

V.M.Qurbanov

**ƏDƏDİ
VƏ
FUNKSIONAL SİRALAR**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots$$

BAKİ – 2008

V.M.Qurbanov

ƏDƏDİ VƏ FUNKSIONAL SİRALAR

*Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti üçün
dərs vəsaiti*

*Azərbaycan Respublikası Təhsil
Nazirliyi tərəfindən (25.03.05
tarixli 199 sayılı əmr) dərs vəsaiti
kimi təsdiq edilmişdir.*

BAKİ – 2008

517.2
Q.89
Elmi redaktor:

f. -r. e. d., professor N.B.Kərimov (BDU)

Rəyçilər:

f. -r. e. d., professor H.M.Hüseynov (BDU) ,

f. -r. e. n., dosent B.Ə.Əliyev (ADPU)

Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov. Ədədi və funksional sıralar. Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti üçün dərs vəsaiti. - Bakı: "Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya" MMC 2008. - 114 səh.

Vəsait riyazi analizin mühüm bölmələrindən birinə, ədədi və funksional sıralara həsr edilmişdir və ali məktəb tələbələri, müəllimləri, riyaziyyatla maraqlanan şəxslər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Q 1702050000 - 01
2008

© Qurbanov V.M., 2008

ÖN SÖZ

Bu vəsait müəllifin Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin riyaziyyat fakültəsində oxuduğu mühazirələrin təcrübəsinə əsaslanmışdır. Vəsait ali məktəb riyazi analiz kursunun mühüm bölmələrindən birinə, ədədi və funksional sıralara həsr edilmişdir və iki fəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə ədədi sıralar, ikinci fəsildə isə funksional sıralar şərh edilmişdir.

Müəllif dərs vəsaitinin əlyazmasını diqqətlə oxumuş və dəyərli məsləhətlər vermiş f.r.e.d., prof. S.S.Mirzəyevə (BDU, funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz kafedrası), f.r.e.d., prof.N.B.Kərimova (BDU, riyazi analiz kafedrası), f.r.e.d., prof. H.M.Hüseynova (BDU, tətbiqi riyaziyyat kafedrası), f.r.e.n. T.B.Qasımova (AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun aparıcı elmi işçisi), f.r.e.n., dosent C.N.Süleymanova (ADPU, riyazi analiz kafedrası), f.r.e.n., dosent B.Ə.Əliyevə (ADPU, riyazi analiz kafedrası) öz dərin təşəkkürünü bildirir.

Müəllif.

I FƏSİL.

ƏDƏDİ SİRALAR

Orta məktəb kursunda oxucular sonsuz sayda toplananı olan cəmlərə rast gəlirlər (məsələn, sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəminə). Bu növ cəmlərin öyrənilməsi ədədi ardıcılıqların öyrənilməsinə gətirilə bilər. Buna baxmayaraq belə cəmlərin ətraflı öyrənilməsi lazım gəlir, çünki onlar müxtəlif funksiyaların göstəriləşlərində vacib köməkçi vasitə rolunu oynayırlar.

§1. Ədədi sıra anlayışı

1. Ədədi sıraların yığılması və dağılması. İxtiyari $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ ədədi ardıcılığına baxaq. Bu ardıcılığın elementlərindən formal olaraq

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.1)$$

sonsuz cəmini düzəldək.

Formal düzəldilmiş (1.1) cəminə ədədi sıra və ya sadəcə olaraq sıra deyilir. a_k toplananları (1.1) sırasının hədləri adlanır. (1.1) sırasının ilk n həddinin cəminə bu sıranın n -ci xüsusi cəmi deyilir və S_n simvolu ilə işarə edilir:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1.2)$$

Tərif. (1.2) xüsusi cəmlərinin $\{S_n\}$ ardıcılığı yığılarsa, (1.1) sırası yığılan sıra, $\{S_n\}$ ardıcılığının S limiti isə (1.1) sırasının cəmi adlanır.

Beləliklə, cəmi S olan (1.1) sırası üçün formal olaraq

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

bərabərliyini yazmaq olar.

$\{S_n\}$ ardıcılığı yığılan olmadıqda (1.1) dağılan sıra adlanır.

Göründüyü kimi, sıranın cəmi anlayışı ancaq yığılan sıralar üçün təyin edilir.

Nümunə.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

sirasının yığıldığını göstərək.

◀ Bu sıranın n -ci xüsusi cəminə baxaq :

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

olduğunu nəzərə alaraq S_n cəmini sadələşdirək:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

Aydın ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$

Beləliklə, baxılan sıra yığılır və onun cəmi $S = \frac{1}{2}$ ədədinə bərabərdir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Nümunə. Vuruğu q olan həndəsi silsilənin hədlərindən düzəldilmiş

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

sirasını araşdırın.

◀ S_n xüsusi cəmini hesablayaq:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}, \quad (q \neq 1).$$

$|q| < 1$ bərabərsizliyi ödəndikdə $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$$

və ya

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1 - q}.$$

$|q| > 1$ halında $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ və deməli, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ olduğundan baxılan sıra dağılır.

$q = -1$ olduqda $a - a + a - a + \dots$ ($a \neq 0$) sırasını alırıq. Bu sıra üçün

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ olarsa,} \\ a, & n = 2k - 1 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

Buradan aydın olur ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mövcud deyil.

$q = 1$ olduqda isə $a + a + \dots + a + \dots$ sırasını alırıq. Bu halda $S_n = na$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Sıra dağılır.

Beləliklə, $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ sırası $|q| < 1$ olduqda yığılır və onun cəmi $\frac{a}{1-q}$ ədədinə bərabərdir, $|q| \geq 1$ olduqda isə dağılır. ►

Qeyd 1. Formal nöqtəyi nəzərdən ədədi sıraların öyrənilməsi ədədi ardıcılıqların yeni formada öyrənilməsidir. Doğrudan da, a) hər bir ədədi sıraya yeganə $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı uyğun gəlir, b) ixtiyari $\{S_n\}$ ədədi ardıcılığına hədləri $a_1 = S_1$, $a_k = S_k - S_{k-1}$, $k > 1$, olan yeganə ədədi sıra uyğun gəlir ki, S_n bu sıranın n -ci xüsusi cəmidir.

Qeyd 2. I. Sıranın sonlu sayda hədlərinin atılması və ya sıraya sonlu sayda hədlərin əlavə edilməsi bu sıranın yığılmasına və dağılmasına təsir etmir.

II. $c \neq 0$ və $a'_k = ca_k$ olarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ sırasının

yığılması üçün zəruri və kafi şərt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılmasıdır.

I xassənin doğruluğunu yəqin etmək üçün sıradan sonlu sayda hədd atdıqda və ya sıraya sonlu sayda hədd əlavə etdikdə ilkin sıranın xüsusi cəmlərinin müəyyən sonlu nömrədən başlayaraq eyni bir sabit kəmiyyət qədər dəyişdiyini nəzərə almaq kifayətdir.

II xassəni əsaslandırmaq üçün $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ sıralarının n -ci xüsusi cəmlərini uyğun olaraq S_n və S'_n ilə işarə edək. Aydındır ki, $S'_n = cS_n$, $c \neq 0$. Bu münasibətdən $\{S'_n\}$ ardıcılığının yığılması üçün $\{S_n\}$ ardıcılığının yığılması zəruri və kafi olduğu aydın olur.

2. Ədədi sıranın yığılması üçün Koşi meyarı. Tərifə əsasən sıranın yığılması onun $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığının yığılması ilə eynigüclüdür. Ona görə də, $\{S_n\}$

ardıcılığına Koşi meyarını tətbiq etməklə (1.1) sırasının yığılması üçün meyar alırıq.

Teorem 1.1 (Koşi meyarı). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsinin mövcudluğudur ki, $n \geq N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən ixtiyari n nömrəsi və ixtiyari natural p ədədi üçün

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad (1.3)$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Teoremin hökmünün doğruluğu $\{S_n\}$ ədədi ardıcılığının yığılması üçün Koşi meyarından alınır:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Nəticə 1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılarsa, onda $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ardıcılığının limiti sıfıra bərabərdir.

◀ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığıldığından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, $n \geq N(\varepsilon)$ şərti ödənildikdə (1.3) bərabərsizliyi ixtiyari $p = 1, 2, \dots$ natural ədədləri üçün doğrudur. p natural ədədinin ixtiyariliyinə əsasən (1.3) bərabərsizliyindən $n \geq N(\varepsilon)$ nömrələri üçün $|R_n| \leq \varepsilon$ olduğu alınır. Bu isə $R_n = S - S_n$ ardıcılığının sonsuz kiçik olmasıdır. ▶

Qeyd edək ki, R_n kəmiyyəti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının n -ci qalığı adlanır.

Nəticə 2 (sıranın yığılması üçün zəruri şərt). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılması üçün $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ olması zəruridir.

◀ Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, $n \geq N(\varepsilon)$ olduqda (1.3) bərabərsizliyi ödəyir. Bu bərabərsizliyi $p = 1$ halında yazsaq,

$$|a_{n+1}| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

olduğunu alırıq. $N_0 = N(\varepsilon) + 1$ qəbul etsək $|a_n| < \varepsilon$, $n \geq N_0$ münasibəti alınır. Bu isə $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ olması deməkdir. ►

Qeyd 3. a_k ardıcılığının limiti sıfır bərabər deyilsə və ya limiti yoxdursa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası dağılır.

Nümunə.

$$-1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\pi}{5} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$$

sırası dağılır. Çünki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{k} = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

Nümunə.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$$

sırası dağılır, çünki $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{k+1}$ mövcud deyil.

Qeyd 4. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ olması $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılması üçün kafi deyil.

Nümunə.

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (1.4)$$

sırası üçün $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$.

Göstərək ki, (1.4) sırası dağılır. Koşi meyarını $p = n$ halında yazsaq

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Bu bərabərsizlikdən aydın olur ki, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ üçün (1.3)

münasibəti n -nin heç bir qiymətində ödənilmir. Koşu meyarına əsasən (1.4) sırası dağılır.

Qeyd edək ki, (1.4) sırası harmonik sıra adlanır.

§2. Hədləri mənfə olmayan sıralar

1. Hədləri mənfə olmayan sıraların yığılması üçün zəruri və kafi şərt. Hədləri mənfə olmayan sıraların öyrənilməsi hədləri ixtiyari işarəli sıraların öyrənilməsini asanlaşdırır. Digər tərəfdən hədləri mənfə olmayan sıralar bəzi tətbiqi məsələlərin həllində istifadə olunur. Ona görə də bu sıraların ayrılıqda öyrənilməsi zərurəti var.

Qeyd edək ki, hədləri mənfə olmayan sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığı azalmayıdır. Buna görə də aşağıdakı təklif doğrudur.

Teorem 1.2. Hədləri mənfə olmayan sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığının məhdud olması bu sıranın yığılması üçün zəruri və kəfidir.

◀ Zərurilik. İxtiyari sıranın yığılması onun xüsusi cəmlər ardıcılığının yığılmasıdır. İxtiyari yığılan ardıcılıq isə məhduddur.

Kəfilik. Hədləri mənfə olmayan sıranın xüsusi cəmləri azalmayan ardıcılıq təşkil edir. Bu ardıcılığın yığılması üçün onun məhdud olması kifayətdir. ▶

2. Müqayisə əlamətləri. Sıranın yığılması üçün Koşu meyarı nəzəri maraq kəsb edir. Ounun tətbiqi adətən müəyyən çətinliklərlə müşayiət olunur. Ona görə də daha səmərəli əlamətlərin tapılmasına ehtiyac duyulur. Belə

əlamətlərdən olan müqayisə əlamətləri bir sıranın yığılmasını (dağılmasını) yığılması (dağılması) məlum olan başqa sıra ilə müqayisə vasitəsi ilə araşdırmağa imkan verir.

Teorem 1.3. *Tutaq ki,*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (1.5)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(1.6)

hədləri mənfəi olmayan sıralardır və ixtiyari k nömrəsi üçün

$$a_k \leq b_k \quad (1.7)$$

bərabərsizliyi ödəyir. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası yığılırsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası

da yığılır; $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası dağılırsa, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası da dağılır.

◀ (1.5) və (1.6) sıralarının xüsusi cəmlərini düzəldək:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

(1.7) münasibətindən $S_n \leq \sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$ bərabərsizlikləri alınır.

Tutaq ki, (1.6) sırası yığılır, yəni $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$.

$b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$ olduğundan $0 \leq \sigma_n \leq \sigma$, $n = 1, 2, \dots$. Buradan $0 \leq S_n \leq \sigma$, $n = 1, 2, \dots$ bərabərsizliyi alınır. Bu o deməkdir ki, (1.5) sırasının xüsusi cəmlər ardıcılığı məhduddur. 1.2 teoreminə əsasən (1.5) sırası yığılır.

Tutaq ki, (1.5) sırası dağılır. $a_k \geq 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Onda $\sigma_n \geq S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) bərabərsizliyindən $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$ münasibəti alınır, yəni (1.6) sırası dağılır. ▶

Qeyd1. 1.3 teoreminin hökmünün doğruluğu üçün (1.7) bərabərsizliklərinin müəyyən k_0 nömrəsindən

başlayaraq ödənməsi kifayətdir, çünki sıradan sonlu sayda həddin atılması onun yığılmasına təsir etmir.

Nümunə.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + \sqrt{k}}$$

sirasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft \frac{1}{2^k + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (k=1,2,\dots) \text{ olduğundan və}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sırası yığıldığından araşdırılan sıra 1.3 teoreminə əsasən yığılır. $\blacktriangleright$

Nümunə. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft \ln k < k \quad (k=2,3,\dots) \text{ bərabərsizliyindən}$$

$$\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k} \quad (k=2,3,\dots) \text{ olduğu alınır. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ dağıldığından}$$

(aydındır ki, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ sırası da dağılır) araşdırılan sıra 1.3 teoreminə əsasən dağılır. $\blacktriangleright$

Qeyd 2. 1.3 teoremi daha ümumi $a_k \leq \lambda b_k$ ($\lambda a_k \leq b_k$), $\lambda > 0$ şərti ödəndikdə də doğrudur.

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^k}\right)$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft \sin x \leq x, \quad x \geq 0 \text{ bərabərsizliyindən istifadə etsək}$$

$$0 < 1 - \cos \frac{\pi}{2^k} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2 \cdot 2^k} \leq 2 \left(\frac{\pi}{2 \cdot 2^k} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{4^k}, \quad k=1,2,\dots$$

nisbətini alırıq. $\lambda = \frac{\pi^2}{2}$ və $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ sırası yığıldığından

araşdırılan sıra yığılır (qeyd 2-yə əsasən). ►

1.3 teoremindən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 1. $a_k > 0, b_k > 0$ ($k=1,2,\dots$) və

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L, \quad 0 < L < +\infty$$

olarsa, onda eyni zamanda (1.5) və (1.6) sıralarının ya hər ikisi yığılır, ya da hər ikisi dağılır.

◀ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$ olduğundan elə N_0 nömrəsi var ki,

$k > N_0$ şərti ödənildikdə

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < L + \frac{L}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan $\frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k$, $k > N_0$

bərabərsizliyi alınır.

Tutaq ki, (1.6) sırası yığılır. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_k$ sırası da

yığılır. $a_k < \frac{3L}{2} b_k$, $k > N_0$ olduğundan teorem 1.3 və qeyd

1-ə əsasən (1.5) sırası yığılır.

Tutaq ki, (1.6) sırası dağılır. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{2} b_k$ sırası da

dağılır. $\frac{L}{2} b_k < a_k$, $k > N_0$ bərabərsizliyi ödənildiyindən

teorem 1.3 və qeyd 1-ə əsasən (1.5) sırası da dağılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{k}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

◀ Bu sıranı $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonik sırası ilə müqayisə edək:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} = \pi \neq 0.$$

Harmonik sıra dağıldığından nəticə 1-ə əsasən araşdırılan sıra dağılır. ▶

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - k^2}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

◀ Verilmiş sıranı yığılan $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sırası ilə müqayisə edək:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^k - k^2}}{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^k - k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{2^k}} = 1 \neq 0.$$

Araşdırılan sıra yığılır. ▶

Teorem 1.4. Tutaq ki, (1.5), (1.6) sıralarının hədləri müsbətdirlər və

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Onda (1.6) sırasının yığılmasından (1.5) sırasının yığılması, (1.5) sırasının dağılmasından isə (1.6) sırasının dağılması alınır.

◀ İxtiyari n nömrəsi üçün (1.8) bərabərsizliyini $k = 1, 2, \dots, n-1$ hallarında yazaraq:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə vursaq ,

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \text{ və ya } a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$$

bərabərsizliyini alaraq. Sonuncu bərabərsizlikdə $\lambda = \frac{a_1}{b_1}$

müsbət sabit olduğundan , qeyd 2-yə əsasən teoremin hökmü doğru olar. ►

Qeyd 3. 1.4 teoreminin hökmünün doğru olması üçün (1.8) bərabərsizliklərinin müəyyən k_0 nömrəsindən başlayaraq ödənməsi kifayətdir.

İndi isə

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = 1 + 2^{-\alpha} + \dots + k^{-\alpha} + \dots \quad (1.9)$$

ümumiləşmiş harmonik sırasının $\alpha \leq 1$ halında dağıldığını göstərək.

(1.9) sırasını $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ harmonik sıra ilə müqayisə edək:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1}, \quad \frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\alpha}, \quad k=1,2,\dots$$

$\alpha \leq 1$ olduğundan

$$\frac{k}{k+1} \leq \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\alpha}$$

bərabərsizliyi ixtiyari k nömrəsi üçün ödənilir. 1.4 teoreminə əsasən (1.9) sırası $\alpha \leq 1$ halında dağılır.

3. Dalamber və Koşi əlamətləri. Bu əlamətlər hədləri mənfi olmayan sıraların yığılan

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \dots + q^k + \dots, \quad |q| < 1 \quad (1.10)$$

sırası və ya dağılan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad (1.11)$$

sırası ilə müqayisəsinə əsaslanır.

Teorem 1.5 (Dəlamber əlaməti) a) Tutaq ki, müəyyən nömrədən başlayaraq

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \right) \quad (1.12)$$

bərabərsizliyi ödəyir. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ sırası yığılır (dağılır).

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda \quad \text{olarsa,} \quad (1.13)$$

onda $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ sırası $\lambda < 1$ halında yığılır, $\lambda > 1$ halında isə dağılır.

$$\blacktriangleleft a) \quad b_k = q^k \quad (b_k = 1) \text{ qəbul etsək, } \frac{b_{k+1}}{b_k} = q \quad \left(\frac{b_{k+1}}{b_k} = 1 \right)$$

münasibəti ödəyir və (1.12) bərabərsizliyini

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_{k+1}}{b_k} \right) \quad (1.14)$$

şəklində yazı bilərik.

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası (1.10) (1.11) sırası olduğundan yığılır (dağılır). Onda (1.14) bərabərsizliyi 1.4 teoreminə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılmasını (dağılmasını) təmin edir.

b) Tutaq ki, $0 \leq \lambda < 1$. $\varepsilon = (1 - \lambda) / 2 > 0$ qəbul etsək, ardıcılığın limitinin tərifinə əsasən elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapılar ki, $k \geq N(\varepsilon)$ nömrələri üçün

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \lambda + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (1.15)$$

$q = 1 - \varepsilon$ qəbul etsək, teoremin a) bəndinə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılır.

$\lambda > 1$ olarsa, onda $\varepsilon = \lambda - 1$ qəbul etsək, (1.15) bərabərsizliyinin sol tərəfi

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1, \quad k \geq N_1(\varepsilon)$$

münasibətinə çevrilir. Teoremin a) bəndinə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası dağılır. ►

Qeyd 4. Teorem 1.5-də (1.12) şərtini

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

şərti ilə əvəz etmək olmaz.

◀ Doğrudan da, harmonik sıra üçün

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

şərti ödənilir, lakin harmonik sıra dağılır. ►

Qeyd 5. $\lambda = 1$ olarsa, onda Dalamber əlaməti vasitəsi ilə $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılması və ya dağılması haqda heç bir hökm etmək olmaz.

◀ Doğrudan da, harmonik sıra üçün $\lambda = 1$ olur və bu sıra dağılır. Digər tərəfdən $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, $\alpha > 1$ sırası üçün də $\lambda = 1$ olar. Bu sıra isə yığılır (onun yığıldığı sonralar göstəriləcək). ▶

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\leftarrow a_k = \frac{k^2}{2^k}, \quad a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 2^k}{k^2 2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Dalamber əlamətinə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ sırası yığılır. ▶

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\leftarrow a_k = \frac{k^k}{k!}, \quad a_{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!};$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^k k!}{k! k^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e > 1.$$

Araşdırılan sıra dağılır. ▶

Teorem 1.6 (Koşi əlaməti). a) Tutaq ki, müəyyən nömrədən başlayaraq

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{a_k} \geq 1) \quad (1.16)$$

bərabərsizliyi ödəyir. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılır (dağılır).

$$b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lambda \quad (1.17)$$

olarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası $\lambda < 1$ halında yığılır, $\lambda > 1$ halında isə dağılır.

$$\leftarrow a) \quad b_k = q^k \quad (b_k = 1) \text{ qəbul etsək, (1.16) münasibətindən} \\ a_k \leq b_k \quad (a_k \geq b_k) \quad (1.18)$$

bərabərsizliyi alınır. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sırası (1.10) ((1.11)) sırası ilə eyni olduğundan yığılır (dağılır). Onda (1.18) münasibətinə və 1.3 müqayisə teoreminə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yığılır (dağılır).

b) Tutaq ki, $\lambda < 1$. $\lambda < q < 1$ şərtini ödəyən hər hansı q ədədini seçək. Onda limitin tərifinə əsasən müəyyən N nömrəsi üçün $\sqrt[k]{a_k} < q$ və ya $a_k < q^k$, $k \geq N$ bərabərsizliyi ödənilir. 1.3 müqayisə teoreminə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılır.

Tutaq ki, $\lambda > 1$. Onda müəyyən N nömrəsindən başlayaraq $\sqrt[k]{a_k} > 1$ və ya $a_k > 1$ bərabərsizliyi ödənilir.

Deməli, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ və $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası dağılır. ►

Qeyd 6. 1.6 teoremində $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$ şərtini $\sqrt[k]{a_k} < 1$ şərti ilə əvəz etmək olmaz.

Qeyd 7. $\lambda = 1$ halında $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının yığılması və ya dağılması haqda hökm etmək olmaz (Dəlambert əlaməti üçün uyğun qeyddəki misallara baxın).

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\ln^{2k}(k+1)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft a_k = \frac{2^k}{\ln^{2k}(k+1)}, \quad \sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{\ln^2(k+1)}$$

olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln^2(k+1)} = 0 < 1$$

Koşi əlamətinə əsasən sıra yığılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft a_k = \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \quad \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{e}{2} > 1.$$

Araşdırılan sıra Koşi əlamətinə əsasən dağılır. ►

Qeyd 8. Koşi əlamətinin tətbiq dairəsi Dalamber əlamətinin tətbiq dairəsindən genişdir, yəni Dalamber əlaməti ilə araşdırıla bilən sıraları Koşi əlaməti ilə də araşdırmaq olar. Tərsi isə doğru deyil.

Doğrudan da, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$ sırası Koşi əlamətinə

əsasən yığılır, çünki (1.17) limiti $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir. (1.13) limiti

mövcud olmadığından bu sıraya Dalamber əlamətini tətbiq etmək olmaz.

Ümumiyyətlə, aşağıdakı təklif doğrudur.

Təklif. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ mövcuddursa və λ -ya bərabədirsə,

onda $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ mövcuddur və λ -ya bərabərdir.

3.9.14. **4. Koşi-Makleron əlaməti (inteqral əlaməti).** Bəzi sıraların yığılmasının araşdırılması üçün Dalamber və Koşi

əlamətlərinin tətbiqləri müsbət nəticə vermir. Məsələn, ümumiləşmiş harmonik sıra üçün (1.13) və (1.17) limitləri 1-ə bərabərdir. Ona görə də, bu əlamətlər vasitəsi ilə ümumiləşmiş harmonik sıranın yığılması araşdırıla bilməz.

Teorem 1.7 (Koşi-Makleron əlaməti). *Tutaq ki, $f(x)$*

$[1, \infty)$ yarımxunda mənfi olmayan və artmayan funksiyadır.

Ona $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt

$$a_n = \int_1^n f(x) dx \quad (n=1,2,\dots) \quad (1.19)$$

ardıcılığının yığılmasıdır.

◀ $k \geq 2$ şərtini ödəyən k natural ədədi üçün $k-1 \leq x \leq k$ parçasını qeyd edək. Bu parçada $f(x)$ funksiyası artmayan olduğundan ixtiyari $x \in [k-1, k]$ nöqtəsində

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \quad (1.20)$$

bərabərsizliyi ödəyir. $[k-1, k]$ parçasında $f(x)$ monoton və məhdud olduğundan o bu parçada inteqrallanır. Müəyyən inteqralın bərabərsizliklə bağlı xassəsinə əsasən (1.20) münasibətindən

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx$$

və ya

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad (1.21)$$

bərabərsizliyi alınır.

(1.21) bərabərsizliyini $k = 2, 3, \dots, n$ hallarında yazaq:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1),$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2),$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1).$$

Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \quad (1.22)$$

$S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ işarələməsi daxil etsək, (1.22) bərabərsizliyi

$$S_n - f(1) \leq a_n \leq S_{n-1} \quad (1.23)$$

şəklində yazılar.

Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sırası yığılır. Onda $\{S_n\}$ ardıcılığı məhduddur. (1.23) bərabərsizliyinin sağ tərəfinə əsasən $\{a_n\}$ ardıcılığı da məhduddur və $\{a_n\}$ ardıcılığı azalmadığından onun limiti var.

Tutaq ki, $\{a_n\}$ ardıcılığı yığılır. Onun limitini a ilə işarə edək. $\{a_n\}$ ardıcılığı azalmadığından $a_n \leq a$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu bərabərsizliyə və (1.23)-ün sol tərəfinə əsasən $\{S_n\}$ ardıcılığı məhduddur:

$$0 \leq S_n \leq a_n + f(1) \leq a + f(1).$$

1.2 teoreminə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sırası yığılır. ►

Qeyd 9. 1.7 teoremində $x \geq 1$ şərti $x \geq m$ (m - ixtiyari nömrədir) şərti ilə əvəz edilə bilər. Bu halda $a_n = \int_m^n f(x) dx$ götürmək lazımdır.

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

◀ $\alpha \leq 1$ halında bu sıranın dağıldığı bizə məlumdur. $\alpha > 1$ halını tədqiq edək:

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Koşi-Makleron əlamətinə əsasən ümumiləşmiş harmonik sıra $\alpha > 1$ halında yığılır. ▶

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

◀ Bu halda $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 1$ funksiyasına baxmaq lazımdır.

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{1+x^2} = \arctg n - \arctg 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg n - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olduğundan verilmiş sıra yığılır. ▶

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

◀ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \geq 1$ funksiyasına baxsaq, verilmiş sıranın k -cı həddinin $f(k)$ -ya bərabər olduğu aydın olar.

$$a_n = \int_1^n \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} [\ln(n^2 + 1) - \ln 2], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Koşi-Makleron əlamətinə əsasən $\sum \frac{k}{k^2 + 1}$ sırası dağılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k-2) \ln^2(k-2)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft f(x) = \frac{1}{(x-2) \ln^2(x-2)}, \quad x \geq 4 \text{ funksiyasına}$$

$$\text{baxaq. Aydındır ki, } f(k) = \frac{1}{(k-2) \ln^2(k-2)}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_4^n \frac{dx}{(x-2) \ln^2(x-2)} = \int_4^n \frac{d[\ln(x-2)]}{\ln^2(x-2)} = -\frac{1}{\ln(x-2)} \Big|_4^n = \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n-2)}; \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n-2)} \right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Qeyd 9-a əsasən $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k-2) \ln^2(k-2)}$ sırası yığılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$, $\alpha > 0$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\blacktriangleleft f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}, \quad x \geq 2, \quad \alpha > 0 \text{ funksiyasına baxaq.}$$

$$\text{Aydındır ki, } f(k) = \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}, \quad k \geq 2 \text{ olarsa}$$

$$a_n = \int_2^n \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \begin{cases} \ln \ln n - \ln \ln 2, & \alpha = 1 \text{ olarsa,} \\ \frac{\ln^{1-\alpha} n - \ln^{1-\alpha} 2}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

Buradan aydın olur ki, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\alpha k}$ sırası $\alpha \leq 1$ olduqda dağılır, $\alpha > 1$ olduqda isə yığılır. ►

Qeyd 10. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası 1.7 teoreminin şərtlərini ödəyir və $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sırası S cəminə yığılır. Onda $R_n = S - S_n$ qalığı üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$0 < R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx.$$

$$\blacktriangleleft R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_n^{+\infty} f(x) dx. \blacktriangleright$$

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p > 1$ sırasının n -ci qalığını

qiymətləndirin.

$$\blacktriangleleft R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_n^{+\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Beləliklə,

$$R_n \leq \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \blacktriangleright$$

5. Raabe əlaməti. Bu əlamət hədləri mənfi olmayan sıranın

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

ümumiləşmiş harmonik sıra ilə müqayisəsinə əsaslanır.

Teorem 1.8. (Raabe əlaməti). a) Tutaq ki, müəyyən nömrədən başlayaraq

$$k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \geq q > 1 \quad \left(k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \leq 1 \right)$$

bərabərsizliyi ödəyir, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılır (dağılır).

b) Tutaq ki, $\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \lambda$. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası $\lambda > 1$ halında yığılır, $\lambda < 1$ halında isə dağılır.

Nümunə. $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$, $a_k = 2^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1}\right)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = k \left(1 - \frac{2^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right)}}{2^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1}\right)}} \right) = k \left(1 - 2^{-\frac{1}{k}} \right) = \frac{2^{-\frac{1}{k}} - 1}{-\frac{1}{k}};$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{-\frac{1}{k}} - 1}{-\frac{1}{k}} = \ln 2 < 1.$$

Araşdırılan sıra Raabe əlamətinə əsasən dağılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \frac{\sqrt{k!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{k})}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$$\triangleleft k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = k \left(1 - \frac{\sqrt{k+1}}{1 + \sqrt{k+1}} \right) = \frac{k}{1 + \sqrt{k+1}};$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \sqrt{k+1}} = +\infty$$

Araşdırılan sıra Raabe əlamətinə əsasən yığılır. ►

§3. Mütləq və şərti yığılan sıralar

1. Mütləq və şərti yığılma anlayışları. Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.24)$$

sırasının hədləri ixtiyari həqiqi ədədlərdir.

Tərif. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırası yığılırsa, onda (1.24) sırasına mütləq yığılan sıra deyilir.

Qeyd edək ki, tərifdə (1.24) sırasının yığılması haqqında heç bir məlumat verilmir. Əslində bu məlumata ehtiyac yoxdur, çünki aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1.9. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırasının yığılmasından (1.24) sırasının yığılması alınır.

◀ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırası yığıldığından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi var ki, $n \geq N$ şərtini ödəyən n nömrələri və ixtiyari natural p ədədi üçün

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad (1.25)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \quad (1.26)$$

doğru olduğundan (1.25) və (1.26) münasibətlərindən

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin $n \geq N$ və ixtiyari p natural ədədi üçün ödəndiyi alınır. Koşi meyarına əsasən (1.24) sırası yığılır. ►

Nəticə 1. (1.24) sırası mütləq yığılırsa, onda

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

◄ Ixtiyari n natural ədədi üçün

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliyi

$$-\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

şəklində yazaq. Bu bərabərsizlikdə $n \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək

$$-\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

və ya

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

bərabərsizliyi alınır. ►

Tərif. (1.24) sırası yığılırsa və $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırası dağılırsa, onda (1.24) sırasına şərti yığılan sıra deyilir.

Nümunə. $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$ sırası mütləq yığılır, çünki $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ sırası yığılır.

Nümunə. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sırasının şərti

yığıldığını isbat edək.

◄ $y = \ln(1+x)$, $0 \leq x \leq 1$ funksiyası üçün Makleron düsturunu yazaq;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$$

Bu düsturdan $x=1$ halında

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

və ya $\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = |R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$ alınır. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

olduğundan sonuncu bərabərsizliyi

$$|\ln 2 - S_n| < \frac{1}{n+1}$$

şəklində yazmaq olar. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 - S_n) = 0$ alınır. Yəni,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2. \text{ Məlum olduğu kimi } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ sırası}$$

dağılır. ►

2. Mütləq yığılan sıranın hədlərinin yerdəyişməsi haqqında Koşi teoremi.

Teorem 1.10 (Koşi teoremi). Mütləq yığılan sıranın hədlərinin yerdəyişməsindən alınan ixtiyari sıra mütləq yığılır və onun cəmi verilmiş sıranın cəminə bərabərdir.

◀ Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.27)$$

sırası mütləq yığılır və onun cəmi S -dir.

Fərz edək ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k \quad (1.28)$$

sırası (1.27) sırasının hədlərinin yerdəyişməsindən alınmış hər hansı sıradır. (1.28) sırasının S -ə yığıldığını isbat edək. (1.27) sırası mütləq yığıldığından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N_0 nömrəsi var ki,

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (p - \text{ixtyari natural ədəddir}) \quad (1.29)$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0} a_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.30)$$

bərabərsizlikləri ödəyir. N nömrəsini elə seçək ki, (1.28) sırasının S_n , $n \geq N$ xüsusi cəmləri (1.27) sırasının ilk N_0 həddini özündə saxlasın. Aydındır ki,

$$\left| \sum_{k=1}^n a'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} a_k - S \right|. \quad (1.31)$$

N ədədinin seçilməsinə əsasən

$$\sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k \quad (1.32)$$

fərqi (1.27) sırasının $n - N_0$ sayda hədlərindən təşkil olunmuşdur və onların nömrələri N_0 -dan böyükdürlər.

p natural ədədini elə seçək ki, $N_0 + p > n - N_0$ bərabərsizliyi ödənsin. Onda, (1.32) fərqi üçün

$$\left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k \right| < \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |a_k| \quad (1.33)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

(1.31) münasibətində əvvəlcə (1.33) bərabərsizliyini, sonra isə (1.29), (1.30) qiymətləndirmələrini nəzərə alaraq:

$$\left| \sum_{k=1}^n a'_k - S \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |a_k| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} a_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n > N_0$$

Beləliklə, (1.28) sırasının cəminin S olduğu isbat edildi. (1.28) sırasının mütləq yığıldığına əmin olmaq üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$$

sıralarının eyni cəmə malik olduqlarını qeyd etmək kifayətdir. Bu sıraların eyni cəmə malik olması isə yuxarıda aparılan

isbatın $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırasına tətbiqindən alınır. ►

sual 22

3. Şerti yığılan sıranın hədlərinin yerdəyişməsi haqqında Riman teoremi. İndi isə şerti yığılan sıraların hədlərinin yerdəyişməsini öyrənək. Mütləq yığılan sıralardan fərqli olaraq şerti yığılan sıraların hədlərinin yerdəyişməsi onun cəminə ciddi təsir edir. Bu məsələyə aşağıdakı teoremdə tam aydınlıq gətirilir.

Teorem 1.11 (Riman teoremi). *Sıra şerti yığılırsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş A ədədi üçün bu sıranın hədlərinin yerini elə dəyişmək olar ki, çevrilmiş sıra A ədədinə yığılsın.*

◀ Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.34)$$

sırası şerti yığılır. Bu sıranın müsbət hədlərini yerləşmə ardıcılığını saxlamaqla $p_1, p_2, p_3, \dots$ ilə, mənfi hədlərinin mütləq qiymətlərini isə yerləşmə ardıcılığını saxlamaqla $q_1, q_2, q_3, \dots$ ilə işarə edək. (1.34) sırasında sonsuz sayda müsbət və sonsuz sayda mənfi hədlər iştirak edir. Əks halda bu sıra mütləq yığılardı. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ sıralarını uyğun olaraq

P və Q ilə işarə edək. Göstərək ki, bu sıralar dağılırlar. Tutaq ki, S_n (1.34) sırasının n -ci xüsusi cəmidir. P_n ilə S_n -ə daxil olan müsbət hədlərin cəmini, Q_n ilə isə S_n -ə daxil olan mənfi hədlərin mütləq qiymətlərinin cəmini işarə edək. Aydınır ki, $S_n = P_n - Q_n$. (1.34) sırası yığıldığından $P_n - Q_n$ ardıcılığı yığılır. Digər tərəfdən isə $P_n + Q_n$ ardıcılığı dağılır, çünki (1.34) sırası mütləq yığılmır. Ona görə də P_n və Q_n ardıcılıqları dağılır

(onlardan heç olmasa biri yığılsaydı, onda digəri də yığılardı. Bu isə $P_n + Q_n$ ardıcılığının dağılmasına ziddir).

(1.34) sırasından dəqiq o sayda $p_1, p_2, \dots, p_{k_1}$ müsbət hədlərini seçək ki,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A$$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1-1} < A)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Bu cəmə dəqiq o sayda $-q_1, -q_2, \dots, -q_{k_2}$ mənfi hədlərini əlavə edək ki,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} < A$$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2-1} > A)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Alınmış cəmə yenidən dəqiq o sayda $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots, p_{k_3}$ müsbət hədlərini əlavə edək ki,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \dots + p_{k_3} > A$$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \dots + p_{k_3-1} < A)$$

münasibəti ödənsin. Bu prosesi sonsuz davam etdirsək (1.34) sırasının hər həddi iştirak edən yeni sıra alınar, çünki yeni sıra yaradılarkən hər dəfə (1.34) sırasının heç olmasa bir müsbət və ya mənfi həddi əlavə olunur.

Yeni sıranın A ədədinə yığıldığını isbat edək. Bu sıranın xüsusi cəmlərini K_m ilə işarə edək. Yeni sırada

müsbət və mənfi hədlər qrupu növbələşdiyindən iki hal mümkündür:

a) K_m xüsusi cəmi hansısa qrupun son həddi ilə tamamlanır. b) K_m xüsusi cəmi hansısa qrupun aralıq həddi ilə tamamlanır.

a) halında $|K_m - A|$ meyli K_m xüsusi cəminin son həddinin mütləq qiymətini aşmır;

b) halında isə $|K_m - A|$ meyli K_m xüsusi cəminə daxil olan sondan əvvəlki qrupun son həddinin mütləq qiymətini aşmır. (1.34) sırası yığıldığına görə onun ümumi həddinin limiti sifıra bərabərdir. Ona görə də yeni sıranı təşkil edən qrupların son hədlərindən düzəldilmiş ardıcılığın da limiti sıfırdır. Bu isə $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = A$ olduğunu göstərir. ►

Qeyd 1. Eyni qayda ilə isbat etmək olar ki, şərti yığılan sıranın hədlərinin yerlərini elə dəyişdirmək mümkündür ki, çövrülmüş sıranın xüsusi cəmləri sonsuz böyük ardıcılıq təşkil etsinlər.

Nümunə. Şərti yığılan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots$$

sırasına baxaq. Bu sıranın cəminin $\ln 2$ olduğu bizə məlumdur. Baxılan sırada elə yerdəyişmə edək ki, hər bir müsbət həddən sonra iki mənfi hədd dayansın:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots$$

Bu yerdəyişmə nəticəsində cəmin iki dəfə azaldığını göstərek.

Bu sıraların xüsusi cəmlərini uyğun olaraq S_n və S'_n ilə işarə edək. Onda

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}$$

$$S'_{3n-1} = \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{4n}$$

$$S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{3n-1} = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{3n-2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

münasibətləri ödənilir. Buradan aydın olur ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \ln 2.$$

§4. İxtiyari sıralar üçün yığılma əlamətləri

Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.35)$$

hədləri ixtiyari işarəli sıradır. Qeyd edək ki, bu sıranın mütləq yığılmasını tədqiq etmək üçün işarəsi mənfi olmayan sıraların yığılma əlamətlərini tətbiq etmək olar, lakin bu əlamətlərin tətbiqi ilə (1.35) sırasının şərti yığıldığını aydınlaşdırmaq mümkün deyil (Koşi və Dəlamber əlamətləri (1.35) sırasının dağılmasını göstərmək üçün tətbiq edilə bilər). Bu səbəbdən də (1.35) sırasının şərti yığılması üçün yeni əlamətlər axtarılmasına ehtiyac var.

Yeni əlamətlərin isbatlarında Abel çevirməsi xüsusi rol oynayır.

Lemma (Abel çevirməsi). Tutaq ki, $\{a_k\}$ və $\{b_k\}$ ixtiyari ardıcılıqlardır, $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ($S_0 = 0$). Onda aşağıdakı çevirmə doğrudur:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.36)$$

◀ $a_k = S_k - S_{k-1}$ bərabərliyinə əsasən

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} b_k$$

Sonuncu cəmdə k cəmləmə indeksini $k+1$ ilə əvəz etsək ,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k b_{k+1} =$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1}.$$

► *Tərif. Tutaq ki,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \quad (1.37)$$

sırası yığılır. Onda $\{b_k\}$ ardıcılığına məhdud variyasiyalı ardıcılıq deyilir.

Aydındır ki, $\{b_k\}$ ardıcılığı məhdud variyasiyalıdırsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) \quad (1.38)$$

sırası yığılır. Onun cəmini B ilə işarə edək. (1.38) sırasının n -ci xüsusi cəmi $S_n = b_{n+1} - b_1$ olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = B + b_1$ olar, yeni, ixtiyari məhdud variyasiyalı ardıcılıq yığılır.

İndi isə

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad (1.39)$$

sirasının yığılmasını araşdıraraq.

Teorem 1.12 (Abelin birinci əlaməti).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.40)$$

sirasının $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı məhduddursa və $\{b_k\}$ sıfıra yığılan məhdud variyasiyalı ardıcılıqdırsa, onda (1.39) sırası yığılır.

◀ Teoremin şərtinə əsasən elə $M > 0$ ədədi var ki, $|S_n| \leq M$. $\{b_k\}$ ardıcılığının məhdud variyasiyalı olmasına və limitinin sıfıra bərabər olmasına əsasən ixtiyari qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi var ki, $n \geq N$ və ixtiyari p natural ədədi üçün

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad (1.41)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1} - b_k| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad (1.42)$$

bərabərsizlikləri ödəyir.

Abel çevirməsindən istifadə etsək

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \right| + |S_{n+p}| |b_{n+p}| + |S_n| |b_{n+p}|$$

münasibətini alırıq. Bu münasibətdə $|S_n| \leq M$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq M \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_{n+p}| + |b_{n+1}| \right\}.$$

(1.41) və (1.42) münasibətini sonuncu bərabərsizlikdə nəzərə alsaq ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon, \quad n \geq N, \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.43)$$

Onda Koşi meyarına əsasən (1.39) sırası yığılır. ►

Teorem 1.13 (Abelin ikinci əlaməti). *Tutaq ki, (1.40) sırası yığılır, $\{b_k\}$ məhdud varyasiyalı ardıcılıqdır. Onda (1.39) sırası yığılır.*

◄ Hər bir yığılan sıranın xüsusi cəmlər ardıcılığı məhdud olduğundan (1.40) sırasının $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı məhduddur, yəni elə $M > 0$ ədədi var ki, $|S_n| \leq M$.

(1.40) sırasının cəmini S ilə, $\{b_k\}$ ardıcılığının limitini isə b ilə işarə edək. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n b_n = Sb, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n b_{n+1} = Sb.$$

Bu münasibətlərə və $\{b_k\}$ ardıcılığının məhdud varyasiyalı olmasına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi var ki, $n \geq N$ və ixtiyari p natural ədədləri üçün

$$|S_n b_n - Sb| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n b_{n+1} - Sb| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1} - b_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

bərabərsizlikləri ödənilir. Bu bərabərsizlikləri və $|S_n| \leq M$ qiymətləndirilməsini

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |b_k - b_{k+1}| + |S_{n+p} b_{n+p} - Sb| + |Sb - S_n b_{n+1}|$$

münasibətində nəzərə alaraq (1.43) bərabərsizliyinin ödəndiyini isbat etmiş olarıq. Onda Koşi meyarına əsasən (1.39) sırası yığılır. ►

Nəticə 1 (Dirixle-Abel əlaməti). Tutaq ki,

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının S_n xüsusi cəmləri məhdud ardıcılıq

təşkil edir;

b) $b_1 \geq b_2 \geq \dots$;

c) $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Onda (1.39) sırası yığılır.

◀ b) və c) şərtlərindən $\{b_k\}$ ardıcılığının məhdud variyasiyalı olması alınır, çünki (1.37) sırasının xüsusi cəmləri $A_n = b_1 - b_{n+1}$ olur və $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = b_1$. Onda Abelin birinci əlamətinə görə (1.39) sırası yığılır. ►

Sual 3 Nəticə 2. (Leybnis əlaməti). Tutaq ki,

1) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \dots$;

2) $c_{2n-1} \geq 0$, $c_{2n} \leq 0$, $n = 1, 2, \dots$;

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$.

Onda $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sırası yığılır.

◀ $a_k = (-1)^{k+1}$, $b_k = |c_k|$ qəbul etsək Dirixle-Abel

əlamətinə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sırası yığılır. ►

Qeyd edək ki, 2) şərtini ödəyən sıra işarəsini növbə ilə dəyişən, 1)-3) şərtlərini ödəyən sıra Leybnis sırası adlanır.

Qeyd 1. Leybnis sırasının $\{S_{2n}\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı azalmayan, $\{S_{2n-1}\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı isə artmayandır. Ona görə də bu sıranın S cəmi $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$ bərabərsizliyini ödəyir. $S_{2n-1} - S_{2n} = |c_{2n}|$ olduğundan, S_{2n} və S_{2n-1} xüsusi cəmləri S cəmindən $|c_{2n}|$ ədədindən çox fərqlənə bilməz, yəni $|S_{2n} - S| \leq |c_{2n}|$, $|S_{2n-1} - S| \leq |c_{2n}|$

harabərsizlikləri ödənər. Burada $|c_{2n-1}| \geq |c_{2n}|$ olduğunu nəzərə alsaq, ixtiyari n nömrəsi üçün $|R_n| = |S_n - S| \leq |c_n|$ harabərsizliyi ödənər. Bu qiymətləndirmə Leybnis sırasının cəminin təqribi hesablanması üçün geniş istifadə olunur.

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ sırası işarəsini dəyişən sıradır və

Leybnis əlamətindəki şərtləri ödəyir. Ona görə də bu sıra yığılır. Qeyd edək ki, bu sıra mütləq yığılmır.

Nümunə.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \dots$$

sırasının yığılmasını isbat edin.

$$\blacktriangleleft a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = -1, a_6 = -1, a_7 = 1, \dots$$

olduğuna görə $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırasının xüsusi cəmlər ardıcılığı

$$1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, \dots \text{ məhduddur. } \{b_k\}, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ azalmayan və sıfıra}$$

yığılan ardıcılıq olduğundan, araşdırılan sıra Dirixle-Abel əlamətinə əsasən yığılır. $\blacktriangleright$

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

$\blacktriangleleft$ Asanlıqla görmək olar ki, n natural ədədi k^2 və $(k+1)^2 - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) ədədləri arasında dəyişdikdə verilmiş sıranın hədləri eyni işarəlidir. Bu səbəbdən də verilmiş sıranı

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]$$

Leybnis sırası şəklində yazı bilərik. Kvadrat mötərizənin içərisindəki cəmi qiymətləndirək. Aydın ki,

$$b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{k^2+2k} = \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{k^2+k-1} \right) + \left(\frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{k^2+k+1} + \dots + \frac{1}{k^2+2k} \right).$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfindəki hər bir mötərizədəki cəm $\frac{1}{k+1}$ ədədindən böyük, $\frac{1}{k}$ ədədindən isə kiçik olduğundan

$$\frac{2}{k+1} < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2}{k}$$

bərabərsizliyi ödəyir. Bu səbəbdən də $\{b_k\}$ ardıcılığı monoton azalaraq sıfıra yığılır. Bu isə verilmiş sıranın Leybnis əlamətinin şərtlərini ödədiyini göstərir. Beləliklə, verilmiş sıra yığılır. ►

§5. Yığılan sıralar üzərində hesab əməlləri

Yığılan sıralar üçün toplama və vurma əməlləri təyin edilir.

Teorem 1.14. Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

olarsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c A, \quad c - \text{ixtiyari sabitdir.}$$

◀ Tutaq ki,

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) \quad , \quad S'_n = \sum_{k=1}^n c a_k \quad .$$

A və B_n ardıcılıqlarının sonlu limitləri olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c A_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cA \quad \blacktriangleright$$

Beləliklə, yığılan iki sıranı hədbəhəd toplamaq və çıxmaq olar.

İki sıranın hasili müxtəlif şəkildə təyin edilə bilər. Biz əsasən iki tip hasilə baxacağıq.

Teorem 1.15. *Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sıraları mütləq*

$$\text{yığılırlar və } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B.$$

Onda bütün mümkün $a_k b_l$ ($k=1,2,\dots; l=1,2,\dots$) hasillərindən düzəlmiş, ixtiyari qayda ilə nömrələnmiş sıra da mütləq yığılır və onun cəmi AB ədədinə bərabərdir.

◀ Tutaq ki, $a_k b_l$ ($k=1,2,\dots; l=1,2,\dots$) hasilləri müəyyən qayda ilə nömrələnmişlər. Bu nömrələmədən alınan ardıcılığı $\{c_n\}$ ilə işarə edərək $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ sırasının

yığıldığını isbat edək. S_n ilə bu sıranın n -ci xüsusi cəmini işarə edək. Aydındır ki, S_n xüsusi cəmi $|a_k b_l|$ şəkilli hədlərdən təşkil olunmuşdur. S_n -nin hədlərində olan k və l indekslərinin ən böyüyünü m ilə işarə edək. Onda

$$S_n \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_m|) \quad (1.44)$$

Teoremin şərtinə əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ sıraları yığıldığından onların xüsusi cəmlər ardıcılıqları məhduddur. Onda bu xüsusi cəmlərin hasilləri də məhdud olur. (1.44)

bərabərsizliyin sağ tərəfi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ və $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ sıralarının m -ci xüsusi cəmlərinin hasilləri olduğundan $\{S_n\}$ ardıcılığı məhduddur. 1.2 teoreminə əsasən $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ yığılır.

İndi isə $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sırasının cəminin $S = AB$ olduğunu göstərək. Bu sıra mütləq yığıldığından onun S cəmi hədlərin cəmləmə ardıcılığından asılı deyil (teorem 1.10). Bu səbəbdən də AB ədədinə yığılan müəyyən xüsusi cəmlər ardıcılığının varlığını göstərmək kifayətdir.

$$C_m = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$$

xüsusi cəmlərini götürsək, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sırasının cəminin AB olduğu aşkar olur, çünki

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_m) \lim_{m \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_m) = AB. \blacktriangleright$$

Bəzi məqsədlər üçün $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sıralarının hasili

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots + (a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \dots + a_k b_1) + \dots$$

şəklində təyin edilir. Bu hasil sıraların Koşi hasili adlanır.

Teorem 1.16 (Mertens). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sıralarından biri mütləq, digəri isə heç olmasa şərti yığılırsa, onda bu sıraların Koşi hasili onların cəmlərinin hasilinə yığılır.

◀ Fərz edək ki, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası mütləq, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası isə şərti yığılır. Bu sıraların n -ci xüsusi cəmlərini uyğun olaraq A_n və B_n , cəmlərini isə uyğun olaraq A və B ilə işarə edək.

$$C_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_1, \quad C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

qəbul edək. Onda

$$\begin{aligned} C_n &= c_1 + c_2 + \dots + c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots \\ &+ (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) = a_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + \\ &+ a_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n b_1 = \\ &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n b_k$ sırası yığıldığından onun $\beta_n = B - B_n$ qalığı

sonsuz kiçikdir. Ona görə də $\{\beta_n\}$ ardıcılığı məhduddur, yəni elə M ədədi var ki,

$$|\beta_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

Aydınır ki,

$$C_n = a_1 (B - \beta_n) + a_2 (B - \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B - \beta_1) = A_n B - \gamma_n,$$

$$\gamma_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = AB \quad \text{olduğunu isbat edək.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

olduğundan $\{\gamma_n\}$ ardıcılığının sonsuz kiçik olmasını isbat

olmaq kifayətdir. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası mütləq yığıldığından qeyd

olunmuş ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə m nömrəsi var ki,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (1.46)$$

berabərsizliyi ödəyir. Bundan əlavə, elə M_1 ədədi göstərmək olar ki,

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq M_1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.47)$$

$\{\gamma_n\}$ ardıcılığının hədlərini iki cəmə ayıraq:

$$\gamma_n = [a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \dots + a_m\beta_{n+1-m}] + [a_{m+1}\beta_{n-m} + \dots + a_n\beta_1], \quad n >$$

Seçilmiş m nömrəsinə görə elə n_1 nömrəsi tapa bilərik ki,

$$|\beta_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}, \quad k > n_1 - m. \quad (1.48)$$

(1.45)-(1.48) bərabərsizliklərindən $n > n_1$ nömrələri üçün

$$|\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \sum_{k=1}^m |a_k| + M \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

münasibətinin ödəndiyi alınır. $\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan teorem isbat olundu. ►

Qeyd 1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sıralarının hər ikisi şərti yığılarsa, onda onların Koşi hasili dağılır.

◀ Doğrudan da, hər iki sıranı $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ qəbul etsək,

$$C_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}} \right]$$

olar. Kvadrat mötərizədə hər biri $\frac{1}{n}$ -dən kiçik olmayan n

sayda toplanan iştirak etdiyindən $|C_n| \geq 1$. Bu isə $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$

sırasının dağıldığını göstərir. ►

Teorem 1.17. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sıraları uyğun olaraq

A, B, C ədədlərinə yığılırlarsa və $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$ olarsa, onda $C = AB$.

1.17 teoremi göstərir ki, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sırası yığıldıqda $AB = C$

əbərliliyinin doğruluğu üçün $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sıralarından
 heç birinin mütləq yığılması zəruri deyil.

I fəslə aid çalışmalar

Sıraların n -ci həddinin düsturunu yazın:

1. $\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{27}{4} + \dots$

2. $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \dots$

3. $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots$

4. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots$

5. $\frac{2}{3} + \frac{6}{8} + \frac{24}{15} + \frac{120}{24} + \dots$

Sıraların S_n xüsusi cəmlərini tapın və sıranın
 yığılmasının tərifindən istifadə edərək onların yığıldıqlarını
 təsbit edin:

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 3k - 2}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)}$

Koşi meyarından istifadə edərək sıraların yığılmasını
 təsdiqləyin:

10. $\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos kx}{2^k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}$

11. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin x^2}{2^2} + \dots + \frac{\sin x^k}{k^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x^k}{k^2}$

$$12. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$13. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}.$$

Müqayisə və başqa əlamətləri tətbiq edərək sıraların yığılmasını araşdırın:

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+1}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha n}{2^n}, \quad (\alpha \neq 0).$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + 1}}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sin \frac{\pi}{n}}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{3^n} \right).$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 2^{-n}).$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

Dalamber əlamətinin tətbiqi ilə sıraların yığılmasını araşdırın:

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n + 1}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin \frac{\pi}{3^n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad (0 \leq a \neq 1).$$

Koşi əlamətini tətbiq edərək sıraların yığılmasını araşdırın:

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)^n.$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{2n+1}{n}.$$

Koşi-Makleron əlamətini tətbiq edərək sıraların yığılmasını araşdırın:

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}.$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{n^2}{2}}.$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{-\sqrt{n}}.$$

Sıraların yığılmasını araşdırın:

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+n+1}.$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1) \ln n}.$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln^2 n}.$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\ln^4(n+1)}.$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2} + n \ln^2 n}.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{1+n^2}.$$

Sıraların yığılmasını və mütləq yığılmasını araşdırın.

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}.$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$47. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln \ln n}.$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{(2n-1)^n}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6n-5}.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^3}.$$

Sıraların şartı yığıldığını isbat edin.

$$51. 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} ..$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$55. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < \pi$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad 0 < x < \pi$$

II FƏSİL.

FUNKSIONAL ARDICILLIQLAR VƏ SIRALAR

§ 1. Nöqtədə yığılma və çoxluqda müntəzəm yığılma anlayışları

1. Funksional ardıcılıq və sıraların nöqtədə və çoxluqda yığılması. Tutaq ki, E^1 və ya E^m evklid fəzasında müəyyən $X = \{x\}$ çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluqda təyin olunmuş, nömrələnmiş $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ funksiyalar çoxluğuna funksional ardıcılıq deyəcəyik. $f_n(x)$ funksiyalarına bu funksional ardıcılığın hədləri və ya elementləri, X çoxluğuna isə $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ funksional ardıcılığının təyin oblası deyəcəyik.

Funksional ardıcılıq adətən fiqurlu mötərizənin vasitəsi ilə yazılır: $\{f_n(x)\}$.

Müəyyən X çoxluğunda təyin olunmuş $\{u_n(x)\}$ funksional ardıcılığına baxaq. Formal yazılmış

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2.1)$$

cəminə funksional sıra deyəcəyik.

$u_n(x)$ funksiyalarına (2.1) sırasının hədləri, X çoxluğuna isə bu sıranın təyin oblası deyəcəyik.

Ədədi sıralarda olduğu kimi, (2.1) sırasının ilk n həddinin cəminə onun n -ci xüsusi cəmi deyərək $S_n(x)$ ilə işarə edəcəyik:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

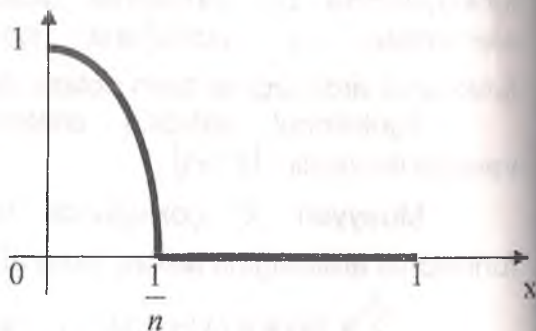
Qeyd edək ki, funksional sıranın öyrənilməsi onun $\{S_n(x)\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığının öyrənilməsilə

eynigüclüdür. Doğrudan da (2.1) sırasına yeganə $\{S_n(x)\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı uyğundur və əksinə, hər bir $\{S_n(x)\}$ funksional ardıcılığına hədləri $u_1(x) = S_1(x)$, $u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, $n > 1$ münasibəti ilə təyin olunan yeganə (2.1) funksional sırası uyğundur.

Nümunə. $X = [0,1]$ parçasında təyin olunmuş $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi nx}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ olduqda} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (2.2)$$

funksional ardıcılığına baxaq. Bu ardıcılığın $f_n(x)$ elementinin qrafiki aşağıdakı şəkildədir:



Bu ardıcılığın təyin oblastı $[0,1]$ parçasıdır. Hər bir $f_n(x)$ funksiyası bu parçada kəsilməzdir.

Nümunə. Təyin oblastı $E^2 = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ müstəvisi olan

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^k}{k!} + \dots \quad (2.3)$$

sırasına baxaq.

e'' funksiyası üçün Maklerson düsturunu yazaq:

$$e'' = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + R_{n+1}(u).$$

$R_{n+1}(u)$ funksiyası e'' funksiyasına uyğun Maklerson düsturundakı qalıq həddir. Buradan aydın olur ki, (2.3) sırasının $(n+1)$ -ci xüsusi cəmi

$$S_{n+1}(x, y) = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!}$$

düsturu ilə təyin edilir və $S_{n+1}(x, y)$ xüsusi cəmi e^{x+y} funksiyasından $R_{n+1}(x+y)$ kəmiyyəti qədər fərqlənir.

Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının ((2.1) funksional sırasının) $X = \{x\}$ təyin oblastına daxil olan hər hansı x_0 nöqtəsi qeyd olunmuşdur. $\{f_n(x)\}$ ardıcılığına ((2.1) funksional sırasına) $x = x_0$ nöqtəsində baxsaq, ədədi ardıcılıq (ədədi sıra) alırıq.

Bu qayda ilə alınmış ədədi ardıcılıq (ədədi sıra) yığılarsa, onda deyəcəyik ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığı ((2.1) funksional sırası) x_0 nöqtəsində yığılır.

Funksional ardıcılığın (funksional sıranın) yığıldığı nöqtələrin çoxluğu bu ardıcılığın (sıranın) yığılma oblastı adlanır.

Qeyd edək ki, funksional ardıcılığın (sıranın) yığılma oblastı onun təyin oblastı ilə eyni, təyin oblastının alt çoxluğu və ya boş çoxluq ola bilər.

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lg x}$ sırasının təyin oblastı $(0, +\infty)$ intervalıdır. Bu sıranın yığılma oblastı $(10, +\infty)$ intervalıdır; belə ki, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ sırası $p \leq 1$ olduqda dağılır, $p > 1$ olduqda isə yığılır. Buna görə də baxılan sıranın yığılması üçün $\lg x > 1$

olmalıdır. Deməli, $x > 10$ çoxluğu bu sıranın yığılma oblastıdır.

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$ sırasının təyin oblastı $(-\infty, +\infty)$

intervalı, yığılma oblastı isə boş çoxluqdur. Doğrudan da, hər bir $x \in (-\infty, \infty)$ nöqtəsində Koşi əlamətini tətbiq etsək

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+x^2} = +\infty$$

olar.

Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının yığılma oblastı müəyyən $\{x\}$ çoxluğudur. $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrindəki limitləri çoxluğu təyin oblastı $\{x\}$ olan müəyyən $f(x)$ funksiyanın qiymətlər çoxluğunu doğurur. Bu funksiya $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının limit funksiyası və ya sadəcə olaraq limiti deyilir və $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ işarə edilir.

(2.1) sırasının yığılma oblastı müəyyən $\{x\}$ çoxluğudursa, onda $S_n(x)$ xüsusi cəmlər ardıcılığının $S(x)$ limitinə bu sıranın $\{x\}$ çoxluğunda cəmi deyilir.

Nümunə. (2.2) düsturu ilə təyin olunmuş $\{f_n(x)\}$, $0 \leq x \leq 1$ ardıcılığının yığılma oblastı $[0,1]$ parçasıdır. $f_n(0) = 1$, $n = 1, 2, \dots$ olduğundan $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $x = 0$ nöqtəsində vahidə yığılır. Qeyd olunmuş ixtiyari $x \in (0,1]$ nöqtəsində isə bu nöqtədən asılı olan müəyyən nömrədən başlayaraq $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının bütün hədləri sıfırdırlar. Bu səbəbdən də $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının $(0,1]$ çoxluğunda limiti sıfırdır. Beləliklə (2.2) ardıcılığının $[0,1]$ parçasında limiti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ olduqda,} \\ 0, & 0 < x \leq 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

olur. Bu funksiya $x = 0$ nöqtəsində kəsilir.

Nümunə. (2.3) funksional sırasına baxaq. İsbat edək ki, onun yığılma oblastı $E^2 = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ müstəvisidir.

Doğrudan da, e^n funksiyanın Maklerin düsturünün qalıq həddi $R_{n+1}(u)$ ixtiyari qeyd olunmuş u həqiqi ədədi üçün $n \rightarrow \infty$ şərti daxilində sıfıra yaxınlaşır. Ona görə də ixtiyari $(x, y) \in E^2$ nöqtəsində

$$R_{n+1}(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(x+y)^k}{k!} \text{ xüsusi cəmləri } e^{x+y} \text{ funksiyasından}$$

$n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşan $R_{n+1}(x, y)$ kəmiyyəti ilə fərqələnir. Bu isə (2.3) sırasının E^2 müstəvisində e^{x+y} funksiyanı yığıldığını göstərir.

2. Çoxluqda müntəzəm yığılma. Tutaq ki,

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots \quad (2.4)$$

funksional ardıcılığı $\{x\} \subset E^m$ çoxluğunda $f(x)$ funksiyanı yığılır.

Tərif. Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq mümkündür ki, $n \geq N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n nömrələri və ixtiyari $x \in \{x\}$ nöqtəsi üçün

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Onda deyəcəyik ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığı $f(x)$ funksiyanı $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

Aydındır ki, bu tərif aşağıdakı təriflə eynigüclüdür.

Tərif. Tutaq ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (2.6)$$

münasibəti ödəyir. Onda deyəcəyik ki, $f_n(x)$ funksional ardıcılığı $f(x)$ funksiyanı $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

Doğrudan da, əgər (2.6) münasibəti ödənersə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq mümkündür ki,

$$\sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Onda dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə əsasən bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Yəni (2.5) münasibəti ödənilir.

Tərsinə, (2.5) münasibəti ödənilirsə, onda ixtiyari $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi üçün

$$\sup_{x \in \{x\}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

ε ədədinin ixtiyariliyindən və sonuncu bərabərsizlikdən (2.6) münasibətinin ödənməsi alınır.

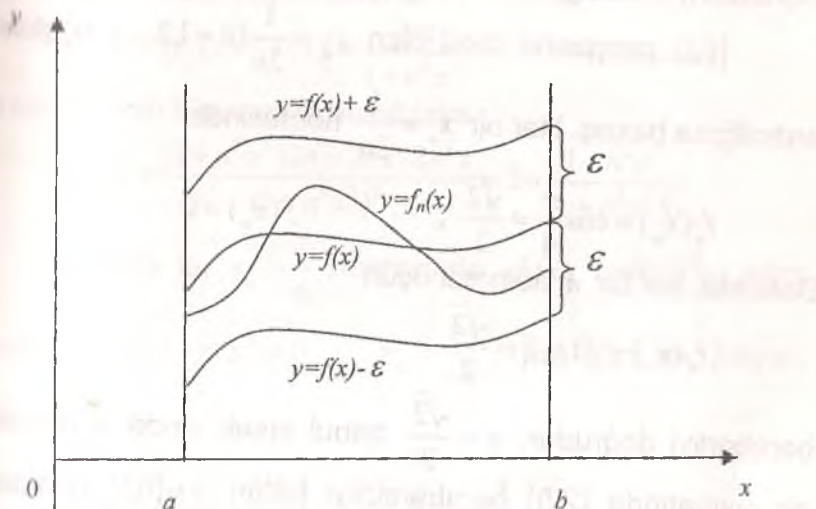
Müntəzəm yığılmanın tərifindən aydın olur ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $f(x)$ funksiyasına $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılarsa, onda bu ardıcılıq $\{x\}$ çoxluğunun ixtiyari alt çoxluğunda $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılar.

Qeyd edək ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının $\{x\}$ çoxluğunda $f(x)$ limit funksiyasına yığılmasına əsasən bu ardıcılığın $f(x)$ funksiyasına $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılmasını hökm etmək olmaz (bunu nümunədə (2.2) ardıcılığı üçün göstərəcəyik.)

Qeyd edək ki, $\{x\} = [a, b]$ parçasında müntəzəm yığılmanın sadə həndəsi mə'nası var. (2.6) münasibəti $[a, b]$ parçasında $f_n(x)$ funksiyasının qrafikinə $f(x)$ funksiyasının qrafikindən aralanmasının dəqiq yuxarı sərhəddinin $n \rightarrow \infty$ şərti daxilində sıfıra yaxınlaşdığını göstərir. Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyasının qrafikini

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, \quad a \leq x \leq b$$

« ε zolağı» ilə əhatə etsək, onda müəyyən $N(\varepsilon)$ nömrəsindən böyük n nömrələri üçün $f_n(x)$ funksiyalarının qrafikləri bütövlüklə bu « ε zolaqda» yerləşirlər:



Nümunə. $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ ardıcılığı $-\infty < x < +\infty$ çoxluğunda $f(x) \equiv 0$ funksiyasına yığılır. Bu yığılma müntəzəmdir, çünki ixtiyari $x \in (-\infty, \infty)$ üçün

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\sin nx| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

bərabərsizliyini ödənməsi üçün $n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ götürmək kifayətdir.

Nümunə. (2.2) ardıcılığının $[0, 1]$ parçasında

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ olduqda,} \\ 0, & 0 < x \leq 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyasına yığıldığını göstərmişdik. Bu yığılmanın müntəzəm olmadığını isbat edək.

$[0,1]$ parçasına daxil olan $x_n = \frac{1}{2n} (n=1,2,\dots)$ nöqtələr

ardıcılığına baxaq. Hər bir $x_n = \frac{1}{2n}$ nöqtəsində

$$f_n(x_n) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x_n) = 0.$$

Beləliklə, hər bir n nömrəsi üçün

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bərabərliyi doğrudur. $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ qəbul etsək, onda n -nin heç bir qiymətində (2.5) bərabərsizliyi bütün $x \in [0,1]$ nöqtələri üçün ödəmə bilməz. Beləliklə, baxılan ardıcılıq $[0,1]$ parçasında müntəzəm yığılmır.

Qeyd edək ki, (2.2) ardıcılığı $f(x) \equiv 0$ funksiyasına ixtiyari $[\sigma,1]$, $(0 < \sigma < 1)$ parçasında müntəzəm yığılır. Doğrudan da, seçilmiş σ ədədi üçün elə N_0 nömrəsi var ki, bütün $f_n(x)$, $n > N_0$ funksiyaları $[\sigma,1]$ parçasında eyniliklə sıfırdırlar. Ona görə də $n > N_0$ nömrələri üçün (2.5) bərabərsizliyinin sol tərəfi eyniliklə sıfır olur. Deməli, $n > N_0$ və ixtiyari $x \in [\sigma,1]$ üçün (2.5) bərabərsizliyi ε -nün ixtiyari müsbət qiymətində ödənilir.

Nümunə. İsbat edin ki, $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\dots$ ardıcılığı $0 \leq x < +\infty$ yarımxunda müntəzəm yığılmır.

◀ Aydındır ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $0 \leq x < +\infty$ yarımoxunda $f(x) \equiv 0$ funksiyaşına yığılır. Bu yığılmanın müntəzəm olmadığını göstərmək üçün (2.6) münasibətinin ödənmədiyini isbat etmək lazımdır.

$$\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Bu funksiyanın törəməşini hesablayaq:

$$\varphi'_n(x) = \frac{(1+n^2x^2)2n - 2nx \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = 2n \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Aydındır ki, $x_n = \frac{1}{n}$ nöqtəsində $\varphi'_n(x)$ funksiyaşısı sıfıra bərabər olur $\left(1-n^2x^2 = 0, \quad x_n = \frac{1}{n}\right)$. Ona görə də, ixtiyari n üçün

$$\max_{0 \leq x < +\infty} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{n^2 \cdot 1}{n^2}} = 1.$$

Beləliklə, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x < +\infty} \varphi_n(x) = 1 \neq 0$. ▶

Tərif. Tutaq ki, funksional sıranın $\{S_n(x)\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda $S(x)$ limit funksiyaşına müntəzəm yığılır. Onda deyəcəyik ki, funksional sıra $\{x\}$ çoxluğunda $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır.

Qeyd edək ki, (2.3) funksional sırası ixtiyari qeyd edilmiş r radiuslu $x^2 + y^2 \leq r^2$ dairəsində e^{x+y} cəminə müntəzəm yığılır. Doğrudan da, bu dairədə $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ olduğundan $|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2r$ münasibəti ödənilir. Onda e^n funksiyaşısı üçün Maklerin düsturunun qalıq həddinin

$$R_{n+1}(u) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$|R_{n+1}((x+y))| \leq \frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2r}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2.$$

Buradan aydın olur ki, $\{R_{n+1}(x+y)\}$ ardıcılığı $x^2 + y^2 \leq r^2$ dairəsində sıfıra müntəzəm yığılır. Bu isə (2.3) sırasının $x^2 + y^2 \leq r^2$ dairəsində e^{x+y} funksiyasına müntəzəm yığıldığını göstərir.

8,13 3. Funksional ardıcılığın (sıranın) müntəzəm yığılması üçün Koşi meyarı.

Teorem 2.1. $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsinin varlığıdır ki, ixtiyari $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi və ixtiyari p natural ədədi üçün

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (2.7)$$

bərabərsizliyi bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənsin.

Teorem 2.2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.8)$$

sırasının $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsinin varlığıdır ki, ixtiyari $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi və ixtiyari p natural ədədi üçün

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (2.9)$$

bərabərsizliyi bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənsin.

Bu teoremlərdən birincisini (Teorem 2.1) isbat etmək kifayətdir, çünki (2.9) bərabərsizliyinin solunda mütləq qiymət işarəsi altında $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ fərqi durur.

◀ **Zərurilik.** Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, $n \geq N(\varepsilon)$ olduqda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad (2.10)$$

bərabərsizliyi bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənilir. Aydınır ki, ixtiyari p natural ədədi üçün

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \quad n \geq N(\varepsilon) \quad (2.11)$$

bərabərsizliyi də bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənər. (2.10) və (2.11) münasibətlərindən

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\equiv |(f_{n+p}(x) - f(x)) + (f(x) - f_n(x))| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$, ixtiyari p natural ədədi üçün və bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün ödəndiyi alınır. Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq mümkündür ki, ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$ nömrəsi və ixtiyari p natural ədədi üçün (2.7) bərabərsizliyi bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənilir. Ədədi ardıcılıq üçün Koşi meyarına əsasən (2.7) münasibətindən $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının hər bir $x \in \{x\}$ nöqtələrində yığıldığı məlum olur. $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının $\{x\}$ çoxluğundakı limit funksiyasını $f(x)$ ilə işarə edək.

$n > N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən ixtiyari n nömrəsini və ixtiyari $x \in \{x\}$ nöqtəsini qeyd edərək (2.7) münasibətində $p \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $n > N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən nömrələr üçün bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödəndiyini alırıq. Bu isə $f_n(x)$ ardıcılığının $f(x)$ limit funksiyasına $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığıldığını göstərir. Kafilik isbat olundu. ►

Qeyd edək ki, Koşi meyarının tətbiqləri müəyyən çətinliklərlə müşayiət olunduğundan yeni kafi şərtlərin tapılmasına ehtiyac var.

§ 2. Funksional ardıcılıq və sıraların müntəzəm yığılması üçün kafi şərtlər

Funksional sıraların öyrənilməsi funksional ardıcılıqların öyrənilməsi ilə eynigüclü olduğundan bəzi əlamətləri ardıcılıqlar üçün, bəzi əlamətləri sıralar üçün, bəzən də hər iki hal üçün şərh edəcəyik.

Teorem 2.3 (Veyerştrass əlaməti). Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

(2.12)

sırası $\{x\}$ çoxluğunda təyin olunub və ixtiyari $x \in \{x\}$ nöqtəsində

$$|u_k(x)| \leq C_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

bərabərsizliyi ödəyir. Onda (2.12) sırasının $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılması üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \quad (2.14)$$

ədədi sırasının yığılması kafidir.

◀ İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. (2.14) sırası yığıldığından ədədi sıralar üçün Koşi meyarına əsasən elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$ nömrəsi və ixtiyari p natural ədədi üçün

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} C_k < \varepsilon \quad (2.15)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

(2.13) və (2.15) bərabərsizliklərinə əsasən

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} C_k < \varepsilon$$

bərabərsizliyi $(n \geq N(\varepsilon), p=1,2,\dots)$ bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödəyir. Müntəzəm yığılma üçün Koşi meyarına (teorem 2.2) əsasən (2.12) sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. ►

Nümunə. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ sırası $(-\infty, +\infty)$ çoxluğunda

müntəzəm yığılır. Doğrudan da, ixtiyari $x \in (-\infty, \infty)$ üçün

$$\left| \frac{\sin kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$, $0 \leq x < +\infty$ sırasının

müntəzəm yığıldığını göstərin.

Diferensial hesabının köməyi ilə asanlıqla göstərmək olar ki,

$$\max_{0 \leq x < \infty} \frac{x}{1+n^4 x^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Onda, $0 \leq x < +\infty$ çoxluğunda

$$\left| \frac{x}{1+n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}$$

bərabərsizliyi ödəyir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ sırası yığıldığından verilmiş sıra

Veyerştrass əlamətinə əsasən $0 \leq x < +\infty$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

Qeyd. Veyerştrass əlaməti sıranın yığılması üçün ancaq kafidir, zəruri deyil.

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $0 \leq x < +\infty$ sırası üçün (2.13)

şərtlərini ödəyən yığılan (2.14) sırası mövcud deyil.

Doğrudan da, $\sup_{0 \leq x < +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \max_{0 \leq x < +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{n}$ və $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Baxılan sıra Leybnis sırası olduğundan, ixtiyari $x \in [0, +\infty)$ üçün

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Sıranın mintəzəm yığılmasının tərifinə əsasən

$$\left(S_n(x) - S(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad \text{sırası} \quad [0, +\infty)$$

çoxluğunda müntəzəm yığılır.

Teorem 2.4 (Dini əlaməti). Tutaq ki, qapalı və məhdud $\{x\} \subset E^m$ çoxluğunun hər bir x nöqtəsində $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı azalmayaraq (və ya artmayaraq) $f(x)$ limit funksiyasına yığılır. $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının hədləri və $f(x)$ limit funksiyası $\{x\}$ çoxluğunda kəsilməzdirlərsə, onda $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

◀ Ümumiliyi pozmadan, fərz edək ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda azalmayıdır. $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ işarə edək. $\{r_n(x)\}$ ardıcılığı aşağıdakı xassələrə malik olar:

- 1) $r_n(x)$ funksiyaları $\{x\}$ çoxluğunda mənfi olmayan kəsilməz funksiyalardır;
- 2) $\{r_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda artmayıdır;
- 3) $\{x\}$ çoxluğunun hər bir x nöqtəsində

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

İsbat edək ki, $\{r_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda sıfıra müntəzəm yığılır, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə n nömrəsi var ki, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində $r_n(x) < \varepsilon$. Aydındır ki, $\{r_n(x)\}$ ardıcılığı artmayan olduğundan $r_n(x) < \varepsilon$ bərabərsizliyi bütün növbəti nömrələr üçün ödənəcək.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, elə $\varepsilon > 0$ ədədi var ki, onun üçün elə n nömrəsi tapmaq mümkün deyil ki, $r_n(x) < \varepsilon$ bərabərsizliyi bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödənsin. Onda ixtiyari n nömrəsi üçün elə $x_n \in \{x\}$ nöqtəsi var ki,

$$r_n(x_n) \geq \varepsilon.$$

(2.16)

$\{x\}$ çoxluğu məhdud olduğundan Bolsano-Veyerştrass teoreminə əsasən $\{x_n\}$ ardıcılığından yığılan $\{x_{n_k}\}$ altardıcılığı ayırmaq olar. $\{x\}$ çoxluğunun qapalılığına görə $\{x_{n_k}\}$ altardıcılığına x_0 limiti $\{x\}$ çoxluğuna daxil olur. Hər bir m nömrəsi üçün $r_m(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \quad (2.17)$$

Digər tərəfdən, hər bir m üçün ondan böyük n_k nömrəsini götürsək,

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k})$$

bərabərsizliyi ödənər. Bu bərabərsizliyi (2.16) bərabərsizliyi ilə müqayisə etsək

$$r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad n_k > m \quad (2.18)$$

alırıq.

(2.17) və (2.18) münasibətlərindən

$$r_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots$$

olduğu aydın olur. Bu isə $\{r_m(x)\}$ ardıcılığının x_0 nöqtəsində sıfıra yığılmasına ziddir. Alınmış ziddiyyət teoremin doğruluğunu göstərir. ►

Qeyd edək ki, Dini teoremindəki monotonluq şərti təbii şərtidir.

Nümunə.

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, & x \in [0, \pi/n] \quad \text{olduqda,} \\ 0, & x \in (\pi/n, \pi] \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

ardıcılığı $f(x) \equiv 0$ funksiyasına yığılır. Bu yığılma $0 \leq x \leq \pi$ parçasında müntəzəm deyil, çünki $x_n = \pi/2n$ nöqtələri üçün

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1.$$

Aydındır ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı üçün Dini teoreminin monotonluq şərti ödənmir.

Funksional sıralar üçün Dini teoremi aşağıdakı şəkildə ifadə olunur.

Teorem 2.4*. *Tutaq ki, funksional sıranın hədləri qapalı və məhdud $\{x\}$ çoxluğunda kəsilməz və mənfə olmayan (və ya müsbət olmayan) funksiyalardır. Bu sıra $\{x\}$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində yığılırsa və onun cəmi $\{x\}$ çoxluğunda kəsilməz funksiyadırsa, onda bu sıra $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.*

Funksional sıraların müntəzəm yığılmasına aid digər kafi əlamətləri şərh etmək üçün yeni anlayışlar daxil edək.

Tərif. *Tutaq ki, elə $M > 0$ həqiqi ədədi var ki, bütün n nömrələri və bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün*

$$|f_n(x)| \leq M$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhduddur.

Tərif. Tutaq ki ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \quad (2.19)$$

sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. Onda deyirlər ki, $\{v_n(x)\}$ funksional ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhdud dəyişməyə (variasiyaya) malikdir.

Tərifdən aydın olur ki, $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhdud dəyişməyə malik olan ixtiyari ardıcılıq $\{x\}$ çoxluğunda müəyyən limit funksiyasına müntəzəm yığılır. Doğrudan da, (2.19) sırasını $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığıldığından Koşi meyarına əsasən

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)] \quad (2.19')$$

sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. Bu sıranın $S_n(x)$ xüsusi cəmi $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$ olduğundan $\{v_n(x)\}$ ardıcılığı $v(x) = S(x) + v_1(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır. Burada $S(x)$ -lə (2.19') sırasının cəmi işarə edilmişdir.

Teorem 2.5 (Abelin birinci əlaməti). Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2.20)$$

funksional sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhdud xüsusi cəmlərə, $\{v_n(x)\}$ funksional ardıcılığı isə bu çoxluqda müntəzəm məhdud dəyişməyə malikdir və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x) \equiv 0 .$$

Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) \quad (2.21)$$

sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

◀ Teoremin şərtinə görə elə $M > 0$ ədədi var ki, (2.20) sırasının $S_n(x)$ xüsusi cəmlər ardıcılığı

$$|S_n(x)| \leq M, \quad x \in \{x\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

bərabərsizliyini ödəyir.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. Ona uyğun elə N nömrəsi seçək ki, $n \geq N$ şərtini ödəyən bütün n nömrələri, ixtiyari p natural ədədi və bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

(2.23)

Qeyd edək ki, burada $\{x\}$ çoxluğunda $\{v_n(x)\}$ ardıcılığının sıfır limit funksiyasına müntəzəm yığılmasından və (2.19') sırasının müntəzəm yığılmasından istifadə olundu.

Abel çevirməsinə əsasən

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x) [v_k(x) - v_{k+1}(x)] \right| +$$

$$+ |S_{n+p}(x)| |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| |v_{n+1}(x)|.$$

Bu bərabərsizlikdə $|S_n(x)| \leq M$, $n = 1, 2, \dots, x \in \{x\}$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$

$$+ M |v_{n+p}(x)| + M |v_{n+1}(x)|.$$

Buradan və (2.22), (2.23) münasibətlərindən

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $n \geq N$, ixtiyari p ($p = 1, 2, \dots$) və bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün ödəndiyi alınır. Bu isə, 2.2

teoreminə əsasən, (2.21) sırasının $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığıldığını göstərir. ►

Teorem 2.6 (Abelin ikinci əlaməti). Tutaq ki, (2.20) funksional sırası $\{x\}$ çoxluğunda məhdud $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır, $\{v_n(x)\}$ funksional ardıcılığı isə $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhdud dəyişməyə malikdir və bu çoxluqda məhdud $v(x)$ limit funksiyasına yığılır. Onda (2.21) funksional sırası $\{x\}$ çoxluqda müntəzəm yığılır.

◄Abel çevirməsini

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x) [v_k(x) - v_{k+1}(x)] + \\ + [S_{n+p}(x) - S_n(x)] v_{n+p}(x) + S_n(x) [v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)]$$

şəklində yazaq. Burada $S_k(x)$ ilə (2.20) sırasının k -cı xüsusi cəmi işarə edilmişdir.

Sonuncu eynilikdən

$$(2.24) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)| |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$

$$+ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| |v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)|$$

bərabərsizliyi alınır.

Teoremin şərtlərinə əsasən $S(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $\{x\}$ çoxluğunda məhdud olduqlarından elə M_1 və M_2 ədədləri var ki, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində

$$|S(x)| \leq M_1, \quad |v(x)| \leq M_2 \quad (2.25)$$

bərabərsizlikləri ödəyir.

$\{S_n(x)\}$ və $\{v_n(x)\}$ ardıcılıqları $\{x\}$ çoxluğunda $S(x)$ və $v(x)$ funksiyalarına müntəzəm yığıldıqlarından (2.25) bərabərsizliklərinə əsasən elə N_1 nömrəsi var ki, $n \geq N_1$ şərtini ödəyən bütün n nömrələri üçün

$$|S_n(x)| \leq M_1 + 1, \quad |v_n(x)| \leq M_2 + 1. \quad (2.26)$$

$\{x\}$ çoxluğunda (2.19) və (2.20) sıraları müntəzəm yığıldıqlarından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N_2(\varepsilon)$ və $N_3(\varepsilon)$ nömrələri var ki, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1 + 1)}, \quad (2.27)$$

$$n \geq N_2(\varepsilon), \quad p = 1, 2, \dots$$

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2 + 1)}, \quad (2.28)$$

$$n \geq N_3(\varepsilon), \quad p = 1, 2, \dots$$

bərabərsizlikləri ödəyir.

$$v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x) - v_k(x)]$$

eyniliyindən və (2.27) bərabərsizliyindən, $n \geq N_2(\varepsilon)$, $p = 1, 2, \dots$, olduqda, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1 + 1)} \quad (2.29)$$

bərabərsizliyinin ödəndiyi alınır.

$N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$ işarə etsək, $n \geq N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən n nömrələri üçün (2.26)-(2.29) bərabərsizlikləri ödəyir. Onda (2.24) bərabərsizliyində (2.25)-(2.29) münasibətlərini nəzərə alsaq

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin, $n \geq N(\varepsilon)$, $p = 1, 2, \dots$ olduqda, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödəndiyini alır.

Koşi meyarına əsasən (2.21) sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. ►

Nəticə (Dirixle-Abel əlaməti). Tutaq ki, (2.20) funksional sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm məhdud xüsusi cəmlərə malikdir, $\{v_n(x)\}$ isə $\{x\}$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində artmayan və bu çoxluqda sıfır müntəzəm yığılan ardıcılıqdır. Onda (2.21) funksional sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

◄ $\{v_n(x)\}$ ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində artmayan olduğundan və bu çoxluqda müntəzəm yığıldığından müntəzəm məhdud dəyişməyə malikdir. Çünki, (2.19) sırasının $S_n(x)$ n -ci xüsusi cəmi $[v_1(x) - v_{n+1}(x)]$ -ə bərabərdir. Ona görə də $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm olaraq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x)$$

limiti var. Abelın birinci əlamətinə əsasən (2.21) sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. ►

Nümunə.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k + (1 + |x|)^k} \quad (2.30)$$

funksional sırasının müntəzəm yığılmasını araşdıraraq.

$$\triangleleft v_n(x) = \frac{1}{n + (1 + |x|)^n}$$

ardıcılığı $-\infty < x < \infty$ ədəd oxunun hər bir nöqtəsində artmır və ədəd oxunda sıfır müntəzəm yığılır.

Dirixle-Abel əlamətinə əsasən (2.30) sırası

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \quad (2.31)$$

sirasının müntəzəm məhdud xüsusi cəmlər ardıcılığına malik olduğu ixtiyari çoxluqda müntəzəm yığılacaq. (2.31) sırasının $S_n(x)$ xüsusi cəmlərini hesablamaq üçün

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$$

eyniliyini 1-dən n -ə qədər k nömrələri üzrə cəmləyək. Nəticədə

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

bərabərliyini alırıq. Buradan

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Sonuncu münasibətdən ixtiyari n nömrəsi üçün

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

bərabərsizliyini alırıq. Bu bərabərsizlikdən aydın olur ki, (2.31) sırasının $\{S_n(x)\}$ xüsusi cəmlər ardıcılığı $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$ nöqtələrini özündə saxlamayan ixtiyari qeyd olunmuş parçada müntəzəm məhdud olur.

Beləliklə (2.30) sırası $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$ nöqtələrini özündə saxlamayan ixtiyari qeyd olunmuş parçada müntəzəm yığılır. ►

Nümunə.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\sin kx}{k + (1 + |x|)^k} \right] \frac{k + 1 + |x|}{k + |x|} \right\}$$

sırasının müntəzəm yığılmasını araşdıraraq.

◀ (2.30) sırası $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$ nöqtələrini özündə saxlayan ixtiyari qeyd olunmuş parçada müntəzəm yığıldığından, onun cəminin məhdud funksiya olmasından,

$$v_k(x) = \frac{k+1+|x|}{k+|x|}$$

ardıcılığının ixtiyari parçada müntəzəm məhdud dəyişməyə (çünki

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+|x|)(k+1+|x|)}$$

sırasının hədləri bütün ədəd oxunda $\frac{1}{k^2}$ ədədini aşmırlar və

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$) malik olmasından və limitinin $v(x) \equiv 1$ olmasından

aydın olur ki, baxılan sıra Abelin ikinci əlamətindəki bütün şərtləri ödəyir. Ona görə də bu sıra $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$ nöqtələrini özündə saxlamayan ixtiyari qeyd olunmuş parçada müntəzəm yığılır. ▶

Qeyd edək ki, baxılan iki nümunəni Veyerştrass əlaməti ilə araşdırsaq görərik ki, hər iki sıra $(-\infty, -\sigma] \cup [\sigma, +\infty)$, $\sigma > 0$ çoxluğunda müntəzəm yığılırlar.

§ 3. Hədbəhəd limitə keçmə teoremləri

E^m fəzasının hər hansı $\{x\}$ çoxluğunu götürək. Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $\{x\}$ çoxluğunun limit nöqtəsidir. Qeyd edək ki, x_0 nöqtəsinin $\{x\}$ çoxluğuna daxil olması tələb olunmur.

Teorem 2.7. Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.32)$$

funksional sırası $\{x\}$ çoxluğunda $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır və hər bir $u_k(x)$ həddinin x_0 nöqtəsində

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = b_k$$

limiti var. Onda $S(x)$ cəminin də x_0 nöqtəsində limiti var və

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad (2.33)$$

yəni $\lim$ və $\sum$ simvollarının yerlərini dəyişmək olar (və ya hədbəhəd limitə keçmək olar).

◀ Əvvəlcə $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırasının yığıldığını isbat edək. (2.32)

sırası $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığıldığından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq mümkündür ki, ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$ nömrəsi, ixtiyari p natural ədədi və bütün $x \in \{x\}$ nöqtələri üçün

$$\left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon/2$$

bərabərsizliyi ödənsin. Bu bərabərsizlikdə n və p nömrələrini qeyd etsək və $x \rightarrow x_0$ olduqda limitə keçsək,

$$\left| b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p} \right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin hər bir $n \geq N(\varepsilon)$ və hər bir p natural ədədi

üçün ödəndiyi aydın olar. Koşi meyarına əsasən $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası yığılır.

İndi isə (2.33) bərabərliyini isbat edək. Onun üçün $\{x\}$ çoxluğunun x_0 nöqtəsinin yaxın ətrafından olan bütün x nöqtələri üçün

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

fərqini qiymətləndirək. $S(x)$ funksiyası (2.32) sırasının cəmi olduğundan ,

$$\begin{aligned} \left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \end{aligned} \quad (2.34)$$

münasibəti bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində ödəyir.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sırası

yiğildiyindən, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ sırasını isə $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm

yiğildiyindən qeyd olunmuş ε ədədi üçün elə n nömrəsi var ki, bütün $x \in \{x\}$ nöqtələrində

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon/3, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon/3 \quad (2.35)$$

olar.

Sonlu cəmin limiti toplananların limitləri cəminə bərabər olduğuna əsasən qeyd olunmuş ε və n ədədləri üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, $0 < \rho(x, x_0) < \delta$ şərtini ödəyən $x \in \{x\}$ nöqtələrində

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| < \varepsilon/3 \quad (2.36)$$

olar.

(2.34)-(2.36) münasibətlərindən

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon, \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta, \quad x \in \{x\}$$

qiymətləndirməsi alınır. Bu isə $S(x)$ cəminin x_0 nöqtəsində limitinin varlığını və (2.33) bərabərliyinin doğruluğunu göstərir. ►

Funksional ardıcılıqlar üçün 2.7 teoremi aşağıdakı şəkildə ifadə olunur.

Teorem 2.7* *Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığı $\{x\}$ çoxluğunda $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır və hər bir $f_n(x)$ həddinin x_0 nöqtəsində limiti var. Onda $f(x)$ limit funksiyasının da x_0 nöqtəsində limiti var və*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right),$$

yəni $\lim_{n \rightarrow \infty}$, $\lim_{x \rightarrow x_0}$ simvollarının yerlərini dəyişmək olar (və ya $x \rightarrow x_0$ olduqda hədbəhəd limitə keçmək olar).

Nəticə 1 (Funksional sıranın cəminin kəsilməzliyi). *Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $\{x\}$ çoxluğuna daxildir, (2.32) sırası $\{x\}$ çoxluğunda $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır və $u_k(x)$ funksiyaları x_0 nöqtəsində kəsilməzdirlər. Onda $S(x)$ cəmi də x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.*

◀ Doğrudan da, bu halda 2.7 teoremində $b_k = u_k(x_0)$ olur. Ona görə də (2.33) bərabərliyindən alınır ki,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0).$$

Bu isə $S(x)$ cəminin x_0 nöqtəsində kəsilməz olmasını göstərir. ►

Nəticə 2 (Funksional ardıcılığın limitinin kəsilməzliyi). *Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $\{x\}$ çoxluğuna daxildir, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının hədləri x_0 nöqtəsində kəsilməzdirlər və bu ardıcılıq $\{x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. Onda $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının $f(x)$ limit funksiyası da x_0 nöqtəsində kəsilməzdir, yəni*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Qeyd edək ki, hədləri kəsilməz olan funksional ardıcılığın müntəzəm yığılması onun limit funksiyaının kəsilməz olması üçün ancaq kafi şərtədir (zəruri şərt deyil).

Doğrudan da, $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\dots$ kəsilməz

funksiyalar ardıcılığı $0 \leq x < +\infty$ yarımoxunda $f(x) \equiv 0$ kəsilməz funksiyaına qeyri müntəzəm yığılır (II fəsil, §1). Müəyyən sinif ardıcılıqlar üçün isə müntəzəm yığılma limit funksiyaının kəsilməzliyi üçün həm də zəruridir (Dini teoremi).

§ 4. Funksional ardıcılıqların və funksional sıraların hədbəhəd inteqrallanması

Aşağıdakı əsas teoremi isbat edək.

Teorem 2.8. *Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığı $[a,b]$ parçasında $f(x)$ limit funksiyaına müntəzəm yığılır və hər bir $f_n(x)$ funksiyası bu parçada inteqrallanır. Onda $f(x)$ limit funksiyaı da $[a,b]$ parçasında inteqrallanır və*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

◀ Əvvəlcə göstərək ki, $f(x)$ limit funksiyaı $[a,b]$ parçasında inteqrallanır.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. İsbat edək ki, $f(x)$ funksiyası üçün $[a,b]$ parçasının heç olmasa bir bölgüsü var ki, bu bölgüyə uyğun S və s yuxarı və aşağı inteqral cəmləri

$$S - s < \varepsilon$$

bərabərsizliyini ödəyir. Bunun üçün qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ ədədinə uyğun elə n nömrəsi tapmaq kifayətdir ki, $[a,b]$ parçasının ixtiyari bölgüsü üçün $f(x)$ funksiyaının S və s

yuxarı və aşağı cəmləri ilə $f_n(x)$ funksiyanın S_n və s_n yuxarı və aşağı cəmləri arasında

$$S - s \leq (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.37)$$

əlaqəsi olsun (doğrudan da, (2.37) bərabərsizliyi ixtiyari bölgü və müəyyən n nömrəsi üçün isbat olunarsa, onda $f_n(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallandığına görə elə bölgü seçə bilərik ki, $S_n - s_n < \varepsilon/2$ bərabərsizliyi ödənsin. Onda (2.37) münasibətindən $S - s < \varepsilon$ bərabərsizliyinin doğruluğu alınar, yeni $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanar.)

$[a, b]$ parçasını $\{x_k\}$ ($k=1, 2, \dots, m$) bölgüsü vasitəsilə m sayda $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarına bölək. $\omega_k(f)$ ($\omega_k(f_n)$) ilə $f(x)$ ($f_n(x)$) funksiyanın $[x_{k-1}, x_k]$ parçasındakı rəqsini işarə edək:

$$\omega_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

İxtiyari n nömrəsi və ixtiyari $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ nöqtələri üçün doğru olan

$$f(x') - f(x'') \equiv [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')]$$

eyniliyindən

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + \\ &+ |f_n(x'') - f(x'')| \end{aligned} \quad (2.38)$$

bərabərsizliyi alınır.

$\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyanı müntəzəm yığıldığından ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə n nömrəsi var ki, bu parçanın ixtiyari x nöqtəsində

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (2.39)$$

olar. (2.39) bərabərsizliyini $x = x'$ və $x = x''$ olduqda (2.38) bərabərsizliyinin sağ tərəfində nəzərə alaq:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (2.40)$$

$[x_{k-1}, x_k]$ parçasından götürülmüş ixtiyari x' və x'' nöqtələri üçün

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n)$$

bərabərsizliyi ödəndiyindən (2.40) münasibətindən

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (2.41)$$

bərabərsizliyi alınır.

$f(x)$ funksiyanın $[x_{k-1}, x_k]$ parçasındakı dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhəddini uyğun olaraq m_k və M_k ilə işarə edək. Dəqiq sərhədlərin tərəfinə əsasən $[x_{k-1}, x_k]$ parçasından iki elə $\{x'_p\}$ və $\{x''_p\}$ ($p = 1, 2, \dots$) nöqtələr ardıcılığı göstərmək olar ki,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x'_p = M_k, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x''_p = m_k.$$

(2.41) bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari p üçün

$$|f(x'_p) - f(x''_p)| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Bu bərabərsizlikdə $p \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək və $M_k - m_k = \omega_k(f)$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\omega_k(f) \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (2.42)$$

bərabərsizliyi alınır.

(2.42) bərabərsizliyinin hər tərəfini $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ədədinə vurub, alınan münasibətləri k ($k = 1, 2, \dots, m$) üzrə

cəmləsək (2.37) bərabərsizliyini alırıq. Beləliklə $f(x)$ limit funksiyasının $[a, b]$ parçasında inteqrallandığı isbat olundu.

İndi isə teoremin ikinci hissəsini isbat edək. $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $[a, b]$ parçasında $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığıldığından, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, bütün $x \in [a, b]$ nöqtələrində

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Buna görə də $n > N(\varepsilon)$ olduqda

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Teorem isbat olundu. ►

Funksional sıralar üçün 2.8 teoremi aşağıdakı şəkildə ifadə olunur.

Teorem 2.8* Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

sırası $[a, b]$ parçasında $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır və hər bir $u_k(x)$ həddi bu parçada inteqrallanır. Onda $S(x)$ cəmi də $[a, b]$ parçasında inteqrallanır və

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Qeyd edək ki, 2.8 və 2.8* teoremlərində müntəzəm yığılma şərti ancaq kafi şərtidir (zəruri deyil). Doğrudan da, $\{x^n\}$ funksional ardıcılığı $0 \leq x \leq 1$ parçasında

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{olduqda,} \\ \text{olduqda} \end{matrix}$$

limit funksiyasına müntəzəm yığılmır. Buna baxmayaraq $f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında inteqrallanır və

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Onu da qeyd edək ki, hədbəhəd inteqrallama teoremlərindəki müntəzəm yığılma şərti təbii şərtir. Doğrudan da,

$$f_n(x) = 4nx^3 e^{-nx^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

funksional ardıcılığı $f(x) \equiv 0$ funksiyasına $[0,1]$ parçasında müntəzəm yığılmır və

$$\int_0^1 4nx^3 e^{-nx^2} dx = 1 - e^{-n}, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 4nx^3 e^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1 \neq 0.$$

§ 5. Funksional ardıcılıqların və funksional sıraların hədbəhəd diferensiallanması

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında törəməsi var dedikdə bu funksiyasının $[a,b]$ parçasının daxili nöqtələrində adi (ikiterəfli) törəməsinin, a nöqtəsində $f'(a+0)$ sağ törəməsinin və b nöqtəsində isə $f'(b-0)$ sol törəməsinin olduğunu başa düşəcəyik.

Teorem 2.9. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcılığının hər bir həddinin $[a,b]$ parçasında törəməsi var, $\{f'_n(x)\}$ ardıcılığı $[a,b]$ parçasında müntəzəm yığılır və $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı müəyyən $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsində yığılır. Onda $\{f_n(x)\}$

ardıcılığı bu parçada müəyyən $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında törəməsi var və $f'(x)$ funksiyası $\{f'_n(x)\}$ ardıcılığının limit funksiyasıdır:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

◀ Əvvəlcə $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının $[a, b]$ parçasında müntəzəm yığıldığını isbat edək. $\{f_n(x_0)\}$ ardıcılığı yığıldığına və $\{f'_n(x)\}$ ardıcılığı $[a, b]$ parçasında müntəzəm yığıldığına görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$ nömrəsi və ixtiyari p natural ədədi üçün

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.43)$$

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in [a, b] \quad (2.44)$$

bərabərsizlikləri ödəyir.

Tutaq ki, $x \in [a, b]$ parçasının ixtiyari nöqtəsidir. İxtiyari qeyd olunmuş n və p nömrələri üçün $|f_{n+p}(t) - f_n(t)|$ funksiyası x və x_0 nöqtələri ilə məhdudlaşmış parçada Lagranj teoreminin şərtlərini ödəyir. Ona görə də x və x_0 nöqtələri arasında elə ξ nöqtəsi var ki,

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0).$$

$|x - x_0| < b - a$ olduğundan (2.43) və (2.44) bərabərsizliklərinə əsasən ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$, ixtiyari p natural ədədi və bütün $x \in [a, b]$ nöqtələrində

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + \\ &+ |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Koşi meyarına əsasən $\{f_n(x)\}$ ardıcılığı $[a,b]$ parçasında müəyyən $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır.

İndi isə $f(x)$ limit funksiyasının $[a,b]$ parçasında törəməsinin olmasını göstərek.

$[a,b]$ parçasının hər hansı x nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtə üçün elə $\delta > 0$ ədədi seçək ki, x nöqtəsinin δ ətrafı $[a,b]$ parçasına daxil olsun (x nöqtəsi $[a,b]$ parçasının uc nöqtəsi olarsa, onda $x=a$ olduqda $[a, a+\delta)$ yarımintervalı, $x=b$ olduqda isə $(b-\delta, b]$ yarımintervalı seçilir). $a < x < b$ olduqda $0 < |\Delta x| < \delta$ bərabərsizliyini, $x=a$ olduqda $0 < \Delta x < \delta$ bərabərsizliyini, $x=b$ olduqda isə $-\delta < \Delta x < 0$ bərabərsizliyini ödəyən Δx ədədlər çoxluğunu $\{\Delta x\}$ ilə işarə edək. Göstərek ki, Δx argumentindən asılı

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \quad (2.45)$$

ardıcılığı $\{\Delta x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. $f'_n(x)$ ardıcılığı müntəzəm yığıldığından Koşi meyarına əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, $n \geq N(\varepsilon)$ olduqda

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \quad (2.46)$$

bərabərsizliyi ixtiyari p natural ədədi və bütün $x \in [a,b]$ üçün ödənilir.

İndi isə $\{\Delta x\}$ çoxluğuna daxil olan ixtiyari Δx ədədini qeyd edək. $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ funksiyasına x və $x+\Delta x$ nöqtələri ilə məhdudlanmış parçada Lagranj teoremini tətbiq edək (burada n və p qeyd olunmuş ixtiyari nömrələrdir).

$$\begin{aligned} & \frac{[f_{n+p}(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} = \\ & = f'_{n+p}(x + \theta \Delta x) - f'_n(x + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Bu bərabərlikdə (2.45) işarələməsini nəzərə alaq

$$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = f'_{n+p}(x + \theta \Delta x) - f'_n(x + \theta \Delta x).$$

Burada isə (2.46) münasibətini nəzərə alsaq

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ixtiyari $n \geq N(\varepsilon)$ və ixtiyari p natural ədədi üçün bütün $\Delta x \in \{\Delta x\}$ nöqtələrində ödənər. Onda Koşi meyarına əsasən $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ ardıcılığı $\{\Delta x\}$ çoxluğunda müntəzəm yığılar. Ona görə də bu ardıcılığa hədbəhəd limitə keçmə teoremini tətbiq etmək olar. $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ ardıcılığının limit funksiyası

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

olduğundan ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\Delta x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_n(\Delta x) \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

olur.

Beləliklə, $f(x)$ limit funksiyasının x nöqtəsində törəməsi var və $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$. Teorem isbat olundu. ►

Funksional sıralar üçün 2.9 teoremi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Teorem 2.9 *. Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.47}$$

funksional sırasının hər bir həddinin $[a, b]$ parçasında törəməsi var,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

sırası $[a, b]$ parçasında müntəzəm yığılır, (2.47) sırası isə $[a, b]$ parçasının müəyyən x_0 nöqtəsində yığılır. Onda (2.47) sırası $[a, b]$ parçasında müəyyən $S(x)$ cəminə müntəzəm yığılır, $S(x)$ cəminin bu parçada törəməsi var və

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Qeyd edək ki, 2.9 teoremində $\{f'_n(x)\}$ ardıcılığının müntəzəm yığılma şərti pozulduqda teoremin hökmü doğru olmaya bilər. Doğrudan da,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(nx + \sqrt{n^2 x^2 + 1})$$

ardıcılığı $[-1, 1]$ parçasında $f(x) \equiv 0$ limit funksiyasına yığılır,

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^2 x^2 + 1}}$$

ardıcılığı isə

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{olduqda,} \\ \text{olduqda} \end{array}$$

limit funksiyasına müntəzəm yığılmır və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 x^2 + 1}} \Big|_{x=0} \right) = 1 \neq f'(0) = 0.$$

2.9 teoremindən nəticə olaraq aşağıdakı teorem alınır.

Teorem 2.10. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcılığının hər bir həddinin $[a, b]$ parçasında ibtidai funksiyası var və bu ardıcılıq $[a, b]$ parçasında $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılır. Onda $f(x)$ limit funksiyasının bu parçada ibtidai funksiyası var. Bundan əlavə, $f_n(x)$ funksiyalarının $\Phi_n(x)$ ibtidai funksiyaları müəyyən $x_0 \in [a, b]$ nöqtəsində $\Phi_n(x_0) = 0$ şərtini ödəyəirlərsə, onda $\{\Phi_n(x)\}$ ardıcılığı $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının $\Phi(x_0) = 0$ şərtini ödəyən $\Phi(x)$ ibtidai funksiyasına müntəzəm yığılır.

◀ $\Phi_n(x_0) = 0$ şərtini ödəyən $\Phi_n(x)$ ibtidai funksiyalar ardıcılığı 2.9 teoreminin şərtlərini ödəyir. Ona görə də $\Phi_n(x)$ ardıcılığı $\Phi(x)$ limit funksiyasına $[a, b]$ parçasında müntəzəm yığılır, bu parçada $\Phi(x)$ funksiyasının törəməsi var və

$$\Phi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \blacktriangleright$$

Müntəzəm yığılan funksional ardıcılıqlar və sıraların xassələrindən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. Verilmiş nöqtədə limiti olan funksiyalar sinfi, kəsilməz funksiyalar sinfi, inteqrallanan funksiyalar sinfi, ibtidai funksiyası olan funksiyalar sinfi və diferensiaslanan funksiyalar sinfi (törəmələrin müntəzəm yığıldığı halda) müntəzəm yığılmaya nəzərən qapalıdır.

§ 6. Qüvvət sıraları

Tutaq ki, $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ hər hansı ədədi ardıcılığıdır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.48)$$

funksional sırasına və ya

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k &= c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \\ &+ \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

funksional sırasına qüvvət sırası deyilir. $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ sabitləri isə qüvvət sırasının əmsalları adlanır.

Aydındır ki, (2.49) sırası $x' = x - x_0$ əvəzləməsi vasitəsilə (2.48) sırasına gətirilir. Bu səbəbdən də biz (2.48) sırasına baxmaqla kifayətlənəcəyik. Funksiyanın qüvvət sırası şəklində göstərilməsi nəzəri tədqiqatlarda və təqribi hesablamalarda geniş tətbiq olunur.

1. Qüvvət sırasının yığılma oblastı. Qüvvət sırasının yığılma oblastının quruluşunu öyrənək. Aydındır ki, (2.48) qüvvət sırası $x = 0$ nöqtəsində yığılır. İxtiyari funksional sıranın yığılma

oblastı çox müəkkəb quruluşa malik ola bilər. Ancaq qüvvət sırasının yığılma oblastı x oxu üzərində yerləşən ya parça, ya yarıminterval, ya da intervaldır (bu interval $(-\infty, +\infty)$ oxu ilə üst üstə düşə bilər, $x=0$ nöqtəsinə cırlaşa bilər). Elə qüvvət sırası var ki, o ancaq $x=0$ nöqtəsində yığılır.

Məsələn, $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ sırası ancaq $x=0$ nöqtəsində yığılır. Doğrudan da, $x \neq 0$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = +\infty$$

münasibəti ödəndiyindən Dalamber əlamətinə əsasən

$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ sırası $x \neq 0$ nöqtələrində dağılır.

Bütün ədəd oxunda yığılan qüvvət sırasına nümunə olaraq $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sırasını göstərmək olar. Dalamber əlamətinə əsasən bu sıranın $(-\infty, +\infty)$ intervalında yığıldığını asanlıqla yoxlamaq olar.

Məlum olduğu kimi

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

sırası $|x| < 1$ olduqda yığılır, $|x| \geq 1$ olduqda isə dağılır.

Beləliklə bu sıranın yığılma oblastı $(-1, 1)$ intervalıdır.

(2.48) sırasının əmsallarının vasitəsi ilə

$$\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.50)$$

ardıcılığını düzəldək.

İki hal mümkündür: 1) (2.50) ardıcılığı qeyri-məhduddur; 2) (2.50) ardıcılığı məhduddur.

2) halında (2.50) ardıcılığının sonlu yuxarı limiti var.

Bu limiti L ilə işarə edək. (2.50) ardıcılığının hədləri mənfi olmadığına görə $L \geq 0$.

Beləliklə, aşağıdakı üç hal mümkündür: a) (2.50) ardıcılığı qeyri-məhdudur; b) (2.50) ardıcılığı məhdudur və yuxarı limiti $L > 0$, c) (2.50) ardıcılığı məhdudur və yuxarı limiti $L = 0$.

Teorem 2.11 (Koşi-Adamar teoremi). a) (2.50) ardıcılığı qeyri-məhduddursa, onda (2.48) qüvvət sırası ancaq $x = 0$ nöqtəsində yığılır.

b) (2.50) ardıcılığı məhduddursa və onun yuxarı limiti müsbətdirsə, yəni $L > 0$ olarsa, onda (2.48) qüvvət sırası

$|x| < \frac{1}{L}$ şərtini ödəyən x nöqtələrində mütləq yığılır, $|x| > \frac{1}{L}$

şərtini ödəyən x nöqtələrində isə dağılır.

c) (2.50) ardıcılığı məhduddursa və onun yuxarı limiti sıfırdırsa, yəni $L = 0$ olarsa, onda (2.48) sırası ixtiyari x nöqtəsində mütləq yığılır.

◀ a) Tutaq ki, (2.50) ardıcılığı qeyri-məhdudur. Onda ixtiyari $x \neq 0$ üçün

$$|x|^n \sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{c_n x^n}$$

ardıcılığı da qeyri-məhdudur. Kifayət qədər böyük n nömrələri üçün $\sqrt[n]{c_n x^n} > 1$ və ya $|c_n x^n| > 1$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu onu göstərir ki, $x \neq 0$ olduqda (2.48) sırasının yığılması üçün zəruri şərt pozulub. Deməli, (2.48) sırası ixtiyari $x \neq 0$ nöqtəsində dağılır.

b) Tutaq ki, (2.50) ardıcılığı məhdudur və onun yuxarı limiti müsbətdir, yəni $L > 0$.

1) $|x| < \frac{1}{L}$ şərtini ödəyən ixtiyari x nöqtəsini qeyd

edək. Elə $\varepsilon > 0$ ədədi var ki, $|x| < \frac{1}{L + \varepsilon}$. Yuxarı limitin

xassəsinə əsasən müəyyən n_ε nömrəsindən başlayaraq

$\sqrt[n]{c_n}$ ardıcılığının bütün hədləri

$$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon/2$$

bərabərsizliyini ödəyir. Onda bu n_ε nömrəsindən başlayaraq bütün nömrələr üçün

$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{L + \varepsilon/2}{L + \varepsilon} < 1.$$

Koşi əlamətinə əsasən (2.48) qüvvət sırası mütləq yığılır.

2) $|x| > \frac{1}{L}$ şərtini ödəyən ixtiyari x nöqtəsini qeyd

edək. Elə $\varepsilon > 0$ ədədi var ki, $|x| > \frac{1}{L - \varepsilon}$. Yuxarı limitin tərifinə

əsasən (2.50) ardıcılığından L ədədinə yığılan

$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}$ ($k=1,2,\dots$) alt ardıcılığı ayırmaq olar. Aydındır ki, müəyyən k_ε nömrəsindən başlayaraq

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} < L + \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənər. Həmin k_ε nömrəsindən başlayaraq

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1$$

münasibəti və ya

$$|c_{n_k} x^{n_k}| > 1$$

bərabərsizliyi ödənər. Bu isə (2.48) sırasının yığılması üçün zəruri şərtin pozulduğunu göstərir. Beləliklə, (2.48) sırası dağılır.

c) Tutaq ki, (2.50) ardıcılığı məhduddur və onun yuxarı limiti $L = 0$. (2.48) sırasının ixtiyari x üçün mütləq yığıldığını göstərək.

İxtiyari $x \neq 0$ ($x = 0$ olduqda (2.48) sırası mütləq yığılır) nöqtəsini qeyd edək. $L = 0$ olduğundan və (2.50) ardıcılığının hədlərinin mənfi olmamasından aydın olur ki, $L = 0$ bu ardıcılığın yeganə limit nöqtəsidir. Bu isə (2.50)

ardıcılığının sonsuz kiçik olduğunu göstərir. Onda $\frac{1}{2|x|}$ müsbət ədədinə qarşı elə n_0 nömrəsi göstərmək olar ki, $n \geq n_0$ nömrələri üçün

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$

Buna görə də $n \geq n_0$ olduqda

$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2} < 1$$

bərabərsizliyi ödənər. Koşi əlamətinə əsasən (2.48) sırası mütləq yığılır. Teorem isbat olundu. ►

Koşi-Adamar teoremindən aşağıdakı fundamental təklif alınır.

Teorem 2.12. (2.48) qüvvət sırası ancaq $x=0$ nöqtəsində yığılan sıra deyilsə, onda elə müsbət R ədədi ($R=+\infty$ halı da mümkündür) var ki, bu sıra $|x| < R$ olduqda mütləq yığılır, $|x| > R$ olduqda isə dağılır.

Bu teoremdəki R ədədi (2.48) qüvvət sırasının yığılma radiusu, $(-R, R)$ intervalı isə bu sıranın yığılma aralığı adlanır. R yığılma radiusu

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (2.51)$$

($\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ olduqda $R = \infty$) düsturu ilə hesablanır.

Qeyd. Yığılma aralığının uclarında, yəni $x = -R$ və $x = R$ nöqtələrində qüvvət sırası yığıla da bilər, dağıla da bilər. Bu səbəbdən də qüvvət sırasının yığılma oblastını tapdıqda yığılma aralığının uclarında onun yığılmasını tədqiq etmək lazımdır.

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$ sırasının yığılma oblastını

tapın.

◀ $c_n = (-1)^{n-1} n$ olduğundan

$$L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{n} = \lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$$

Buradan $R = \frac{1}{L} = 1$. Sıra $-1 < x < 1$ intervalında mütləq

yığılır.

$x = -1$ nöqtəsində sıranın yığılmasını araşdıraraq. Baxılan sırada $x = -1$ götürsək

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(-1)n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n).$$

Sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmədiyindən

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$ sırası $x = -1$ nöqtəsində dağılır.

$x = 1$ olduqda isə $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ ədədi sırası alınır. Bu

halda da sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmir ($\{(-1)^{n-1} n\}$ ardıcılığının limiti yoxdur). Beləliklə, $x = 1$ nöqtəsində də

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$$

sırası dağılır. Verilmiş sıranın yığılma oblastı $-1 < x < 1$ intervalıdır. ▶

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} x^n$ sırasının yığılma oblastını tapın.

◀ $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ olduğundan

$$L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{L} = 2.$$

Buradan aydın olur ki, verilmiş sıra $-2 < x < 2$ intervalında mütləq yığılır.

$x = -2$ olduqda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

dağılan sıra (harmonik sıra) alınır.

$x = 2$ olduqda isə $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ yığılan sırası (Leybnis

sırası) alınır.

Beləliklə, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} x^n$ sırasının yığılma oblastı

$-2 < x \leq 2$ yarımintervalıdır. ►

Nümunə. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n} x^n$ sırasının yığılma oblastını tapın.

$$\triangleleft R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln^2 n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln^2 n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

olduğundan verilmiş sıra $-1 < x < 1$ intervalında mütləq yığılır.

$x = -1$ olduqda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n \ln^2 n}$, $x = 1$ olduqda isə $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}$

mütləq yığılan sıraları alındığından $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n} x^n$ sırası $[-1, 1]$

parçasında mütləq yığılır. ►

2. Qüvvət sırasının cəminin kəsilməzliyi. Tutaq ki, (2.48) qüvvət sırasının yığılma radiusu $R > 0$ ədədinə bərabərdir.

Lemma. $r < R$ şərtini ödəyən ixtiyari r müsbət ədədi üçün (2.48) sırası $[-r, r]$ parçasında müntəzəm yığılır.

◀ 2.12 teoreminə əsasən (2.48) sırası $x = r$ nöqtəsində mütləq yığılır, yəni

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n$$

sırası yığılır. Bu sıra (2.48) sırası üçün $[-r, r]$ parçasında majorant sıradır. Veyerştrass əlamətinə əsasən (2.48) sırası $[-r, r]$ parçasında müntəzəm yığılır. ►

Nəticə. Lemmanın şərtləri ödəndikdə (2.48) sırasının cəmi $[-r, r]$ parçasında kəsilməz funksiyadır.

Teorem 2.13. Qüvvət sırasının cəmi onun yığılma aralığı daxilində kəsilməz funksiyadır.

◀ Tutaq ki, $S(x)$ (2.48) qüvvət sırasının cəmi, R isə onun yığılma radiusudur. (2.48) sırasının yığılma aralığına daxil olan ixtiyari x_0 nöqtəsini qeyd edək. Aydındır ki, $|x_0| < R$ bərabərsizliyi ödəyir. Onda elə r ədədi tapmaq olar ki, $|x_0| < r < R$ bərabərsizliyi ödəyən. Nəticəyə əsasən $S(x)$ funksiyası $[-r, r]$ parçasında kəsilməzdir. $x_0 \in [-r, r]$ olduğundan $S(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. Teorem isbat olundu. ►

Qeyd edək ki, $x = -R$ və $x = R$ nöqtələrində (2.48) sırası yığılarsa, onda bu nöqtələrdə $S(x)$ kəsilməz olar. Bu hökm aşağıdakı teoremdə ifadə olunur.

Teorem 2.14 (Abel teoremi). (2.48) qüvvət sırası $x = R$ nöqtəsində yığılırsa, onda onun cəmi R nöqtəsində soldan kəsilməzdir, yəni

$$\lim_{x \rightarrow R-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k.$$

◀ Teoremin isbatı üçün (2.48) sırasının $[0, R]$ parçasında müntəzəm yığıldığını göstərmək kifayətdir.

$$S_{n,p} = c_{n+1} R^{n+1} + \dots + c_{n+p} R^{n+p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

işarə edək. Aydındır ki,

$$c_{n+1} R^{n+1} = S_{n,1}, \quad c_{n+2} R^{n+2} = S_{n,2} - S_{n,1}, \dots,$$

$$c_{n+p} R^{n+p} = S_{n,p} - S_{n,p-1}. \quad (2.52)$$

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k$ sırası yığıldığından Koşi meyarına əsasən elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, ixtiyari $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi üçün

$$|S_{n,k}| < \varepsilon/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.53)$$

$$x \in [0, R] \quad \text{olduqda} \quad \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \leq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} \leq \dots \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$$

bərabərsizliklərini və (2.52), (2.53) münasibətlərini nəzərə alsaq ixtiyari $n > N(\varepsilon)$, $p = 1, 2, \dots$ üçün

$$\begin{aligned} |c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots c_{n+p}x^{n+p}| &= \left| c_{n+1}R^{n+1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + c_{n+2}R^{n+2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \right. \\ &+ \dots + c_{n+p}R^{n+p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \Big| = \left| S_{n,1} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} \right] + \right. \\ &+ S_{n,2} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3} \right] + \dots + \\ &S_{n,p-1} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right] + S_{n,p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \Big| \leq |S_{n,1}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} \right] + \\ &+ |S_{n,2}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3} \right] + \dots + |S_{n,p-1}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right] + \end{aligned}$$

$$+ |S_{n,p}| \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} < \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} + \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+3} + \dots - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} + \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} \right\} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Koşi meyarına əsasən (2.48) sırası $[0, R]$ parçasında müntəzəm yığılır. Teorem isbat olundu. ►

Qeyd edək ki, (2.48) sırası $x = -R$ nöqtəsində yığıldıqda onun cəmi bu nöqtədə sağdan kəsilməz olur.

Beləliklə, aydın olur ki, qüvvət sırasının cəmi onun yığılma oblastında kəsilməz funksiyadır.

Nümunə. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$ sırasının yığılma oblastı $[-1, 1]$ parçası olduğundan, onun cəmi bu parçada kəsilməz funksiyadır.

Nümunə. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ sırasının yığılma oblastı $(-1, 1]$ yarımintervalı olduğundan, bu sıranın cəmi $(-1, 1]$ yarımintervalında kəsilməzdir.

$-1 < x < 1$ intervalında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$$

olduğundan, 2.14 teoreminə əsasən,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Beləliklə, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Leybnis sırasının cəmi $\ln 2$ ədədidir.

47. 3. Qüvvət sırasının hədbəhəd integrallanması və diferensiallanması. (2.48) qüvvət sırasına 2.8 və 2.9 teoremlərini tətbiq edək.

Teorem 2.15. Tutaq ki, $R > 0$ ədədi (2.48) qüvvət sırasının yığılma radiusu, x isə $(-R, R)$ yığılma aralığının ixtiyari nöqtəsidir. Onda (2.48) sırasını $[0, x]$ parçasında hədbəhəd inteqrallamaq olar, yəni

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}. \quad (2.54)$$

Hədbəhəd inteqrallama nəticəsində alınmış (2.54) qüvvət sırasının da yığılma radiusu R -ə bərabərdir.

◀ İxtiyari $x \in (-R, R)$ nöqtəsi üçün elə $r > 0$ ədədi var ki, $|x| < r < R$. Lemmaya əsasən (2.48) sırası $[-r, r]$ parçasında müntəzəm yığılır. Ona görə də (2.48) sırası $[0, x]$ parçasında müntəzəm yığılır. Teorem 2.8-ə əsasən (2.48) sırasını $[0, x]$ parçasında hədbəhəd inteqrallamaq olar.

(2.48) sırasının hədbəhəd inteqrallanmasından alınan (2.54) sırasının yığılma radiusunun R olduğunu göstərək. Tutaq ki, R' (2.54) sırasının yığılma radiusudur. Onda

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|c_{n-1}|}{n}}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|c_n|} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

olduğundan, $R' = R$. ▶

Qeyd edək ki, (2.48) sırası $(-R, R)$ yığılma aralığının müəyyən uc nöqtəsində yığılırsa, onda (2.54) münasibətində x bu uc nöqtəsi ilə üst-üstə düşə bilər.

Teorem 2.16. (2.48) qüvvət sırasını onun yığılma aralığının daxilində hədbəhəd diferensiaslamaq olar, yəni

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad x \in (-R, R), \quad (2.55)$$

hədbəhəd diferensiaslama nəticəsində alınmış (2.55) qüvvət sırasının da yığılma radiusu R -ə bərabərdir.

◀ Tutaq ki, R' (2.55) sırasının yığılma radiusudur. Əvvəlcə $R' = R$ olduğunu isbat edək. Yığılma radiusunun düsturuna əsasən

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|}}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|c_n|} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|c_n|}$ münasibətlərindən istifadə etsək,

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R.$$

$(-R, R)$ yığılma intervalının ixtiyari x_0 nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtəyə uyğun elə $r > 0$ ədədi seçmək olar ki, $|x_0| < r < R$. $[-r, r]$ parçasında (2.55) sırası müntəzəm yığılır (Lemmayə əsasən). Onda teorem 2.9-a əsasən (2.48) sırasını x_0 nöqtəsində hədbəhəd diferensiaslamaq olar. ►

Nəticə. *Yığılma aralığında (2.48) qüvvət sırasını istənilən dəfə hədbəhəd diferensiaslamaq olar. Hədbəhəd diferensiaslanma nəticəsində alınmış qüvvət sıralarının yığılma radiusları (2.48) sırasının yığılma radiusuna bərabərdir.*

§ 7. Funksiyanın qüvvət sırasına ayrılması

$(-R, R)$, $R > 0$ intervalında ($\{x\}$ çoxluğunda) $f(x)$ funksiyasına yığılan qüvvət sırası varsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası bu intervalda (bu çoxluqda) qüvvət sırasına ayrılır.

1. Funksiyanın qüvvət sırasına ayrılması üçün əsas teoremlər. Əvvəlcə göstərək ki, bir funksiya iki müxtəlif qüvvət sırasına ayrıla bilməz.

Teorem 2.17. $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ intervalında qüvvət sırasına ayrılırsa, onda bu ayrılış yeganədir.

◀ Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ intervalında

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots$$

qüvvət sırasına ayrılmışdır. 2.16 teoreminə (və ya ondan alınmış nəticəyə) əsasən bu sıranı (R, R) intervalında ixtiyari dəfə diferensiallamaq olar:

$$f^{(n)}(x) = c_n n! + c_{n+1} (n+1)! x + \dots + c_{n+k} (n+k)! x^k + \dots$$

$x = 0$ olduqda sonuncu münasibətindən

$$f^{(n)}(0) = c_n n!$$

və ya

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

düsturunu alırıq.

Beləliklə, $f(x)$ funksiyası (2.48) qüvvət sırasına ayrılırsa, onda bu sıranın əmsalları (2.56) düsturu ilə birqiymətli təyin olunur. ►

Teorem 2.17-dən aydın olur ki, $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ aralığında qüvvət sırasına ayrılırsa, onda o bu aralıqda sonsuz diferensillənir.

Tərif. Əmsalları (2.56) düsturu ilə təyin edilən (2.48) qüvvət sırasına $f(x)$ funksiyasının Teylor sırası deyilir.

Teorem 2.17 göstərir ki, $f(x)$ funksiyası qüvvət sırasına ayrılırsa, onda bu sıra onun Teylor sırasıdır.

Sual olunur: $(-R, R)$, $R \neq 0$ intervalında sonsuz diferensiallanan $f(x)$ funksiyasının formal düzəldilmiş

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Teylor sırası bu intervalda yığılır mı? Yığılırsa, onda onun cəmi $f(x)$ funksiyasıdır mı? Ümumi halda bu sualın cavabı mənfidir. Doğrudan da,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{olduqda,} \\ \text{olduqda} \end{matrix} \quad (2.57)$$

funksiyası ədəd oxunda sonsuz diferensiallanır və $x = 0$ nöqtəsində

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \dots = 0. \quad (2.58)$$

(2.56) düsturuna əsasən bu funksiyanın Teylor sırasının əmsalları sıfıra bərabərdir. Bu sıra bütün ədəd oxunda yığılır və onun cəmi sıfırdır. $f(x)$ funksiyası isə ancaq $x = 0$ nöqtəsində sıfıra bərabərdir.

Teorem 2.18. $f(x)$ funksiyasının $(-R, R)$, $R \neq 0$ intervalında qüvvət sırasına ayrılması üçün zəruri və kafi şərt $f(x)$ funksiyasının bu intervalda ixtiyari tərtib törəməsinin olması və

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1} \quad (2.59)$$

Teylor düsturundakı R_{n+1} qalıq həddinin ixtiyari $x \in (-R, R)$ nöqtəsində $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşmasıdır.

◀Zərurilik. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ intervalında qüvvət sırasına ayrılır. Onda 2.16 teoreminə əsasən $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ intervalında ixtiyari tərtib törəməyə malik olar. Teorem 2.17-ə əsasən isə $f(x)$ funksiyasının qüvvət sırası Teylor sırasıdır:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2.60)$$

(2.60) bərabərliyindən aydın olur ki,

$$R_{n+1} = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right]$$

qalıq həddi $(-R, R)$ intervalının ixtiyari x nöqtəsində $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır.

Kafilik. $f(x)$ funksiyasının $(-R, R)$ intervalında ixtiyari tərtib törəməsi varsa və $n \rightarrow \infty$ olduqda R_{n+1} qalıq həddi sıfıra yaxınlaşırsa, onda ixtiyari $x \in (-R, R)$ nöqtəsində

$$\left| f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right] \right| \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$. Yəni (2.60) sırası $(-R, R)$ aralığında yığılır və onun cəmi $f(x)$ funksiyasıdır. ►

Teorem 2.19. $(-R, R)$ intervalında $f(x)$ funksiyasının ixtiyari tərtib törəməsi varsa və bu törəmələr müntəzəm məhduddurlarsa, yəni elə $M > 0$ ədədi var ki,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (-R, R),$$

(2.61)

onda $f(x)$ funksiyası $(-R, R)$ intervalında qüvvət sırasına ayrılır.

◀ Teoremin şərtinə əsasən $f(x)$ funksiyasının $(-R, R)$ aralığında ixtiyari tərtib törəməsi olduğundan bu funksiyanın Teylor sırasını düzəltmək olar. Göstərək ki, bu sıra $f(x)$ funksiyasına yığılır. Onun üçün, teorem 2.18-ə əsasən, R_{n+1} qalıq həddinin $(-R, R)$ aralığında $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşdığını göstərmək kifayətdir. R_{n+1} qalıq həddinin Laqranj formasından istifadə etsək və (2.61) münasibətlərini nəzərə alsaq,

$$|R_{n+1}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.62)$$

$$x \in (-R, R), \quad 0 < \theta < 1$$

bərabərsizlikləri ödənər.

Dalamber əlamətinin tətbiqi ilə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$$

sirasının yığıldığını asanlıqla göstərmək olar. Sıranın yığılması üçün zəruri şərtə əsasən

$$\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Beləliklə, (2.62) qiymətləndirməsindən $R_{n+1} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $x \in (-R, R)$ olduğu alınır. ►

2. Bəzi elementar funksiyların qüvvət sırasına ayrılması.

1) $f(x) = e^x$. Bu funksiya ixtiyari $(-R, R)$, $R > 0$ intervalında istənilən dəfə diferensiallandıranıdır və

$$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorem 2.19-a əsasən $f(x) = e^x$ funksiyanı $(-R, R)$ intervalında qüvvət sırasına ayrılır. $R > 0$ ixtiyari olduğundan bu ayrılış bütün ədəd oxunda doğrudur. $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olduğundan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.63)$$

$R = +\infty$ bu sıranın yığılma radiusudur.

(2.63) ayrılışında x -in əvəzinə $-x$ yazsaq

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

ayrılışı alınır.

2) $f(x) = \sin x$. Bu funksiya ixtiyari $x \in (-\infty, +\infty)$ nöqtəsində ixtiyari tərtib törəməyə malikdir və

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left| \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

bərabərsizlikləri ödəyir.

Teorem 2.19-a əsasən $\sin x$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında qüvvət sırasına ayrılır.

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n=0,2,4,\dots \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n=1,3,5,\dots \end{cases} \begin{matrix} \text{olduqda,} \\ \text{olduqda} \end{matrix}$$

münasibətlərini nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

ayrılışı alınır. Bu sıranın yığılma radiusu $R = +\infty$ olur.

3) $f(x) = \cos x$. $\sin x$ funksiyasının qüvvət sırasına ayrılmasına analoji üsulla

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (R = +\infty) \end{aligned}$$

ayrılışının doğruluğunu göstərilir.

4) $f(x) = \ln(1+x)$. Bu funksiyanın törəməsini həndəsi silsilə düsturu ilə qüvvət sırasına ayıraq:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Bu bərabərliyi integrallayaraq

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1,$$

(2.64)

ayrılışını alırıq. Bu ayrılış $x=1$ nöqtəsində də doğrudur. Doğrudan da, $x=1$ olduqda (2.64) sırası (Leybnis sırası olduğuna görə) yığılır və teorem 2.13, 2.14-ə əsasən

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

cəmi $[0,1]$ parçasında kəsilməzdir. Ona görə də ,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$f(x) = \ln(1+x)$ funksiyası da $[0,1]$ parçasında kəsilməz olduğundan,

$$\ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \ln(1+x)|_{x=1}.$$

(2.64) bərabərliyinə əsasən $\ln(1+x) = S(x), 0 \leq x < 1$. Ona görə də,

$$\ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Beləliklə, $-1 < x \leq 1$ çoxluğunda

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ayrılığı doğrudur.

5) $f(x) = \arctg x$ funksiyası $1 < x \leq 1$ çoxluğunda

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

qüvvət sırasına ayrılır. Onun doğruluğu $\ln(1+x)$ funksiyasını qüvvət sırasına ayırdıqda istifadə olunan üsulla göstərilir.

6) $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0$ - ixtiyari həqiqi ədəddir. Bu funksiyanın Teylor sırasını formal olaraq yazaq:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \end{aligned} \quad (2.65)$$

α müsbət tam ədəd olduqda (2.65) sırasının $(n+1)$ -cidən başlayaraq bütün hədlər sıfıra bərabər olur. Bu halda (2.65) Nyuton binomunun düsturuna çevrilir. $\alpha \neq n$ ($n=0,1,2,\dots$) olduqda Dəlamber əlamətini tətbiq etməklə (2.65) sırasının yığılma radiusunun $R=1$ olduğu müəyyən edilir. Ona görə də, $(1+x)^\alpha, \alpha \neq n$ funksiyasını

$[-1,1]$ parçasından kənarda qüvvət sırasına ayırmaq olmaz. Bu parçanın daxilində

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k \quad (2.66)$$

ayrılışının doğruluğunu göstərək.

Teylor düsturunda qalıq həddin

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

Koşi formasından istifadə edək. $(1+x)^\alpha$ funksiyası üçün qalıq hədd

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n} = \\ &= \left[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n \right] \left[\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \right] \left[\alpha x (1+\theta x)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

düsturu ilə təyin olunur.

$$x > -1 \text{ olduqda } 0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \text{ ödəndiyindən}$$

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$x \in (-1,1)$ nöqtələrində $|\alpha x|(1+\theta x)^\alpha$ ədədi $|\alpha x|(1-|x|)^\alpha$ və $|\alpha x|(1+|x|)^\alpha$ ədədləri arasında yerləşir. $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n$ vuruğu $(1+x)^{\alpha-1}$ funksiyasının

Teylor sırasının n -ci həddi olduğundan $-1 < x < 1$ aralığında sıfıra yaxınlaşır. Çünki bu sıra $-1 < x < 1$ aralığında yığılır. Beləliklə, (2.67) münasibətinin sağındakı iki vuruq $-1 < x < 1$ aralığında məhdud, üçüncüsü isə $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır. Ona görə də $R_{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in (-1,1)$.

Teorem 2.18-ə əsasən $-1 < x < 1$ aralığında (2.66) ayrılığı doğrudur.

Qeyd edək ki, $\alpha > 0$ olduqda (2.66) ayrılığı $-1 \leq x \leq 1$ parçasında da doğrudur. Doğrudan da,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha| |1-\alpha| \dots |k-1-\alpha|}{k!} \quad (2.68)$$

sırası (2.65) sırasının $-1 \leq x \leq 1$ parçasında mojarantıdır. Bu sıraya Raabe əlamətini tətbiq edək. Kifayət qədər böyük k nömrələri üçün

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{(k+1)!}{\frac{|\alpha| |1-\alpha| \dots |k-1-\alpha| |k-\alpha|}{k!}} = \frac{|k-\alpha|}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1}.$$

olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = (1+\alpha) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1+\alpha > 1.$$

Raabe əlamətinə əsasən (2.68) sırası yığılır. Veyerştrass əlamətinə əsasən (2.65) sırası $-1 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığılır.

Beləliklə, (2.66) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıra $-1 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığılır. Onun $S(x)$ cəmi kəsilməzdir. (2.66) bərabərliyinə əsasən $-1 < x < 1$ intervalında $S(x) = (1+x)^\alpha$. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha > 0$ funksiyası $-1 \leq x \leq 1$ parçasında kəsilməz olduğundan $S(x) = (1+x)^\alpha$ bərabərliyi $-1 \leq x \leq 1$ parçasında doğru olar.

Nümunə. $y = \arcsin x$ funksiyasını qüvvət sırasına ayırın.

◀ Məlumdur ki, $(\arcsin x)' = \left[1 + (-x)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$. (2.66) düsturuna əsasən $-1 < x < 1$ intervalında

$$\begin{aligned}
 (\arcsin x)' &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6 + \dots = \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3}x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Bu bərabərliyi 0-dan x -ə qədər inteqrallayaraq

$$\begin{aligned}
 (\arcsin x)' &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3 \cdot 7}x^7 + \dots + \\
 &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n! 2^n (2n+1)}x^{2n+1} + \dots
 \end{aligned}$$

$$-1 < x < 1$$

ayrılışını alırıq. Bu sıra üçün $R=1$. ►

Nümunə.

$$\sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

funksiyasını qüvvət sırasına ayırın.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

olduğundan ($t \neq 0$)

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \quad (2.69)$$

Bu bərabərliyin sol tərəfindəki sıra ixtiyari $t \in (-\infty, +\infty)$

nöqtəsində yığılır. $t=0$ olduqda $\frac{\sin t}{t}=1$ qəbul etsək (2.69)

bərabərliyi $(-\infty, +\infty)$ intervalında doğru olar. (2.69) münasibətini hədbəhəd inteqrallasaq ,

$$\sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} + \dots$$

3. Kəsilməz funksiya çoxhədlilərlə müntəzəm yaxınlaşma haqqında Veyerştrass teoremi

Teorem 2.20 (Veyerştrass teoremi). Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda, elə $\{P_n(x)\}$ çoxhədlilər ardıcılığı var ki, o, $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılır, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $P_n(x)$ çoxhədlisi var ki (n nömrəsi ε ədədindən asılıdır), ixtiyari $x \in [a, b]$ nöqtəsində

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

◀ Ümumiliyi pozmadan $[a, b]$ parçasının əvəzinə $[0, 1]$ parçasına baxaq (çünki $x = (b-a)t + a$ xətti əvəzləməsi $[0, 1]$ parçasını $[a, b]$ parçasına çevirir və tərsinə). Bundan əlavə, teoremi $f(0) = f(1) = 0$ şərtini ödəyən kəsilməz funksiyalar üçün isbat etmək kifayətdir. Doğrudan da, əgər $f(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasının uclarında sıfıra bərabər deyilsə, onda

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$$

funksiyasına baxsaq $g(0) = g(1)$ şərti ödənər. Bu halda $g(x)$ funksiyası üçün teoremin doğruluğundan onun $f(x)$ funksiyası üçün də doğruluğu alınar (çünki $f(x) - g(x)$ fərqi bir dərəcəli çoxhədlidir).

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında kəsilməzdir və $f(0) = f(1) = 0$ şərtini ödəyir. Bu funksiyanı $[0, 1]$ parçasından kənarda sıfıra bərabər qəbul etsək, onda $f(x)$ ədəd oxunda müntəzəm kəsilməz funksiya olar.

Mənfi olmayan, $2n$ dərəcəli

$$Q_n(x) = C_n(1-x^2)^n, \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.69)$$

ardıcılığına baxaq. C_n ədədlərini

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.70)$$

şərtlərindən seçildiyini fərz edək.

C_n ədədlərini hesablamadan onları yuxarıdan qiymətləndirək. Onun üçün $[0,1]$ parçasında

$$(1-x^2)^n \geq 1-nx^2 \quad (2.71)$$

bərabərsizliyin doğruluğundan istifadə edək. $n \geq 1$ olduqda

$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ olduğunu və (2.71) bərabərsizliyini nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2) dx = \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

(2.69), (2.70) və (2.72) münasibətlərindən

$$C_n < \sqrt{n}, \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.73)$$

bərabərsizliyi alınır.

(2.69) və (2.73) münasibətlərinə əsasən ixtiyari $\delta > 0$ ədədi üçün $\delta \leq |x| \leq 1$ çoxluğunda

$$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \quad (2.74)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan aydın olur ki, $\delta \leq |x| \leq 1$ çoxluğunda $\{Q_n(x)\}$ çoxhədlilər ardıcılığı sıfıra müntəzəm yığılır.

İndi isə $0 \leq |x| \leq 1$ parçasında

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt, \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.75)$$

funksiyasını təyin edək. $f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasından kənarda sıfır olduğundan

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t) dt = \int_0^1 f(t) Q_n(t-x) dt. \quad (2.76)$$

(2.69) və (2.76) münasibətlərindən $P_n(x)$ funksiyasının $2n$ dərəcəli çoxhədli olduğu aydın olur.

$\{P_n(x)\}$ ardıcılığının $0 \leq x \leq 1$ parçasında $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığıldığını isbat edək.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. $f(x)$ funksiyası ədəd oxunda müntəzəm kəsilməz olduğundan qeyd olunmuş ε üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2, \quad |x - y| < \delta. \quad (2.77)$$

$f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında məhduddur və bu səbəbdən də o ədəd oxunda məhdud olar. Onda elə $A > 0$ ədədi var ki, ixtiyari $x \in (-\infty, \infty)$ nöqtəsində

$$|f(x)| \leq A \quad (2.78)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

(2.70), (2.74), (2.77), (2.78) və $Q_n(x) \geq 0$ münasibətlərindən istifadə edərək $P_n(x) - f(x)$ fərqlərini qiymətləndirək. İxtiyari $x \in [0,1]$ nöqtəsində

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \leq A \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt + \end{aligned}$$

$$+ 2A \int_{\delta}^1 Q_n(t) dt \leq 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teoremin isbatını tamamlamaq üçün kifayət qədər böyük n nömrələrində

$$4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \varepsilon/2$$

olduğunu nəzərə almaq kifayətdir. Teorem isbat olundu. ►

II fəslə aid çalışmalar

Funksional sıraların yığılma oblastlarını təyin edin:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2).$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \lg \frac{x}{2^n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}.$$

Sıraların şərti və mütləq yığılma oblastlarını təyin edin:

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$$

18. $f_n(x) = x^n$ ardıcılığının $0 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığıldığını isbat edin.

19. $f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$ ardıcılığını $-\infty < x < +\infty$ aralığında müntəzəm yığılmadığını isbat edin.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2} + n}$ sırasının $-1 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığıldığını isbat edin.

21. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ sırasının $0 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığılmadığını isbat edin.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ sırasının $-1 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığıldığını isbat edin.

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad \text{sirasının} \quad 0 < x < +\infty$$

aralığında müntəzəm yığıldığını isbat edin.

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} \quad \text{sirasının} \quad 0 < x < +\infty$$

aralığında müntəzəm yığılmadığını isbat edin.

Veyerstrass əlamətini tətbiq edərək sıraların müntəzəm yığıldığını isbat edin:

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n - (4 - x^2)^{1/2}}, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n^3} \right), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

Sıraların müntəzəm yığılmasını araşdırın:

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

37. Kəsilən funksiyalar ardıcılığı kəsilməz funksiyaya müntəzəm yığıla bilərmi?

38. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ funksiyasının varlıq oblastını təyin edin və diferensiallanmasını tədqiq edin.

39. İsbat edin ki, $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) ardıcılığı $(-\infty, +\infty)$ intervalında müntəzəm yığılır, lakin

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

40. İsbat edin ki, $f_n(x) = nxe^{-nx}$ ($n = 1, 2, \dots$) ardıcılığı $[0, 1]$ parçasında yığılır, lakin

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

41. İsbat edin ki, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) ardıcılığı $[0, 1]$ parçasında qeyri müntəzəm yığılır, lakin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Limitləri tapın:

$$42. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

$$45. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2 n^2}.$$

Qüvvət sıralarının yığılma intervalını təyin edin:

$$46. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n.$$

$$47. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+2n}} x^n.$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} (x+2)^n.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (x+1)^n.$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\ln(1+n)}.$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^2} (x-1)^n.$$

Funksiyaları Teylor sırasına ayırın:

$$53. \frac{1}{2+3x}.$$

$$54. \frac{x}{x-1}.$$

$$55. \sqrt[3]{1+x^3}.$$

$$56. \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$57. \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

MÜNDƏRİCAT

Ön söz	3
--------------	---

I FƏSİL

ƏDƏDİ SİRALAR

§1. Ədədi sıra anlayışı	4
1. Ədədi sıraların yığılması və dağılması	(4).
2. Ədədi sıranın yığılması üçün Koşi meyarı	(7).
§2. Hədləri mənfə olmayan sıralar.....	10
1. Hədləri mənfə olmayan sıraların yığılması üçün zəruri və kafi şərt.....	(10)
2. Müqayisə əlamətləri	(10)
3. Dəlambər və Koşi əlamətləri.....	(15)
4. Koşi-Makleron əlaməti (inteqral əlaməti)	(20)
5. Raabe əlaməti.....	(25)
§3. Mütləq və şərti yığılan sıralar	27
1. Mütləq və şərti yığılma anlayışları	(27)
2. Mütləq yığılan sıranın hədlərinin yerdəyişməsi haqqında Koşi teoremi	(29)
3. Şərti yığılan sıranın hədlərinin yerdəyişməsi haqqında Riman teoremi	(31)
§4. İxtiyari sıralar üçün yığılma əlamətləri	34
§5. Yığılan sıralar üzərində hesab əməlləri	40
I Fəslə aid çalışmalar	45

II FƏSİL

FUNKSIONAL ARDICILLIQLAR VƏ SİRALAR

§1. Nöqtədə yığılma və çoxluqda müntəzəm yığılma anlayışları.....	49
1. Funksional ardıcılıq və sıraların nöqtədə və çoxluqda yığılması.....	(49)
2. Çoxluqda müntəzəm yığılma	(53)
3. Funksional ardıcılığın (sıranın) müntəzəm yığılması üçün Koşi meyarı	(58)
§2. Funksional ardıcılıq və sıraların müntəzəm yığılması üçün kafi şərtlər	60
§3. Hədbəhəd limitə keçmə teoremləri	71

§4. Funksional ardıcılıqların və funksional sıraların hədbəhəd inteqrallanması	75
§5. Funksional ardıcılıqların və funksional sıraların hədbəhəd diferensiallanması	79
§6. Qüvvət sıraları	84
1. Qüvvət sırasının yığılma oblastı	(84)
2. Qüvvət sırasının cəminin kəsilməzliyi	(90)
3. Qüvvət sırasının hədbəhəd inteqrallanması və diferensiallanması	(93)
§7. Funksiyanın qüvvət sırasına ayrılması	95
1. Funksiyanın qüvvət sırasına ayrılması üçün əsas teoremlər	(95)
2. Bəzi elementar funksiyaların qüvvət sırasına ayrılması	(99)
3. Kəsilməz funksiyaya çoxhədlimlərlə müntəzəm yaxınlaşma haqqında Veyerştrass teoremi	(105)
II Fəslə aid çalışmalar	108