək olar.

Tutaq ki, X çoxluğunda hər hansı qayda ilə aşağıdakı xassələri ödəyən τ alt çoxluqlar sistemi qeyd olunub:

1⁰. Boş çoxluq \emptyset və X çoxluğu özü τ sisteminə daxildir.

2⁰. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən ailəsinin birləşməsi də τ -ya daxildir.

3⁰. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən sonlu ailəsinin kəsişməsi də τ -ya daxildir.

Bu şərtlər ödəndikdə deyirlər ki, X çoxluğunda topoloji struktur və ya topologiya təyin olunub, (X, τ) cütünü isə topoloji fəza adlanır. 1⁰-3⁰ xassələri topoloji strukturun aksiomları adlanır. X çoxluğunun elementləri nöqtə, τ sisteminin elementlərinə isə (X, τ) topoloji fəzasının açıq çoxluqları adlanır. Əgər X çoxluğunda hər hansı τ topologiyasının seçildiyi məlumdursa, onda (X, τ) topoloji fəzasının sadəcə olaraq X ilə işarə etmək olar.

Misal 1. (E, ρ) metrik fəzasına baxaq. Bundan əvvəlki paraqrafda isbat etdiyimiz teoremə əsasən alırıq ki, (E, ρ) həm də topoloji fəzadır. Burada τ topologiyası açıq kürələrin köməyi ilə verilir. ((E, ρ) fəzasında açıq çoxluqların tərifini bundan əvvəlki paraqrafda vermişik). Bu halda deyirlər ki, fəzanın topologiyası irsən alınmışdı, yəni bu fəzanın topologiyası ρ metrikası vasitəsilə yaranmışdır (belə topoloji fəzalara metrikləşə bilən topoloji fəzalar deyilir).

Misal 2. R^n çoxluğunda açıq çoxluqları aşağıdakı şəkildə təyin edək. $]a^i, b^i [[i = \overline{1, n}$ n sayda ədədi intervallar götürək və aşağıdakı fiqura baxaq:

$$\Omega_n = \{M(x^1, x^2, \dots, x^n) \in R^n / a^i < x^i < b^i \quad i = 1, 2, \dots, n \}$$

Bunu R^n -də açıq koordinat paralelepipedini adlandırmaq. Əgər $F \subset R^n$ çoxluğunun ixtiyari $M \in F$ nöqtəsi üçün elə Ω_n açıq koordinat paralelepipedini tapmaq olarsa ki, $M \in \Omega_n \subset F$ şərti ödənilir, onda F açıq çoxluq adlanır. Boş çoxluğu açıq çoxluq hesab edirik. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, yuxarıda təyin etdiyimiz F açıq çoxluqları topologiyanın 1^0 - 3^0 aksiomlarını ödəyir, deməli, R^n çoxluğunda müəyyən topologiya təyin edilir (belə topologiya təbii topologiya adlanır). Bu topologiya R^n çoxluğunu topoloji fəzaya çevirir. Əgər $n=1$ olarsa onda o, ədədi fəza və ya ədəd oxu adlanır.

Misal 3. A_2 afin müstəvisində $ABCD = P$ paraleloqramına baxaq. P paraleloqramının $\overline{AM} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AD}$ $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ şərtini ödəyən bütün M nöqtələr

çoxluğunun $\overset{\circ}{P}$ ilə işarə edək. Bu çoxluq P paraleloqramının daxili adlanır. $F \subset A_2$ çoxluğu özünün hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən bir paraleloqramın daxilini də özündə saxlayırsa, onda F çoxluğuna açıq çoxluq deyilir. Bu isə o deməkdir ki, F -ə daxil olan hər bir $M \in F$ nöqtəsi üçün, elə P paraleloqramı var ki, onun $\overset{\circ}{P}$ daxili, $M \in \overset{\circ}{P} \subset F$ şərtini ödəyir.

Burada da, asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu cür təyin olunmuş açıq çoxluqların τ sistemi A_2 müstəvisində topoloji strukturun $1^0, 2^0, 3^0$ aksiomlarını ödəyir. Deməli, afin müstəvisi topoloji fəzadır.

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, A_n ($n \geq 2$) afin fəzası da topoloji fəzadır. Eyni qayda ilə P_n proyektiv fəzasında da topologiya təyin etmək olar. Bu, metrik fəza olmayan topoloji fəzalara misaldır.

Misal 4. İxtiyari X çoxluğunun iki elementdən ibarət olan $\tau = \{X, \emptyset\}$ alt çoxluqlar ailəsinə baxaq: bu elementlərdən biri X

çoxluğunun özü, ikincisi isə \emptyset boş çoxluqdur. Aşkardır ki, bu alt çoxluqlar ailəsi $1^0 - 3^0$ aksiomalarını ödəyir, yəni τ ailəsi X çoxluqunda təyin olunmuş topologiyadır. Bu topologiya antidiskret topologiya, (X, τ) - fəzası isə antidiskret topoloji fəza adlanır.

Misal 5. Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\tau = P(X)$ isə bu çoxluğun bütün alt çoxluqlar ailəsidir. Aydındır ki, bu halda da $1^0 - 3^0$ aksiomları ödənilir, yəni τ topologiyadır. Bu topologiya diskret topologiya, (X, τ) fəzasına isə diskret topoloji fəza deyilir. 4 və 5 misallarından görünür ki, ixtiyari X çoxluğunun topoloji fəzaya çevirmək olar.

Tutaq ki, (X, τ) – topoloji fəzadır.

Tərif 1 : $x \in X$ nöqtəsini özündə saxlayan istənilən açıq çoxluğa x nöqtəsinin ətrafı deyilir.

Bu tərifdən alınır ki, $U \subset X$ çoxluğunun özünün hər bir nöqtəsinin ətrafı olması üçün, zəruri və kafi şərt, həmin çoxluğun açıq çoxluq olmasıdır, yəni $U \in \tau$ olmasıdır.

Tərif 2 : Əgər hər bir $x \in X$ və onun U_x ətrafı üçün $B \subset X$ - də elə B_x elementi varsa ki, $x \in B_x \subset U_x$ şərti ödənilsin, onda (X, τ) – topoloji fəzasının B açıq alt çoxluqlar ailəsi τ - topologiyasının bazası adlanır.

İntervalar R həqiqi ədədlər çoxluğunda təbii topologiyanın bazasını əmələ gətirir. Evkilid fəzasında açıq kürələr bu topoloji fəzanın bazasını əmələ gətirir. Açıq koordinat paraleloepipləri təbii topologiyaya görə R^n -də baza əmələ gətirir. Aydındır ki, hər bir τ topologiyasının bazası var (Misal üçün, $B = \tau$ götürmək olar). Bazanın əsas xassəsini aşağıdakı teorem ifadə edir.

Teorem1. (X, τ) topoloji fəzasının B açıq çoxluqları ailəsi, ancaq və ancaq, o zaman τ topologiyasının bazası olar ki, τ -nın hər bir elementi B -nin müəyyən elementlərinin birləşməsi şəkilində olsun.

İsbati: Tutaq ki, B ailəsi τ topologiyasının bazasıdır və U hər hansı açıq çoxluqdur. Yəni $U \in \tau$. Bazanın tərifinə əsasən ixtiyari $x \in U$ nöqtəsi üçün B ailəsinin elə B_x elementi var ki, $x \in B_x \subset U$ olur. B -də B_x elementlərinin çoxluğuna baxaq (burada x, U -nun ixtiyari nöqtəsidir). Aydınır ki, U çoxluğu B_x elementlərinin birləşməsindən ibarətdir, yəni $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ olur.

Tərs təklif də aydındır.

τ topologiyasının X – çoxluğunun açıq alt çoxluqlarının sonlu və ya hesabi ailəsindən ibarət, heç olmazsa bir bazası varsa, onda (X, τ) topoloji fəzası hesabi bazalı topoloji fəza adlanır. Belə ki, R ədəd oxunun rasional uclu intervallarından ibarət ailəsi, onun təbii topologiyasının bazasını əmələ gətirir. Bu baza hesabidir. Nəticədə alırıq ki, R fəzası hesabi bazalı topoloji fəzadır. Buradan alınır ki, afin və evkilid fəzaları hesabi bazalı fəzalardır.

Tutaq ki, A çoxluğu (X, τ) – topoloji fəzasının hər hansı boş olmayan alt çoxluğudur. $a \in A$ nöqtəsinin tamamilə A –ya daxil olan hər hansı bir ətrafı varsa, onda a nöqtəsinə A -çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir.

Əgər $a \in X$ nöqtəsinin elə bir ətrafı varsa ki, onun A çoxluğundan olan heç bir elementi olmasın, onda a nöqtəsinə A çoxluğunun xarici nöqtəsi deyilir. $a \in X$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafının, həm A çoxluğu ilə, həm də A çoxluğunun CA tamamlayıcısı ilə kəsişməsi boş çoxluq deyilsə, onda a nöqtəsinə A -çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyilir. A -çoxluğunun $\overset{\circ}{A}$ daxili hissəsi və $b(A)$ sərhəd anlayışları eyni ilə metrik fəzadakı kimi təyin edilir.

Burada da A çoxluğu, o zaman və yalnız o zaman, açıq çoxluq olar ki, daxili hissəsi ilə üst-üstə düşsün yəni,

$$A \in \tau \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}. \quad (1)$$

$x \in X$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafı ilə A çoxluğunun kəsişməsi boş deyilsə, onda x -ə A çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyilir. Bu tərifdən alınır ki, A çoxluğunun ixtiyari nöqtəsi və onun $b(A)$ -sərhəddinin ixtiyari nöqtəsi A çoxluğunun toxunma nöqtəsidir. A çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğunu \bar{A} - ilə işarə edək. \bar{A} -ya A çoxluğunun qapanması deyilir. Aydınır ki, $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup b(A)$ olur.

Məsələn $]a, b[\subset R$ intervalının qapanması $[a, b]$ ədədi parçası, $B(O, r) \subset E_2$ -açıq dairəsinin qapanması isə $\bar{B}(O, r)$ -qapalı kürəsidir.

Çoxluğun xarici nöqtəsinin və toxunma nöqtəsinin tərifindən alınır ki, əgər x nöqtəsi A çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyilsə, onda bu nöqtə A çoxluğunun xarici nöqtəsidir. Tərsinə, əgər x nöqtəsi A çoxluğunun xarici nöqtəsidirsə, onda bu nöqtə A çoxluğunun toxunma nöqtəsi ola bilməz. Beləliklə alırıq ki, A çoxluğunun qapanmasının tamamlayıcısı A çoxluğunun tamamlayıcısının daxili hissəsi ilə üst-üstə düşür, yəni aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\overline{CA} = \overset{\circ}{CA} \quad (2)$$

Tərif 3: (X, τ) topoloji fəzasının, A çoxluğunun CA tamamlayıcısı açıq çoxluq olarsa, A çoxluğu qapalı çoxluq adlanır.

Qapalı çoxluğa $]a, b[\subset R$ ədədi parçasını, $\bar{B}(o, r) \subset E_2$ -qapalı dairəsinə misal göstərmək olar. (X, τ) -topoloji fəzasının özü isə eyni zamanda qapalı və açıq çoxluqdur.

Çoxluğun qapalılıq əlamətini aşağıdakı teoremlə ifadə etmək olar.

Teorem 2: Topoloji fəzada A çoxluğu, onda və yalnız onda, qapalı olar ki, o, özünün qapanması ilə üst-üstə düşsün.

Zərurilik. Tutaq ki, A çoxluğu (X, τ) - topoloji fəzasında qapalıdır; göstərək ki, $A = \overline{A}$ ödənilir. A çoxluğu qapalıdırsa, deməli, $CA \in \tau$ olur. Onda (1) bərabərliyinə əsasən alırıq ki, $CA = \overset{\circ}{CA}$ -dir. (2) bərabərliyini nəzərə alsaq $CA = CA$ alırıq. Buradan alırıq ki, $A = \overline{A}$. Zərurilik isbat olundu.

Kəfilik. Tərsinə, fərz edək ki, A çoxluğu özünün \overline{A} qapanması ilə üst üstə düşür, yəni $A = \overline{A}$ şərti ödənilir. İsbat edək bu çoxluq qapalıdır. Fərziyədən alırıq ki, $CA = \overline{CA}$ -dir, onda (2) bərabərliyinə əsasən $CA = \overset{\circ}{CA}$ yazıla bilər. Deməli (1) bərabərliyinə əsasən $CA \in \tau$ olur, yəni A çoxluğu qapalıdır. Teorem isbat olundu.

(X, τ) - topoloji fəzasının hər hansı A alt çoxluğuna baxaq. T ilə τ -nün A çoxluğu ilə kəsişmələri çoxluğunu işarə edərək, yəni $T = \{U \cap A / U \in \tau\}$ işarə edək. Yoxlamaq olar ki, A çoxluğunun T alt çoxluqları ailəsi topologiyanın $1^0 - 3^0$ aksiomlarını ödəyir. Onda alırıq ki, (A, T) - topoloji fəzadır. Bu fəza (X, τ) - fəzasının alt fəzası adlanır; T - topologiyası haqqında isə deyirlər ki, o, A çoxluğunda τ topologiyasının yaratdığı topologiyadır.

§3. Kəsilməzlik və homomorfizm

Məlumdur ki, ədədi arqumentli kəsilməz funksiyalar riyazi analizdə çox mühüm rol oynayır. Həndəsədə kəsilməz funksiyanın ümumiləşməsi olan kəsilməz inikaslar mühüm yer tutur.

Tutaq ki, (X, τ) və (Y, T) topoloji fəzalardır.

Tərif 1. Əgər Y – fəzasında $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V – ətrafı üçün, X – fəzasında x – nöqtəsinin elə U ətrafı varsa ki,

$f(U) \subset V$ olur, onda $f : X \rightarrow Y$ inikası x nöqtəsində kəsilməz inikas adlanır. Əgər, inikas X çoxluğunun hər bir nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda həmin inikas kəsilməz inikas adlanır.

Qeyd edək ki, əgər X və Y fəzaları R ədəd oxu olarsa, onda kəsilməz inikas anlayışı analizdən bildiyimiz kəsilməz funksiya anlayışına çevrilir.

Kəsilməz inikaslar haqqında aşağıdakı teorem inikasların kəsilməzlik meyarını ifadə edir.

Teorem. (X, τ) topoloji fəzasının (Y, T) topoloji fəzasına olan f inikası, ancaq və ancaq, o zaman kəsilməzdir ki, Y -fəzasının istənilən açıq çoxluğunun proobrazı X -də açıq çoxluq olsun.

İsbatı. Zərurilik: Tutaq ki, $f : X \rightarrow Y$ inikası kəsilməzdir. İxtiyari $V \in T$ açıq çoxluğunu götürək, göstərək ki, $f^{-1}(V) \in \tau$ olacaq. $U = f^{-1}(V)$ işarə edək; U elə $x \in X$ nöqtələrinin çoxluğudur ki, $f(x) \in V$ olsun. İxtiyari $x_0 \in U$ nöqtəsini götürək. $f(x_0) \in V$ olduğu üçün, V çoxluğu $f(x_0)$ nöqtəsinin ətrafı olacaq. f -kəsilməz olduğundan x_0 nöqtəsinin elə U_{x_0} ətrafı var ki, $f(U_{x_0}) \subset V$ olacaq. Onda $U_{x_0} \subset U$ olar. Buradan da alırıq ki, U çoxluğu hər bir nöqtəsi ilə bərabər, onun müəyyən ətrafını da özündə saxlayır. Deməli, U açıq çoxluqdur. Zərurilik isbat olundu.

Kəfilik. Tutaq ki, f inikası zamanı, ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı açıq çoxluqdur. İsbat edək ki, f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir. İxtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsini götürək. $f(x_0) \in V$ nöqtəsinin ixtiyari $V \in T$ ətrafına baxaq. Şərtə görə V çoxluğunun proobrazı açıq çoxluqdur. $f^{-1}(V) = U$ işarə etsək, onda aydındır ki, $x_0 \in U$ və $f(U) \subset V$ olar. Deməli, $f(x_0)$ nöqtəsinin hər bir V ətrafına uyğun, x_0 nöqtəsinin elə U

ətrafını tapdıq ki, $f(U) \subset V$ olur. Deməli, f inikası hər bir $x_0 \in X$ nöqtəsində kəsilməzdir. b.t.i.o.

Tərif 2. Tutaq ki, bizə X, Y topoloji fəzaları verilib. Əgər $f: X \rightarrow Y$ inikası qarşılıqlı birqiymətlidirsə, özü və tərsi də kəsilməzdirsə (yəni, f inikası

a) biyektivdirsə,

b) f və f^{-1} kəsilməz inikasdırsa) onda f

homeomorfizm adlanır.

Əgər $f: X \rightarrow Y$ homeomorfizmi varsa, onda X, Y fəzaları homeomorf fəzalar adlanır və $X \sim Y$ kimi yazılır.

Beləliklə, biz bütün topoloji fəzaların M sinifində \sim kimi işarə olunan binar münasibəti aldığımızla göstərmək olar ki, bu münasibət refleksiv, simmetrik və tranzitivdir. Deməli, baxılan bu münasibət M sinfində ekvivalentlik münasibətidir.

M / \sim faktor çoxluğunun hər bir elementi topoloji tip adlanır.

İki homeomorf topoloji fəza verilibsə, onlara topoloji ekvivalent və ya eyni tipə daxil olan topoloji fəzalar deyəcəyik. (X, τ) topoloji fəzasının homeomorfizm zamanı dəyişməyən xassələrinə topoloji xassələr (və ya topoloji invariantlar) deyilir. Bu xassələrin öyrənilməsi riyaziyyatın böyük bir bölməsi olan topologiyanın predmetidir.

Misal 1. ρ metrikasından irsən alınmış E_3 üçölçülü evklid fəzasına və təbii topologiya ilə verilmiş üç ölçülü R^3 ədədi fəzasına baxaq. (§2-də misal 1, misal 2). Əgər E_3 fəzasında $O_{\overline{ijk}}$ düzbucaqlı koordinat sistemi verilmişdirsə, $f(M) = m$ münasibəti ilə $f: E_3 \rightarrow R^3$ kimi f biyektiv inikası təyin edə bilərik. Burada $M \in E_3$, $m \in R^3$ və qeyd edək ki, $m = (x^1, x^2, x^3)$ olur; burada, x^1, x^2, x^3 ədədləri M - nöqtəsinin

O_{ijk} koordinat sistemində koordinatlardır. İsbat edək ki, bu inikas homeomorfizmdir.

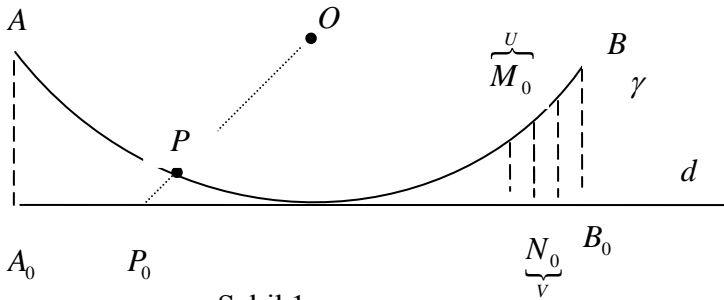
Tutaq ki, M_0, E_3 fəzasının ixtiyari nöqtəsidir, $m_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ isə onun obrazıdır. R^3 fəzasında M_0 nöqtəsinin ixtiyari V_0 ətrafını götürək. M_0 nöqtəsinə özündə saxlayan və V_0 ətrafına daxil olan $V(a^i < x_0^i < b^i, i=1,2,3)$ açıq koordinat paralelepipedinə baxaq. Tutaq ki, ε ədədi, $|a^i - x_0^i|, |b^i - x_0^i|, i=1, 2, 3$ ədədlərin ən kiçiyidir. Onda aydındır ki, M_0 nöqtəsinin ε ətrafı olan U ətrafı üçün alırıq ki, $f(U) \subset V \subset V_0$ olur. Buradan çıxır ki, f inikası M_0 nöqtəsində kəsilməzdir. M_0 nöqtəsi E_3 -ün ixtiyari nöqtəsi olduğundan alırıq ki, f inikası kəsilməzdir. Bu apardığımız mühakimələrdən görünür ki, $f^{-1}: R^3 \rightarrow E_3$ inikası da kəsilməzdir. Ona görə f -inikası homeomorfizmdir.

Beləliklə, alırıq ki, $E_3 \sim R^3$ olur. Eyni qayda ilə, isbat etmək olar ki, $E_2 \rightarrow R^2$ və $E_1 \rightarrow R^1$ -olur. Oxşar qayda ilə, inanmaq olar ki, A_3 afin fəzası R^3 ədədi fəzasına, A_2 afin müstəvisi isə R^2 ədədi fəzasına homeomorfdur.

Misal 2. E_2 evklid müstəvisində uc nöqtələri A və B olan γ yarımçevrəsinə və $I = A_0B_0$ parçasına baxaq, burada A_0, B_0 nöqtələri A və B nöqtələrinin, γ yarımçevrəsinin AB düz xəttinə paralel olan d toxunanı üzərində ortoqonal proyeksiyasıdır.

E_2 evklid topologiyası γ və I çoxluqları üzərində uyğun olaraq iki (γ, τ) və (I, T) topoloji fəzaları yaradır. İsbat edək ki, bu iki fəza homeomorfdur. Tutaq ki, f inikası γ yarımçevrəsinin $A_0 B_0$ üzərində ortoqonal proyeksiyasıdır.

Aydındır ki, f - qarşılıqlı birqiymətli inikasdır. İsbat edək ki, bu inikas kəsilməzdir. Bunun üçün ixtiyari $M_0 \in \gamma$ nöqtəsinə baxaq. Onun obrazı $N_0 = f(M_0)$ olsun. Asanlıqla görmək olar ki, N_0 nöqtəsinin ixtiyari V ətrafına qarşı M_0 nöqtəsinin elə U ətrafını tapmaq olar ki, $f(U) \subset V$ olsun. (Şəkil 1-ə bax).



Şəkil 1

Deməli, f inikası M_0 nöqtəsində kəsilməzdir və M_0 nöqtəsi γ ayrısının ixtiyari nöqtəsi olduğundan alırıq ki, f inikası kəsilməzdir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, f^{-1} tərs inikası da kəsilməzdir. Beləliklə alırıq ki, uc nöqtələri ilə verilmiş yarımçevrə parçaya **homeomorfdur**.

Analoji olaraq göstərmək olar ki, ucları daxil olmayan γ yarımçevrə də, ucları daxil olmayan I' intervalına homeomorfdur.

Tutaq ki, O γ yarımçevrəsinin mərkəzidir.: $g: \gamma' \rightarrow d$ inikasına baxaq. γ' -ucları daxil olmayan yarımçevrənin d düz xəttinə $g(P) = P_0$ kimi təyin olunan inikasıdır (şəkil 1-ə bax) harda ki, P_0 nöqtəsi OP şuasının d düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsidir. Aydındır ki, bu inikas

homeomorfizmdir. Onda, $f^{-1}: I' \rightarrow \gamma'$ və $g: \gamma' \rightarrow d$ inikaslarının kompozisiyası olan $g \circ f^{-1}$ inkası da homeomorfizmdir. Beləliklə, alırıq ki, ucları daxil olmayan parça düz xəttə homeomorfizmdir. Buradan da, alırıq ki, $]ab[$ ədədi intervalı R ədəd oxuna homeomorfudur. Oxşar qayda ilə aşağıdakı təklifləri asanlıqla əsaslandırmaq olar.

1^0 . Yarımşfera sərhəddi ilə birlikdə, qapalı dairəyə homeomorfudur.

2^0 . Sərhədsiz yarımşfera açıq dairəyə homeomorfudur.

3^0 . Açıq dairə müstəviyə homeomorfudur.

4^0 . Qabarıq çoxbucaqlı qapalı dairəyə homeomorfudur.

5^0 . Şua $[a, b[$ yarımintervalına homeomorfudur.

Tutaq ki, $f: X \rightarrow Y$ homeomorfizmidir. Əgər X və Y fəzaları üst-üstə düşərsə, onda $f: X \rightarrow X$ inikasına X fəzasının homeomorfizmi deyilir. Homeomorfizmə aid başqa misal olaraq E_2 evklid müstəvisində ixtiyari oxşarlıq inikasını göstərə bilərik. (əgər E_2 müstəvisinə, E_2 müstəvisində təyin olunmuş metrikanın yaratdığı topologiya ilə topoloji fəza kimi baxsaq). Homeomorfizmə aid başqa bir misal kimi A_2 afin müstəvisində istənilən afin çevirməni göstərmək olar.

§4. Ayrılma, kompaktlıq. Əlaqəlilik

Riyaziyyatda çox vacib olan topoloji fəzaların üç sinfinə baxaq.

Tərif. Əgər topoloji fəzanın istənilən iki fərqli nöqtəsinin kəsişməyən ətrafları varsa, belə fəzalar ayrılan və yaxud (Hausdorff) fəzaları adlanır.

Misal üçün ədədlər fəzası, evklid fəzası ixtiyari metrik fəzalar, afin və proyektiv fəzalar ayrılan fəzalardır. Aydın olur ki, ən azı iki elementi olan antidiskret fəza ayrılmayıdır.

X çoxluğunun örtüyü elə X_λ alt çoxluqlar ailəsidir ki, onların birləşməsi X çoxluğunu verir. (X, τ) topoloji fəzasının (X_λ) örtüyünün hər bir (X_λ) üzvü açıq olduqda, həmin örtük açıq örtük adlanır. (X_λ) örtüyünün örtük əmələ gətirən alt ailəsi həmin örtüyün alt örtüyü adlanır.

(X, τ) topoloji fəzası Borel-Lebeq aksiomunu ödədikdə, yəni hər bir açıq örtüyün sonlu alt örtüyü olduqda, o, **kompakt fəza** adlanır. (X, τ) – topoloji fəzasının A alt fəzası kompaktdırsa, onda A kompakt çoxluq adlanır. Məsələn $[a, b]$ ədədi parçası R ədədi fəzasında kompakt çoxluqdur. Evklid fəzasında çevrə, üçbucaq, sfera kompakt alt fəzələrdir. Bütün evklid fəzası (evklid müstəvisi, evklid düz xətti) kompakt deyildir. İsbat etmək olar ki, E_n evklid fəzasında alt çoxluq, ancaq və ancaq, qapalı və məhdud olduqda kompakt olur. Məsələn, $B(a, r)$ açıq kürəsi (o məhduddur, lakin qapalı deyil), eləcə də, öz sərhədi ilə birlikdə yarımfəza (o qapalıdır, lakin məhdud deyil) kompakt çoxluq deyil, lakin $\overline{B}(a, r)$ qapalı kürəsi və $S(a, r)$ sferası kompakt çoxluqdur.

Əgər X çoxluğunun örtüyünün elementləri boş çoxluq deyilsə və ixtiyari iki müxtəlif elementi kəsişmirsə, onda həmin örtük çoxluğun bölgüsü adlanır.

(X, τ) topoloji fəzasının iki açıq çoxluqdan ibarət bölgüsü yoxdursa, o əlaqəli adlanır. $A \subset X$ alt çoxluğu X -in alt fəzası kimi əlaqəlidir, onda o, əlaqəli çoxluq adlanır.

İsbat etmək olar ki, evklid, affin, proyektiv fəzaları əlaqəlidir. Sfera, müstəvi, düz xətt, ellips evklid fəzasının əlaqəli alt çoxluqlarına aid nümunələrdir.

İsbat edək ki, H hiperbolası evklid müstəvisində əlaqəli çoxluq deyildir. Doğrudan da, fərz edək ki, A və B həmin hiperbolanın qollarıdır. Evklid müstəvisinin topologiyasının H çoxluğunda yaratdığı topologiyayı T ilə işarə edək. Onda (H, T)

E_2 - də alt fəzadır. Hər bir $M_0 \in A$ nöqtəsi üçün M_0 -ı özündə saxlayan və A -ya daxil olan (H, T) -dən açıq çoxluq göstərmək olar. Deməli, A çoxluğu (H, T) fəzasında açıqdır. Analoji olaraq aydındır ki, B də həmin fəzədə açıqdır. Aydındır ki $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = H$, $A \cap B = \emptyset$ şərtləri ödənilir. Beləliklə, (H, T) fəzası üçün A və B kimi iki açıq çoxluqdan ibarət bölgü mövcuddur. Bu isə o deməkdir ki, hiperbola əlaqəli çoxluq deyildir.

Qeyd. Ayrılma, kompaktlıq və əlaqəlilik anlayışları fəzanın topologiyasına, yəni onun τ bütün açıq çoxluqlar ailəsinə qoyulan uyğun tələblər vasitəsilə təyin olunur. Deməli, buradan alınır ki, fəzanın ayrılma, kompaktlıq və ya əlaqəlilik xassələri homeomorfizm zamanı saxlanılır.

II FƏSİL

§ 1. Skalyar arqumentli vektor-funksiyalar

Tutaq ki, bizə I ədədi aralığı və E_3 evklid fəzası verilib. Hər bir $t \in I$ ədədinə E_3 fəzasında bir $\vec{r}(t)$ vektorunu müəyyən qayda ilə qarşı qoyaq. Onda deyilir ki, I ədədi aralığında t skalyar arqumentli $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor-funksiyası verilmişdir. E_3 evklid fəzasında $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormal bazisi götürüb, $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasını $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorları üzrə ayrılışını yazaq:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1)$$

Burada $x(t), y(t), z(t)$ -skalyar funksiyalar olub $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasının koordinat funksiyaları və ya sadəcə koordinatları adlanır.

İndi, I aralığında təyin olunmuş skalyar arqumentli vektor-funksiyaların adı funksiyalar üçün analoji olan limiti, kəsilməzliyi, diferensialı anlayışlarını verək.

Tərif 1. Əgər I aralığında $t \rightarrow t_0$ olduqda, $\vec{r}(t)$ vektorunun $|\vec{r}(t)|$ uzunluğu sifra yaxınlaşarsa, onda deyəcəyik ki, $t_0 \in I$ nöqtəsində $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyası sonsuz kiçiləndir.

Tərif 2. \vec{a} sabit vektoru üçün $\vec{r}(t) - \vec{a}$ fərq vektoru t_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçilən vektor olarsa, \vec{a} vektoruna t arqumenti $t_0 - a$ yaxınlaşanda $\vec{r}(t)$ vektorunun limiti deyilir və $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ kimi yazılır. Aydındır ki, bu yazılış $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$ yazılışı ilə eynigüclüdür.

Tərif 3. Əgər hər bir $t_0 \in I$ nöqtəsində $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ olarsa, yəni hər bir $t_0 \in I$ nöqtəsində $\vec{r}(t)$ vektor funksiyası kəsilməzdirsə, $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasına I ədədi aralığında kəsilməz vektor-funksiya deyilir.

(1) bərabərliyindən alınır ki, $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasının $t_0 \in I$ nöqtəsində kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt, $x(t), y(t), z(t)$ koordinat funksiyalarının həmin nöqtədə kəsilməz olmasıdır. Əgər $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ sabit vektordursa, onda

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \quad (2)$$

olar.

(2) düsturundan alınır ki, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3 \quad (3)$$

bərabərliklərinin ödənilməsidir.

Hər hansı $t \in I$ nöqtəsi götürüb, t -yə elə Δt artımı verək ki, $t + \Delta t \in I$ olsun. Onda t nöqtəsində Δt artımına uyğun $\Delta \vec{r}$ vektoru $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ kimi təyin olunur.

Tərif 4. Δt sifıra yaxınlaşdıqda $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ nisbətinin limiti varsa, yəni $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ varsa, $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasına t nöqtəsində diferensiallanan funksiya deyilir. Bu limiti adətən $\vec{r}'(t)$ və ya $\frac{d\vec{r}}{dt}$ kimi işarə edib, ona $\vec{r}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsində törəməsi deyilir. $d\vec{r} = \vec{r}' dt$ vektoruna isə $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasının t nöqtəsində diferensialı deyilir.

(3) bərabərliklərindən istifadə edərək aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem 1. I aralığında (1) ayrılışı ilə verilmiş $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasının diferensiallanan olması üçün zəruri və kafi şərt, $x(t), y(t), z(t)$ koordinat funksiyalarının diferensiallanan olmasıdır. Bu zaman

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (4)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. (1) bərabərliyindən alırıq ki,

$$\Delta \bar{r} = \Delta x \bar{i} + \Delta y \bar{j} + \Delta z \bar{k} \quad (5)$$

olur, harda ki, $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$, $\Delta z(t) = z(t + \Delta t) - z(t)$ koordinat funksiyalarının t nöqtəsində Δt -yə uyğun artımlarıdır. Onda (5) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δt -yə bölüb limitə keçsək

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \bar{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \bar{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \bar{k}$$

bərabərliyi alınar. Bu axırıncı bərabərlikdən görünür ki, $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasının diferensiallanan olması üçün zəruri və kafi şərt, $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarının hər birinin diferensiallanan

olmasıdır. Bu halda aydındır ki, $\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}$ və ya $\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$ bərabərliyi doğru olar.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, I aralığında diferensiallanan ixtiyari skalyar arqumentli $\bar{r}_1(t)$ və $\bar{r}_2(t)$ vektro-funksiyaları və $f(t)$ ədədi funksiyası üçün aşağıdakı diferensiallama qaydaları doğrudur:

- 1) $d(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = d\bar{r}_1 + d\bar{r}_2$
- 2) $d(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = d\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \cdot d\bar{r}_2$
- 3) $d[\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2] = [d\bar{r}_1, \bar{r}_2] + [\bar{r}_1, d\bar{r}_2]$
- 4) $d(f \bar{r}_1) = df \cdot \bar{r}_1 + fd \bar{r}_1$

Aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 2. Əgər vektor-funksiyasının uzunluğu sabit olarsa, onda ixtiyari nöqtədə bu vektor-funksiya öz törəməsi ilə ortoqonaldır.

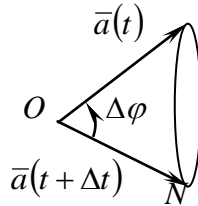
İsbatı. Hər bir ixtiyari t nöqtəsi üçün $|\bar{r}(t)| = \text{const}$ olduğundan, $\bar{r}^2(t) = \bar{r}(t) \cdot \bar{r}(t) = \text{const}$ alırıq. Bu

axırıncı bərabərliyi t -yə görə diferensiallayaq: $\bar{r} \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{r} \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$,

buradan $2\bar{r} \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$ və ya $\bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$ olduğunu alırıq. Deməli $\bar{r} \perp \frac{d\bar{r}}{dt}$ olur.

Teorem 3. $\bar{a}(t)$ vektoru vahid vektrosa, onda $\bar{a}(t + \Delta t)$ və $\bar{a}(t)$ vektorları arasındakı bucaq $\Delta\bar{a} = \bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)$ vektorunun uzunluğuna ekvivalentdir.

İsbatı. $\bar{a}(t) = \overline{OM}$, $\bar{a}(t + \Delta t) = \overline{ON}$ olsun (bax şəkil 1). $\bar{a}(t)$ və $\bar{a}(t + \Delta t)$ vektorları arasındakı bucağı $\Delta\varphi$ ilə işarə edək. Onda alırıq ki, $|\overline{MN}| = 2\overline{OM} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ olar. $|\overline{MN}| = |\Delta\bar{a}|$, $|\overline{OM}| = 1$ olduğundan $|\Delta\bar{a}| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ olur və $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sim \Delta\varphi$ olduğu üçün alırıq ki, $|\Delta\bar{a}| \sim \Delta\varphi$ olur.



Şəkil 1

Teorem 4. Vahid vektor-funksiyanın fırlanma sürəti onun törəməsinin uzunluğuna bərabərdir.

İsbatı: Tutaq ki, $\bar{a}(t)$ vahid vektor-funksiyadır.

$\bar{a}(t) = \overline{OM}$, $\bar{a}(t + \Delta t) = \overline{ON}$ qəbul edək (şəkil 1).

$|\overline{OM}| = |\overline{ON}| = 1$ olduğundan O mərkəzli vahid radiuslu çeyrə

çəkək. Onda \overline{MN} qövsünü alırıq. Mərkəzi bucağın xassəsinə əsasən onun dərəcə ölçüsü ona söykənən qövsün dərəcəsi ilə

eynidir və çevrənin radiusu vahid olduğundan yazı bilərik:

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{\left| \overline{MN} \right|}{\left| \Delta t \right|} = \left| \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} \right| \text{ olur. Burada limitə keçsək:}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\bar{a}}{dt} \right| \text{ olduğunu alırıq. Digər}$$

$$\text{tərəfdən, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \text{ olduğundan, } \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \left| \frac{d\bar{a}}{dt} \right|$$

olar. $\frac{d\varphi}{dt}$ ifadəsi $\bar{a}(t)$ vahid vektor-funksiyasının t -yə görə fırlanma sürətini göstərir. Teorem isbat olundu.

İndi isə, skalyar argumentli vektor-funksiyanın inteqralı anlayışını verək. Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyası verilmişdir. $[a, b]$ parçasını $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ nöqtələri ilə kiçik hissələrə ayıraq və fərz edək ki, $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$ olsun, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ götürüb yaxındakı bölgüyə

uyğun inteqral cəmi düzəldək: $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{r}(\tau_i) \Delta t_i$, burada τ_i

nöqtələri $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ şərtini ödəyən ixtiyari nöqtələrdir.

$\lambda \rightarrow 0$ yaxınlaşdıqda σ_n inteqral cəmlərinin sonlu limiti varsa,

$\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasına $[a, b]$ parçasında inteqrallanan vektor-funksiya deyilir; bu limit $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasının $[a, b]$ parçası

üzrə müəyyən inteqralı adlanır və belə işarə olunur $\int_a^b \bar{r}(t) dt$.

Göstərmək olar ki, $[a, b]$ parçasında verilmiş hər bir kəsilməz vektor-funksiya inteqrallandır. Bundan əlavə

$$\int_a^b \bar{r}(t) dt = \vec{i} \int_a^b x(t) dt + \vec{j} \int_a^b y(t) dt + \vec{k} \int_a^b z(t) dt$$

bərabərliyi doğrudur, harada ki, $x(t), y(t), z(t)$ funksiyaları $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasının koordinat funksiyalarıdır.

Beləliklə, görürük ki, $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasının inteqrallanması onun koordinat funksiyalarının inteqrallanmasına gətirilir.

Tərif 5. $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasının $[a, b]$ parçasında k ($k \geq 1$) tərtibə qədər kəsilməz törəməsi varsa, $\bar{r}(t)$ vektor-funksiyasına $[a, b]$ parçasında k dəfə kəsilməz diferensiallanan funksiya deyilir. $[a, b]$ parçasında k dəfə kəsilməz diferensiallanan vektor-funksiyalar çoxluğunu $\bar{c}^{(k)}[a, b]$ ilə, k dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar çoxluğunu isə $c^{(k)}[a, b]$ ilə işarə edirlər.

§2. Əyri anlayışı

Əyrini əyani olaraq, fəzada hərəkət edən maddi nöqtənin trayektoriyası kimi qəbul etmək olar. Hər hansı ip, sap əyri təsəvvürü yaradır.

Tutaq ki, m hissəciyi E_3 evklid fəzasında hərəkət edir. Fəzada $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemi təyin edək. Hissəciyin t anında vəziyyətini O nöqtəsinə nəzərən M nöqtəsinin $\bar{r}(t)$ radius-vektoru ilə təyin etmək olar.

Əgər t anı I aralığında dəyişərsə, onda I aralığında təyin olunmuş t skalyar arqumentindən asılı $\bar{r}(t)$ vektor funksiyasını alarıq. Bu funksiya $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bazisində $x(t), y(t), z(t)$ koordinatlarına malik olar. Bu isə o deməkdir ki,

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \quad (1)$$

ayrılışı I aralığında t -nin bütün qiymətlərində doğrudur, harada ki, $x(t), y(t), z(t)$ M -nöqtəsinin t -anında koordinatlarıdır. (1) bərabərliyini $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ koordiant sistemində m hissəciyinin hərəkət

qanunun adlandırılırlar. Nə zaman ki, t arqumenti I aralığında dəyişir, M nöqtəsi fəzada müəyyən bir trayektoriya cızır.

Mexanikadan götürülmüş bu sadə anlayışlar, bizə elementar əyri adlanan əyri haqqında təsəvvür yaradır:

Əgər (1) uyğunluğu t arqumenti I aralığında dəyişdikdə, o, M nöqtəsinin trayektoriyası ilə I aralığı arasında homeomorfizmdir, onda bu trayektoriya elementar əyri adlanır.

E_3 fəzasında ixtiyari düz xətti, parçanı və şüanı (şüa dedikdə burada qapalı şüa nəzərdə tutulur) sadə xətt adlandıracağıq.

Tərif 1. E_3 fəzasının $\gamma_0 \subset E_3$ fiquru sadə xəttə homeomorfdirsə, buna elementar xətt və ya elementar əyri deyilir.

Tərif 2. Parçaya homeomorf olan fiqur qövs adlanır.

Tutaq ki, bizə d düz xətti verilib. Onun üzərində $O\bar{e}$ koordiant sistemi təyin edək. Əgər hər bir $t \in R$ ədədinə koordinatı t olan M nöqtəsi qarşı qoysaq (yəni $\overline{O'M} = t\bar{e}$ olsun) onda $R \rightarrow d$ biyektiv inikasını alırıq. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu inikas həm də homeomorfizmdir. Bu inikada R ədəd oxu d düz xəttinə, $]\alpha, \beta[$ intervalı, düz xəttə homeomorf olan ucları olmayan parçaya, $[\alpha, \beta]$ -ədədi parçası isə AB parçasına keçir, burada A və B , α və β uc nöqtələrinin obrazlarıdır. Həmin inikada $[\alpha, \beta]$ aralığı isə, şüaya homeomorf olan, B ucu olmayan AB yarımçıq parçasına keçir (A və B nöqtələri α və β ədədlərinin obrazıdır).

Beləliklə, istənilən ədədi aralıq (hər bir ədədi düz xətt, ədədi qapalı şüa, ədədi parça, bir və ya hər iki ucu olmayan ədədi parça) sadə xətlərdən birinə homeomorfudur.

Homeomorfizm ekvivalentlik münasibəti olduğundan yuxarıda elementar əyriyə verdiyimiz tərif belə də ifadə etmək olar:

Tərif 3. Hər hansı ədədi aralığa homeomorf olan $\gamma_0 \subset E_3$ fiquruna elementar xətt (elementar əyri) deyilir.

Elementar əyriyə misallar.

Misal 1. Əvvəllər göstərmişik ki, ucları A və B olan ω yarımçevrəsi parçaya homeomorfdur, ona görə də, yarımçevrə elementar xəttidir (daha dəqiq desək qövsdür). Ucları olmayan ω' yarımçevrəsi düz xəttə homeomorfdur, ona görə də, ω' elementar xəttidir.

Misal 2. $O\bar{i}\bar{j}$ düzbucaqlı koordiant sistemində $y = \sin x$ sinusoidinə $x = t, y = \sin t, z = 0, t \in R$ tənlikləri ilə verilmiş fiqur kimi baxmaq olar. Bu tənliklər R çoxluğu ilə sinusoid arasında homeomorfizm yaradır. R çoxluğu Ox oxu ilə homeomorf olduğundan sinusoid elementar xəttidir.

Yuxarıda deyilənlərdən alınır ki, əgər E_3 fəzasında $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordiant sistemi verilmişsə, onda γ_0 elementar əyrisi

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2)$$

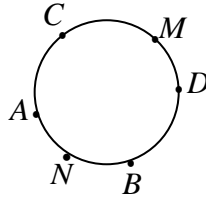
sistem tənlikləri ilə təyin olunur, burada t hər hansı I aralığında dəyişir, I aralığının γ_0 əyrisinə $t \leftrightarrow (x(t), y(t), z(t))$ homeomorf inikasını yaradır. (2)-nin sağ tərəfi isə I aralığında kəsilməz funksiyalardır. (2) tənliyi verilmiş xəttin parametrik tənliyi adlanır.

Burada belə bir sual meydana çıxır: Əgər (2) tənliyinin sağ tərəfi hər hansı I aralığında kəsilməzdirsə, sağ tərəfdən hansı şərtin ödənməsini tələb etmək lazımdır ki, bu tənlik elementar əyrini təyin etsin. Bunun üçün kifayətdir ki, (2)-nin sağ tərəfindəki funksiyalardan heç olmazsa biri I aralığında ciddi monoton olsun.

Tərif 4. Əgər fiquru sonlu sayda, yaxud da, hesabi sayda elementar əyriylərlə örtmək mümkündürsə, belə fiqura xətt (yaxud da əyri) deyilir.

Bu tərifdən alınır ki, əgər γ -hər hansı əyri, M -isə onun üzərində olan hər hansı nöqtədirsə, onda elə γ_0 elementar əyrisi var ki, $M \in \gamma_0 \subset \gamma$ olur.

Misal 3. Çevrəni (şəkil 2-yə bax) iki AMB və CND qövsləri ilə örtmək olar. Deməli indi dediyimiz tərifə əsasən çevrə əyridir.



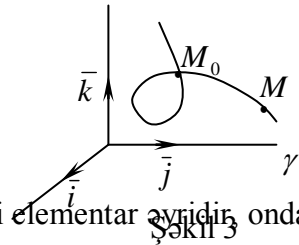
Şəkil 2

Misal 4. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyasının qrafiki olan tangensoid hesabı sayda elementar əyriyərdən ibarətdir (x arqumenti $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ aralığında dəyişəndə həmin funksiyanın qrafikləridir). Deməli, bütün tangensoid əyridir.

Eyni qayda ilə inanmaq olar ki, hiperbola da əyridir. Hiperbola iki qoldan ibarətdir. Bu qolların hər biri düz xəttə homeomorfdur.

Tutaq ki, γ əyrisi və onun üzərində M nöqtəsi verilmişdir. Əgər elə bir $\varepsilon > 0$ ədədi varsa ki, M nöqtəsinin

$B(M, \varepsilon)$ ətrafının γ əyrisi ilə kəsişməsi elementar əyridir, onda M nöqtəsi γ əyrisinin adi nöqtəsi adlanır; daha doğrusu, $\gamma \cap B(M, \varepsilon)$ fiquru elementar əyridirsə M nöqtəsi adi nöqtədir. Burada iki halı fərqləndirmək olar:



Şəkil 3

a) Bu kəsişmə düz xəttə homeomorfdur, onda belə nöqtə daxili nöqtə adlanır.

b) Bu kəsişmə şüaya homeomorfdur, onda belə nöqtə sərhəd nöqtəsi, yaxudda əyrinin uc nöqtəsi adlanır.

$M_0 \in \gamma$ nöqtəsi adi nöqtə deyilsə, belə nöqtə məxsusi nöqtə adlanır (şəkil 3-ə bax).

Tərif 5. Bütün nöqtələri adi nöqtədən ibarət olan əyriyə sadə əyri deyilir. Deməli, bütün elementar əyriilər sadə əyriilərdir. Çevrə, ellips elementar olmayan sadə əyriilərdir. Qeyd edək ki, ixtiyari sadə əyri bir ölçülü çoxobrazlıdır. Riyazi analizdən məlumdur ki, Dekart yarpağı və Bernulli lemniskatı sadə olmayan əyriilərdir.

Qeyd. İsbat etmək olar ki, istənilən sadə əyri, ya elementar əyridir, ya da çevrəyə homeomorfdur.

§3. Hamar əyri

Fərz edək ki, t hər hansı I aralığında dəyişdikdə γ_0 elementar əyrisi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1)$$

parametrik tənliyi ilə verilmişdir.

Tərif 1. Əgər $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarının I aralığında müəyyən bir natural k tərtibə qədər kəsilməz törəmələri varsa və hər bir $t \in I$ üçün

$$\text{rang}\|\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\| = 1 \quad (2)$$

şərti ödənilsə, onda γ_0 əyrisi hamar əyri adlanır.

(2) şərti analitik olaraq o deməkdir ki, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ törəmələri I aralığının heç bir nöqtəsində eyni zamanda sıfıra bərabər deyillər.

Misal 1. $x = t, y = \sin t, z = 0, t \in \mathbb{R}$ tənliyi Oxy müstəvisində sinusoidi təyin edir. Sinusoidin tənliyinin sağ tərəfinin \mathbb{R} -də istənilən tərtibdən kəsilməz törəməsi var və həm də $\dot{x} = 1, \dot{y} = \cos t, \dot{z} = 0$ olduğundan (2) şərti ödənilir. Deməli, sinusoid

$c^{(\infty)}$ sinfindən hamar əyridir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, çevrə də $c^{(\infty)}$ sinfindən hamar əyridir.

Tərif 2. Əgər sadə γ əyrisinin ixtiyari M daxili nöqtəsinin elə $B(M, \varepsilon)$ - ε ətrafı varsa ki, $\gamma \cap B(M, \varepsilon) - c^k (k \geq 1)$ sinfindən elementar hamar əyridir, onda γ sadə əyrisi $c^k (k \geq 1)$ sinfindən hamar əyri adlanır.

Bilirik ki, $Oijk$ koordinat sistemində a radiuslu çevrənin parametrik tənliyi

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0 \quad (3)$$

şəklində olar.

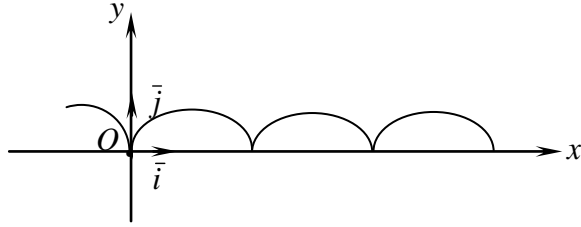
Yuxarıda qeyd etmişdik ki, çevrəni iki qövsə örtmək olar, bu qövsələrin hər biri $t \in I_1$ qövsü üçün (3), digər qövs üçün $-t \in I_2$ (3) tənlikləri ilə təyin olunur, burada I_1 və I_2 ədədi aralıqları $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığını örtür. (3) tənliyinin sağ tərəfinin R -də istənilən tərtib kəsilməz törəmələri var və həm də, $\dot{x} = -a \sin t, \dot{y} = a \cos t, \dot{z} = 0$ olduğundan (2) şərti ödənilir, çünki $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \neq 0$. Deməli, çevrə $c^{(\infty)}$ sinfindən hamar sadə əyridir.

Tərif 3. Tutaq ki, (1) tənliyi, t hər hansı I aralığında dəyişdikdə γ xəttini təyin edir. Əgər I aralığını, hesabıdan çox olmayan elə I_k aralıqları ilə örtmək mümkündürsə ki, bu aralıqların hər birində (1) tənliyi hamar xətt təyin edir, belə əyriyə hissə-hissə hamar əyri deyilir (aralıqların uc nöqtələrində hamarlıq şərti pozula bilər).

Misal 2.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 0 \quad (4)$$

(harda ki, $a = \text{const} > 0$) tənliyi ilə təyin olunan fiqur sikloid əyrisi adlanır. Bu əyri Oxy müstəvisində yerləşir və şəkil 4-dəki kimi təsvir olunur. Sikloid düz xəttə homeomorfdur, deməli, elementar əyridir. Bu əyri hamar əyri deyil, çünki $t = 2\pi ak$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) nöqtələrində $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ olduğundan (2) şərti pozulur.



Şəkil 4

(4) tənliyindən görünür ki, sikloid bütün ədəd oxunda təyin olunub. Ədəd oxunu hesabi sayda $I_k = [2a(k-1)\pi, 2ak\pi]$ ədədi parçalarla örtmək olar ki, həmin parçaların daxilində, yəni $I_k =]2a(k-1)\pi, 2ak\pi[$ intervallarında (4) tənliyi hamar əyri təyin edir. Deməli, sikloid hissə-hissə hamar əyridir.

Tutaq ki, (1) tənliyi $t \in I$ aralığında dəyişdikdə elementar γ_0 əyrisini təyin edir. Yuxarıda qeyd etdik ki, bu tənliklər müəyyən bir f homeomorfizmini təyin edir: $f: I \rightarrow \gamma_0$, belə ki, $f(I) = \gamma_0$ olur. Əgər h homeomorfizmi I aralığını I' aralığına $\tau = h(t)$ qanunu ilə çevirirsə ($t \in I$ olduqda, $\tau \in I'$ olur), onda $h^{-1}: I' \rightarrow I$ tərs inikası da homeomorfizm olur və $t = f^{-1}(\tau)$ ödənilir. t -nin bu qiymətini (1)-in sağ tərəfində yerinə yazsaq

$$x = f_1(\tau), \quad y = f_2(\tau), \quad z = f_3(\tau) \quad (5)$$

alırıq, harda ki, $f_1(\tau) = x(h^{-1}(\tau))$, $f_2(\tau) = y(h^{-1}(\tau))$, $f_3(\tau) = z(h^{-1}(\tau))$ - τ -nun mürəkkəb funksiyasıdır və τ dəyişəni I' aralığında dəyişir. (5) şəklində verilən $I' \rightarrow E_3$ inikasını g -ilə işarə edək. (1) və (5)-i müqayisə etsək alırıq ki, əgər $\tau = h(t)$ isə onda $f(t) = h(\tau)$ olar. Buradan alırıq ki, $f = g \cdot h$ və $g = f \cdot h^{-1}$ olur. Deməli, g homeomorfizmdir. O, I' aralığını γ_0 xəttinə çevirir. Nəticədə, I aralığında t parametrindən asılı (1) parametrik tənliyi ilə verilmiş γ_0 əyrisinin, I' aralığında τ parametrindən asılı (5)

parametrik tənliyini alırıq. Bu isə həmin əyridə parametrin əvəzlənməsidir: deyirlər ki, $\tau = h(t)$ funksiyası γ_0 əyrisində t parametr əvəzlənməsini təyin edir. Beləliklə, ümumi halda (1) tənliyi ilə verilmiş elementar əyrilərdə parametrin əvəzlənməsi yalnız $h: I \rightarrow I'$ homeomorfizmi ilə yerinə yetirilir. Ancaq onu da qeyd edək ki, k tərtibdən olan hamar əyrilər üçün bu məsələ bir az mürəkkəbdir: belə ki, əyrinin hamarlıq sinfini saxlamaq üçün əlavə olaraq tələb etməliyik ki, h homeomorfizmi I aralığında k tərtibdən kəsilməz törəməyə də malik olmalıdır və həm də onun birinci törəməsi bütün nöqtələrdə sıfırdan fərqli olmalıdır.

§4. Əyrinin verilmə üsulları

I ədədi aralığının üç ölçülü E_3 evklid fəzasına inikasına baxaq. Belə inikası $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyası şəklində göstərə bilirik. E_3 evklid fəzasında $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortonormal bazisi verilmişsə, onda $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ yazmaq olar. $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyasını təyin etmək üçün $x(t), y(t), z(t)$ koordinat funksiyalarının verilməsi kifayətdir. Əgər $x(t), y(t), z(t)$ funksiyaları verilibsə, E_3 -də müəyyən xətt almış olarıq və yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ tənlikləri, həmin xəttin parametrik tənlikləri olur.

Məsələ 1. Müstəvidə verilən çevrənin parametrik tənliyinə, fəzada $x = R \cos t, y = R \sin t, z = 0$ şəklində baxmaq olar.

Məsələ 2. Müstəvidə verilən ellipsin tənliyi, fəzada $x = a \cos t, y = b \sin t, z = 0$ şəklində olacaq.

Bilirik ki, əgər üçölçülü E_3 evklid fəzasında düzbucaqlı koordinat sistemi verilibsə, onda, düz xətti (hamar əyrinin xüsusi halı kimi) düz xətt nöqtələrinin x, y, z koordinatlarına nəzərən qeyri-aşkar iki xətti tənliklər sistemi vasitəsilə vermək olar. Onda təbii olaraq belə bir sual meydana gəlir: nə zaman

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tənliklər sistemi hamar əyri təyin edir? Burada F və Φ funksiyaları x, y, z dəyişənlərinin funksiyasıdır. Bu suala cavabı qeyri-aşkar funksiyalar haqqında teoremə əsasən vermək olar. Koordinatları (1) tənliklər sistemini ödəyən fəzanın bütün nöqtələr çoxluğunu G ilə işarə edək. Fərz edək ki, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ elə nöqtədir ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) M_0 nöqtəsinin hər hansı H_{M_0} ətrafında (1) tənliklərinin sol tərəfləri kəsilməzdir və birinci tərtibdən kəsilməz törəmələri vardır;

2) M_0 nöqtəsinin özündə

$$\text{rang} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2 \quad (2)$$

olur.

Onda M_0 nöqtəsinin elə $H_{M_0}^* \subset H_{M_0}$ ətrafı var ki, $H_{M_0}^* \cap G$ kəsiyi hamar əyri təyin edər. Əgər M_0 nöqtəsində (2) matrisinin sonuncu minoru sıfırdan fərqli olarsa, onda $H_{M_0}^*$ ətrafında (1) tənliklər sistemini y və z məchullarına nəzərən həll etmək olar: Onda $y = f(x)$ $z = g(x)$ olduqlarını alırıq. Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları müəyyən bir, uyğun I aralığında birinci tərtib kəsilməz törəməyə malikdirlər. Deməli, $x = t$, $y = f(t)$, $z = g(t)$ tənlikləri $H_{M_0}^*$ ətrafında M_0 nöqtəsindən keçən müəyyən bir hamar əyrini təyin edir.

§5. Toxunan

Fərz edək ki, fəzanın $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemində $C^{(k)}$ sinfindən olan ℓ hamar əyrisi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1)$$

parametrik tənliklə verilmişdir. Deməli, fəzadakı (1) tənliyinin sağ tərəfləri müəyyən bir I ədədi aralığında, k tərtib də daxil olmaqla, kəsilməz törəmələrə malikdir və bu aralıqda

$$\text{rang} \left\| \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\| = 1 \quad (2)$$

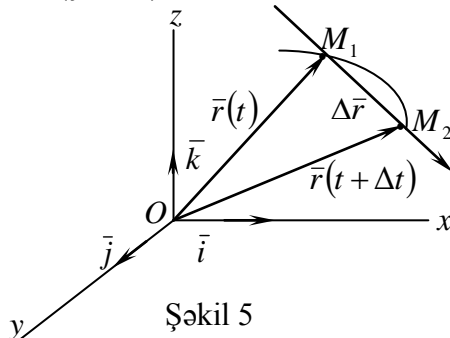
şərti ödənilir.

(1) tənliklərini, uyğun olaraq $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ -ya vurub toplasaq

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (3)$$

alırıq.

Burada, $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ olur. $\bar{r}(t)$ vektor funksiyanın koordinatları olan $x(t), y(t), z(t)$ funksiyaları I aralığında təyin olunmuşdur. Qeyd edək ki, (1) tənlikləri baxılan ℓ əyrisinin vektor formasında olan (3) vektor tənliyi ilə eynigüclüdür. (2) şərti onu göstərir ki, parametrin ixtiyari $t \in I$ qiymətində $\frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$ şərti ödənilir. ℓ hamar əyrisi üzərində $\bar{r}(t)$ və $\bar{r}(t + \Delta t)$ radius vektorları ilə təyin olunan $M_1(t)$ və $M_2(t + \Delta t)$ nöqtələrini götürək (şəkil 5).



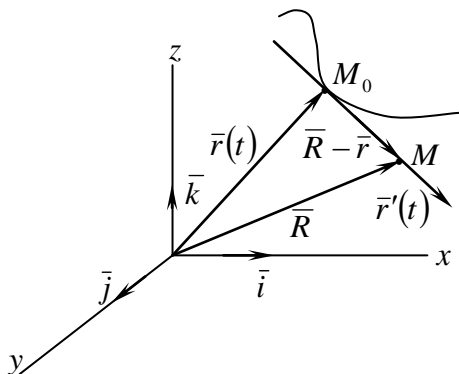
Şəkil 5

M_1 və M_2 nöqtələrindən M_1M_2 düz xəttini keçirək. Bu düz xətt ℓ əyrisinin M_1 və M_2 nöqtələrindən keçən kəsəni olar. Aydındır

ki, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ vektoru $M_1 M_2$ kəsənin istiqamətverici vektoru olacaq. ℓ hamar əyri olduğundan, ixtiyari $t \in [a, b]$ nöqtəsində $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor-funksiyasının

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

törəməsi var və bu törəmə sıfırdan fərqlidir. Onda M_1 nöqtəsindən keçib \vec{r}' istiqamətverici vektoruna malik olan düz xətt, $\Delta t \rightarrow 0$ yaxınlaşdıqda $M_1 M_2$ düz xəttinin limit vəziyyətindən ibarətdir. Bu düz xəttə M_1 nöqtəsində ℓ əyrisinə toxunan deyilir. Göstərmək olar ki, bu düz xətt ℓ hamar əyrisinin parametrləşdirilməsindən asılı deyildir. Beləliklə alırıq ki, ℓ hamar əyrisinin hər bir M_1 nöqtəsində əyrinin parametrləşdirilməsindən asılı olmayaraq toxunan düz xətti vardır.



Şəkil 6

İndi isə ℓ hamar əyrisinə $M_0(t_0)$ nöqtəsində toxunanın tənliyini tapaq. M_0 nöqtəsində ℓ əyrisinə toxunanın cari nöqtəsini $M(X, Y, Z)$ ilə işarə edək. $M_0(t_0)$ nöqtəsinin radius vektoru $\vec{r}(t_0) = x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\vec{k}$, $M(X, Y, Z)$ -nöqtəsinin radius vektoru isə

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

olsun (şəkil 6).

Onda alarıq ki,

$$\bar{R} - \bar{r} = (X - x(t_0))\bar{i} + (Y - y(t_0))\bar{j} + (Z - z(t_0))\bar{k}$$

vektoru \bar{r}' -vektoru ilə kolleniar olar:

$$\bar{R} - \bar{r} = \lambda \bar{r}' \quad (4)$$

Buradan,

$$\begin{aligned} (X - x(t_0))\bar{i} + (Y - y(t_0))\bar{j} + (Z - z(t_0))\bar{k} &= \\ &= \lambda x'(t_0)\bar{i} + \lambda y'(t_0)\bar{j} + \lambda z'(t_0)\bar{k} \end{aligned}$$

olduğunu alarıq. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ortonormal bazis vektorlar olduğundan axırıncı bərabərlik o zaman doğru olar ki, $X - x(t_0) = \lambda x'(t_0)$, $Y - y(t_0) = \lambda y'(t_0)$, $Z - z(t_0) = \lambda z'(t_0)$ olsun.

Buradan, λ parametrini yox etsək

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)} \quad (5)$$

olduğunu alarıq. (4) tənliyinə ℓ hamar əyrisinin $M_0(t_0)$ nöqtəsində toxunanın vektorial tənliyi, (5) tənliyinə isə toxunanın parametrik tənlikləri deyilir.

Qeyd edək ki, eyni zamanda biz həmin nöqtədə əyrinin normalının tənliyini aşağıdakı şəkildə yazı bilərik.

$$(X - x(t_0))x'(t_0) + (Y - y(t_0))y'(t_0) + (Z - z(t_0))z'(t_0) = 0$$

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem. Tutaq ki, I ədədi aralığında təyin olunmuş ℓ hamar əyrisi verilmişdir. Onda bu əyrinin istənilən nöqtəsində ona toxunan düz xətt var və yeganədir. Əgər ℓ hamar əyrisi $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ tənliklər sistemi ilə verilərsə, onda ℓ hamar əyrisinin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunanın kanonik tənliyi

$$\frac{X - x(t_0)}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t_0)}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t_0)}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}$$

şəklində olar. Burada,

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ xüsusi}$$

törəmələri $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində hesablanır.

Məsələ 1.

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ nöqtəsində } \vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j} + \left(4a \sin \frac{t}{2}\right)\vec{k}$$

xəttinə toxunanın tənliyini yazın.

Həlli.

Toxunanın tənliyi

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}, \quad x(t) = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2},$$

$$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = a,$$

$$z(t_0) = 4a \sin \frac{\pi}{2} = 4a \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4a}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}a$$

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t, \quad z'(t) = 2a \cos \frac{t}{2}, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a, \quad z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a,$$

$$\frac{X - \frac{\pi a}{2} + a}{a} = \frac{Y - a}{a} = \frac{Z - 2\sqrt{2}a}{a\sqrt{2}};$$

$$\frac{X - \frac{\pi a}{2} + a}{1} = \frac{Y - a}{1} = \frac{Z - 2\sqrt{2}a}{\sqrt{2}}$$

Məsələ 2.

$\vec{r}(t) = (3t - t^2)\vec{i} + (3t^2)\vec{j} + (3t + t^3)\vec{k}$ xəttinə $t = 1$ nöqtəsində toxunanın tənliyini yazın.

Həlli:

$$x = 3t - t^2, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$$

$$\text{Toxunanın tənliyi} \quad \frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$$x_0 = 3 - 1 = 2, \quad y_0 = 3, \quad z_0 = 4$$

$$x'(t) = 3 - 2t, \quad x'(1) = 1, \quad y'(t) = 6t, \quad y'(1) = 6$$

$$z'(t) = 3 + 3t^2, \quad z'(1) = 6$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z - 4}{6}$$

Çalışmalar

1. $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ vint xəttinin $M(1, 0, 0)$ nöqtəsində toxunanın tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

2. $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t - t^2$ əyrisinin $M(0, 0, 0)$ nöqtəsində toxunanın tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

3. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ xəttinin $t_0 = 0$ nöqtəsində toxunanın tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

4. $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = at$ xəttinin ixtiyari nöqtəsində toxunanın tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } \frac{X - R \cos \omega t}{-R \omega \sin t} = \frac{Y - R \sin \omega t}{R \omega \cos \omega t} = \frac{Z - at}{a}$$

III FƏSİL

§1. Səth anlayışı

Səthlərin öyrənilməsi üçün zəruri anlayış kimi iki skalyar arqumentdən asılı vektor funksiya anlayışını verək.

Tutaq ki, V fəzası R həqiqi ədədlər meydanı üzərində üçölçülü vektor fəzadır. İkiölçülü aralıq adlanan G çoxluğu isə aşağıdakı çoxluqlardan biridir. 1) $R^2 = R \times R$ fəzası; 2) $\nu \geq 0$ şərtini ödəyən $(u, \nu) \in R^2$ cütlərindən ibarət olan fəzadır ki, R_+ ilə işarə edilir və qapalı yarımfəza adlanır. 3) $0 \leq u \leq a, 0 \leq \nu \leq a, a > 0$ şərtlərini ödəyən $(u, \nu) \in R^2$ cütlərindən ibarət çoxluqdur ki, ədədi kvadrat adlanır.

Əgər hər hansı qanunla hər bir u, ν cütünə V fəzasında təyin olunmuş $\vec{r}(u, \nu)$ vektoruna qarşı qoymaq mümkündürsə, onda deyilir ki, G aralığında iki u, ν skalyar arqumentdən asılı $\vec{r}(u, \nu)$ vektor funksiyası verilmişdir.

Tutaq ki, $(u_0, \nu_0) \in G$ – müəyyən qeyd olunmuş nöqtədir.

Əgər $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ \nu \rightarrow \nu_0}} \lim |\vec{r}(u, \nu)| = 0$ olarsa, onda deyilir ki, $\vec{r} = \vec{r}(u, \nu)$

vektor-funksiyası (u_0, ν_0) -in kiçik ətrafında sonsuz kiçikdir.

Tutaq ki, bizə $\vec{r} = \vec{r}(u, \nu)$ vektor funksiyası və $\vec{a} \in E_3$ vektoru verilmişdir. Əgər (u_0, ν_0) nöqtəsində $\vec{r}(u, \nu) - \vec{a}$ vektoru sonsuz kiçik olarsa, yəni $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ \nu \rightarrow \nu_0}} |\vec{r}(u, \nu) - \vec{a}| = 0$ olarsa, onda deyilir

ki, $u \rightarrow u_0, \nu \rightarrow \nu_0$ olduqda $\vec{r}(u, \nu)$ vektor funksiyasının limiti \vec{a} vektorudur; və bu belə yazılır: $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ \nu \rightarrow \nu_0}} \vec{r}(u, \nu) = \vec{a}$.

Əgər $\vec{r} = \vec{r}(u, \nu)$ vektor funksiyası üçün $\lim_{(u, \nu) \rightarrow (u_0, \nu_0)} \vec{r}(u, \nu) = \vec{r}(u_0, \nu_0)$ olarsa, onda $\vec{r}(u, \nu)$ vektor funksiyası

$(u_0, v_0) \in G$ nöqtəsində kəsilməz adlanır. G aralığının bütün nöqtələrində kəsilməz olan vektor funksiya həmin aralıqda kəsilməz funksiya adlanır.

Tutaq ki, E_3 fəzasında $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemi verilib. $\bar{r}(u, v)$ vektor funksiyanın I koordinatını $x(u, v)$, II koordinatını $y(u, v)$, III koordinatını $z(u, v)$ ilə işarə etsək, onda alarıq ki,

$$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k} \quad (1)$$

olur.

Fərz edək ki, $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \bar{r}(u, v) = \bar{a}$ və $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

ödənilir. Onda aydındır ki, $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ olduqda alırıq ki, $\lim x(u, v) = a_1$, $\lim y(u, v) = a_2$, $\lim z(u, v) = a_3$ olur.

Tutaq ki, bizə iki skalyar arqumentdən asılı $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyası verilib. Əgər v arqumentini qeyd etsək, yəni $v = v_0$ götürsək, onda $\bar{r}(u, v_0)$ bir arqumentdən asılı vektor-funksiya alarıq. Onda $\frac{\partial \bar{r}(u, v_0)}{\partial u}$ törəməsinə $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının u dəyişəninə nəzərən xüsusi törəməsi deyilir və $\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial u} = \bar{r}_u$ kimi işarə edilir.

Eyni qayda ilə $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyasında $u = u_0$ qəbul etsək, onda v arqumentinə görə xüsusi törəmədən danışa bilərik və v dəyişəninə görə xüsusi törəmə $\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial v} = \bar{r}_v$ kimi işarə olunur.

(1) ayrılışından alınır ki, $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının koordinatları $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ -funksiyalarıdır, ona görə

diferensiaslama haqqında teoremə əsasən alırıq ki, $(u, v) \in G$ nöqtəsində \bar{r}_u, \bar{r}_v xüsusi törəmələrinin varlığı üçün

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, & y_u &= \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, & z_u &= \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \\ x_v &= \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, & y_v &= \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, & z_v &= \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{aligned}$$

koordinat funksiyaların xüsusi törəmələrinin olması zəruri və kafi şərtədir.

Elə həmin teoremdən də alınır ki,

$$\bar{r}_u = x_u \bar{i} + y_u \bar{j} + z_u \bar{k}, \quad \bar{r}_v = x_v \bar{i} + y_v \bar{j} + z_v \bar{k} \quad (2)$$

olur.

Beləliklə, alırıq ki, $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının xüsusi törəmələrinin tapılması koordinat funksiyalarının xüsusi törəmələrinin tapılmasına gətirilir.

Əgər (1) düsturunda $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ funksiyaları $(u, v) \in G$ nöqtəsində differensiaslananırsa, onda

$$d\bar{r} = dx(u, v)\bar{i} + dy(u, v)\bar{j} + dz(u, v)\bar{k} \quad (3)$$

vektoru $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının (u, v) nöqtəsində diferensialı adlanır. (2)-ni nəzətə alsaq (3)-ü belə yazı bilərik:

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \quad (3')$$

Bu halda $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyası (u, v) nöqtəsində diferensiaslanan adlanır. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ funksiyaları həmin nöqtədə diferensiaslanan olduqda, $d\bar{r}$ diferensialını təyin etmək olar.

Əgər $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyası G aralığının hər bir nöqtəsində diferensiaslananırsa, onda həmin funksiyaya G aralığında diferensiaslanan funksiya deyilir.

Bildiyimiz kimi $R^2 = R \times R$ çoxluğu müstəvi ilə homeomorfdur. $R \times R_+$ çoxluğu isə koordinat müstəvisinin absis oxu daxil olmaqla absis oxundan yuxarıda qalan bütün nöqtələr

çoxluğu ilə homeomorfdur. Yəni, $R \times R_+$ çoxluğunun sərhəddini özünə aid olan yarımüstəvi ilə eyniləşdirə bilərik. $[0,1]$ seqmentini vahid parça ilə eyniləşdirə bilərik. Onda $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ çoxluğunu tərəfi 1-ə bərabər olan kvadrat kimi başa düşə bilərik. Üçölçülü Evklid fəzasında müstəviyə, sərhədi özünə daxil olan yarımüstəviyə, tərəfi vahidə bərabər olan kvadrata ən sadə səth deyəcəyik. Ən sadə səth ilə homeomorf olan istənilən fiqura elementar səth deyilir. Başqa sözlə (ən sadə səthlər yuxarıda qeyd olunan ikiölçülü $G \subset R^2$ aralığına homeomorf olduğundan), üçölçülü fəzada yuxarıda baxılan ikiölçülü $G \subset R^2$ ədədi aralığına homeomorf olan fiqurlar elementar səth adlanır.

Tərif 1. Sonlu və ya hesabi sayda elementar səthlərlə örtülə bilən fiqura səth deyilir.

Tutaq ki, bizə F səthi verilmişdir. Əgər onun $M \in F$ nöqtəsi üçün mərkəzi M nöqtəsində olan radiusu r -ə bərabər olan elə $B(M, \varepsilon)$ kiçik ətraflı varsa ki, $F \cap B(M, \varepsilon)$ kəsişməsi elementar səth olur, onda M -ə səthin adi nöqtəsi deyirlər. Əks halda, $M \in F$ adi nöqtə deyilsə, yəni onun heç bir ətrafı ilə kəsişmə elementar səth deyilsə, onda həmin nöqtəyə səthin məxsusi nöqtəsi deyirlər. Bütün nöqtələri adi nöqtələr olan səthə sadə səth deyilir.

Əgər, yuxarıda baxdığımız $F \cap B(M, \varepsilon)$ kəsişməsi R^2 müstəvisinə homeomorf olarsa, onda $M \in F$ nöqtəsinə səthin daxili nöqtəsi, $R \times R_+$ qapalı yarımüstəviyə homeomorf olarsa, onda həmin nöqtəyə sərhəd nöqtəsi deyilir. Sadə səthin sərhəd nöqtələri çoxluğuna, onun sərhədi və ya kənarı deyirlər. Bütün nöqtələri daxili nöqtə olan sadə səthə oblast deyilir.

Səthi müəyyən bir G oblastının E_3 fəzasına homeomorfizmi kimi də götürə bilərik.

Tutaq ki, G oblastının E_0 elementar səthinə müəyyən bir $g : G \rightarrow E_0$ homeomorf inikası verilib. Onda hər bir

$M \in g(G) = F_0$ nöqtəsi üçün fəzada verilmiş $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sisteminə nəzərən onun (x, y, z) koordinatlarını təyin edə bilərik.

Aydındır ki, G oblast olduğundan M nöqtəsinin (x, y, z) koordinatları $(u, v) \in G$ iki koordinatın funksiyaları olacaqdır. Başqa sözlə, M nöqtəsinin $O\bar{M} = \bar{r}$ radius vektoru $(u, v) \in G$ koordinatlarından asılı olacaq, yəni $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ vektor funksiya olacaqdır.

Tutaq ki, bizə G oblastında təyin olunmuş $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ (1) səthi verilib. $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemində $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ vektor funksiyasının ayrılışını yazaq:

$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}$. Bu tənliyə səthin vektorial tənliyi deyilir. Aydındır ki, bu vektorial tənliyi ona ekvivalent şəkildə

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (4)$$

tənliyi kimi də yazmaq olar.

(4) tənliyinə səthin parametrik tənliyi deyilir. Əgər, parametrik tənlikdə z -i, başqa sözlə parametrik tənliklərdə u və v parametrlərini x və y -lə ifadə etmək olarsa, onda səthin tənliyini $z = z(x, y)$ (5) kimi, aşkar şəkildə də vermək olar. Səthin tənliyi bəzən də $F(x, y, z) = 0$ kimi qeyri-aşkar şəkildə də verilir.

§2. Hamar səthlər və onların verilmə üsulları

Hamar səthlər. E_3 Evklid fəzasında $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemini götürək. G isə Evklid müstəvisində sadə oblast olsun.

Fəzada f lokal homeomorfizmi ilə verilən S səthinə baxaq; $f(u, v) = M(x, y, z) \in S$ olarsa, onda

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

olar. Deməli, f lokal homeomorfizmində S səthini əmələ gətirən M nöqtələrinin x, y, z koordinatları G oblastında təyin olunan u, v dəyişənlərinin (parametrlərinin) funksiyalarıdır. f homeomorfizm olduğundan, (1) bərabərliklərinin sağ tərəfləri G oblastında kəsilməz funksiyalardır. (1) tənlikləri

$$\bar{r} = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k} \quad (2)$$

vektor tənliyi ilə eynigüclüdür, onu belə işarə edəcəyik: $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.

O halda deyirlər ki, (2) tənliyi $\bar{C}^{(k)}$ sinfində k tərtibli hamar və ya requlyar S səthini təyin edir, əgər $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funksiyalarının G oblastında k ($k \geq 1$) tərtibə (k -da daxil olmaqla) qədər kəsilməz xüsusi törəmələri olsun və $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq 0$ şərti ödənsin, burada $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$. $k = 1$ olduqda S səthinə hamar səth deyilir. G oblastını S səthinə (1) düsturları (və ya (2) tənliyi) ilə inikas etdirən homeomorfizmə S səthinin parametrik təsviri və ya requlyar parametrləşdiricisi deyilir.

Tutaq ki, S səthi (1) tənlikləri ilə verilib və sağ tərəfləri G oblastında kəsilməzdirlər

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (3)$$

tənliklərinin u, v dəyişənlərinə görə həll olunduğu hala baxaq:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (4)$$

Burada $u(x, y)$ və $v(x, y)$ funksiyaları evklid müstəvisinin hər hansı G oblastında kəsilməzdirlər. u, v dəyişənlərinin (4)-dəki qiymətlərini (1) tənliklərinin üçüncü tənliyində yerinə yazsaq

$$z = z(x, y) \quad (5)$$

olduğunu alırıq. (5) tənliyinə səthin aşkar tənliyi deyilir.

Deməli, bu halda səthin parametrik tənliklərini onun aşkar tənliyinə gətirmək olar. Tərsinə, səthin aşkar tənliyi onun parametrik tənliklərinin xüsusi halıdır ($u = x, v = y$).

Səth

$$F(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

qeyri-aşkar tənliklərdə verilə bilər. Bu tənliyin hansı halda hamar səth təyin etdiyini göstərək.

Fəzanın (6) tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğunu Φ ilə işarə edək. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ nöqtəsində aşağıdakı şərtlər ödənsin.

1) M_0 nöqtəsinin hər hansı U_{M_0} ətrafında $F(x, y, z)$ funksiyası və F_x, F_y, F_z xüsusi törəmələri kəsilməzdir.

2) M_0 nöqtəsində $\text{rang}\|F_x, F_y, F_z\| = 1$ olsun.

Onda M_0 nöqtəsinin elə $U_{M_0}^* \subset U_{M_0}$ ətrafı var ki, $\Phi \cap U_{M_0}^*$ hamar səth olar.

Bu təklifin şərtləri Φ çoxluğunun hər bir M_0 nöqtəsi üçün ödənilərsə, onda Φ – hamar səthdir.

Aydındır ki, qeyri-aşkar funksiyalar haqqında teoremin şərtləri daxilində səthin qeyri-aşkar tənliyini də onun aşkar tənliyinə gətirmək olar.

§3. Səth üzərində nöqtənin əyrixətli koordinatları

Tutaq ki, S requlyar səthi

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1)$$

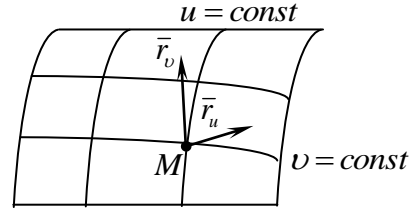
tənliyi ilə verilmişdir, burada (u, v) ədədlər cütü hər hansı G sadə oblastına daxildir. $\bar{r}(u, v)$ vektor-funksiyası G sadə oblastının fəzada homeomorf inikasını təyin etdiyindən, S səthinin hər bir M nöqtəsi ilə G oblastının (u, v) ədədlər cütü arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Ona görə də, u, v ədədlərinin verilməsi S səthinin M nöqtəsini təyin edir: $M(u, v)$; burada u, v ədədlərinə S səthinin üzərində M nöqtəsinin əyrixətli və ya qaus koordinatları deyilir.

Beləliklə, S səthinin hər bir requlyar parametrləşdiricisi onun üzərində müəyyən əyrixətli koordinat sistemi yaradır. $v = \text{const}$, $u = t$ ($a < t < b$) tənliyi G oblastında $(a, b) \subset R$ intervalına homeomorf olan nöqtələr çoxluğu təyin edir. (1) tənliyi ilə verilən inikasda (a, b) intervalı S səthi üzərində hər hansı bir requlyar əyriyə keçir. Bu əyriyə S səthi üzərində $v = \text{const}$ xətti və ya u xətti deyilir.

Eyni qayda ilə $u = \text{const}$, $v = t$ ($c < t < d$) tənliyi G oblastında $(c, d) \subset R$ intervalına homeomorf olan nöqtələr çoxluğu əmələ gətirəcək ki, (1) tənliyi ilə verilən inikasda həmin interval S səthi üzərində $u = \text{const}$ xətti və ya v xəttini təyin edəcək.

Bu qayda ilə alınan u və v xətlərinə əyrixətli koordinat xətləri deyilir (şəkil 12)

Yuxarıda qeyd etdik ki, G oblastının (u, v) cütləri ilə S səthinin nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Bu uyğunluğa görə S səthinin hər bir nöqtəsindən bir və yalnız bir u xətti, eləcə də bir və yalnız bir v xətti keçir.



Şəkil 12

Həm də hər bir u xətti ixtiyari v xəttini yalnız bir nöqtədə kəsir.

Beləliklə, əyrixətli koordinat xətləri S səthi üzərində koordinatlar şəbəkəsi əmələ gətirir.

İndi $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial v}$ vektorlarının həndəsi mənasını vermək olar. \bar{r}_u vektoru u xəttinə, onun $M(u, v)$ nöqtəsində u koordinatının artması tərəfə yönəlmiş toxunanından, \bar{r}_v vektoru isə v xəttinə həmin $M(u, v)$ nöqtəsində v koordinatının artması tərəfə yönəlmiş toxunanından ibarətdir.

Burada $M(u, \nu)$ nöqtəsi u və ν xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. S requlyar səth olduğundan $[\bar{r}_u(u_0, \nu_0), \bar{r}_\nu(u_0, \nu_0)] \neq 0$ olar. Bu isə o deməkdir ki, $M(u_0, \nu_0)$ nöqtəsində $\bar{r}_u(u_0, \nu_0)$ və $\bar{r}_\nu(u_0, \nu_0)$ toxunan vektorları sıfırdan fərqlidir.

§4. Səthə toxunan müstəvi və normal

Tutaq ki, bizə $\bar{C}^{(k)}$ ($k \geq 1$) sinfinə daxil olan F hamar səthi

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \nu) \quad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. F hamar səthinin təyin oblastı $G \subset \mathbb{R}^2$ ikiölçülü oblast olsun.

Burada u, ν dəyişənlərini $I \subset \mathbb{R}$ açıq intervalında hər hansı t dəyişənindən asılı olduğunu fərz edək; yəni

$$u = u(t), \quad \nu = \nu(t) \quad (2)$$

qəbul etsək, $t \in I$ olduqda $(u(t), \nu(t)) \in G$ olur. Bu qiymətləri (1)-də nəzərə alsaq

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), \nu(t)) \quad \text{və ya} \quad \bar{r} = \bar{r}(t) \quad (3)$$

alınar, bu isə fəzada $C^{(k)}$ sinfindən olan xəttin tənliyidir. Həmin xətti γ ilə işarə edək. Bu xətt səth üzərindədir, yəni aydındır ki, $\gamma \subset F$ olacaqdır, çünki hər bir $t \in I$ üçün $(u(t), \nu(t)) \in G$ olur.

Eləcə də tərsinə. F səthi üzərində $C^{(k)}$ sinfindən olan hər bir hamar xətt (2) və ya (3) tənliyi ilə təyin edilə bilər. Burada, müəyyən I aralığında verilən $(u(t), \nu(t)) \in G$ şərtini ödəyən $u(t)$ və $\nu(t)$ funksiyalarının k tərtibdən (k -da daxil olmaqla) kəsilməz

törəmələri var və $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ törəmələri I aralığının heç bir nöqtəsində eyni zamanda sıfıra çevrilmirlər.

İndi isə γ xəttinin hamar olması şərtini tapaq. (3)-dən alarıq ki,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{d\nu}{dt} \text{ olar və } \frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$$

şərti o zaman ödənər ki, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ törəmələrinin hər ikisi eyni zamanda sıfır olmasın. İxtiyari $M_0(u_0, \nu_0) \in F$ nöqtəsini götürək. Həmin nöqtədə \bar{r}_u, \bar{r}_v vektorlarına baxaq. Səth hamar səth olduğundan, bu vektorlar xətti asılı deyillər. Onda $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ üçlüyü E_3 fəzasında bir müstəvi təyin edəcək. M_0 nöqtəsindən keçən $t_0 \in I$ qiyməti üçün $u_0 = u(t_0)$, $\nu_0 = \nu(t_0)$ işarə etsək, onda aydındır ki, $M_0(u_0, \nu_0) \in \gamma$ olar. γ xəttinə M_0 nöqtəsində çəkilən toxunanın istiqamətverici vektorunu tapaq. (3) tənliyindən aldığımız ki,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{d\nu}{dt}.$$

Yəni, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ vektoru M_0 nöqtəsində γ xəttinə çəkilən toxunanın istiqamətverici vektorudur. $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ törəmələrini $t = t_0$ nöqtəsində hesablasaq görərik ki, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ vektoru \bar{r}_u və \bar{r}_v xüsusi törəmələrinin (u_0, ν_0) nöqtələrində qiymətlərindən və onların xətti kombinasiyasından ibarətdir. Yəni, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ vektoru $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinə paralel olacaqdır. İndi isə aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. Tutaq ki, $C^{(k)}$ ($k \geq 1$) sinfinə daxil olan F hamar səthi $\bar{r} = \bar{r}(u, \nu)$ tənliyi ilə verilib. Həmin səth üzərində hər hansı $M_0(u_0, \nu_0) \in F$ nöqtəsi qeyd olunub. F səthi üzərində olan və $M_0(u_0, \nu_0)$ nöqtəsindən keçən bütün γ hamar xətlərinə M_0

nöqtəsində toxunanlar $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinin üzərində yerləşirlər və tərsinə M_0 nöqtəsindən keçən və $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinin üzərində olan hər bir düz xətt F səthi üzərində olan və M_0 nöqtəsindən keçən müəyyən bir γ hamar xəttinə toxunan olacaqdır.

İsbatı. Fərz edək ki, F səthinin üzərində olan və $M_0(u_0, v_0) \in F$ nöqtəsindən keçən hər hansı hamar $\gamma \in F$ xətti verilmişdir. Onda γ xəttinin tənliyi (3) tənliyinə uyğun olaraq $\bar{r} = \bar{r}(t)$ şəklində vermək olar. Bu zaman γ hamar xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}$$

şəklində verilə bilər, haradaki \bar{r}_u və \bar{r}_v xüsusi törəmələri (u_0, v_0)

nöqtəsində, $\frac{du}{dt}$ və $\frac{dv}{dt}$ törəmələri isə (u_0, v_0) nöqtəsinə uyğun t_0 nöqtəsində hesablanmışdır.

Deməli, γ xəttinin M_0 nöqtəsindəki toxunanı \bar{r}_u və \bar{r}_v vektorlarının xətti kombinasiyasıdır. Yəni həmin toxunan $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinin üzərində olacaqdır.

Tərsinə, fərz edək ki, $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisi üzərində M_0 nöqtəsindən keçən və istiqamətverici vektoru \bar{a} olan (M_0, \bar{a}) düz xətti verilib. \bar{a} vektoru $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinə paralel olduğundan o, \bar{r}_u və \bar{r}_v vektorlarının xətti kombinasiyası olan $\bar{a} = \alpha \bar{r}_u + \beta \bar{r}_v$ şəklində verilir, harda ki, α və β ədədləri eyni zamanda sıfır ola bilməzlər. F səthi üzərində $u = u_0 + \alpha t$, $v = v_0 + \beta t$ tənlikləri ilə verilən müəyyən bir xəttə baxsaq, harda ki, t parametri $(u, v) \in G$ şərtini ödəyən müəyyən bir aralıqda dəyişir. Onda $\bar{r} = \bar{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ xətti F səthi üzərində M_0

nöqtəsindən keçən xətt olacaqdır. Buradan alırıq ki, $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u\alpha + \bar{r}_v\beta$ vektoru M_0 nöqtəsində həmin xəttə toxunan vektor olacaqdır. Yəni, həmin xəttin \bar{a} istiqamətverici vektoru $\bar{r} = \bar{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ xəttinin toxunan vektoru ilə eynidir (çünki $\frac{du}{dt} = \alpha, \frac{dv}{dt} = \beta$ və $\frac{d\bar{r}}{dt} = \alpha\bar{r}_u + \beta\bar{r}_v = \bar{a}$ olar). Yəni o, verilən (M_0, \bar{a}) düz xətti ilə üst-üstə düşəcək. Beləliklə, teorem isbat olundu.

Tərif. $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinə F səthinin M_0 nöqtəsindəki toxunan müstəvisi deyilir.

Ayındır ki, $M_0 \in F$ nöqtəsində F səthinə toxunan $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinin ixtiyari M nöqtəsi üçün $\overline{M_0M}, \bar{r}_u, \bar{r}_v$ vektorlarının qarışıq hasili sıfıra bərabər olmalıdır. Başqa sözlə, F səthinə M_0 nöqtəsində toxunan müstəvinin vektorial tənliyi

$$\left(\overline{M_0M}, \bar{r}_u, \bar{r}_v\right) = 0 \quad (4)$$

şəkində olar.

(4) tənliyini koordinatlarla aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

(5) tənliyi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində F səthinə $T(M_0)$ toxunan müstəvisinin tənliyidir.

Səthin tənliyi $z = z(x, y)$ aşkar şəkildə verilərsə, onda $u = x, v = y$ olduğundan $x_u = 1, y_u = 0, z_u = z_x, x_v = 0, y_v = 1, z_v = z_y$ olacaqdır ki, bu halda (5) tənliyi aşağıdakı şəkildə olar:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = 0$$

və ya bu şəkildə $z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)$ olar.

§5. Səthin normalı

Tutaq ki, bizə C^k ($k \geq 1$) sinfinə daxil olan $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ tənliyi ilə F hamar səthi verilmişdir. $M_0 \in F$ nöqtəsində bu səthə toxunan $(M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ müstəvisinə baxaq. $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ vektorial hasili M_0 nöqtəsində toxunan müstəviyə perpendikulyar olacaq. $M_0 \in F$ nöqtəsində hamar səthin normalı, bu nöqtədən keçib toxunan müstəviyə perpendikulyar olan düz xəttə deyilir. Onda \bar{N} vektor F səthinin M_0 nöqtəsindəki normalın istiqamətverici vektoru olar. Başqa sözlə, (M_0, \bar{N}) düz xətti F səthinin M_0 nöqtəsindəki normalı olur. Əgər fəzada $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemi verilərsə, F səthinin tənliyini

$$\bar{r} = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k} \quad (1)$$

şəklində yazı bilərik. Onda, aydındır ki, $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ vektorunun koordinatları

$$\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

kimi olacaqdır. Onda E_3 fəzasında (1) tənliyi ilə verilmiş səthin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində normalın tənliyini aşağıdakı şəkildə yazı bilərik

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \quad (2)$$

Əgər səth $z = z(x, y)$ kimi aşkar şəkildə verilibsə, onda aydındır ki, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində həmin səthə çəkilən normalın tənliyi

$$\frac{x - x_0}{z_x} = \frac{y - y_0}{z_y} = \frac{z - z_0}{-1} \quad (3)$$

şəklində olar.

İndi fərz edək ki, F hamar səthi

$$F(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

şəklində qeyri-aşkar şəkildə tənliklə verilmişdir. Onda yuxarıda deyilənlərdən almaq olar ki, normalın tənliyi

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z} \quad (6)$$

şəklində olacaq.

Məsələ 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ səthinə $M_0(1;1,2)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli. Bilirik ki, səthə toxunan müstəvinin tənliyi aşağıdakı şəkildədir.

$$(X - x_0)F'_x(M_0) + (Y - y_0)F'_y(M_0) + (Z - z_0)F'_z(M_0) = 0$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$F'_x = 2x \quad F'_x(M_0) = 2$$

$$F'_y = 2y \quad F'_y(M_0) = 2$$

$$F'_z = 2z \quad F'_z(M_0) = 4$$

$$2(X - 1) + 2(Y - 1) + 4(Z - 2) = 0$$

$$2X + 2Y + 4Z - 2 - 2 - 8 = 0$$

$$2X + 2Y + 4Z - 12 = 0, \quad x + y + 2z - 6 = 0$$

Məsələ. $M_0(1;2,2)$ nöqtəsində $xy^2 + z^3 = 12$ səthinə çəkilmiş toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli. $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt[3]{12 - uv^2}$. Bilirik ki, parametrik tənliklə verilmiş toxunan müstəvinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = -\frac{v^2}{3\sqrt[3]{(12 - uv^2)^2}}$$

$$x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = -\frac{2uv}{3\sqrt[3]{(12 - uv^2)^2}}$$

$$x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = -\frac{1}{3}$$

$$x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = -\frac{1}{3}$$

Bu qiymətləri toxunan müstəvinin (4) tənliyində nəzərə alsaq, alarıq ki,

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$z - 2 + \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - 2) = 0$$

$$3z - 6 + x - 1 + y - 2 = 0$$

$$x + y + 3z - 9 = 0$$

Məsələ 3. $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + (u^2 - 2v)\vec{j} + (u^3 - 3uv)\vec{k}$ səthinin $M_0(1; 3; 4)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli. $x = u$, $y = u^2 - 2v$, $z = u^3 - 3uv$, M_0 nöqtəsinə uyğun parametrlər olduğu aydındır. $x_u = 1$; $y_u = 2u$, $z_u = 3u^2 - 3v$; $y_v = 2$, $z_v = 6$; $y_v = -2$, $z_v = -3$, $x_v = 0$, $y_v = -2$, $z_v = 3$ olur.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$6(x - 1) - 2(z - 4) + 12(x - 1) - 3(y - 3) = 0$$

$$6x - 6 - 2z + 8 + 12x - 12 - 3y + 9 = 0$$

$$18x - 3y - 2z - 1 = 0$$

Məsələ 4. $M_0(1; 2; 2)$ nöqtəsində $xy^2 + z^2 = 12$ tənliyi ilə verilən səthə çəkilən normalın tənliyini yazın.

Həlli. $x = u$, $y = v$, $z^2 = 12 - uv^2$, $z = \sqrt{23 - uv^2}$

Bilirik ki, səthin normalının tənliyi aşağıdakı düsturla hesablanır

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$x_u = 1; \quad y_u = 0; \quad z_u = -\frac{v^2}{2\sqrt{12 - uv^2}};$$

$$z_u = -\frac{4}{2\sqrt{12 - 4}} = -\frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_v = 0; \quad y_v = 1; \quad z_v = -\frac{2uv}{2\sqrt{12 - uv^2}}; \quad z_v = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Onda normalın tənliyi bu şəkildə olar:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}} = \frac{y-2}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z-2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-2}{1}$$

Çalışmalar

1. $x^2 + y^2 = z^2$ səthinə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } xx_0 + yy_0 = 2z_0$$

2. $z = 2x^2 - 2y^2$ səthinə $M_0(2,1,4)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } 8x - 4y - z - 8 = 0$$

3. $xyz = 1$ səthinin $x + y + z - 3 = 0$ müstəvisinə paralel olan toxunan müstəvisini tapın.

$$\text{Cavab: } x + y + z - 2 = 0$$

4. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ ellipsoidinin elə toxunan müstəvisini tapın ki, $x - y + 2z = 0$ müstəvisinə paralel olsun.

$$\text{Cavab: } x - y + 2z \pm \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = 0$$

5. $z = xy$ səthinə $M_0(1;1;1)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin və normalın tənliyini yazın.

$$\text{Cavab: } x + y - z - 1 = 0; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

§6. Səthin I kvadratik forması

Tutaq ki, bizə G oblastında təyin olunmuş, $C^{(k)}$ ($k \geq 1$) sinfinə daxil olan

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1)$$

tənliyi ilə hamar F səthi verilmişdir. Onda, bildiyimiz kimi $\bar{r}(u, v)$ vektor funksiyasının F səthinin ixtiyari nöqtəsində diferensialı

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \quad (2)$$

olar. Bu $\bar{r}(u, v)$ vektor funksiyasının diferensialıdır. İndi isə həmin diferensialın $(d\bar{r})^2$ skalyar hasilinə baxaq:

$$(d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + \bar{r}_v^2 dv^2 \quad (3)$$

Əgər $\gamma_{11} = \bar{r}_u^2$, $\gamma_{12} = \bar{r}_u \bar{r}_v$, $\gamma_{22} = \bar{r}_v^2$ işarə etsək, onda (3)-dən alırıq ki,

$$(d\bar{r})^2 = \gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} dv^2 \quad (4)$$

(4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki $\gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} dv^2$ ifadəsinə F səthinin I kvadratik forması deyilir. γ_{11} -ə kvadratik formanın birinci əmsalı, γ_{12} -yə ikinci əmsal, γ_{22} -yə üçüncü əmsal deyilir. F səthi hamar səth olduğundan \bar{r}_u və \bar{r}_v xüsusi törəmələri səthin istənilən nöqtəsində eyni zamanda sıfır ola bilməz, ona görə də $d\bar{r}^2 \neq 0$ və $d\bar{r}^2 > 0$ olar.

Deməli, bu kvadratik forma müsbət müəyyən kvadratik formadır. Onda F səthinin ixtiyari M_0 nöqtəsində T_{M_0} toxunan fəzasında bir skalyar hasil təyin edilir, yəni F səthinin hər bir nöqtəsində toxunan vektor fəza, ikiölçülü Evklid fəzası olar.

Fərz edək ki, $u = u(t)$, $v = v(t)$ tənliyinin köməyi ilə F səth üzərində hər hansı bir $\bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ xətti verilmişdir. Onda

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

yazmaq olar. Onda alarıq ki,

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = \gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

olur.

Digər tərəfdən, bilirik ki, həmin xəttin qövsünün uzunluğunu t -dən asılı funksiya kimi təyin etsək, $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$, yəni

$ds = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt$ olar. Onda, həmin xəttin ixtiyari iki $t_1 < t_2$

parametrlərinə uyğun olan M_1 və M_2 nöqtələri arasında qalan qövsün uzunluğu

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \quad (6)$$

olar. (6) düsturuna səth üzərində qövsün uzunluğunun düsturu deyilir.

Məsələ 1.

$$\bar{r}(u, v) = (u \cos v)\bar{i} + (u \sin v)\bar{j} + (av)\bar{k}$$

səthinin birinci kvadratik formasını yazın.

Həlli. Səthin birinci kvadratik forması aşağıdakıdır.

$$d\bar{r}^2 = \gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2 \quad (7)$$

birinci kvadratik formanın $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ əmsallarını hesablayaq.

Səthin tənliyi parametrik şəkildə verildiyindən, bu əmsallar aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\gamma_{11} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$\gamma_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$\gamma_{22} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \sin v, \quad z_u = 0$$

$$x_v = -u \sin v, \quad y_v = u \cos v, \quad z_v = a$$

$$\gamma_{11} = \sin^2 v + \cos^2 v = 1, \quad \gamma_{12} = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$$

$$\gamma_{22} = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = a^2 + u^2$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ -nin bu qiymətlərini (7) ifadəsində yerinə yazsaq

$$dr^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

alırıq.

Məsələ 2.

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u \cos v)\vec{i} + (a \cos u \sin v)\vec{j} + (c \sin u)\vec{k}$$

səthin birinci kvadratik formasını yazın.

Həlli. Səthin birinci kvadratik forması

$$d\vec{r}^2 = \gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2$$

bu şəkildədir. $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ əmsallarını hesablayaq.

$$\gamma_{11} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad x = a \cos u \cos v$$

$$\gamma_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad y = a \cos u \sin v$$

$$\gamma_{22} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad z = c \sin u$$

$$x_u = -a \sin u \cos v \quad y_u = -a \sin u \sin v, \quad z_u = c \cos u$$

$$x_v = -a \cos u \sin v \quad y_v = a \cos u \cos v, \quad z_v = 0$$

$$\gamma_{11} = a^2 \sin^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u = a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u$$

$$\gamma_{12} = a^2 \sin u \cos v \cos u \sin v - a^2 \sin u \sin v \cos u \cos v = 0$$

$$\gamma_{22} = a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 \cos^2 u \cos^2 v = a^2 \cos^2 u$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ -nin bu qiymətlərini (7) ifadəsində yerinə yazsaq

$$d\vec{r}^2 = (a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$$

Çalışmalar

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ səthinin birinci kvadratik formasını təyin edin.

$$\text{Cavab: } z^2 ds^2 = (a^2 - y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (a^2 - x^2)dy^2$$

2. $x = \nu \cos u - a \sin u$, $y = \nu \sin u + a \cos u$, $z = au$ səthinin birinci kvadratik formasını təyin edin.

$$\text{Cavab: } ds^2 = (\nu + 2a^2) du^2 - 2adud\nu + d\nu^2$$

3. $x = \varphi(u) \cos \nu$, $y = \varphi(u) \sin \nu$, $z = \psi(u)$ səthinin birinci kvadratik formasını tapın.

$$\text{Cavab: } ds^2 = (\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)) du^2 + \varphi^2(u) d\nu^2$$

4. $x = u \cos \nu$, $y = u \sin \nu$, $z = a\nu + \varphi(u)$ ümumi helikoidinin birinci kvadratik formasını təyin edin.

$$\text{Cavab: } ds^2 = (1 + \varphi'^2) du^2 + 2a\varphi' d\nu du + (u^2 + a^2) d\nu^2$$

5. $x = a \cos u \cos \nu$, $y = a \cos u \sin \nu$, $z = a \sin u$ kürənin birinci kvadratik formasını tapın.

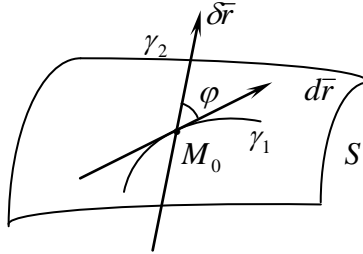
$$\text{Cavab: } ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) d\nu^2$$

§7. Səth üzərində əyriilər arasındakı bucaq

Tutaq ki, γ_1, γ_2 hamar F səthində ortaq M_0 nöqtəsindən keçən iki hamar əyriilərdir.

Tərif. γ_1 və γ_2 hamar əyriilərinin M_0 ortaq nöqtəsində, onlara çəkilmiş toxunanlar arasındakı bucağa, bu əyriilər arasındakı bucaq deyilir.

γ_1 və γ_2 əyriiləri üzrə diferensiallamayı uyğun olaraq d və δ simvolları ilə işarə edək. γ_1 və γ_2 əyriilərinə M_0 nöqtəsində toxunanlar (M_0, T_1) və (M_0, T_2) olsun. Toxunan düz xətlərin istiqamətverici vektorları uyğun olaraq $d\bar{r}$ və $\delta\bar{r}$ vektorları olacaq. Onda γ_1 və γ_2 əyriiləri arasındakı φ bucağını, $d\bar{r}$ və $\delta\bar{r}$ vektorları arasında qalan bucaq kimi hesablamaq olar (şəkil 13).



Şəkil 13

$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ və $\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$ olduğundan, bu qiymətləri

$$\cos \varphi = \frac{d\bar{r} \delta\bar{r}}{|d\bar{r}| |\delta\bar{r}|} \quad (1)$$

formulunda yerinə yazsaq:

$$|d\bar{r}| = d\bar{r}^2 = \gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} dudv + \gamma_{22} dv^2,$$

$$|\delta\bar{r}| = \delta\bar{r}^2 = \gamma_{11} \delta u^2 + 2\gamma_{12} \delta u \delta v + \gamma_{22} \delta v^2$$

$$d\bar{r} \delta\bar{r} = \gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} (du \delta v + \delta u dv) + \gamma_{22} dv \delta v$$

olar. Onda (1) bərabərliyindən alırıq ki,

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} (du \delta v + \delta u dv) + \gamma_{22} dv \delta v}{\sqrt{\gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} dv^2} \sqrt{\gamma_{11} \delta u^2 + 2\gamma_{12} \delta u \delta v + \gamma_{22} \delta v^2}}$$

olur.

Bu düstura səth üzərində əyrilər arasında bucaq düsturu deyilir. Burada du, dv diferensialları γ_1 əyrisini təyin edən $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ tənliklərindən, $\delta u, \delta v$ diferensialları isə γ_2 əyrisini təyin edən $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$ tənliklərindən tapılır, belə ki, bütün funksiyaaların qiymətləri həmin əyrilərin ortaq M_0 nöqtəsində hesablanır. γ_1 və γ_2 əyrilərinin, onların yerləşdikləri səthin M_0 nöqtəsindən keçən u, v koordinat xətləri ilə üst-üstə düşdüyü xüsusi hala baxaq:

$\gamma_1 : u = t, v = \text{const}$, $\gamma_2 : u = \text{const}, v = t$. Onda $dv = 0$ və $\delta u = 0$ olduğundan $d\bar{r} = \bar{r}_u du$, $\delta\bar{r} = \bar{r}_v \delta t$ olar. (1) düsturuna görə alarıq ki,

$$\cos \varphi = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v dt \delta t}{\sqrt{\gamma_{11} dt^2} \sqrt{\gamma_{22} \delta t^2}}$$

və ya

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11} \cdot \gamma_{22}}} \quad (3)$$

olur.

Burada, fərz edirik ki, $dt > 0$, $\delta t > 0$, yəni $d\bar{r}, \delta\bar{r}$ vektorlarının istiqaməti uyğun olaraq γ_1, γ_2 əyriləri üzərində t parametrisinin artması istiqamətinə uyğundur. (3) bərabərliyindən alınır ki, səth üzərində koordinatlar şəbəkəsinin ortoqonal

$\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ olması üçün zəruri və kafi şərt səthin hər bir nöqtəsində

$\gamma_{12} = 0$ olmasıdır.

Məsələ 1. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ səthi üzərindəki $v = u - 1$ və $v = 3 - u$ əyrilərinin əmələ gətirdikləri bucağın kosinusunu tapın.

Həlli. Verilmiş əyrilərin kəsişmə nöqtələrini tapaq: $u-1=3-u$ olduğundan, $u=1$ və ona görə də $v=2$ olar. Deməli, əyrilərin kəsişmə nöqtəsi $M_0(1;2)$ olacaq. $v=u-1$ əyrisi üzrə $dv=du$, $v=3-u$ əyrisi üzrə $\delta v=-\delta u$ olar.

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \sin v, \quad z_u = 2u$$

$$x_v = -\sin v, \quad y_v = u \cos v, \quad z_v = 0$$

Onda birinci kvadratik formanın əmsalları üçün

$$\gamma_{11} = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2$$

$$\gamma_{12} = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$$

$$\gamma_{22} = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ əmsallarının $M_0(1;2)$ nöqtəsində qiymətləri

$\gamma_{11} = 1 + 4u^2 = 5$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 = 1$. Onda (2) düsturuna görə, əyrilər arasındakı φ bucağı üçün alırıq:

$$\cos \varphi = \frac{5du\delta u - du\delta u}{\sqrt{5du^2 + du^2}\sqrt{5\delta u^2 + \delta u^2}} = \frac{4du\delta u}{\sqrt{6du}\sqrt{6\delta u}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Deməli, $\cos \varphi = \frac{2}{3}$.

Məsələ 2. Səthin birinci kvadratik forması $d\bar{r}^2 = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$ verilmişdir. Bu səth üzərində $u+v=0$ və $u-v=0$ xətlərinin hansı bucaq altında kəsişdiklərini tapın.

Həlli. $u+v=0$, $u=-v$ $du=-dv$, $u-v=0$, $u=v$, $\delta u = \delta v$.

$\begin{cases} u+v=0 \\ u-v=0 \end{cases}$ sistemindən alırıq ki, bu xətlər $O(0;0)$ nöqtəsində

kəsişirlər. Bu xətlər arasındakı bucağı φ ilə işarə edək və nəzərə alaq ki, $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 + a^2$ olur. Onda

$$\begin{aligned}
& \cos \varphi = \\
& = \frac{\gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} (du \delta v + dv \delta u) + \gamma_{22} dv \delta v}{\sqrt{\gamma_{11} (du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} (dv)^2} \sqrt{\gamma_{11} (\delta u)^2 + 2\gamma_{12} \delta u \delta v + \gamma_{22} (\delta v)^2}} = \\
& = - \frac{dv \delta v + (u^2 + a^2) dv \delta v}{\sqrt{(du)^2 + (u^2 + a^2) (dv)^2} \sqrt{(\delta v)^2 + (u^2 + a^2) (\delta v)^2}} = \frac{u^2 + a^2 - 1}{u^2 + a^2 + 1}
\end{aligned}$$

Kəsişmə nöqtəsində $\cos \varphi = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$. Buradan da alırıq ki,

$$\varphi = \arccos \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Çalışmalar

1. Birinci kvadratik forması $ds^2 = du^2 + dv^2$ şəklində olan səth üzərindəki $v = 2u$ və $v = 2u$ əyriyələri arasında qalan bucağı hesablayın.

$$\text{Cavab: } \cos \varphi = -\frac{3}{5}$$

2. $z = axy$ səthi üzərindəki $x = x_0$, $y = y_0$ koordinat xətlərinin kəsişməsindən alınan bucağı təyin edin.

$$\text{Cavab: } \cos \varphi = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1 + a^2 x_0^2} \sqrt{1 + a^2 y_0^2}}$$

§8. Səth üzərində qapalı oblastın sahəsi

Tutaq ki, biz E_3 fəzasında hər hansı G qapalı oblastında təyin olunmuş vektor funksiyanın köməyiylə F elementar səthi almışıq və F aşağıdakı üç şərti ödəyir.

- 1⁰. F səthi hər hansı ϕ hamar səthinin bir hissəsidir.
- 2⁰. F qapalı dairəyə homeomorfdur.
- 3⁰. F səthinin sərhəddi hissə-hissə hamar xətdir.

Analiz kursundan məlumdur ki, belə təyin olunmuş F səthi üçün sahə anlayışı vermək olar və onun sahəsini hesablamaq üçün düstur da verilir. Sahəsi olan səthə kvadratlanan səth deyilir.

Tutaq ki, E_3 fəzasında $z = f(x, y)$ aşkar tənliyi ilə hər hansı bir kvadratlana bilən səth verilmişdir: $(x, y) \in D$. D – hər hansı qapalı dairəyə homomorf oblastdır. Onda analizdən məlum olduğu kimi həmin səthin sahəsi

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər, F səthi müəyyən bir G qapalı oblastında $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ parametrik tənliyi ilə təyin olunmuş kvadratlanan səthdirsə, onda həmin səthin sahəsi

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} du dv \quad (2)$$

düsturu ilə hesablanır (buradakı $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ F səthinin I kvadratik formasının əmsallarıdır).

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 &= \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u \bar{r}_v)^2 = \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (|\bar{r}_u| |\bar{r}_v| \cos \varphi)^2 = \\ &= |\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 - |\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 \cos^2 \varphi = |\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= |\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 \sin^2 \varphi = [|\bar{r}_u, \bar{r}_v|]^2 \end{aligned}$$

olduğundan, bu qiymətləri (2)-də yerinə yazsaq:

$$S(F) = \iint_G [r_u, r_v] dudv \quad (3)$$

alarıq.

§9. Səthin II kvadratik forması

Tutaq ki, bizə G oblastında təyin olunmuş $C^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfinə daxil olan

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1)$$

tənliyi ilə hər hansı F hamar səthi verilmişdir. Bu hamar səth üzərində hər hansı $\gamma \subset F$ hamar əyrisi götürək. Onda həmin əyri üzrə nöqtənin yerdəyişməsi

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \quad (2)$$

olar. Buradan

$$d^2\bar{r} = \bar{r}_{uu}(du^2) + \bar{r}_{uv}dudv + \bar{r}_{vu}d^2u + \bar{r}_{vv}dvdu + \bar{r}_{vv}(dv^2) + \bar{r}_v d^2v \quad (3)$$

alarıq.

İndi isə, səthin \bar{N} normalına baxaq. Aydındır ki, \bar{N} vektoru $\bar{n} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ şəklində, onun vahid \bar{n} vektoru isə

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{||[\bar{r}_u, \bar{r}_v]||} \quad \text{şəklində olar. (3) bərabərliyinin hər tərəfini } \bar{n}$$

vektoruna skalyar olaraq vuraq. \bar{n} vektoru üçün $\bar{n} \perp \bar{r}_u$, $\bar{n} \perp \bar{r}_v$ olduğundan, $\bar{r}_u \cdot \bar{n} = 0$, $\bar{r}_v \cdot \bar{n} = 0$ alarıq. Ona görə də

$$d^2\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{r}_{uu}\bar{n}(du)^2 + 2\bar{r}_{uv}\bar{n}dudv + \bar{r}_{vv}\bar{n}(dv)^2 \quad (4)$$

olar; burada $b_{11} = \bar{r}_{uu}\bar{n}$, $b_{12} = \bar{r}_{uv}\bar{n}$, $b_{22} = \bar{r}_{vv}\bar{n}$ işarələməsini etsək, nəticədə

$$d^2\bar{r} \cdot \bar{n} = b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2 \quad (5)$$

alarıq.

$$\text{Aydınır ki, } b_{11} = \bar{r}_{uu} \cdot \bar{n} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \bar{r}_{uu}}{[[\bar{r}_u, \bar{r}_v]]} = \frac{\bar{r}_{uu} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}},$$

$$b_{12} = \bar{r}_{uv} \bar{n} = \frac{\bar{r}_{uv} [\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{\bar{r}_{uv} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

$$b_{22} = \bar{r}_{vv} \bar{n} = \frac{\bar{r}_{vv} [\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{\bar{r}_{vv} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

olar.

(5) bərabərliyinin sağ tərəfinə, yəni $\varphi = b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2$ ifadəsinə, səthin II kvadratik forması deyilir. b_{11}, b_{22}, b_{12} əmsallarına isə II kvadratik formanın əmsalları deyilir.

Praktiki olaraq, II kvadratik formanın əmsalları belə hesablanır.

$$b_{11} = \frac{\bar{r}_{uu} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$b_{22} = \frac{\bar{r}_{vv} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$b_{12} = \frac{\bar{r}_{uv} \bar{r}_u \bar{r}_v}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Məsələ 1. $z = xy^2$ səthinin ikinci kvadratk formasını təyin edin.

Həlli. Səthin tənliyi aşkar şəkildə verildiyindən b_{11}, b_{12}, b_{22} əmsalları

$$b_{11} = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad b_{12} = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad b_{22} = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

$z = xy^2$ funksiyasının bütün xüsusi törəmələrini taparaq.

$$z_x = y^2; \quad z_y = 2xy; \quad z_{xx} = 0, \quad z_{xy} = 2y, \quad z_{yy} = 2x$$

$$b_{11} = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}} = 0$$

$$b_{12} = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}}$$

$$b_{22} = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}}$$

olduğunu alırıq. Onda verilən səthin ikinci kvadratik forması

$$\varphi = 2 \frac{2ydx dy}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}} + \frac{2xdy^2}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}} = \frac{2(2ydx dy + xdy^2)}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}}$$

Məsələ 2. $x = R \cos \nu$, $y = R \sin \nu$, $z = u$ səthinin ikinci kvadratik formasını hesablayın.

Həlli. Səthin II kvadratik forması

$$\varphi = b_{11} du^2 + 2b_{12} du d\nu + b_{22} d\nu^2$$

şəklindədir. Burada

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{vmatrix}}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}$$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}$$

$$x = R \cos \nu, \quad y = R \sin \nu, \quad z = u, \quad x_u = 0, \quad x_v = -R \sin \nu, \quad x_{uu} = 0, \\ x_{uv} = 0, \quad x_{vv} = -R \cos \nu, \quad y_u = 0, \quad y_v = R \cos \nu, \quad y_{uu} = y_{uv} = 0, \\ y_{vv} = -R \sin \nu, \quad z_u = 1, \quad z_v = z_{uv} = z_{vv} = z_{uu} = 0.$$

$$\gamma_{11} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad \gamma_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad \gamma_{22} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\ \gamma_{11} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad \gamma_{12} = 0(-R \sin \nu) + 0(R \cos \nu) + 1 \cdot 0 = 0, \\ \gamma_{22} = 0$$

$$\gamma_{22} = (-R \sin \nu)^2 + (R \cos \nu)^2 + 0 = R^2(\sin^2 \nu + \cos^2 \nu) = R^2$$

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -R \sin \nu & R \cos \nu & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 \cdot R^2 - 0}} = 0; \quad b_{12} = 0,$$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} -R \cos \nu & -R \sin \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -R \sin \nu & R \cos \nu & 0 \end{vmatrix}}{R} = \frac{R^2 \cos^2 \nu + R^2 \sin^2 \nu}{R} = R$$

$$\varphi = R d\nu^2$$

Çalışmalar

1. $z = mxy$ hiperboloidinin ikinci kvadratik formasını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{2mdxdy}{\sqrt{1+m^2(x^2+y^2)}}$$

2. $z = y \sin x$ səthinin ikinci kvadratik formasını yazın.

$$\text{Cavab: } \frac{-y \sin x dx^2 + 2 \cos x dx dy}{\sqrt{2+(y^2-1)\cos^2 x}}$$

3. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ səthinin ikinci kvadratik formasını təyin edin.

$$\text{Cavab: } -\frac{2dudv}{\sqrt{1+u^2}}$$

4. $x = (1+u)\cos v$, $y = (1-u)\sin v$, $z = u$ səthinin ikinci kvadratik formasını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{2 \sin 2v dudv + (1-u^2)dv^2}{\sqrt{1-2u^2+(2u+\cos v)^2}}$$

5. $x = ashucos v$, $y = ashv sin v$, $z = cchu$ ikioyulu fırlanma hiperboloidinin ikinci kvadratik formasını təyin edin.

$$\text{Cavab: } \frac{ac}{\sqrt{a^2ch^2u+c^2sh^2u}}(du^2+sh^2udv^2)$$

§10. Səth üzərində əyrinin əyriliyi

I. Səth üzərində əyrinin normal əyriliyi

Tutaq ki, bizə $\bar{r} = \bar{r}(u, \nu)$ tənliyi ilə E_3 fəzasında $C^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfinə daxil olan F_0 hamar səthi verilmişdir. Həmin səthin üzərində təbii parametr vasitəsilə $u = u(s)$, $\nu = \nu(s)$ kimi parametrik tənliklərlə verilən γ_0 əyrisini götürək. Burada s əyrinin təbii parametridir.

Bilirik ki, $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ olur. Deməli,

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\bar{r}}{d\nu} \frac{d\nu}{ds} = \bar{r}_u \frac{du}{ds} + \bar{r}_\nu \frac{d\nu}{ds} \quad (1)$$

alırıq.

Frenenin ikinci düsturuna əsasən $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu}$ olduğundan

(burada k əyrilikdir, $\bar{\nu}$ isə γ_0 əyrisinin baş normalının verilmiş M_0 nöqtəsində vahid vektorudur), (1) düsturundan alırıq ki,

$$k\bar{\nu} = \bar{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\bar{r}_{u\nu} \frac{du}{ds} \frac{d\nu}{ds} + \bar{r}_{\nu\nu} \left(\frac{d\nu}{ds} \right)^2 + \bar{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \bar{r}_\nu \frac{d^2\nu}{ds^2}. \quad (2)$$

(2) bərabərliyini \bar{n} vektoruna skalyar vuraraq, $\bar{n}\bar{r}_{uu} = b_{11}$, $\bar{n}\bar{r}_\nu = b_{12} = b_{21}$, $\bar{n}\bar{r}_{\nu\nu} = b_{22}$ bərabərliklərindən istifadə etsək

$$\bar{n}(k\bar{\nu}) = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dud\nu + b_{22}(d\nu)^2}{ds^2} \quad (3)$$

alırıq.

Bu bərabərliyin sol tərəfini k_n ilə işarə edək; buna $\gamma_0 \subset F_0$ əyrisinin M_0 nöqtəsində normal əyriliyi deyilir. Beləliklə, alırıq ki, $k_n = \bar{n}(k\bar{\nu})$, yaxud da $k_n = k \cos \theta$, burada $\bar{\theta} = (\bar{n}, \bar{\nu})$ olur.

Səthin verilən nöqtəsindəki normalından keçib, səthi kəsən müstəvi ilə səthin kəsişməsindən alınan əyriyə səthin normal kəsiyi deyilir.

Əgər \bar{n} və \bar{v} eyni istiqamətli vektorlar olarsa, onda $k_n = k$ olduğu aydındır. Əgər \bar{n} və \bar{v} əks istiqamətli vektorlar olarsa, yəni onlar arasındakı bucaq π -yə bərabər olarsa, onda aydındır ki, $k_n = -k$ olar. (3)-dən alarıq ki,

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2} \quad (4)$$

olur. $\frac{du}{dv} = \lambda$ ilə işarə etsək, onda (4) düsturunu

$$k_n = \frac{b_{11}\lambda^2 + 2b_{12}\lambda + b_{22}}{\gamma_{11}\lambda^2 + 2\gamma_{12}\lambda + \gamma_{22}}$$

şəklində yazı bilərik.

Məlumdur ki, səthə toxunan müstəvi üzərində toxunanın istiqaməti $du : dv$ nisbəti ilə təyin olunur. (4) düsturu göstərir ki, $M_0 \in S$ nöqtəsində əyrinin normalı ayrılıyı, yalnız toxunanın

həmin nöqtədə $\lambda = \frac{du}{dv}$ nisbəti ilə təyin olunan istiqamətindən

asılıdır. Deməli, səth üzərində M_0 nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə ortaq toxunana malik olan bütün hamar əyriyə M_0 nöqtəsində eyni normal əyriyə malikdirlər; başqa sözlə, $M_0 \in S$ nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə eyni toxunana malik olan bütün hamar əyriyənin normal əyrilikləri, işarə dəqiqliyi ilə həmin nöqtədə normal kəsiyin ayrılıyına bərabərdir. Deməli, həmin M_0 nöqtəsində

$$k \cos \theta = k_n = const \quad (5)$$

olur ki, bu da Menye teoremini ifadə edir.

§11. Səth nöqtələrinin təsnifatı

Tutaq ki, bizə $C^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfinə daxil olan F hamar səthi

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Fərz edək ki, $M_0 \in F$ səthin hər hansı nöqtəsidir və bu nöqtədə b_{11}, b_{12}, b_{22} II kvadratik forma əmsallarının üçü də eyni zamanda sıfır deyildir. M_0 nöqtəsində səthin toxunan müstəvisini $T(M_0)$ ilə işarə edək. M_0 nöqtəsində F səthinə toxunan $T(M_0)$ müstəvisi üzərində, M_0 nöqtəsindən keçən bütün düz xətlər üzərində, M_0 nöqtəsindən $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ -ə bərabər

məsafədə olan nöqtələri qeyd edək; burada k_n – sıfırdan fərqli olan, səth üzərində M_0 nöqtəsində, həmin düz xəttin onun üçün toxunan olan xəttin normal əyriliyidir. Bu uc nöqtələrin əmələ gətirdiyi əyriyə, M_0 nöqtəsində səthin əyriliklər indikatrissası (və ya Dyüpen indikatrissası) deyilir. Əyriliklər indikatrissasının tənliyini müəyyən edək. $T(M_0)$ toxunan müstəvisi üzərində $\{M_0, \bar{r}_u, \bar{r}_v\}$ afin koordinat sistemini götürək. İndikatrissanın cari nöqtəsini $A(x, y)$ ilə işarə edək. $\overline{M_0A}$ vektorunun ortu $\bar{\tau}$ olsun.

Onda $\overline{M_0A} = \pm \frac{\tau}{\sqrt{|k_n|}}$ olar.

Digər tərəfdən, $\overline{M_0A} = x\bar{r}_u + y\bar{r}_v$ olduğundan

$$x\bar{r}_u + y\bar{r}_v = \pm \frac{\tau}{\sqrt{|k_n|}} \quad (2)$$

olacaq. $du = x$, $dv = y$ olduğu üçün $du : dv = x : y$ olar. (2) bərabərliyini kvadrata yüksəldək:

$$x^2 \bar{r}_u^2 + 2xy \bar{r}_u \bar{r}_v + y^2 \bar{r}_v^2 = \frac{1}{|k_n|} = \frac{1}{\left| \frac{\varphi}{ds^2} \right|} = \frac{ds^2}{|\varphi|}$$

Buradan, I kvadratik formanı və keçən paraqrafdan, k_n normal ayrılıyı üçün düsturu nəzərə alsaq

$$\gamma_{11}x^2 + 2\gamma_{12}xy + \gamma_{22}y^2 = \frac{\gamma_{11}x^2 + 2\gamma_{12}xy + \gamma_{22}y^2}{|b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2|}$$

olar; və ya

$$|b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2| = 1 \quad (3)$$

olduğunu alırıq.

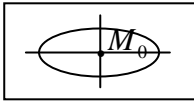
(3) tənliyi Dyupen indikatrissasının tənliyidir. (3) tənliyini belə də yazıb bilərik:

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1 \quad (3')$$

Burada b_{11}, b_{12}, b_{22} ədədlərinin üçü də eyni zamanda sıfır deyildir. Bu da göstərir ki, Dyupen indikatrissası ikitərtibli xətdən ibarətdir.

İndi isə əmsallardan asılı olaraq Dyupen indikatrissasını araşdıraq.

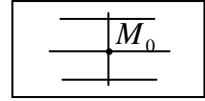
1) Verilən M_0 nöqtəsində $D = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ olarsa, onda Dyupen indikatrissası ellipsdir. Bu halda M_0 nöqtəsinə elliptik nöqtə deyilir (şəkil 14).



a)



b)



v)

Şəkil 14

Xüsusi halda Dyupen indikatriyası çevrə olarsa, onda M_0 nöqtəsi dairəvi və ya ombilik nöqtəsi adlanır.

2) M_0 nöqtəsində $D = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ olarsa, onda Dyupen indikatriyası bir cüt qoşma hiperboladır; bu halda səthin M_0 nöqtəsinə hiperbolik nöqtə deyilir.

3) M_0 nöqtəsində $D = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ olarsa, onda Dyupen indikatriyası bir cüt paralel düz xətdir; bu halda M_0 nöqtəsinə parabolik nöqtə deyilir.

§12. Baş əyriliklər

Əvvəlcə, səthin verilmiş nöqtəsində baş istiqamətlər anlayışını təyin edək. Tutaq ki, F_0 hamar elementar səthi

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1)$$

vektor tənliyi ilə verilmişdir. F_0 səthi üzərində ixtiyari M nöqtəsini götürək. $M \in F_0$ nöqtəsində ikitərtibli xətt olan Dyupen indikatriyasının baş istiqamətlərinə həmin nöqtədə səthin baş istiqamətləri deyilir. Deməli, ümumi halda (yəni M – dairəvi nöqtə olmadıqda) M nöqtəsindən yalnız bir cüt baş istiqamət var. Onlar ortoqonal olub və Dyupen indikatriyasına nəzərən qoşmadırlar.

Tutaq ki, $M \in F_0$ nöqtəsində baş istiqamətlər

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \quad \text{və} \quad \delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$$

vektorları ilə təyin olunur. Onda aydındır ki, $d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = 0$ olar ki, bu da onların ortoqonallıq şərti adlanır; eləcə də $b_{11}du\delta u + b_{12}du\delta v + b_{21}dv\delta u + b_{22}dv\delta v = 0$ olar ki, bu da onların qoşmalıq şərti olar. İsbat edək ki, qoşmalıq şərtini $d\bar{n} \cdot \delta\bar{r} = 0$ şəklində də yazmaq olar; burada $d\bar{n}$, səthin M nöqtəsində vahid normal vektorunun, səth üzərində M nöqtəsinin dr yerdəyişməsinə uyğun diferensialıdır. Bunun üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə edək:

$$b_{11} = -\bar{n}_u \bar{r}_u, \quad b_{12} = b_{21} = -\bar{n}_v \bar{r}_u = -\bar{n}_u \bar{r}_v, \quad b_{22} = -\bar{n}_v \bar{r}_v \quad (2)$$

(2)-dəki birinci bərabərliyi isbat edək. $\bar{n} \cdot \bar{r}_u = 0$ eyniliyini u -ya nəzərən diferensiallayaq: onda alırıq ki, $\bar{n}_u \bar{r}_u + \bar{n} \bar{r}_{uu} = 0$ olar. Buradan da, $b_{11} = \bar{n} \bar{r}_{uu}$ olduğundan, $b_{11} = -\bar{n}_u \bar{r}_u$ alırıq. O biri əmsalları da oxşar qayda ilə hesablamaq olar. (2) əmsallarının qiymətlərini qoşmalıq şərtində nəzərə alsaq, məlum çevirmələrdən sonra alırıq ki,

$$(\bar{n}_u du + \bar{n}_v dv)(\bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v) = 0,$$

və yaxud da $d\bar{n} \cdot \delta \bar{r} = 0$ olur.

Beləliklə, alırıq ki, $d\bar{r}$ və $\delta \bar{r}$ vektorlarının F_0 səthinin M nöqtəsində baş istiqamətləri təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt

$$d\bar{r} \cdot \delta \bar{r} = 0, \quad d\bar{n} \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad (3)$$

bərabərliklərinin ödənilməsidir.

(3) bərabərliyindən istifadə edərək, aşağıdakı Rodriq teoremini isbat etmək olar.

Teorem (Rodriq). Səthin M nöqtəsində $d\bar{r}$ vektorunun baş istiqamət olması üçün zəruri və kafi şərt

$$d\bar{n} = -k_n d\bar{r} \quad (4)$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

Burada $d\bar{n}$ vahid normal vektorun, M nöqtəsində $d\bar{r}$ yerdəyişməsinə uyğun diferensialdır. k_n isə səthin M nöqtəsində $d\bar{r}$ istiqamətində normal əyriliyidir.

İsbatı. Əvvəldə göstərmişik ki, $\delta \bar{r}$ və $d\bar{r}$ vektorlarının baş istiqamətləri təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt (3) bərabərliklərinin ödənilməsidir. Bu şərtlərdən çıxır ki, $d\bar{r}$ və $d\bar{n}$ vektorları kolleniər olmalıdır; yəni

$$d\bar{n} = \lambda d\bar{r}$$

olmalıdır.

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $d\bar{r}$ vektoruna skalyar vuraq:

$$d\bar{r} \cdot d\bar{n} = \lambda d\bar{r}^2 = \lambda ds^2 \quad (5)$$

olar.

$d\bar{r} \cdot \bar{n} = 0$ eyniliyini diferensiallasaq alarıq ki,

$$d^2\bar{r} \cdot \bar{n} + d\bar{r} \cdot d\bar{n} = 0$$

olur; səthin verilmiş nöqtəsində $d^2\bar{r} \cdot \bar{n}$ ifadəsi səthin həmin nöqtədə φ II kvadratik forması olduğundan

$$\varphi + d\bar{r} \cdot d\bar{n} = 0 \quad (6)$$

olur.

(5) və (6) bərabərliklərindən

$$\varphi + \lambda ds^2 = 0 \quad \text{və} \quad \lambda = -\frac{\varphi}{ds^2} = -k_n$$

alınır. Deməli, M nöqtəsində $d\bar{r}$ baş istiqaməti təyin edirsə, onda teoremin şərti ödənilir, yəni

$$d\bar{m} = -k_n d\bar{r}$$

olur.

Tərsinə, elə $d\bar{r}$ istiqaməti götürək ki,

$$d\bar{n} = -k_n d\bar{r} \quad (7)$$

şərti ödənsin. Sonra $d\bar{r}$ istiqamətinə ortoqonal olan $\delta\bar{r}$ istiqaməti götürək, yəni

$$d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = 0 \quad (8)$$

olsun.

(7) və (8) bərabərliklərindən $\delta\bar{r} \cdot d\bar{n} = 0$ alınır. Deməli,

(4) bərabərliyi ödənilərsə, onda $d\bar{r}$ və $\delta\bar{r}$ vektorları üçün həm ortoqonallıq, həm də qoşmalılıq şərti ödənilir. Yəni $d\bar{r}$ (eləcə də $\delta\bar{r}$) istiqaməti baş istiqamətdir. Beləliklə, teorem isbat olundu.

(4) düsturunu aşağıdakı kimi yazaq:

$$d\bar{n} = -k d\bar{r}$$

Bu düstura Rodriq düsturu deyilir. Burada k ədədi $d\bar{r}$ baş istiqamət üzrə normal əyrilikdir.

§13. Səthin tam və orta əyriliyi

Rodriq düsturunda $d\bar{n}$ və $d\bar{r}$ vektorlarının $d\bar{n} = \bar{n}_u du + \bar{n}_v dv$, $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ ifadəsini yazsaq:

$$\bar{n}_u du + \bar{n}_v dv = -k(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)$$

alırıq.

Bu bərabərliklərin hər iki tərəfini əvvəlcə \bar{r}_u -ya, sonra da \bar{r}_v -yə skalyar vuraq. Səh. 107-də (2) düsturundan, I kvadratik formanın əmsallarından istifadə etsək

$$\begin{cases} b_{11} du + b_{12} dv = k\gamma_{11} du + k\gamma_{12} dv \\ b_{21} du + b_{22} dv = k\gamma_{21} du + k\gamma_{22} dv \end{cases} \quad (1)$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$\begin{cases} (b_{11} - k\gamma_{11}) du + (b_{12} - k\gamma_{12}) dv = 0 \\ (b_{21} - k\gamma_{21}) du + (b_{22} - k\gamma_{22}) dv = 0 \end{cases} \quad (1')$$

alınar.

Bu axırıncı sistemdən k -nı yox etsək, onda M nöqtəsində $du : dv$, başqa sözlə, baş istiqamətləri təyin edən

$$\begin{vmatrix} b_{11} du + b_{12} dv & \gamma_{11} du + \gamma_{12} dv \\ b_{21} du + b_{22} dv & \gamma_{21} du + \gamma_{22} dv \end{vmatrix} = 0 \quad (1'')$$

tənliyini alırıq.

du və dv diferensialları eyni zamanda sıfıra bərabər olmadığından (1'') bircins xətti tənliklər sisteminin determinantu sıfıra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{21} - k\gamma_{21} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

yaxud da

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} k^2 - \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

olur.

Beləliklə, $M \in S$ nöqtəsində k_1, k_2 baş əyrilikləri (2) tənliyinin köklərindən ibarətdir. (2) tənliyinin köklərindən ibarət olan baş əyriliklərin $k_1 \cdot k_2$ hasilinə M nöqtəsində səthin tam (Qauss) əyriliyi, baş əyriliklərin $k_1 + k_2$ cəminin yarısına isə səthin orta əyriliyi deyilir və belə işarə olunur:

$$K = k_1 \cdot k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

(2) tənliyindən Viyet teoreminə əsasən alırıq ki,

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} \quad (4)$$

olur.

Səthin birinci kvadratik formasının diskriminantı $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$ olduğundan, səthin K tam əyriliyinin işarəsi yalnız səthin ikinci kvadratik formasının $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ diskriminantının işarəsindən asılı olacaq. Ona görə də, səthin elliptik nöqtəsində $K > 0$, hiperbolik nöqtəsində $K < 0$, parabolik nöqtəsində isə $K = 0$ olur. (3), (4) düsturlarının çıxarılışında fərz etmişdik ki, ikinci kvadratik formanın heç olmazsa bir əmsalı sıfırdan fərqlidir. Bu düsturlar ikinci kvadratik formanın bütün əmsalları sıfır olduqda da doğrudur. Yəni, verilmiş nöqtədə $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ olduqda da, (3), (4) düsturları doğrudur.

Məsələ 1. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$ helikodinin tam və orta əyriliyini təyin edin.

Həlli. Bilirik ki, səthin orta əyriliyi

$$H = \frac{\gamma_{11}b_{22} - 2b_{12}\gamma_{12} + b_{11}\gamma_{22}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}$$

düsturu ilə, tam əyriliyi isə

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

düsturu ilə hesablanır. Onda:

$$\gamma_{11} = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \quad b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

$$\gamma_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

$$\gamma_{22} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

$$x_u = \cos \nu, \quad y_u = \sin \nu, \quad z_u = 0$$

$$x_v = -u \sin \nu, \quad y_v = u \cos \nu, \quad z_v = a$$

$$x_{uu} = 0, \quad y_{uu} = 0, \quad z_{uu} = 0$$

$$x_{uv} = -\sin \nu, \quad y_{uv} = \cos \nu, \quad z_{uv} = 0$$

$$x_{vv} = -u \cos \nu, \quad y_{vv} = -u \sin \nu, \quad z_{vv} = 0$$

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = u^2 + a^2, \quad \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = u^2 + a^2$$

İndi isə ikinci kvadratik formanın əmsallarını hesablayaq

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -n \sin \nu & n \cos \nu & a \end{vmatrix}}{\sqrt{n^2 + a^2}} = 0$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -n \sin \nu & n \cos \nu & a \end{vmatrix}}{\sqrt{n^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{n^2 + a^2}}$$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} -n \cos \nu & -n \sin \nu & 0 \\ \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -n \sin \nu & n \cos \nu & a \end{vmatrix}}{\sqrt{n^2 + a^2}} = \frac{0}{\sqrt{n^2 + a^2}} = 0$$

$$K = \frac{0 \cdot 0 - \frac{a^2}{n + a^2}}{n^2 + a^2} = -\frac{a^2}{(n^2 + a^2)^2}$$

$$H = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{n^2 + a^2}} \cdot 0 + 0 \cdot (n^2 + a^2)}{2(n^2 + a^2)} = 0$$

Məsələ 2. $x = \nu \cos u$, $y = \nu \sin u$, $z = \frac{\nu^2}{2}$ fırlanma parabolodinin tam və orta əyriliyi tapmalı.

Həlli. Bilirik ki, səthin orta və tam əyriliyi, bu düsturlarla hesablanır:

$$H = \frac{b_{22}\gamma_{11} - 2b_{12}\gamma_{12} + b_{11}\gamma_{22}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}, \quad K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

Birinci kvadratik formanın əmsalları

$$\gamma_{11} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$\gamma_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$\gamma_{22} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

İkinci kvadratik formanın əmsalları isə

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}, \quad b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}, \quad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$$

olur.

$$x_u = -v \sin u, \quad y_u = v \cos u, \quad z_u = 0$$

$$x_v = \cos u, \quad y_v = \sin u, \quad z_v = v$$

$$x_{uu} = -v \cos u, \quad y_{uu} = -v \sin u, \quad z_{uu} = 0$$

$$x_{vv} = 0, \quad y_{vv} = 0, \quad z_{vv} = 1$$

$$x_{uv} = -\sin u, \quad y_{uv} = \cos u, \quad z_{uv} = 0$$

$$\gamma_{11} = v^2, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = 1 + v^2$$

$$\gamma_{11} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = v^2 + v^4 = v^2(1 + v^2)$$

olduğundan

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -v \cos u & -v \sin u & 0 \\ -v \sin u & v \cos u & 0 \\ \cos u & v \sin u & v \end{vmatrix}}{v\sqrt{1+v^2}} = v^3 \frac{\begin{vmatrix} -\cos u & -\sin u \\ -\sin u & \cos u \end{vmatrix}}{v\sqrt{1+v^2}} =$$

$$= \frac{v^3(-\cos^2 u - \sin^2 u)}{v(1+v^2)} = \frac{-v^2}{v\sqrt{1+v^2}} = -\frac{v^2}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ -v \sin u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & v \end{vmatrix}}{v\sqrt{1+v^2}} = \frac{v(-v \sin u \cdot \cos u + v \sin u \cdot \cos u)}{v\sqrt{1+v^2}} = 0$$

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v \sin u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & v \end{vmatrix}}{v\sqrt{1+v^2}} = v \frac{\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u \\ \cos u & \sin u \end{vmatrix}}{v\sqrt{1+v^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \text{ alınır.}$$

Orta əyrilik

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{-\frac{v^2}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{v^2}{\sqrt{1+v^2}}(1+v^2)}{v^2(1+v^2)} =$$

$$= -\frac{v^2(1+1+v^2)}{\sqrt{1+v^2}} = -\frac{v^2(2+v^2)}{v^2(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} = -\frac{2+v^2}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Tam əyrilik isə

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \frac{-\frac{v^2}{\sqrt{1+v^2}} \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}}{v\sqrt{1+v^2}} = \frac{v^2}{v(1+v^2)} = \frac{v}{1+v^2}$$

olur.

$$\text{Cavab: } K = k_1 \cdot k_2 = \frac{v}{1+v^2}; \quad H = -\frac{2+v^2}{2(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Çalışmalar

1. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv + f(u)$ helikodial səthin tam əyriliyini tapın.

$$\text{Cavab: } K = \frac{u^3 f f'' - h^2}{[h^2 + u^2(1 + f'^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

2. $x = a(u+v)$, $y = b(u-v)$, $z = av$ səthinin tam və orta əyriliyini tapın.

$$\text{Cavab: } K = \frac{4a^2b^2}{A^4}$$

$$H = \frac{2ab}{A^3}(a^2 - b^2 + uv)$$

$$\text{burada } A^2 = 4a^2b^2 + a^2(u-v)^2 + b^2(u+v)^2$$

3. $x = 3u + 3uv^2 - u^3$; $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ səthinin ota ayrılıyını tapın.

Cavab: $H = 0$

4. $x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ səthinin tam ayrılıyını təyin edin.

Cavab: $K = -1$

§14. Sabit əyrilikli səthlər

Məlumdur ki, müstəvinin ümumi tənliyi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

şəklindədir, burada A, B, C əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Tutaq ki, $C \neq 0$. Onda (1) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Buradan, x, y -ə görə törəmələri tapaq: $z_x = -\frac{A}{C}$; $z_y = -\frac{B}{C}$,

$z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 0$. Onda

$$\gamma_{11} = 1 + \frac{A^2}{C^2}; \quad \gamma_{12} = \frac{AB}{C^2}; \quad \gamma_{22} = 1 + \frac{B^2}{C^2}$$

$$\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = \left(1 + \frac{A^2}{C^2}\right)\left(1 + \frac{B^2}{C^2}\right) - \frac{A^2B^2}{C^4} = 1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} \neq 0$$

Buradan, $b_{11} = 0$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$ olduğunu alırıq. Ona görə də

$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 0$ olar. Deməli, sabit sıfır əyrilikli sadə səth

müstəvidir.

IV FƏSİL

§1. Səthin daxili həndəsəsi. Derivasion düsturları

Səthdən kənara çıxmadan səthin öz üzərində bilavasitə ölçməklə təyin olunan xassələrə səthin daxili xassələri deyilir.

Səthin daxili xassələri çoxluğu mahiyyətcə onun daxili həndəsəsini təyin edir. Buradan bilavasitə alınır ki, requlyar səthlərin daxili həndəsəsi, bu səthlərin və onlar üzərində olan fiqurların elə xassələrini öyrənir ki, bu xassələr səthin birinci kvadratik forması ilə təyin olunur. Buraya bildiyimiz kimi səth üzərində qövsün uzunluğunun, xətlər arasındakı bucağın və səthin sahəsinin hesablanması haqqında məsələlər daxildir. Bu məsələlərə III fəsildə baxılmışdır. Bu fəsildə isə səthin daxili həndəsəsinə aid olan daha bir sıra anlayışlara baxılacaqdır.

Derivasion düsturları

Səthin daxili həndəsəsinin sonrakı anlayışlarını vermək üçün, əvvəlcə derivasion düsturları verək.

Tutaq ki, S səthi $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ tənliyi ilə verilən $\bar{C}^{(k)}$ ($k \geq 3$) sinfinin requlyar səthidir; u, v skalyar arqumentlərindən asılı vektor-funksiyalar olan $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$ vektorları hər bir $M \in S$ nöqtəsində bazis əmələ gətirirlər. Ona görə də bu bazis vektorlarının xüsusi törəmələri olan $\bar{r}_{uu}, \bar{r}_{uv}, \bar{r}_{vv}, \bar{n}_u, \bar{n}_v$ vektorlarını $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$ bazis vektorları üzrə ayırmaq olar:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{uu} &= Q_{11}^1 \bar{r}_u + Q_{11}^2 \bar{r}_v + \lambda_{11} \bar{n} \\ \bar{r}_{uv} &= Q_{12}^1 \bar{r}_u + Q_{12}^2 \bar{r}_v + \lambda_{12} \bar{n}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_{vv} &= Q_{22}^1 \bar{r}_u + Q_{22}^2 \bar{r}_v + \lambda_{22} \bar{n} \\ \bar{n}_u &= \alpha_1^1 \bar{r}_u + \alpha_1^2 \bar{r}_v, \quad \bar{n}_v = \alpha_2^1 \bar{r}_u + \alpha_2^2 \bar{r}_v\end{aligned}\quad (2)$$

(2) formulunda \bar{n} vektorunun uzunluğunun vahid olduğunu ($|\bar{n}| = 1$) nəzərə aldıığımızdan $\bar{n} \cdot \bar{n}_u = \bar{n} \cdot \bar{n}_v = 0$ olur, ona görə də

\bar{n}_u və \bar{n}_v vektorlarının ayrılışında \bar{n} bazisi üzrə əmsal sıfır götürülmüşdür.

Burada $Q_{11}^1, Q_{11}^2, Q_{12}^1, Q_{12}^2, Q_{22}^1, Q_{22}^2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}$ bazis üzrə ayrılışın əmsallarıdır. Onları təyin etmək lazımdır. Əvvəlcə $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}$ əmsallarını tapaq. Bunun üçün (1) bərabərliklərindən hər birinin hər iki tərəfini \bar{n} vektoruna skalyar vuraq, $\bar{n} \perp \bar{r}_u$, $\bar{n} \perp \bar{r}_v$ olduğundan $\bar{r}_u \cdot \bar{n} = 0$ və $\bar{r}_v \cdot \bar{n} = 0$ olar. Onda $\bar{n} \cdot \bar{n} = 1$ olduğundan alarıq ki, $\lambda_{11} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu}$, $\lambda_{12} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv}$, $\lambda_{22} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv}$ olar. Bu alınanları səthin ikinci kvadratik formasının b_{11}, b_{12}, b_{22} əmsalları ilə müqayisə etsək, alarıq ki,

$$\lambda_{11} = b_{11}, \lambda_{12} = b_{12}, \lambda_{22} = b_{22} \quad (3)$$

olur.

İndi $\alpha_i^j (i, j = 1, 2)$ əmsallarını tapaq. Bunun üçün (2) bərabərliyinin hər tərəfini əvvəlcə \bar{r}_u , sonra isə \bar{r}_v vektoruna skalyar vuraq. III fəsildə səthin I və II kvadratik formasının əmsalları üçün verilmiş işarələmələrdən istifadə etsək, aşağıdakı kimi iki tənliklər sistemi alarıq:

$$\begin{cases} \gamma_{11}\alpha_1^1 + \gamma_{12}\alpha_1^2 = -b_{11} \\ \gamma_{21}\alpha_1^1 + \gamma_{22}\alpha_1^2 = -b_{12} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\alpha_2^1 + \gamma_{12}\alpha_2^2 = -b_{21} \\ \gamma_{21}\alpha_2^1 + \gamma_{22}\alpha_2^2 = -b_{22} \end{cases} \quad (5)$$

(4) sistemi α_1^1, α_1^2 məchullarına nəzərən iki məchullu xətti tənliklər sistemidir. Bu sistemin determinantı $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ müsbət müəyyən olunmuş səthin birinci kvadratik formasının diskriminantı kimi sıfırdan fərqlidir. Ona görə də (4) sisteminin yeganə həlli var. Bu sistemi həll edərək α_1^1, α_1^2 əmsallarını tapırıq. Eyni qayda ilə (5) sistemindən də α_2^1, α_2^2 əmsallarını tapırıq. Beləliklə, (2) sisteminin əmsalları verilmiş səthin birinci və ikinci kvadratik formasının əmsalları vasitəsilə ifadə olunar.

İndi isə Q_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) əmsallarını təyin edək. Bunun üçün (1) bərabərliklərini əvvəlcə \bar{r}_u , sonra isə \bar{r}_v -yə skalyar vuraq: III fəsildə səthin I kvadratik formasının əmsalları üçün verilmiş işarələmələrdən istifadə etsək, aşağıdakı şəkildə üç tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} \gamma_{11}Q_{11}^1 + \gamma_{12}Q_{11}^2 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} \\ \gamma_{21}Q_{11}^1 + \gamma_{22}Q_{11}^2 = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_{uu} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}Q_{12}^1 + \gamma_{12}Q_{12}^2 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv} \\ \gamma_{21}Q_{12}^1 + \gamma_{22}Q_{12}^2 = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_{uv} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}Q_{22}^1 + \gamma_{12}Q_{22}^2 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{vv} \\ \gamma_{21}Q_{22}^1 + \gamma_{22}Q_{22}^2 = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_{vv} \end{cases} \quad (8)$$

(6) sistemi Q_{11}^1, Q_{11}^2 məchullarına nəzərən iki məchullu xətti tənliklər sistemidir. Göstərək ki, (6) tənliklər sisteminin sağ tərəfi məlumdur. Doğrudan da, $\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{r}_u^2}{\partial u}$ olduğundan alırıq ki,

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u} \quad (9)$$

olur. Sonra alırıq ki, $\bar{r}_v \cdot \bar{r}_{uu} = \frac{\partial(\bar{r}_v \cdot \bar{r}_u)}{\partial u} - \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv}$. Lakin,

$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (\bar{r}_u^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}$ olduğundan bundan əvvəlki düstur

aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\bar{r}_v \cdot \bar{r}_{uu} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v} \quad (10)$$

(9), (10) bərabərliklərindən bu nəticəyə gəlmək olur ki, (6) tənliklərinin sağ tərəfi birinci kvadratik formanın əmsalları və onların törəmələrinin vasitəsilə ifadə olunub. Eyni təklif (7) və (8) bərabərliklərinin sağ tərəfləri üçün də doğrudur.

Əgər bizə F səthi verilmişsə, onda biz onun birinci kvadratik formasını tapa bilərik. Onda bizə (6), (7), (8) tənliklər sisteminin sağ tərəfinin ifadəsi məlum olar. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu sistemlərin hər birinin $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ determinantı sıfırdan fərqli olduğundan, bu sistemləri həll edərək bütün Q_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) əmsallarını tapa bilərik. Q_{ij}^k – əmsallarına ikinci tip Kristofel əmsalları deyilir. Birinci tip Kristofel əmsalı kimi adətən (6), (7), (8) sistemlərinin sağ tərəfi başa düşülür. Q_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) Kristofel əmsalları yalnız səthin birinci kvadratik formasının əmsallarından və onun xüsusi törəmələrindən asılı olduğundan, onlar səthin daxili həndəsəsinin obyektlərindəndirlər. (1), (2) düsturlarına derivasion düsturlar deyilir.

§2. Qauss teoremi. Səth üzərində xəttin geodezik əyriliyi

Aşağıdakı teorem səthin daxili həndəsəsinin əsas teoremlərindən biri olub, Qauss teoremi adlanır.

Teorem. Hamar $c^{(k)}$ ($k \geq 3$) sinfinə daxil olan səthin hər hansı nöqtəsində tam əyriliyi ancaq səthin birinci kvadratik formasının əmsalları və onların xüsusi törəmələri ilə ifadə olunur. Deməli, səthin daxili həndəsəsinin obyektidir.

İsbati. Fərz edək ki, S səthi $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ tənliyi ilə verilən $\bar{C}^{(k)}$ ($k \geq 3$) sinfin səthidir. Bundan əvvəlki paraqrafda verilən (1) və (2) derivasion düsturları R_M hərəkət reperi üçün səthin hər bir nöqtəsində ödənilir. Deməli (1), (2) bərabərlikləri səth üzərində eyniliklər olduğu üçün onları u və v dəyişənlərinə nəzərən diferensiallamaq olar. Həmin (1) bərabərliklərinin birincisini v dəyişəninə nəzərən diferensiallayaq və həmin paraqrafdakı (3) düsturunu nəzərə alsaq

$$\bar{r}_{uvw} = \frac{\partial Q_{11}^1}{\partial v} \bar{r}_u + Q_{11}^1 \bar{r}_{uv} + \frac{\partial Q_{11}^2}{\partial v} \bar{r}_v + Q_{11}^2 \bar{r}_{vv} + \frac{\partial b_{11}}{\partial v} \bar{n} + b_{11} \bar{n}_v$$

alınar.

Derivasion düsturlarından $\bar{r}_{uv}, \bar{r}_{vu}, \bar{n}_v$ qiymətlərini burada yerinə yazsaq, R_M hərəkət reperinə nəzərən \bar{r}_{uvw} vektorunun ayrılışını alarıq.

Bu ayrılışın əmsallarını $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ilə işarə edək. Onda

$$\bar{r}_{uvw} = \lambda_1 \bar{r}_u + \lambda_2 \bar{r}_v + \lambda_3 \bar{n}$$

olduğunu alarıq. Oxşar qayda ilə yuxarıda qeyd olunan (1) düsturunun ikinci tənliyini u dəyişəninə nəzərən diferensiallayaq:

$$\bar{r}_{uvu} = \lambda'_1 \bar{r}_u + \lambda'_2 \bar{r}_v + \lambda'_3 \bar{n}$$

alınar.

Yoxlamaq olar ki, λ_2 və λ'_2 əmsalları aşağıdakı şəkildədir.

$$\lambda_2 = \frac{\partial Q_{11}^2}{\partial v} + Q_{11}^1 Q_{12}^2 + Q_{11}^2 Q_{22}^2 + b_{11} \alpha_2^2 \quad (1)$$

$$\lambda'_2 = \frac{\partial Q_{12}^2}{\partial u} + Q_{12}^1 Q_{11}^2 + Q_{12}^2 Q_{21}^2 + b_{12} \alpha_1^2$$

Lakin $\bar{r}_{uvw} = \bar{r}_{uvu}$ olduğundan, $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, $\lambda_3 = \lambda'_3$ olduğundan (1) düsturundan

$$b_{11} \alpha_2^2 - b_{12} \alpha_1^2 = \frac{\partial Q_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial Q_{11}^2}{\partial v} + Q_{12}^1 Q_{11}^2 + Q_{12}^2 Q_{21}^2 - Q_{11}^1 Q_{12}^2 - Q_{11}^2 Q_{22}^2 \quad (2)$$

olduğunu alarıq.

Bundan əvvəlki paraqrafda olan (4), (5) sistem tənliklərini həll etsək, taparıq ki

$$\alpha_2^2 = \frac{-\gamma_{11} b_{22} + \gamma_{12} b_{12}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad \alpha_1^2 = \frac{-\gamma_{11} b_{12} + \gamma_{12} b_{11}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

olur.

Bu qiymətləri (2) bərabərliyinin sol tərəfində yerinə yazsaq, həmin tərəf $-\gamma_{11} K$ şəklinə düşər, harada ki, K ayrılığı F səthinin M nöqtəsindəki tam ayrılığıdır. Onda (2) düsturu aşağıdakı şəklə düşər:

$$K = \frac{1}{\gamma_{11}} \left(\frac{\partial Q_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial Q_{12}^2}{\partial u} + Q_{11}^1 Q_{12}^2 + Q_{11}^2 Q_{22}^2 - Q_{12}^1 Q_{11}^2 - Q_{12}^2 Q_{21}^2 \right)$$

Tapdığımız düstur yalnız səthin birinci kvadratik formasının əmsalları və onların xüsusi törəmələri vasitəsilə ifadə olunur. Deməli, səthin daxili həndəsəsinin obyektidir. Bununla da teorem isbat olundu.

Fərz edək ki, S səthi $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ tənliyi ilə verilmiş $\bar{C}^{(k)}$ ($k \geq 3$) sinfinin requlyar səthidir. S səthi üzərində γ requlyar əyrisi götürək. Onu $u = u(s)$, $v = v(s)$ tənlikləri ilə vermək olar, burada s – qövsün uzunluğudur. $M \in S$ nöqtəsində γ əyrisinin əyrilik $k\bar{v}$ vektorunu təyin edən düsturda derivasion düsturlarında olan \bar{r}_{uu} , \bar{r}_{uv} , \bar{r}_{vv} qiymətlərini yerinə yazsaq, belə ifadə alarıq:

$$k\bar{v} = \bar{k}_T + \bar{k}_N \quad (3)$$

harda ki,

$$\begin{aligned} \bar{k}_T = & \left(Q_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2Q_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + Q_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2u}{ds^2} \right) \bar{r}_u + \\ & + \left(Q_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2Q_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + Q_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2v}{ds^2} \right) \bar{r}_v \end{aligned} \quad (4)$$

$$k_N = \left(b_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right) \bar{n} \quad (5)$$

Beləliklə, γ əyrisinin M nöqtəsində $k\bar{v}$ əyrilik vektoru iki toplanandan ibarətdir.

- 1) \bar{k}_T – toxunan alt fəzaya daxil olan vektordur.
- 2) \bar{k}_N – vektoru səthin M nöqtəsində çəkilmiş normala paralel olan vektordur.

\bar{k}_T vektoruna M nöqtəsində γ əyrisinin geodezik əyrilik vektoru deyilir. $k\bar{v} \perp \bar{\tau}$ ($\bar{\tau}$ – toxunan vahid vektordur) olduğundan, geodezik əyrilik vektoru γ əyrisinin M nöqtəsində

toxunan vektoru ilə ortoqonaldır; ona görə də \bar{k}_T , $\bar{g} = [\bar{\tau}, \bar{n}]$ vektoruna kollinear olar. Onda alarıq ki,

$$\bar{k}_T = k_g \cdot \bar{g} \quad (6)$$

k_g – ədədinə M nöqtəsində γ əyrisinin geodezik əyriliyi deyilir.

\bar{g} – vahid vektor olduğu üçün alarıq ki, $|k_g| = |\bar{k}_T|$ olur.

Bilirik ki, $Q_{ij}^k (i, j, k = 1, 2)$ Kristofel əmsalları səthin birinci kvadratik forması və onların xüsusi törəmələri vasitəsilə ifadə olunur; onda (4) düsturundan alınır ki, γ xəttinin k_g geodezik əyriliyi S səthinin birinci kvadratik formasının əmsalları və onların xüsusi törəmələri vasitəsilə ifadə olunur.

Qeyd edək ki, (5) düsturundakı \bar{n} vektorunun əmsalını nəzərə alsaq, (3) düsturunu

$$k\bar{v} = k_g \bar{g} + k_n \bar{n} \quad (7)$$

şəklində yazı bilərik.

§3. Geodezik xətlər

Tutaq ki, F , $c^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfindən olan hamar səthdir. Əgər $\gamma \subset F$ hamar xəttinin hər bir nöqtəsində geodezik əyriliyi sıfıra bərabərdirsə ($k_g = 0$), onda həmin xəttə geodezik xətt deyilir.

γ əyrisinin $k\bar{v}$ əyrilik vektorunun, səthin M nöqtəsində T_M toxunan vektor fəzası və həmin nöqtədə səthə çəkilmiş normala paralel üzrə ayrılışının yuxarıda aldığımız $k\bar{v} = k_g \bar{g} + k_n \bar{n}$ ekvivalent formulundan aydındır ki, $k_g = 0$ yalnız o vaxt olur ki, $k\bar{v} \parallel \bar{n}$ paralellik şərti ödənsin. Lakin, $k\bar{v}$ vektoru γ əyrisinin əyrilik vektoru olduğundan M nöqtəsində γ əyrisinin çoxtoxunan müstəvisinə paraleldir, \bar{n} isə F səthinin həmin nöqtədə normalın vahid vektorudur. Beləliklə, alırıq ki, geodezik xətt, o xassəsi ilə xarakterizə olunur ki, onun hər bir nöqtəsində

çoxtoxunan müstəvisi həmin nöqtədə səthə çəkilmiş normaldan keçir. Məsələn, bu xarakteristikadan aydındır ki, sferada böyük çevrələr geodezik xətlərdir.

Səthin geodezik xətləri haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. Tutaq ki, F səthi $C^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfindən olan hamar səthdir. Hər bir $M_0 \in F$ nöqtəsindən, səthin M_0 nöqtəsinin kifayət qədər kiçik ətrafında hər bir istiqamət üzrə geodezik xətt keçir və həm də o yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, γ verilmiş F səthi üzərində

$$u = u(s), \quad v = v(s) \quad (1)$$

tənlikləri ilə verilmiş hamar əyridir. Bundan əvvəlki, paraqrafda aldığımız $\bar{k}_\tau = k_g \bar{g}$ formulundan aydındır ki, bu əyri o vaxt və yalnız o vaxt geodezik xətt olur ki, $\bar{k}_\tau = \bar{0}$ olsun, yəni \bar{k}_τ vektorunun koordinatları sifira bərabər olsun. Onda bundan əvvəlki paraqrafda \bar{k}_τ vektorun \bar{r}_u və \bar{r}_v vektorları üzrə ayrılış formulundan alırıq ki,

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{ds^2} + Q_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2Q_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + Q_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 v}{ds^2} + Q_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2Q_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + Q_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

olur.

Beləliklə, (1) tənliyi ilə verilən $\gamma \subset F$ əyrisi, o zaman və ancaq, o zaman geodezik əyri olacaq ki, $u(s)$, $v(s)$ funksiyaları (2) ikitərtibli diferensial tənliyinin həlli olsun. ((2) sistemində məchullar elə $u(s)$ və $v(s)$ funksiyalarıdır).

F səthi $C^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfindən olan hamar səth olduğundan, $Q_{ij}^k = Q_{ij}^k(u, v)$ ($i, j, k = 1, 2$) funksiyaları u və v dəyişənlərinin verildiyi G oblastında kəsilməzdirlər; deməli (2)

sistemində Q_{ij}^k əmsalları müəyyən bir G oblastında kəsilməzdirlər.

Diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, bu halda s dəyişənin kifayət qədər kiçik dəyişmə aralığında (2) sisteminin

$$u|_{s=s_0} = u_0, \quad v|_{s=s_0} = v_0, \quad \left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_0} = a, \quad \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=s_0} = b \quad (3)$$

başlanğıc şərtləri daxilində yeganə $u(s), v(s)$ həlləri vardır, harda ki, $(u_0, v_0) \in G$ və a, b ədədlərindən heç olmazsa, biri sıfırdan fərqlidir.

Yuxarıda deyilənlərin həndəsi mənası o deməkdir ki, ixtiyari $(u_0, v_0) \in G$ verilmiş nöqtəsinə müəyyən bir $M_0 \in F$ nöqtəsi uyğun gəlir ki, a və b ədədləri M_0 nöqtəsində $\gamma: u = u(s), v = v(s)$ əyrisinə toxunanı təyin edir. Buradan da teoremin doğruluğu aydındır.

Qeyd. Əgər səth üzərində olan əyri müəyyən bir düz xətt üzərindədirsə, onda aydındır ki, onun hər bir nöqtəsində əyrilik ($k = 0$) olar və bundan əvvəlki paraqrafda $k\bar{v}$ vektoru üçün verilən (3) ayrılışından aydındır ki, həmin əyrinin hər bir nöqtəsində $\bar{k}_\tau = 0$ olar, yəni verilən əyri səth üzərində geodezikedir. Xüsusi halda, buradan aydındır ki, müstəvi üzərində düz xətlər geoderik xətlərdir və isbat etdiyimiz teoremdən aydındır ki, müstəvi üzərində onlardan başqa geodezik əyrilər yoxdur. Eyni ilə aydındır ki, sferanın hər bir nöqtəsində ixtiyari istiqamət üzrə keçən yeganə böyük çevrənin də geodezik olduğunu nəzərə alsaq, deyə bilərik ki, sfera üzərində geodezik xətlər ancaq böyük çevrələrdir.

İndi isə göstərək ki, $c^{(k)}$ ($k \geq 2$) sinfindən olan F hamar səthinin hər bir $M \in F$ nöqtəsinin kifayət qədər kiçik ətrafında, birinci kvadratik formanı müəyyən bir xüsusi şəkildə vermək olar.

Hesab edək ki, $F_0 \subset F$ səthi elementar səthdir. Əgər F_0 səthi üzərində ortoqonal şəbəkəni təşkil edən xətlər ailəsinin biri geodezikidirsə, onda həmin şəbəkə yarımgeodezik şəbəkə adlanır.

Tutaq ki, $M \in F$ ixtiyari nöqtədir. Onda həmin nöqtəni özündə saxlayan müəyyən bir $F_0 \subset F$ səthi üzərində yarımgeodezik şəbəkə qurmaq olar. Bunun üçün M nöqtəsindən F səthi üzərində hamar γ əyrisi keçirək. Şəbəkənin bir xətlər ailəsi kimi geodezik ortoqonal xətlər ailəsinə, digər ailə kimi isə həmin geodezik xətləri düz bucaq altında kəsən xətlər ailəsi götürək. Xüsusi halda, γ bu ailənin xətlərindən biri olacaqdır. Qurulan hər iki ailə yarımgeodezik şəbəkə əmələ gətirir. Bu xətlər ailəsinin hər biri uyğun diferensial tənliklər sisteminin vasitəsilə təyin olunur, onda qurulan şəbəkə, M nöqtəsini özündə saxlayan müəyyən bir $F_0 \subset F$ elementar səthində təyin olunacaqdır.

Fərz edək ki, F_0 səthi üzərində u, v koordinat şəbəkəsi yarımgeodeziki və həm də u xətləri geodeziki dirlər. Onda (1)

tənliyi bu xətlər üçün $u = s$, $v = v_0$ olur və $\frac{dv}{ds} = 0$, $\frac{d^2v}{ds^2} = 0$,

amma $\frac{du}{ds} \neq 0$ olduğundan (2) sisteminin ikinci tənliyindən tapırıq

ki, $Q_{11}^2 = 0$ olur. Onda birinci paraqrafda Q_{11}^1 və Q_{11}^2 əmsallarını təyin etmək üçün (6) sisteminin ikinci tənliyindən və

$\bar{r}_{uu} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}$ (birinci paraqrafda (10)-cu düsturdan) alırıq ki,

$$\gamma_{21} Q_{11}^1 + \gamma_{22} Q_{11}^2 = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v} \quad (4)$$

olur.

Bizim halda $Q_{11}^2 = 0$ və $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ olduğundan (çünki koordinat şəbəkəsi ortoqonaldır) (4)-dən alırıq ki, $\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v} = 0$ olur.

Deməli, γ_{11} ancaq u dəyişənin funksiyasıdır, yəni $\gamma_{11} = \gamma_{11}(u)$ olar. Onda F_0 səthinin birinci kvadratik forması

$$ds^2 = \gamma_{11}(u)du^2 + \gamma_{22}(u, \nu)d\nu^2$$

şəklində olar. $\sqrt{\gamma_{11}(u)}du = d\bar{u}$ qəbul edək. Yəni, $\bar{u} = \int \sqrt{\gamma_{11}(u)}du + c$ əvəzləməsini etsək, onda

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + \gamma_{22}d\nu^2$$

alınar.

Deməli, belə bir əvəzləmə etsək, alarıq ki, əgər $F_0 \subset F$ səthinin (u, ν) koordinat sistemi yarımgeodezikidirsə və u xətləri geodezikidirsə, onda həmin səthin birinci kvadratik forması

$$ds^2 = du^2 + \gamma_{22}d\nu^2 \quad (5)$$

şəklində olar.

İndi isə, hamar səth üzərində iki müxtəlif nöqtə arasındakı məsafəni nəzərdən keçirək. Tutaq ki, F hamar səth, M_1, M_2 isə həmin səthin iki müxtəlif nöqtələridir. $L(M_1, M_2)$ ilə ucları M_1 və M_2 olan həmin səth üzərində bütün hamar qövsələrin uzunluqları çoxluğunu işarə edək. Həmin çoxluq, aydındır ki, aşağıdan məhduddur (məsələn sıfırla), deməli, onun $\rho_F(M_1, M_2)$ kimi işarə olunan aşağı sərhəddi var ki, ona da F səthi üzərində M_1 və M_2 nöqtələri arasında məsafə deyilir, yəni

$$\rho_F(M_1, M_2) = \inf L(M_1, M_2)$$

kimi təyin olunur. Geodezik xətlərin mühüm xassəsini ifadə edən aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem 2. Əgər M_1, M_2 nöqtələri, F səthi üzərində γ geodezik əyrisi üzərindədirlərsə və $\rho_F(M_1, M_2)$ məsafəsi kifayət qədər kiçikdirsə, onda bu məsafə γ geodezik əyrisinin $M_1 M_2$ qövsünün uzunluğudur.

Geodezik xətlərin bu teoremdə deyilən, eləcə də yuxarıda verdiyimiz teorem 1-dəki xassəsindən aydındır ki, səth üzərində geodezik xətlər, elə müstəvi üzərində düz xətlərin analoqudur.

Məsələ. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$,

$$z = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \quad \text{səthinin}$$

geodezik xətlərini tapın.

Həlli. Verilən funksiyanın xüsusi törəmələrini tapaq.

$$x_u = \cos v, \quad y_u = u \sin v,$$

$$z_u = \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 1} + \frac{u^2}{2\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{u^2 - 1}} = \sqrt{u^2 - 1}$$

$$x_v = -u \sin v, \quad y_v = u \cos v, \quad z_v = 0$$

Onda

$$\gamma_{11} = u^2, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = u^2$$

və

$$\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = u^4$$

olar. Sonra, u, v -yə nəzərən (2) diferensial tənliklər sisteminin ikinci tənliyində nəzərə alsaq, ikinci tənlik aşağıdakı şəkildədir.

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0.$$

Buradan

$$\frac{d}{ds} \left(u^2 \frac{dv}{ds} \right) = 0$$

və ya

$$u^2 \frac{dv}{ds} = C_1, \quad u^2 dv = C_1 ds, \quad u^4 dv^2 = C_1^2 ds^2$$

olduğunu alırıq. $ds^2 = u^2 du^2 + v^2 dv^2$ olduğundan

$$u^4 dv^2 = C_1^2 u^2 du^2 + C_1^2 u^2 dv^2$$

və ya

$$u^2 dv^2 = C_1^2 du^2 + C_1^2 dv^2$$

$$C_1^1 du^2 = (u^2 - C_1^2) dv^2, \quad C_1 du = 2\sqrt{u^2 - C_1^2} dv$$

$$dv = \pm \frac{C_1 du}{\sqrt{u^2 - C_1^2}}, \quad C_2 = C_1 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - C_1^2}}$$

$$C_2^\pm v = C_1 \ln\left(u + \sqrt{u^2 - C_1^2}\right).$$

Deməli, verilmiş səth üzərində geodezik xətlər

$$C_2^\pm v = C_1 \ln\left(u + \sqrt{u^2 - C_1^2}\right)$$

xətlərindən ibarətdir.

§4. İzometrik səthlər. Səthlərin əyilməsi

Tərif 1. S_1 və S_2 hamar səthlərinin nöqtələri arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkündürsə ki, bu uyğunluqda öz aralarında uyğun olan əyrilərin qövsləri uzunluğu bərabər olur, onda belə səthlərə izometrik səthlər deyilir. Başqa sözlə, S_1 və S_2 hamar səthləri üçün $f : S_1 \rightarrow S_2$ biyektiv inikası hər bir $\gamma \subset S_1$ hamar qövsünün uzunluğunu saxlayırsa, onda belə səthlər izometrik səthlər, f isə izometriya adlanır.

Fərz edək ki, S_1 və S_2 səthləri uyğun olaraq $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u, v)$, $\bar{r}_2 = \bar{r}_2(u, v)$ tənlikləri ilə verilmiş və $f : S_1 \rightarrow S_2$ inikası S_1 səthinin S_2 səthinə izometrik inikasından ibarətdir. S_1 səthi üzərində (u, v) əyrixətli koordinatları təyin olunmuşsa və $M(u, v)$ nöqtəsi f inikasında $M' = f(M)$ nöqtəsinə uyğunsə, onda həmin (u, v) koordinatlarını M' nöqtəsinin də koordinatları hesab etmək olar. Bu əməliyyatı S_1 səthinin bütün nöqtələrində tətbiq etsək, S_2 səthi üzərində əyrixətli koordinatlar sistemi təyin etmiş oluruq. Göstərilən koordinat sistemində S_1 səthinin birinci kvadratik forması

$$ds^2 = \gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12}(u, v) dudv + \gamma_{22} dv^2 \quad (1)$$

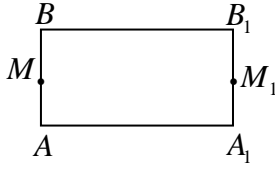
şəklindədirsə, onda S_1 və S_2 səthləri izometrik olduğundan asanlıqla göstərmək olar ki, (1) kvadratik forması S_2 səthinin də birinci kvadratik forması olacaq.

Doğrudan da, səthlər izometrik olduğundan, qeyd olunan inikasda səthlər üzərindəki uyğun qövslərinin s uzunluqları və ona görə də onların ds diferensialları da bərabərdir. Sonra $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$ diferensialları ixtiyari olduğundan, bu nəticəyə gəlirik ki, hər iki səthin birinci kvadratik formalarının $\gamma_{11}(u, v)$, $\gamma_{12}(u, v)$, $\gamma_{22}(u, v)$ əmsalları eyni olar. Bu təklifin tərsi də doğrudur. Beləliklə, alırıq ki, iki S_1 və S_2 səthi, o zaman və ancaq o zaman, izometrik olar ki, onların uyğun nöqtələrində birinci kvadratik formalarının əmsalları üst-üstə düşsün.

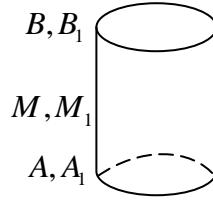
Səthin əyilməsi haqqındakı məsələ izometrik səthlər anlayışı ilə sıx bağlıdır. $t \in [0, 1]$ parametrindən asılı olan elə S_t requlyar səthlər ailəsi varsa ki, bütün t -lər üçün S_t səthləri bir-birinə izometrik olub və $t=0$ olduqda S_t səthi S_0 ilə, $t=1$ olduqda isə S_t ilə üst-üstə düşür, onda S_0 və S_1 requlyar səthlərindən hər biri digərinin əyilməsi nəticəsində alınmışdır deyilir. S səthi hər hansı səthin əyilməsi nəticəsində alınsa, onda ona əyilə bilən səth deyilir.

Səthin əyilməsinə aid olaraq düzbucaqlı kağız vərəqinin düz dairəvi silindrin yan səthinə əyilməsini misal göstərmək olar.

Şəkil 15-də ABB_1A_1 düzbucaqlısının AB tərəfi A_1B_1 tərəfi üzərinə elə qoymaqla düz dairəvi silindri alınmışdır ki, AB tərəfinin ixtiyari M nöqtəsi A_1B_1 tərəfinin uyğun M_1 nöqtəsi üzərinə düşür.



a)



b)

Şəkil 15

Beləliklə, alınan b) düz dairəvi silindri a) ABB_1A_1 düzbucaqlısının əyilməsi nəticəsində alınan fiqurdur.

Aşkardır ki, əyilmə nəticəsində fəzada səthin forması dəyişir, lakin bu halda həm sıxılma və həm də dartılma əməliyyatı aparılmadığından onun üzərində olan əyri qövslərinin uzunluqları dəyişməz. Ona görə də əyilmə əməliyyatı ilə istənilən qədər müxtəlif izometrik requlyar səthlər qurmaq olar.

Göstərmək olar ki, requlyar səthlər ümumiyyətlə desək “kiçik hissədə” əyiləbiləndirlər. Lakin, elə səthlər var ki, “bütövlükdə” əyiləbilməyəndir. Məsələn, bütün sfera əyiləbilməyəndir.

Bu deyilənləri nəzərə alsaq belə nəticəyə gəlirik ki, səthin əyilməsi nəticəsində:

- 1) Səth üzərində ixtiyari requlyar əyrinin uzunluğu saxlanılır.
- 2) İki əyri arasındakı bucaq və səthin sahəsi saxlanılır.
- 3) Səthin qauss əyriliyi saxlanılır.
- 4) Səth üzərində istənilən hamar əyrinin geodezik əyriliyi saxlanılır.
- 5) Səthin tam əyriliyi saxlanılır.

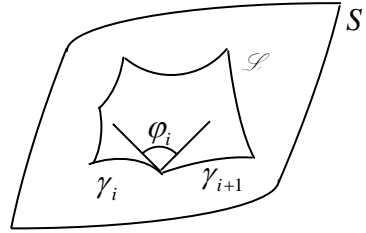
§5. Qauss-Bonne teoremi

Fərz edək ki, S hamar səthdir, S səthi üzərində dairəyə homeomorf olan G oblastına baxaq. Bu oblastın L sərhəddi bir-biri ilə kəsişən sonlu sayda hamar $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ əyrilərindən əmələ gəlmiş olsun.

Belə L xəttinə hissə-hissə hamar xətt, onu əmələ gətirən hamar əyriyə isə onun tərəfləri deyilir.

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ əyriələrinin əmələ gətirdikləri bucaqları $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

ilə işarə edək (şəkil 16).



Şəkil 16

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 1 (Qauss-Bonne teoremi). $L \subset S$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur.

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_L k d\sigma \quad (1)$$

burada k_g – geodezik əyrilik, k – səthin Qauss əyriliyi,

$d\sigma = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} dudv$ isə səth sahəsinin elementidir. (1) düsturuna Qauss-Bonne düsturu deyilir.

İndi, tutaq ki, γ_i tərəfləri geodezik xətlərdən əmələ gəlmişdir. Bu halda G oblastına geodezik çoxbucaqlı deyilir. Onda Qauss-Bonne düsturu ($k_g = 0$ olduğundan)

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_L k d\sigma \quad (2)$$

şəkli alacaq.

$$\beta_i = \pi - \varphi_i$$

bucaqları G geodezik çoxbucaqlının xarici bucaqlarıdır; ona görə (2) düsturuna geodezik çoxbucaqlının xarici bucaqları cəminin düsturu kimi baxmaq olar:

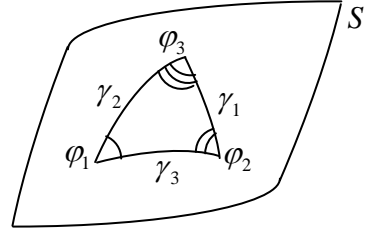
$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi - \iint_L k d\sigma$$

Müstəvi halı üçün ($k = 0$

olduğundan) $\sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi$ olduğunu

alırıq ki, bu da elementar həndəsə kursundan məlum olan düsturdur.

Sərhəddi üç geodezik xətdən ibarət olan geodezik çoxbucaqlıya geodezik üçbucaq deyilir (şəkil 17).



Şəkil 17

$\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ fərqinə geodezik üçbucağın defekti deyilir.

Geodezik üçbucağın bucaqlarını α, β, γ ilə işarə etsək, (2) düsturundan alınır ki,

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\Delta} k d\sigma \quad (3)$$

olur. Burada

$$\nu(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

kəmiyyəti, Δ geodezik üçbucağının artığı adlanır.

$$\omega(\Delta) = \iint_{\Delta} k d\sigma$$

Kəmiyyəti isə həmin geodezik üçbucağın inteqral əyriliyi adlanır.

İndi isə, sabit qauss əyrilikli səthlərə baxaq. Belə səthlər üzərində geodezik üçbucaq üçün (3) Qauss-Bonne düsturu

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = k_0 S_{\Delta} \quad (4)$$

şəklini alar; burada $\iint_{\Delta} d\sigma = S_{\Delta}$ olar. Burada S_{Δ} – geodezik

üçbucağın sahəsidir. (4) bərabərliyindən görünür ki, $k_0 \neq 0$ olduqda, Δ geodezik üçbucağın artığı bu üçbucağın sahəsi ilə mütənasibdir. Geodezik üçbucağın çox mühüm xassəsini aşağıdakı teoremdə vermək olar.

Teorem 2. Geodezik üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi:

- a) səth üzərində $K > 0$ olduqda π -dən böyükdür
- b) səth üzərində $K < 0$ olduqda π -dən kiçikdir
- v) səth üzərində $K = 0$ olduqda π -yə bərabərdir.

İsbatı. a) bəndini isbat edək. Tutaq ki, $L \subset S$ – geodezik üçbucaqdır. L fiquru üç $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qövsdən ibarət olub geodezik xətlərdir. Bu halda (1) düsturundan alırıq ki, $n = 3$, $k_g = 0$. Onda

(1) düsturu $\sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_L K d\sigma$ şəklinə düşər. Buradan da alırıq ki,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \iint_L k d\sigma \quad (5)$$

olur.

Geoderik üçbucağın bütün nöqtələrində $k > 0$ olduqda alırıq ki, $\iint_L k d\sigma > 0$ olur. Onda alırıq ki, teorem 2-nin a) bəndi doğrudur. Oxşar qayda ilə b), v) bəndlərini də isbat etmək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия, ч.II-М.:Просвещение, 1975.
2. Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Элементы топологии и дифференциальная геометрия. М; Наука, 1985.
3. Büşğens S.S. Diferensial həndəsə, ADU nəşriyyatı, 1951.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия–М. Наука, 1969.
5. Yusifzadə V.A., Axundov S.S., Qasimov Q.M., Qulam S. Ali həndəsə məsələləri. APİ-nin nəşri, 1972.
6. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом»,– М: Наука, 1973.
7. Щербаков Р.Н., Лучинин А.А. Краткий курс дифференциальной геометрии. Томск, 1974.

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ.....	3
I FƏSİL. TOPOLOGİYANIN ELEMENTLƏRİ.....	5
§1. Metrik fəzalar.....	5
§2. Topoloji fəzalar.....	10
§3. Kəsilməzlik və homomorfizm.....	15
§4. Ayrılma, kompaktlıq. Əlaqəlilik.....	20
II FƏSİL.....	23
§1. Skalyar arqumentli vektor-funksiyalar.....	23
§2. Əyri anlayışı.....	28
§3. Həmmar əyri.....	32
§4. Əyrinin verilmə üsulları.....	35
§5. Toxunan.....	37
§6. Əyrinin uzunluğu.....	43
§7. Əyrinin təbii parametri.....	44
§8. Əyrinin ayrılığı.....	48
§9. Çoxtoxunan müstəvi.....	55
§10. Əyrinin buruqluğu.....	61
§11. Frene düsturları.....	65
§12. Vint xətti.....	69
III FƏSİL.....	71
§1. Səth anlayışı.....	71
§2. Həmmar səthlər və verilmə üsulları.....	75
§3. Səth üzərində nöqtənin əyrixətli koordinatları.....	77
§4. Səthə toxunan müstəvi və normal.....	79
§5. Səthin normalı.....	83
§6. Səthin I kvadratik forması.....	88
§7. Səth üzərində ayrılər arasındakı bucaq.....	92
§8. Səth üzərində qapalı oblastın sahəsi.....	96

§9. Səthin II kvadratik forması.....	97
§10. Səth üzərində əyrinin ayrılığı.....	102
§11. Səth nöqtələrinin təsnifatı.....	104
§12. Baş ayrılıqlər.....	106
§13. Səthin tam və orta ayrılığı.....	109
§14. Sabit ayrılıqli səthlər.....	116
IV FƏSİL.....	117
§1. Səthin daxili həndəsəsi. Derivasion düsturları.....	117
§2. Qauss teoremi. Səth üzərində xəttin geodezik ayrılığı.....	120
§3. Geodezik xətlər.....	123
§4. İzometrik səthlər. Səthlərin əyilməsi.....	129
§5. Qauss-Bonne teoremi.....	132
Ədəbiyyat.....	135

