

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL
NAZİRLİYİ
BAKİ BİZNES UNİVERSİTETİ**

*Dərs vəsaiti Bakı Biznes Universitetinin
20 illik yubileyinə bir töhfədir*

ALİ RİYAZİYYAT
II hissə
(Dərs vəsaiti)

Dərs vəsaiti Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 21 noyabr 2012-ci il tarixli 2113 sayılı əmri ilə təsdiq edilmişdir.

Bakı - 2012

Dərs vəsaitini pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Q.M.Namazov hazırlamışdır.

Redaktor: fizika, riyaziyyat elmləri doktoru
prof. **H.İ.Aslanov**

Rəyçilər: AzDPU-nun professoru
Ə.M. Məmmədov

pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
dosent **R.B.Aliyev**

Namazov Q.M.

«Ali riyaziyyat» dərs vəsaiti. – Bakı, 2012. –333s.

Bakı Biznes Universitetinin tələbələri üçün Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirliyinin 08.04.2010-cu ildə təsdiq olunmuş “Ali riyaziyyat” proqramı əsasında yazılmış bu dərs-vəsaitinin II hissəsində matrislər, determinantlar, vektorlar cəbri, düz xətlər və müstəvilər, xətti fəzalar, təsadüfi hadisələr və onların paylanma funksiyaları, çoxölçülü funksiyanın xassələri, riyazi statistikanın və s. bu kimi məsələləri şərh olunmuşdur.

Dərs vəsaitindən digər ali və orta məktəblərinin professor-müəllim və tələbələri də istifadə edə bilərlər.

© Namazov Q.M., 2012

© Bakı Biznes Universiteti, 2012

GİRİŞ

Elmi texniki tərəqqinin müasir mərhələsində digər humanitar və texniki elmlərlə yanaşı Ali riyaziyyatın da rolu artmışdır. Bununla əlaqədar tələbələrdən möhkəm riyazi biliyə malik olma, riyaziyyatı müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq etmək bacarığı tələb olunur.

Tələbələrin riyazi təfəkkürünü inkişaf etdirmək , qazandıqları riyazi bilikləri öz ixtisaslarına aid olan nəzəri və praktiki məsələlərin həllində tətbiq etmə və alınan nəticələri analiz etmə bacarığını inkişaf etdirmək üçün “Ali riyaziyyat” kursu mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Bakı Biznes Universitetinin tələbələri üçün Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirliyinin 08.04.2010-cu ildə təsdiq olunmuş “Ali riyaziyyat” proqramı əsasında yazılmış dərs vəsaitinin II hissəsində matrislər, determinantlar, determinantların hesablanması üçün Kramer və Qauss qaydaları, vektorlar cəbri, düz xətlər və müstəvilər, xətti fəzalar və çevirmələr, məxsusi və tərs çevirmələr, xətti çevirmənin matris şəkli, ortoqonal matrislər, qabarıq çoxluqlar və xətti bərabərsizliklər sistemi, təsadüfi hadisələr, hadisələr cəbri, ehtimal, sadə xassələri, şərti ehtimal, hadisələr, təsadüfi kəmiyyətlər, paylanma funksiyaları, xassələri, çoxölçülü funksiyanın xassələri, riyazi gözləmə, baş yığım və seçmə anlayışı şərh olunmuşdur.

Dərs vəsaitindən iqtisadi yönümlü Universitetlərin professor-müəllim və tələbələri də istifadə edə bilərlər.

XXIV FƏSİL. MATRİSİN ELEMENTLƏRİ. SKALYAR MATRİS.VAHİD MATRİS

24.1.1.Matris m sayda sətir və n sayda sütunu olan düzbucaqlı cədvəl kimi

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ olmaqla a_{ij} ədədlərindən və ya başqa riyazi ifadələrindən düzəldilmiş m sayda sətirdən, n sayda sütundan ibarət düzbucaqlı cədvəl $m \times n$ ($m \neq n$) ölçülü düzbucaqlı matris adlanır.

Matrislər $A, B, C, \dots$ və ya $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) \dots$ və ya $\|a_{ij}\|, \|b_{ij}\|, \|c_{ij}\|, \dots$ kimi işarə edilir. Biz bunların hər birindən istifadə edəcəyik. Aşağıdakı A matrisində

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} –lar matrisin elementləri adlanır.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4x & 0 \\ y & x+1 & y^2 & 5 \end{pmatrix}$$

matrisi 2×4 ölçülüdür və

$a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = 4x, a_{14} = 0, a_{21} = y, a_{22} = x + 1, a_{23} = y^2, a_{24} = 5$ onun elementləridir.

Matrislərdən istifadə edərkən xətti tənliklər sistemini müxtəsər şəkildə yazmaq olar.

24.1.2. Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılması

Tutaq ki, n məchullu n xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemi matris şəklində yazaq:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \right\| \quad (2)$$

Əgər məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A, sağ tərəfdəki məlum ədədlərdən düzəlmiş sütun-matrisi B, axtarılan məchullardan düzəlmiş sütun matrisi X ilə işarə etsək, yəni

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix},$$

onda (2) sistemini müxtəsər olmaqla aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (3)$$

24.2. Matrisin növləri. Matrislər üzərində əməllər. Skalyar və vahid matris

Əgər A matrisində $m=n$ olarsa, onda bu matris n tərtibli kvadrat matris adlanır. Kvadrat matrisin baş diaqonalı üzərində olmayan (yəni $i \neq j$) elementlərinin hamısı sıfıra bərabərdirsə, onda belə matris diaqonal matris adlanır. Diaqonal matrisin bütün elementləri 1-ə bərabərdirsə, bu matris **vahid matris adlanır** və E ilə işarə edilir. Bütün elementləri sıfır olan matris sıfır matris adlanır və «0»- ilə işarə olunur.

Xüsusi halda $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$ olarsa, alınan matrisə skalyar matris deyilir. Skalyar matrisdə $a=1$ olarsa, belə matrisə vahid matris deyilir.

Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.

Tərifə əsasən

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & x+y \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ -kvadrat matris;

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ - diaqonal matris;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -vahid matris;

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ -sıfır matris

olacaqdır.

Eyni ölçülü $A = (a_{ij})$ və $B = (b_{ij})$ matrislərinin cəmi, (fərqi) elə $C = (c_{ij})$ matrisinə deyilir ki, $\forall i, j$ üçün $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$) olsun.

24.3. Matrisin ədədə hasili. Matrislərin vurulması (Vurulan matrisin sütunlarının sayı vuran matrisin sətirlərinin sayına bərabər olduqda)

$A = (a_{ij})$ matrisinin λ ədədinə hasili, ölçüsü A -nın ölçüsünə bərabər olan elə $B = (b_{ij})$ matrisinə deyilir ki, ixtiyari i, j üçün $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ olsun.

Tutaq ki, ixtiyari eyni ölçülü A, B, C matrisləri verilmişdir. Onda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

- 1) $A + B = B + A$ (kommutativlik);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (assosiativlik);
- 3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (assosiativlik);
- 4) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (Matrislərin toplanmasına nəzərən distributivlik);
- 5) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (ədədlərin toplanmasına nəzərən distributivlik).

$\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ şəklində olan ifadə (α, β ixtiyari ədədlərdir) eyni ölçülü A və B matrislərinin xətti kombinasiyası adlanır.

$m \times n$ ölçülü A matrisi ilə $n \times r$ ölçülü B matrisinin $A \cdot B$ hasili ölçüsü $m \times r$ olan elə $C = (c_{ij})$ matrisinə deyilir ki,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

olsun.

Göründüyü kimi, $A \cdot B$ hasili ancaq o zaman var ki, A matrisinin sütunlarının sayı B matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olsun.

24.4.1. Vurma əməlinə nəzərən kommutativ olmayan matrislər

Qeyd edək ki, eynitərtibli A və B kvadrat matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi doğru deyil: yəni, $AB \neq BA$. Lakin istənilən A kvadrat matrisi ilə eynitərtibli olan I (vahid) və O (sıfır) matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi həmişə doğrudur.

$$IA = AI = A,$$

$$OA = AO = O.$$

Matrislərin vurulması əməlinin aşağıdakı xassələri var:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \quad (\text{assosiativlik});$$

$$2) (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (\text{distributivlik});$$

$$3) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{distributivlik});$$

4) Ümumiyyətlə, $A \cdot B \neq B \cdot A$ (kommutativlik doğru deyil).

Tutaq ki, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ çoxhədli verilməmişdir. $a_n \cdot A_n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E$ ifadəsi matris çoxhədli adlanır və $f(A)$ ilə işarə edilir (burada $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$). Verilmiş A matrisi üçün $f(A)$

matris çoxhədlisinin qiyməti matrisdir.

Əgər A matrisinin bütün sətirləri uyğun sütunları ilə əvəz edilərsə, onda alınmış və A^T kimi işarə olunmuş matrisə, A matrisinin transponirə edilməsi deyilir.

24.4.2. Matrislər üzərində aparılan sadə çevirmələr

Aşağıdakı çevirmələr elementar çevirmələr adlanır.

1. İxtiyari iki sətirin (sütunun) yerini dəyişmək;
2. İxtiyari sətiri (sütunu) ixtiyari $\lambda \neq 0$ ədədinə vurmaq;
3. İxtiyari sətirin (sütunun) elementlərini başqa sətirin (sütunun) uyğun elementlərinə əlavə etmək.

A və B matrislərindən biri digərindən elementar çevirmələrin köməyi ilə alınarsa, onda bu matrislər ekvivalent matrislər adlanır və $A \sim B$ kimi işarə olunur.

Əgər matrisin hər hansı sətirinin elementi sıfırdan fərqli, ondan soldakı elementlərin hamısı sıfıra bərabərdirsə, onda bu element həmin sətirin kənar elementi adlanır.

Əgər matrisin ikincidən başlayaraq hər bir sətirinin kənar elementi özündən əvvəlki sətirin kənar elementindən sağda yerləşərsə, belə matris pilləvari matris adlanır.

İxtiyari matrisi elementar çevirmələrin köməyi ilə pilləvari şəkə gətirmək olar.

Misal.

A , B və C matrisləri verildikdə $5A+3B-2C$ xətti kombinasiyasını hesablayın.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Həlli:

$$\begin{aligned} 5A - 3B + 2C &= \begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \\ -5 & 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 3 & -6 \\ -9 & 6 & 21 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Misal.

A və B matrisləri üçün $A \cdot B = B \cdot A$ bərabərliyinin doğru olub-olmadığını göstərin:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Həlli:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Deməli $A \cdot B \neq B \cdot A$ olur.

Misal.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matrisi verildikdə $(A \cdot B) \cdot C$ –ni hesablayın.

Həlli:

Əvvəlcə

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+0+12 & 0+0+9 \\ 12-2-4 & 0+1-3 \\ 6+6+8 & 0-3+6 \\ 3-10+12 & 0+5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -2 \\ 20 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Onda

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -2 \\ 20 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+27 \\ -12-6 \\ -40+9 \\ -10+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

olar.

İndi isə $B \cdot C$ -ni hesablayaq.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0 \\ 4+3 \\ -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Onda

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+0+3 \\ -24+7-1 \\ -12-21+2 \\ -6+35+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Deməli,

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Misal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ olduqda, } f(x) = x^3 - x^2 + 5 \text{ matris}$$

çoxhədlişi üçün $f(A)$ -nı hesablayın.

Həlli:

Matrislərin vurulması qaydasına əsasən A^2 və A^3 -nu hesablayaq:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Onda, } 5 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ olduğunu nəzərə alsaq:}$$

$$f(A) = A^3 - A^2 + 5 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Beləliklə,

$$f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Misal.

Verilmiş matrisi pilləvari şəkə gətirin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Həlli:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \cdot (-3) + II \\ I \cdot (-5) + IV \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \begin{matrix} II + III \\ II \cdot (-1) + IV \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İxtisarla verilmiş izahlardan birini açıqlayaq. Məsələn, $I \cdot (-3) + II$ izahı o deməkdir ki, «birinci sətri (-1) -ə vurub və nəticəni ikinci sətrə üzərinə əlavə edək».

XXV FƏSİL. DETERMİNANT. DETERMİNANTIN XASSƏLƏRİ. ÜÇTƏRTİBLİ DETERMİNANT

25.1.1. İkitərtibli determinant sol və sağ diaqonal elementlərinin hasilinin fərqi kimi. Üçtərtibli determinant

Əvvəlcə ikitərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

matrisinə baxaq. Bu matrisin elementlərindən düzəldilmiş $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ fərfinə (1) matrisinin determinantı (və ya sadəcə olaraq ikitərtibli determinant) deyilir və

$$\det A = \Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (2)$$

kimi işarə olunur.

Üçtərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

matrisinin elementlərindən düzəldilmiş

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \quad (4)$$

ifadəsinə üçtərtibli determinant deyilir. (4) ifadəsinə determinantın açılışı deyilir.

Tərif: İstənilən n tərtibli kvadrat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə determinant adlanan bir $\det A$ ədədini qarşı qoymaq olar.

$$1) n = 1, \quad A = (a_1); \quad \det A = a_1$$

$$2) n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$3) n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

25.1.2. Üçtərtibli determinantın hesablanması üçün üçbucaq və Sarrius üsulu

Determinantın cəbri tamamlayıcı ilə bağlı belə bir xassəsi var. Determinantın hər hansı sətir (və ya sütun) elementlərinin öz cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəmi həmin determinanta bərabərdir.

Bu xassə determinantın sətir (sütun) elementləri üzrə ayrılışı adlanır. Bu barədə sonrakı dərslərdə məlumat veriləcəkdir.

Determinantların hesablanması başqa bir qaydası da vardır. Bu qayda Sarrius qaydası adlanır. Fərz edək ki, üçtərtibli determinant verilmişdir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sarrius qaydası aşağıdakı kimidir. Determinanta dördüncü beşinci sütun (sətir) olaraq birinci və ikinci sütunu (sətiri) əlavə edərək alınan üç sol diaqonal elementlərinin hasilini müsbət işarə ilə alınan üç sağ diaqonal elementlərinin hasilini isə mənfi işarə ilə götürməklə determinantın qiymətini hesablamaq olar.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Determinantın hesablanması zamanı onun xassələrindən istifadə etmək faydalı olur.

İki tərtibli determinantın hesablanması aşağıdakı sxem əsasında yerinə yetirilir.

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Misal.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) = -30 + 6 = -24, \Delta = -24.$$

Üç tərtibli determinant isə

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

sxemi ilə hesablanır.

Misal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 5 =$$

$$= 20 + 3 + 0 - 18 - 8 - 0 = 23 - 26 = -3, \Delta = -3.$$

25.1.3. Minor və cəbri tamamlayıcı. Üçtərtibli determinantların cəbri tamamlayıcılar vasitəsilə ayrılması

İxtiyari n tərtibli matrisin determinantının hesablamaq qaydası həm qavramaq, həm də tətbiq baxımından kifayət qədər mürəkkəbdir. Buna baxmayaraq yüksək tərtibli determinantların, aşağı tərtibli determinantların köməyi ilə hesablanması üsulları mövcuddur. n tərtibli determinantın hər hansı a_{ij} elementinin olduğu sətir və sütun elementlərini pozduqda alınan $n-1$ tərtibli determinant, bu elementin **minoru** adlanır və M_{ij} – la işarə edilir.

Məsələn:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ determinantı üçün}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ və s.}$$

Determinantın a_{ij} elementinin M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ ədədinə hasili həmin elementin **cəbri tamamlayıcısı adlanır** və A_{ij} kimi işarə edilir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Onda,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} \quad \text{və s.}$$

Teorem 1. Hər bir determinant hər hansı bir sətir və ya sütun elementlərinin öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəminə bərabərdir.

İsbatı: Teoremin ikitərtibli və üçtərtibli determinantlar üçün isbatı çox asandır. Məsələn, üçtərtibli determinantının 1-ci sətir elementlərinin öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəminə bərabər olduğunu göstərək. Bu məqsədlə determinantın ifadəsini

$$\begin{aligned} \Delta(A_3) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şəklində yazaq. Buradan tələb olunan

$$\Delta(A_3) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (1)$$

ayrılışını alırıq. Bundan başqa üçtərtibli determinantı üçün aşağıdakı beş münasibəti alırıq:

$$\begin{aligned} \Delta(A_3) &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ \Delta(A_3) &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \\ \Delta(A_3) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ \Delta(A_3) &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta(A_3) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} .$$

(1) və (2) bərabərliklərinə üçtərtibli determinantın uyğun sətir və ya sütun elementlərinə görə ayrılışı deyilir.

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantının birinci və ikinci sətir elementlərinə görə ayrılışı:

$$\Delta(A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+3}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \quad (3)$$

və

$$\Delta(A_2) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \quad (4)$$

İsbat etdiyimiz teorem üçtərtibli determinantı iki-tərtibli determinantlar vasitəsilə ikitərtibli determinantı isə birtərtibli determinantlar vasitəsilə təyin etməyə imkan verir. Bu qayda ilə dörd beş və s. tərtibli determinantları da ardıcıl olaraq təyin etmək olar. Məsələn dördtərtibli

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (5)$$

matrisinin $\Delta(A_4)$ determinantını (dördtərtibli determinantı)

$\Delta(A_4) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$ (6) kimi təyin etmək olar. Burada A_{11} , A_{12} , A_{13} , və A_{14} kəmiyyətləri dördtərtibli

$$\Delta(A_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (7)$$

determinantının 1-ci sətir elementlərinin üçtərtibli determinantlar vasitəsilə ifadə olunan uyğun cəbri tamamlayıcılarıdır. (7) determinantını başqa sətir və ya sütun elementləri üzrə ayrılışlar vasitəsilə də təyin etmək mümkündür .

Bu mülahizələrə əsasən n - tərtibli determinanta aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

Tərif . $n(n > 1)$ – tərtibli

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

matrisinin

$$\Delta A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı (n -tərtibli determinant)

$$\Delta (A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$$

və ya

$$\Delta (A_n) = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

ədədinə deyilir. Burada M_{1k} ilə A_n matrisinin 1-ci sətirini və k -cı sütununu pozmaqla alınan $(n - 1)$ - tərtibli matrisin determinantı işarə olunmuşdur.

Yuxarıda isbat olunan teorem göstərir ki , iki və üçtərtibli determinantlara əvvəlcə verdiyimiz təriflər bu təriflə $n=2$ və $n=3$ olduqda ekvivalentdir. Həmin teorem n -tərtibli determinantlar üçün də doğrudur:

Teorem 2. n - tərtibli $\Delta(A_n)$ determinantı və istəniləni ($1 \leq i \leq n$) və j ($1 \leq j \leq n$) üçün

$$(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (8)$$

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \quad (9)$$

bərabərlikləri doğrudur.

(8) bərabərliyinə $\Delta(A_n)$ determinantının i – ci sətir elementləri üzrə ayrılışı, (9) bərabərliyinə isə onun j – cu sütun elementləri üzrə ayrılışı deyilir.

Misal. Vahid matrisin determinantı vahidə bərabərdir.

Doğrudan da,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ olduqda } \Delta(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ olduqda } \Delta(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

olduqda

$$\Delta(I_n) = \Delta(I_{n-1}) = \Delta(I_{n-2}) = \dots = \Delta(I_2) = 1$$

25.1.4. Determinantın xassələri

Determinantın tərtibi artdıqca onun elementlərinin və hədlərinin sayı artır .

İkitərtibli determinantın 4 elementi və 2 həddi, üçtərtibli determinantın 9 elementi və 6 həddi, dörd-tərtibli determinantın 16 elementi və 24 həddi, beşərtibli determinantın 25 elementi və 120 həddi və s.var. n- tərtibli determinantın n^2 sayda elementi və $n!$ (1-dən n-ə qədər natural ədədlərin hasili olub n faktorial adlanır:

$n!=1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$) sayda həddi var. Buna görə də yüksək tərtibli determinantları hesablamaq üçün böyük hesablama işi aparmaq lazım gəlir. Bəzən bu hesablamaları aparmaq praktik cəhətdən çox çətin olur.

Determinantların hesablanması asanlaşdıran bir sıra xassələri vardır. İstənilən tərtibli determinantlara aid olan bu xassələri biz ancaq üçtərtibli determinantlar üçün burada söyləməklə kifayətlənirik .

Xassə 1. Determinantın bütün sətirləri ilə sütunlarının uyğun olaraq yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Bu bərabərliyin doğruluğunu isbat etmək üçün sol tərəfdəki determinantı Δ ilə,sağ tərəfdəki determinantı isə Δ^* ilə işarə edək. Δ determinantının birinci sətir elementləri üzrə ayrılışını və Δ^* determinantının birinci sütun elementləri üzrə ayrılışını yazaq:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} ,$$

$$\Delta^* = a_{11}A_{11}^* + a_{12}A_{12}^* + a_{13}A_{13}^* .$$

$$A_{11} = A_{11}^* , \quad A_{12} = A_{12}^* \text{ və } A_{13} = A_{13}^* \quad \text{olduğundan}$$

$$\Delta = \Delta^*$$

Determinantın bütün sətirləri ilə sütunlarının uyğun olaraq yerini dəyişməsinə onun çevrilməsi və ya transponirə edilməsi deyilir. İsbat etdiyimiz xassə göstərir ki, determinantın çevrilməsi zamanı onun qiyməti dəyişmir, yəni A matrisi ilə onun A^* çevrilməsinin determinantları həmişə bərabərdir:

$$\Delta(A) = \Delta(A^*) \quad (2)$$

Nəticə: Hər bir determinantın sətirləri ilə sütunları eyni hüquqludur. Buna görə də determinantın bundan sonrakı xassələrini ancaq sətirləri və ya ancaq sütunları üçün söyləmək kifayətdir.

Xassə 2. Determinantın iki sətirinin (və ya sütununun) bir- biri ilə yerini dəyişdikdə determinantın ancaq işarəsi dəyişər:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Doğrudanda da sol tərəfdəki determinantın birinci sətir elementləri üzrə ayrılışını:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

və sağ tərəfindəki determinantların ikinci sətir elementləri üzrə ayrılışını:

$$\Delta' = a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + a_{13}A'_{13}$$

yazıb, $A_{11} = -A'_{11}$, $A_{12} = -A'_{12}$, $A_{13} = -A'_{13}$ olduğunu nəzərə alsaq, onda (3) bərabərliyinin doğruluğu aydın olar.

Xassə 3. İki sətiri eyni olan determinant sıfıra bərabərdir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

doğrudanda, Δ determinantında birinci və ikinci sətirlərin bir biri ilə yerini dəyişsək, onda $\Delta = -\Delta$. Buradan

$$2\Delta=0, \Delta=0.$$

Bu xassədən istifadə edərək, bir sıra maraqlı münasibətlər almaq olar. Əgər

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantında və ya onun birinci sətir elementləri üzrə

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (4)$$

ayrılışında a_{11} , a_{12} və a_{13} ədədlərini (birinci sətir elementlərini) uyğun olaraq $a_{21}a_{22}$ və a_{23} ədədləri ilə (ikinci sətir elementləri ilə) əvəz etsək, onda birinci və ikinci sətir elementləri eyni olan determinant alarıq. Bu determinant isə III xassəyə görə sıfıra bərabərdir, yəni

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0 \quad (5)$$

Birinci sətir elementlərini uyğun olaraq üçüncü sətir elementləri ilə əvəz etdikdə isə

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0 \quad (6)$$

bərabərliyi alınır. Beləliklə, Δ determinantının hər bir sətir və sütun elementləri üzrə ayrılışından (5) və (6) bərabərliklərinə uyğun münasibət alınır :

$$\begin{cases} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Xassə 4. Determinantın hər hansı bir sətir elementlərini ortağ vuruğu olarsa, onda həmin vuruğu determinantın xaricinə çıxarmaq olar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (8)$$

bu bərabərliyin sol tərəfindəki detereminantı Δ_1 sağ tərəfindəki determinantı Δ ilə işarə edək. Əgər Δ_1 determinantının ikinci sətir elementləri üzrə ayrılışını yazsaq

$$\Delta_1 = \lambda a_{21}A_{21} + \lambda a_{22}A_{22} + \lambda a_{23}A_{23} = \lambda (a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = \lambda \Delta.$$

Nəticə 1. Determinantın hər hansı bir sətirinin bütün elementləri sıfır olduqda determinant sıfıra bərabər olar.

Nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün (8) bərabərliyində $\lambda = 0$ götürmək kifayətdir.

Nəticə 2. Determinantı bir ədədə vurmaq üçün determinantın hər hansı bir sətirini həmin ədədə vurmaq kifayətdir.

Bu nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün (8) bərabərliyinin sağdan sola oxumaq kifayətdir.

Xassə 5. Determinantın hər hansı bir sətirinin bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar, bu determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar, o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

doğrudan da, bərabərliyin sol tərəfindəki determinantı Δ_1 , sağ tərəfdəki determinantları isə uyğun olaraq Δ və Δ' ilə işarə edərək, Δ_1 determinantını birinci sətir elementləri üzrə ayırsaq :

$$\Delta_1 = (a_{11} + a'_{11}) A_{11} + (a_{12} + a'_{12}) A_{12} + (a_{13} + a'_{13}) A_{13} = (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + (a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13}) = \Delta + \Delta'$$

və ya tələb olunan

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta'$$

bərabərliyini alırıq .

Xassə 6. Determinantın hər hansı sətrinin bütün elementlərini bir ədədə vurub onun başqa bir sətrinin uyğun elementləri üzərinə əlavə etsək determinant dəyişməz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Bu təklifin doğruluğu determinantın III, IV və V xassələrindən aydındır.

25.2. Determinantın sıfıra bərabər olması şərtləri

Determinantın xassələrindən aydın olur ki, aşağıdakı hallarda determinantın qiyməti sıfıra bərabərdir.

a) İki sətiri eyni olan determinant sıfıra bərabərdir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

b) Determinantın hər hansı bir sətirinin bütün elementləri sıfır olduqda determinantın qiyməti sıfıra bərabər olar.

c) Sıfır matrisin determinantı sıfıra bərabərdir.

XXVI FƏSİL. TƏRS MATRİS VƏ ONUN VARLIĞI. GENİŞLƏNMİŞ MATRİSLƏR

26.1.1. Tərs matris və onun varlığı. Məxsusi cırlaşan və qeyri-məxsusi matris

Tutaq ki, A hər hansı tərtibli kvadrat matris və I həmin tərtibli vahid matrisdir. Bu halda

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (1)$$

bərabərliyini ödəyən A^{-1} matrisinə A **matrisinin tərsi** deyilir. (1) bərabərliyi göstərir ki, A^{-1} matrisi A matrisinin tərsidirsə, onda A matrisi də A^{-1} matrisinin tərsidir:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (2)$$

yəni A və A^{-1} **matrisləri qarşılıqlı tərs matrislərdir**.

A matrisinin tərsi varsa, bu ancaq yeganə ola bilər. Doğrudan da, A matrisinin A_1^{-1} və A_2^{-1} kimi iki tərs matrisi olarsa, onda

$$A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = I - I = 0.$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini soldan A_1^{-1} matrisinə vursaq:

$$A_1^{-1}A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = I(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = A_1^{-1} - A_2^{-1} = 0$$

və yaxud

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

A matrisinin determinantı $\Delta(A)$ olsun. $\Delta(I) = 1$ olduğundan (1) bərabərliyinə əsasən

$$\Delta(AA^{-1}) = \Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1$$

və yaxud

$$\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1, \quad \Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta(A)} \quad (3)$$

münasibəti doğrudur. Buradan aydındır ki, verilmiş A matrisinin A^{-1} tərsi olması üçün $\Delta(A) \neq 0$ olmalıdır. Bu təklifin tərsi də doğrudur.

26.1.2. Əsas və genişləndirilmiş matris

Tutaq ki, n məchullu m sayda xətti tənliklər sistemi verilmişdir.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Bu tənliklər sisteminin əmsallarından (A) və bu matrisə sərbəst hədlər sütununu əlavə etməklə (B) aşağıdakı kimi matrislər tərtib edək:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A sistemin esas matrisi B ise genişlenmiş matrisi adlanır.

26.1.3. Matrisin rangı. Bazis minoru

İxtiyari A matrisinin hər hansı k sayda sətirləri ilə k sayda sütunlarının kəsişməsində yerləşən element-

lərdən düzəldilmiş k tərtibli determinant həmin matrisin k tərtibli minoru adlanır.

Məsələn:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrisinin;}$$

Bir tərtibli:

$$|5| \quad (|a_{31}| = 5), |4| \quad (|a_{23}| = 4), \text{ və s.}$$

$$\text{İki tərtibli:} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{pmatrix}, \text{ və s.}$$

Üç tərtibli;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

və s. minorlarını göstərmək olar.

Aydındır ki, A matrisi $m \times n$ ölçülüdürsə, onda $k \leq \min(m, n)$ olmalıdır.

A matrisinin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə həmin matrisin rəngi deyilir və $r(A)$ ilə işarə edilir. Aydındır ki, $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Tərtibi matrisin rəngini müəyyən edən minor **bazis minoru** adlanır. Matrisin bir neçə bazis minoru ola bilər. Bazis minorun elementləri yerləşən sətir və sütunlarına bazis sətirləri və bazis sütunları deyilir.

Bazis minoru haqqındakı teoremə əsasən matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyillər və matrisin ixtiyari sətirini (sütununu) bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası kimi göstərmək olar.

Elementar çevirmələr nəticəsində matrisin rəngi dəyişmir. Pillevari matrisin rəngi onun sıfırdan fərqli sətirlərinin sayına bərabərdir. Matrisin rəngini iki qayda ilə tapacağıq:

1)Elementar çevirmələrin köməyi ilə matris pillevari şəkə gətirilir. Alınmış pillevari matrisin sıfırdan fərqli sətirlərinin sayı, elə verilmiş matrisin rəngi olacaqdır.

2)Əvvəlcə ixtiyari bir təribli sıfırdan fərqli M_1 minoru (yəni matrisin sıfırdan fərqli elementi) axtarılır. Əgər belə minor yoxdursa, onda verilmiş matris sıfır matrisdir və $r(A)=0$. Sonra M_1 minorunu öz daxilinə alan sıfırdan fərqli M_2 minoru tapılanadək iki təribli minorlar hesablanır. Əgər belə minor (yəni sıfırdan fərqli olan iki təribli) yoxdursa, onda $r(A)=1$, əks halda $r(A) \geq 2$ və s. Bu qayda ilə matrisin rəngini axtararkən hər addımda cəmi bircə k təribli sıfırdan fərqli minoru tapmaq kifayətdir və onu ancaq $M_{k-1} \neq 0$ minorunu öz daxilinə alan minorlar içərisində axtarmaq lazımdır.

Misal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & 18 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrisinin elementar çevir-}$$

mələrin köməyi ilə rəngini tapmalı.

Həlli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -18 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \times (-2) + II \\ I \times (-4) + III \\ I \times (-3) + IV \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -15 & -30 & 15 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} II \times (-3) + III \\ II \times (-1) + IV \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu A matrisinin pilləvari şəklidir. Sıfırdan fərqli sətirlərin sayı 2-yə bərabər olduğundan $r(A) = 2$ olar.

İndi isə verilmiş A matrisinin rəqını sıfırdan fərqli ən yüksək tərİtblİ minorunu tapmaqla hesablayaq:

A matrisinin sıfırdan fərqli elementi olduğundan $r(A) \geq 1$.

Sıfırdan fərqli İki tərİtblİ minoru axtaraq:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \quad . \quad \text{Deməli} \quad r(A) \geq 2 \quad ,$$

M_2 – ni daxilinə olan üç tərİtblİ minorlara baxaq:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & -7 & -18 \end{vmatrix} = 18 - 42 - 32 + 12 - 28 + 72 = 102 - 102 = 0$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 24 + 9 + 4 + 4 = 24 - 24 = 0;$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 11 \end{vmatrix} = -11 + 14 + 24 - 4 - 44 + 21 = 59 - 59 = 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

iki tərtibli minorunu daxilinə alan bütün üç tərtibli minorlar sıfıra bərabər olduğundan verilmiş matrisin rangı $r(A) = 2$ olur.

26.2.1. Matris tərsinin olması üçün zəruri və kafi şərt

Teorem. Verilmiş A matrisinin tərs A^{-1} matrisi olması üçün onun $\Delta(A)$ determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtidir.

Determinantı sıfıra bərabər, yəni $\Delta(A) = 0$ olan kvadrat A matrisinə **cırılmış (və ya məxsusi) matris** deyilir. Determinantı sıfıra bərabər olmayan kvadrat A matrisinə isə **cırılmamış (və ya qeyri-məxsusi) matris** deyilir. Dediklərimizdən aydındır ki, cırılmamış matrisin tərsi vardır. Verilmiş matrisin tərsini necə tapmaq olar?

Tutaq ki, ikitərtibli cırılmamış

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

matrisi verilmişdir. Bu matrisin tərsi:

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta(A_2)} & \frac{A_{21}}{\Delta(A_2)} \\ \frac{A_{12}}{\Delta(A_2)} & \frac{A_{22}}{\Delta(A_2)} \end{vmatrix} \text{ və ya}$$

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{\Delta(A_2)} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$$

26.2.2. Matrislə onun tərsinin hasilinin vahid matris olması

Aşağıdakı $\mathbf{A}_3$ və $\mathbf{A}_3^{-1}$ matrisləri üçün üçtərtibli cırlaşmamış ($\Delta(A_3) \neq 0$)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

matrisini götürək. Bu matrisin tərsi:

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{\Delta(A_3)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Şəklində olduğunu fərz edək. Matrislə onun tərs matrisinin hasilinin vahid matris olmağına inanmaq üçün

$$\mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{I}_3$$

olduğunu yoxlamaq kifayətdir.

Matrisin a_{ik} elementinin cəbri tamamlayıcısının A_{ik} ilə işarə olduğunu və determinantların xassəsini nəzərə alsaq:

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{\Delta(A_3)} \begin{vmatrix} \Delta(A_3) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(A_3) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(A_3) \end{vmatrix}$$

və yaxud tələb olunan

$$A_3^{-1}A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_3$$

bərabərliyini alırıq.

Üçtərtibli (1) kvadrat matrisinin (2) tərs matrisinin qurulma sxemi çox sadədir: (1) matrisinin a_{ik} elementi onun uyğun A_{ik} cəbri tamamlayıcısının $\Delta(A_3)$ ədədinə nisbəti ilə əvəz olunur. **Alınan matrisin çevrilməsi (baş diaqonala nəzərən çevrilməsi) (2) matrisinə bərabərdir. Həmin qayda ilə n-tərtibli cırışmayan kvadrat**

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\Delta(A) \neq 0)$$

matrisinin

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

tərs matrisini almaq olar.

Misal.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta(A) = -15$$

matrisinin tərs matrisi:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 10 & -5 & -5 \\ 1 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \text{ olar.}$$

27.1.Xətti tənliklər sisteminin həlli ,bir neçə xətti tənliyin birgə həllinin tapılması kimi

[illegible]

Burada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots \dots \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədlər sisteminə o zaman (1) tənliklər sisteminin həlli deyilir ki, (1) sistemində $x_1, x_2, \dots, x_n$, məchullarının yerinə uyğun olaraq bu ədədləri yazdıqda sistemin hər bir tənliyi doğru bərabərliyə çevrilsin. Tənliklər sisteminin həlli varsa, ona birgə (ya-

xud uyuşan) sistem, həlli yoxdursa, ona birgə olmayan (yaxud uyuşmayan) sistem deyilir.

27.2. Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olan halda Kramer qaydası və Kramer düsturları

Üç məchullu xətti tənliklər sistemi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

şəklində yazıla bilər.

Verilmiş (1) sistemini həll etmək üçün həmin sistemin baş determinantını

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

və köməkçi determinantlarını yazaq:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

(1) sisteminin tənliklərini uyğun olaraq a_{11}, a_{12}, a_{31} elementlərinin A_{11}, A_{12} və A_{31} cəbri tamamlayıcılarını vurub, alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq $(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) \cdot x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) \cdot y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) \cdot z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$. (4)

bərabərliyini alırıq. Determinantların sətir və sütun elementləri üzrə ayrılması xassəsinə görə:

$$\Delta = \mathbf{a}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{31}\mathbf{A}_{31},$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_{12}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{A}_{31},$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_{13}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{A}_{31}.$$

Onda (4) bərabərliyi

$$\Delta \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{21} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{31}$$

şəklində yazılar.

Eyni qayda ilə də (1) sisteminin tənliklərini əvvəlcə uyğun olaraq $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{32}$ ədədlərinə, sonra da $\mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{33}$ ədədlərini vurub alınan bərabərlikləri tərəf-tərəf toplaşaq

$$\Delta \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{22} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{32}$$

və

$$\Delta \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{13} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{23} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{33}$$

bərabərliklərini alırıq. Beləliklə, (1) sistemi əvəzinə

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{21} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{31}, \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{22} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{32}, \\ \Delta \mathbf{z} &= \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{13} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{23} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

sistemi alınır.

$\Delta \neq 0$ olduqda (1) və (4) sistemləri ekvivalentdir. (5) sisteminin sağ tərəfindəki ədədlər Δ determinantının birinci sütun elementlərini uyğun olaraq $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ədədləri ilə, sonra isə ikinci sütun elementlərini $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ədədləri ilə və nəhayət, üçüncü sütun elementlərini yenə də həmin ədədlərlə əvəz etməklə alındığından:

$$\Delta_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{21} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \mathbf{b}_1 \mathbf{A}_{12} + \mathbf{b}_2 \mathbf{A}_{22} + \mathbf{b}_3 \mathbf{A}_{32} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \mathbf{b}_1 \mathbf{A}_{13} + \mathbf{b}_2 \mathbf{A}_{23} + \mathbf{b}_3 \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}$$

Onda (5) sistemi

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cdot \mathbf{x} &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot \mathbf{y} &= \Delta_2, \\ \Delta \cdot \mathbf{z} &= \Delta_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

kimi yazılar.

$\Delta \neq 0$ olduqda bu sistemin yeganə həlli var:

$$\mathbf{x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mathbf{y} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \mathbf{z} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (7)$$

Deməli, $\Delta \neq 0$ olduqda (1) sisteminin yeganə həlli var və bu həll (7) düsturları vasitəsilə tapılır. (7) düsturlarına Kramer düsturları da deyilir.

Misal: Sistemi həll edin:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 7; \\ x - 5y + 6z = -4 \\ 2x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$$

Həlli: Əvvəlcə sistemin baş determinantını hesablayaq:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Üçüncü sütun elementlərini 3-ə vurub birinci sütunla, 1-ə vurub 2-ci sütunla toplasaq,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 19 & 1 & 6 \\ -10 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 19 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

lariq.

İndi də köməkçi determinantları tapaq:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 38 & 1 & 6 \\ -20 & -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 38 & 1 \\ -20 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 2 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 19 & 38 & 6 \\ -10 & -20 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 19 & 38 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & -5 & 31 \\ -7 & 3 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 31 \\ -7 & -13 \end{vmatrix} = -9$$

Kramer qaydasından istifadə etsək, sistemin həllini alarıq:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{9} = 2, y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{9} = 0, z = \frac{D_z}{D} = \frac{-9}{9} = -1.$$

27.3. İxtiyari xətti tənliklər sistemi üçün Qauss (ardıcıl yoxetmə) üsulu və bu üsulun ümumi sxemi

Tənliklər sistemin determinantı sıfırdan fərqli olduqda onu Kramer qaydası ilə həll etmək olar. Lakin bu halda $n+1$ sayda n -tərtibli determinant hesablamaq lazım gəlir ki, bu da böyük hesablama işi tələb edir.

Tutaq ki, xətti tənliklər sistemi verilmişdir :

[illegible]

Verilmiş xətti tənliklər sistemində məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olmadıqda, yəni sistem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (2)$$

Şəklində olduqda isə onun həllinə Kramer qaydasını tətbiq etmək olmur.

Buna görə də, (2) (və həm də (1)) şəklində xətti tənliklər sistemini çox zaman məchulların ardıcıl yox edilməsi üsulu və ya Qauss üsulu ilə həll edirlər. Bu üsulun məzmunu belədir: tutaq ki, $a_{11} \neq 0$. Onda sistemin

birinci tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ədədinə vuraraq,
alınan

$$a_{21} x_1 + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1m}a_{21}}{a_{11}}x_m = b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

tənliyini sistemin ikinci tənliyindən tərəf-tərəfə çıxırıq. Aldığımız tənlikdə x_1 məchulu iştirak etmir:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23} + \dots + a'_{2m}x_m = b'_2.$$

Sonra sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ədədinə vuraraq alınan tənliyini sistemin üçüncü tənliyindən tərəf-tərəfə çıxırıq. Bu mühakiməni ardıcıl tətbiq etməklə (2) sistemini

[illegible]

şəklində sistemə çevirmək olar. Aldığımız yeni sistemin 2-ci, 3-cü və s. tənliklərindən istifadə etməklə yuxarıda göstərdiyimiz üsulla x_2 məchulunu da yox etmək olur. Bu mühakiməni ardıcıl olaraq tətbiq etməklə (2) sistemini ona ekvivalent olan.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (4)$$

Şəklində sistemə gətirmək mümkündür.

(4) sisteminə pilləvari (və ya pillələr şəklində) sistem, a_{11} , a_{22} , a_{33} və s. əmsallarına isə sistemin baş elementləri deyilir. Aydındır ki, sistemə Qauss üsulunun tətbiq oluna bilməsi üçün sistemin baş elementlərinin sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtidir.

Qeyd edək ki, (2) sisteminin çevrilməsi nəticəsində alınan (4) sistemi uyuşan və uyuşmayan ola bilər. Birinci halda (4) sistemini həll edərək (2) sisteminin axtarılan həlləri tapılır. (4) sistemi uyuşmayan olduqda (məsələn, sistemdə sol tərəfdəki bütün əmsalları sıfır olan, lakin sağ tərəfi sıfır olmayan $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_m = b, (b \neq 0)$ şəklində tənlik alındıqda (2) sistemi də uyuşmayan olar.

Qeyd edək ki, (2) uyuşan olduqda iki haldan ancaq biri mümkündür: həmin sistemin ya yeganə həlli var, ya da sonsuz sayda həlli var. Hesablama zamanı heç bir yuvarlaqlaşdırma aparılmayıbsa, onda Qauss üsulu ilə tapılmış həll dəqiq olur.

(2) sistemini Qauss üsulu ilə həll edərkən tənliklər üzərində aparılan əməlləri bəzən onların əmsallarından düzəlmiş

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

matris üzərində aparmaq daha münasib olur.

Qauss üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases} \quad (5)$$

Sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini 2-yə vuraraq alınan bərabərliyi uyğun olaraq ikinci və dördüncü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxaraq; sonra da birinci tənliyin hər iki tərəfini 3-ə vuraraq alınan tənliyi 3-cü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxaraq, nəticədə (5) sisteminə ekvivalent olan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ -5x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ -4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -8, \\ -7x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases} \quad (6)$$

tənliklər sistemini alırıq. Bu sistemin ikinci tənliyindən üçüncü tənliyini tərəf-tərəfə çıxsaq və alınan bərabərliyin hər iki tərəfini -1-ə vursaq, nəticədə (6) sistemini

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -8 \\ -4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -8 \\ -7x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases} \quad (7)$$

tənliklər sistemi ilə əvəz etmiş oluruq. (7) sisteminin ikinci tənliyinin hər iki tərəfini əvvəlcə (+4) -ə, sonra da (+7)-yə vurub alınan bərabərliklərlə toplasaq

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -8 \\ 24x_3 + 8x_4 = -40 \\ 36x_3 + 18x_4 = -47 \end{array} \right.$$

tənliklər sistemini alarıq. Həmin üsulla bu sistemi də

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -8 \\ 24x_3 + 8x_4 = -40 \\ 6x_4 = 13 \end{array} \right. \quad (8)$$

şəklində göstərmək olar.

Aydındır ki, (5) xətti tənliklər sistemi ilə (8) pilləvari xətti tənliklər sistemi ekvivalentdir. (8) sistemini həll edərək, sistemin yeganə

$$x_1 = -\frac{11}{18}; \quad x_2 = \frac{89}{18}; \quad x_3 = -\frac{43}{18}; \quad x_4 = \frac{13}{6}$$

həllini (əvvəlcə axırıncı tənlikdən x_4 , sonra üçüncü tənlikdən x_3 və s. tapılır) tapırıq.

Qeyd edək ki, (5) sistemini Kramer qaydası ilə həll etmək üçün dördtərtibli 5 ədəd determinant hesablamaq lazım idi.

XXVIII FƏSİL. BİRCİNSLİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ. XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN MATRİS YAZILIŞI VƏ HƏLLİ

28.1. Xətti bircinsli tənliklər sistemi və onun trivial həlli haqqında

Fərz edək ki, üçməchullu xətti tənliklər sistemi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

şəklində verilmişdir. $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ olduqda (1) sisteminə xətti bircinsli tənliklər sistemi alınır. b_1, b_2, b_3 ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircinsli olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir.

$\Delta \neq 0$ olduqda bircinsli xətti tənliklər sisteminin həmişə yeganə $x=0, y=0, z=0$ (trivial) həlli var.

İndi də $\Delta = 0$ olduqda (1) sisteminin həllinin varlığı məsələsini tədqiq edək. Tutaq ki, $\Delta = 0$ və onun ikitərtibli minorlarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Onda Δ determinantının sətirlərindən biri, məsələn, üçüncü yerdə qalan iki sətirin xətti kombinasiyası olar. Bu halda (1) sisteminin üçüncü tənliyinin sol tərəfi də birinci və ikinci tənliklərin sol tərəflərinin xətti kombinasiyasına bərabər olar:

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \lambda_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + \lambda_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \quad (2)$$

Əgər (1) sisteminin sağ tərəfləri də buna oxşar uyğun münasibəti, yəni

$$b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \quad (3)$$

münasibətini ödəyərsə, onda (1) sisteminin xətti asılı olmayan iki tənliyi olar, üçüncü tənliyi isə bu iki tənliyin nəticəsi kimi alınar. Bu halda (1) sisteminin həlli üçməchullu iki xətti

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{z} &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{y} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{z} &= \mathbf{b}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

tənliklər sisteminin həllinə gətirilmiş olar. (4) sisteminin isə sonsuz sayda həlli var. Bu həlləri tapmaq üçün (4) sistemində məchulun birini sağ tərəfə keçirib ona ixtiyari qiymətlər vermək və alınan sistemlərdən yerdə qalan iki dəyişənin qiymətlərini tapmaq lazımdır.

Bu halda Δ determinantı ilə birlikdə Δ_1, Δ_2 və Δ_3 determinantları da sıfıra bərabər olar.

Əgər (1) sistemi tənliklərinin sol tərəfləri (2) münasibətini ödəyərkən sağ tərəfləri (3) münasibətini ödəməzsə, yəni

$$\mathbf{b}_3 \neq \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2$$

olarsa, onda həmin sistemin heç bir həlli olmaz. Bu halda Δ_1, Δ_2 və Δ_3 determinantlarının heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir.

Sistemin Δ determinantı sıfır olduqda onun bütün ikitərtibli minorları sıfır olub, sıfırdan fərqli heç olmasa bir elementi olarsa, onda yenə də (1) sisteminin ya sonsuz sayda həlli var, ya da heç bir həlli olmaz.

Dediklərimizə əsasən bircinsli xətti

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{y} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{z} &= 0, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{y} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{z} &= 0, \\ \mathbf{a}_{31}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{y} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

tənliklər sisteminin həlli haqqında da müəyyən nəticələr alınır. (5) sisteminin Δ determinantı sıfırdan fərqli olarsa, onda Kramer qaydasına görə həmin sistemin yeganə ($x=0$, $y=0$, $z=0$) sıfır həlli olar. Sistemin determinantı sıfıra bərabər olduqda isə (5) tənliklərinin sol və sağ tərəfləri uyğun olaraq (2) və (3) münasibətlərini ödəyər. Buna görə də həmin sistemin sonsuz sayda həlli, o cümlədən sıfırdan fərqli həlli olar.

Beləliklə, aşağıdakı nəticəni almış olarıq: bircinsli xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün həmin sistemin Δ determinantının sıfıra bərabər olması zəruri və kafi şərtidir.

28.2. Xətti tənliklər sisteminin matris yazılışı və həlli

Tutaq ki, A və B verilmiş matrislərdir və matrislərlə yazılmış

$$AX = B$$

tənliyindən X matrisini tapmaq tələb olunur.

Bu tənliyə **matris tənlik** deyilir. A matrisinin determinantı $\Delta(A) \neq 0$ olarsa, onda onun A^{-1} tərs matrisi var. Bu halda tənliyin hər iki tərəfini soldan A^{-1} matrisinə vursaq, X matrisini taparıq:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad IX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Xətti tənliklər sistemini də matris tənlik şəklində yazıb həll etmək olar. Tutaq ki, n məchullu n xətti tənliklər sistemi verilmişdi:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n. \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemi matris şəklində yazaq:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

Əgər məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A, sağ tərəfdəki məlum ədədlərdən düzəlmiş sütun-matrisi B, axtarılan məchullardan düzəlmiş sütun-matrisi X ilə işarə etsək, yəni

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

onda (2) sistemini

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (3)$$

(3) matris tənliyinin həllini yuxarıda tapmışdıq:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (4)$$

Məlumdur ki, $\Delta(A) \neq 0$ olduqda (1) sisteminin A matrisinin tərsi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \dots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{vmatrix}$$

matrisidir. Onda bu matrisi B matrisinə soldan vurmaqla (4) bərabərliyinə əsasən X matrisini tapmaq olar:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{A}_{n1}\mathbf{b}_n \\ \mathbf{A}_{12}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{A}_{n2}\mathbf{b}_n \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{1n}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{A}_{nn}\mathbf{b}_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

Bu bərabərliyin sol və sağ tərəfləri eyni ölçülü sütun-matrislər olduğundan onların uyğun 1 elementləri bərabərdir:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta(A)} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta(A)} = \\ &= \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta(A)} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \mathbf{a}_{1(n-1)} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \dots & \mathbf{a}_{2(n-1)} & \mathbf{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \dots & \mathbf{a}_{n(n-1)} & \mathbf{b}_n \end{vmatrix}$$

Bu düsturlar **Kramer düsturlarıdır**. Beləliklə, biz isbat etdik ki, (1) sisteminin $\Delta(A)$ determinantı sıfırdan fərqli olduqda həmin sistemin yeganə həlli var və bu həll (6) Kramer düsturları vasitəsilə tapılır.

$n=2$ olduqda (6) düsturları ikiməchullu iki xətti tənlik sisteminin həlli üçün tapdığımız (8) Kramer düsturları ilə, $n=3$ olduqda isə üçməchullu üç xətti

olduğundan:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \mathbf{3}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \mathbf{1}$$

XXIX FƏSİL. XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN BİRGƏLİK ƏLAMƏTİ. KRONEKER-KAPELLI TEOREMİ

29.1.Xətti tənliklər sisteminin uyuşan (birgə) və ya uyuşmayan (birgə olmayan) olması haqqında Kroneker-kapelli teoremi. Bu teoremin bəzi tətbiqləri.

Ümumi şəkildə verilmiş (1) sisteminin birgə olub-olmaması Kronker-Kapelli teoreminin köməyiylə izah edilir.

Teorem (Kronker-Kapelli teoremi). (1) sisteminin birgə olması üçün onun matrisi ilə genişlənmiş matrisi rəqəvinin bərabər olması zəruri və kafidir.

Zərurilik. Tutaq ki, (1) sistemi birgədir. Göstərək ki, $r(A) = r(\bar{A})$. (1) sistemi birgə olduğundan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədləri vardır ki, onun bütün tənliklərini doğru bərabərliyə çevirir. Bu ədədləri sistemdə məchulların yerinə yazsaq.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \lambda_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Deməli, genişlənmiş matrisin axırıncı sütunu o biri sütunların xətti kombinasiyasından ibarətdir. Genişləniş matrisi axırıncı sütunundan o biri sütunların xətti kombinasiyasını çıxsaq:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Kronker-Kapelli teoremi sistemin uyğun olmasını göstərməyə imkan versə də lakin bu həlli necə tapmaq yolunu göstərmir. Bir neçə halı nəzərdən keçirək.

2) Tutaq ki, $r(A) < n$. Bu halda, xətti asılı olmayan maksimal sistem əmələ gətirən tənliklərin ilk ardıcıl $1, 2, \dots, r$ nömrəli tənliklər olduğu fərz olunur.

$$(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$
[illegible]

Əgər $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n = \lambda$ kimi qiymətlər versək, (4) sisteminin sağ tərəfində müəyyən ədədlər alınır və nəticədə

(5)

Deyilənlərə əsasən ixtiyari xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə aid aşağıdakı qaydanı söyləmək olar.

Əgər $r < n$ olarsa, onda bu sistem qeyri-müəyyəndir.

Sərbəst məchullara ixtiyari qiymətlər verərək, əsas məchullar üçün qiymətlər tapırlar ki, bu da xüsusi həllər adlanır.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Həlli. A və B matrislərinin rənkərlərini tapaq :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$r(A) = r(B) = 2.$$

İki tərtibli minorlardan biri məsələn

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Bu minorda birinci və ikinci tənliyin əmsalları iştirak edir.

Ona görə sistemin üçüncü tənliyini nəzərə almasaq:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \end{cases}$$

Burada $r(A) = r(B) = 2$ $n = 4$ $r < n$ olduğundan sistem qeyri-müəyyəndir. Sıfırdan fərqli M minoruna x_1 və x_2 məchullarının əmsalları daxildir. Odur ki x_1 və x_2 məchullarını əsas məchul x_3 və x_4 məchullarını sərbəst məchul hesab etsək

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 = 18 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

sistemin alarıq . Bu sistemə Kramer qaydasını tətbiq etdikdə

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 2x_3 - x_4 & 1 \\ 18 - 2x_3 - 3x_4 & -1 \end{vmatrix}}{M} = \frac{19 - 4x_4}{3} = \frac{19}{3} - \frac{4}{3}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 - x_4 \\ 2 & 18 - 2x_3 - 3x_4 \end{vmatrix}}{M} = \frac{x_4 + 6x_3 - 16}{3}$$

$$= \frac{1}{3}x_4 + 2x_3 - \frac{16}{3}$$

alırıq.

Burada x_3 və x_4 sərbəst məchullarına ixtiyari qiymətlər verməklə x_1 və x_2 üçün uyğun qiymətlər tapırıq. Bu yolla sistemin sonsuz sayda xüsusi həllərini tapırıq. Məsələn sərbəst məchullara $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ qiymətlərini verərək x_1 və x_2 məchulları üçün uyğun olaraq $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ qiymətlərini tapırıq. Sistemin xüsusi həllərindən biri $(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; 2; 3)$ olar. Qeyd etmək lazımdır ki, sıfırdan fərqli başqa bir ikitərtibli minor olsa, onda əmsalları bu minora daxil olan tənlikləri götürüb, tənliklərdən birini sistemdən atırıq. Alınan sistem yenə də əvvəlki qayda ilə həll edilir.

XXX FƏSİL.VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ XƏTTİ ƏMƏLLƏR

30.1.Vektorların ayrılışı

İstiqamətlənmiş düz xətt parçası vektor adlanır. Başlanğıcı A nöqtəsində sonu B nöqtəsində yerləşən vektor $\overline{AB}$ simvolu ilə işarə edilir (və ya $\vec{a}, \vec{b}, \dots$). $\overline{AB}$ vektorunun uzunluğu dedikdə AB parçasının uzunluğu başa düşülür və $|\overline{AB}|$, və ya $|\vec{a}|$ kimi işarə edilir. Uzunluğu sıfıra bərabər olan vektor sıfır vektor adlanır və $\vec{0}$ və ya 0 simvolu ilə işarə edilir. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektor vahid vektor adlanır və $\vec{e}$ simvolu ilə işarə edilir.

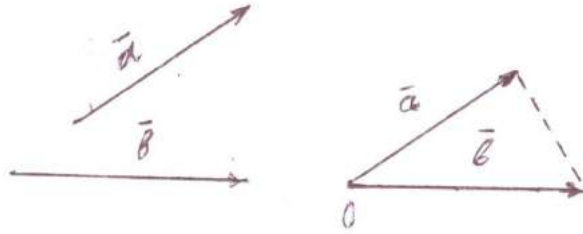
İstiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eyni olan vahid uzunluqlu vektor $\vec{a}$ vektorunun ortu adlanır və $\vec{a}_0$ -la işarə edilir. Uzunluqları eyni, istiqamətləri bir-birinin əksinə yönəlmiş vektorlar əks vektorlar adlanır. $\vec{a}$ vektoruna əks vektor $-\vec{a}$ kimi (və ya $\overline{AB} = -\overline{BA}$) işarə edilir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bir düz xətt və ya paralel düz xəttlər üzərindədirlərsə, onda bu vektorlar kolli-near vektorlar adlanır və $\vec{a} // \vec{b}$ kimi göstərilir.

Üç (və ya daha çox) vektor ya bir, ya da iki paralel müstəvi üzərində yerləşərlərsə, onda bu vektorlar kom-planar vektorlar adlanır.

Əgər kollinear $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının istiqamətləri və uzunluqları eynidirsə, bu vektorlar bərabər vektor-lar adlanır və $\vec{a} = \vec{b}$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, kollinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. Paralel köçürmə vasitəsi ilə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının başlanğıclarını bir O nöqtəsinə gətirək:



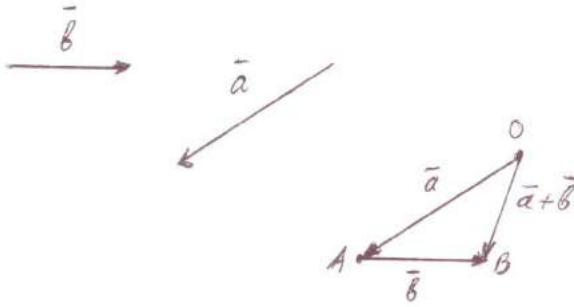
Şəkil 1.

O nöqtəsi $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının başlanğıc və son nöqtələri bir üçbucağın təpə nöqtələri olur. Üçbucağın verilmiş vektorların başlanğıc nöqtələrinə uyğun təpə nöqtəsindəki bucaq $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq adlanır. Əgər vektorlar eyni istiqamətli idilərsə, onda onlar arasındakı bucaq sıfıra bərabərdir; əksistiqamətli vektorlar arasındakı bucaq 180° -yə bərabərdir.

Tutaq ki, ixtiyari $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. İxtiyari O nöqtəsi götürək və $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ vektorlarını quraq, sonra A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ vektorunu quraq.

$\vec{a}$ vektorunun başlanğıcı ilə $\vec{b}$ vektorunun sonunu birləşdirən vektor bu vektorların cəmi adlanır.

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$



Şəkil 2.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının fərqi dedikdə, elə $\vec{c}$ vektoru başa düşülür ki, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ münasibəti ödənsin: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ vektoru ilə $\lambda \neq 0$ ədədinin hasilı elə $\vec{b}$ vektorudur ki, onun uzunluğu $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ -ya bərabər olub, $\lambda > 0$ olduqda, $\vec{a}$ ilə eyni istiqamətli, $\lambda < 0$ olduqda isə $\vec{a}$ ilə əks istiqamətli olsun: $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ və $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektorları üçün $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ münasibəti $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinearlıq şərtidir.

Tutaq ki, λ_1 və λ_2 eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan ədədlərdir. Sıfıra bərabər olmayan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt onlardan birinin, qalan ikisinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməsidir, məsələn $\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$

(bu münasibət vektorların komplanarlıq əlamətidir).

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorları düzbucaqlı koordinat sistemində koordinat oxlarının ortları olarsa, onda koordinatları a_x, a_y, a_z olan $\bar{a}$ vektorunu

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

kimi göstərmək olar.

Onda a_x, a_y, a_z əmsalları $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bazisində $\bar{a}$ vektorunun koordinatları adlanır və belə yazılır

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

$\bar{a}$ vektorunun uzunluğu

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$\bar{a}$ vektorunun OX, OY, OZ oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar, uyğun olaraq, α, β, γ olarsa, $\bar{a}$ vektorunun istiqaməti $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ istiqamətverici kosinuslarının köməyi ilə təyin edilir. Qeyd edək ki,

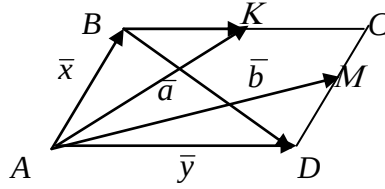
$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

və $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ münasibətləri doğrudur.

Məsələ.

$ABCD$ paraleloqramında K və M , uyğun olaraq, BC və CD tərəflərinin orta nöqtələridir. $\overline{AK} = \bar{a}; \overline{AM} = \bar{b}$ olduğunu bilərək, $\overline{BD}$ və $\overline{AD}$ vektorlarını $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları ilə ifadə edin.

Həlli:



Şəkil 3.

$\overline{AB} = \bar{x}$ və $\overline{AD} = \bar{y}$ işarə edək. Onda, $\overline{BK} = \frac{1}{2}\bar{y}$ və $\overline{DM} = \frac{1}{2}\bar{x}$ olar. $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK} = \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}$, $\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{DM} = \bar{y} + \frac{1}{2}\bar{x}$ olduğundan,

$$\begin{cases} \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y} = \bar{a}, \\ \bar{y} + \frac{1}{2}\bar{x} = \bar{b}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\bar{x} + \bar{y} = 2\bar{a}, \\ \bar{x} + 2\bar{y} = 2\bar{b}. \end{cases} \text{ alırıq.}$$

$$\text{Buradan, } \bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2\bar{a} & 1 \\ 2\bar{b} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}(4\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{4}{3}\bar{a} - \frac{2}{3}\bar{b}$$

$$\text{və } \bar{y} = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2\bar{a} \\ 1 & 2\bar{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}(4\bar{b} - 2\bar{a}) = \frac{4}{3}\bar{b} - \frac{2}{3}\bar{a} \text{ alırıq.}$$

$$\text{Beləliklə, } \overline{AD} = \bar{y} = -\frac{2}{3}\bar{a} + \frac{4}{3}\bar{b} \text{ və}$$

$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \bar{y} - \bar{x} = -\frac{2}{3}\bar{a} + \frac{4}{3}\bar{b} - \frac{4}{3}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b} = -2\bar{a} + 2\bar{b}$$

$$\overline{BD} = -2\bar{a} + 2\bar{b} \text{ olur.}$$

Məsələ.

Uzunluğunun 16-ya bərabər olduğunu və

$$\bar{b} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$$

vektorunun əksinə yönəldiyini bilərək, $\bar{a}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli: $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ olduğunu nəzərə alsaq, aydındır ki,

$$\bar{a} = 16 \cdot \bar{a}_0.$$

$\bar{a}$ vektorunun $\bar{b}$ vektorunun əksinə yönəldiyini bilərək $\bar{a}_0 = -\bar{b}_0$ yazmaq olar. $\bar{b}_0$ ortunu tapaq.

$$|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (\sqrt{2})^2} = 6 \text{ olduğundan,}$$

$$\bar{b}_0 = \frac{3}{6}\bar{i} - \frac{5}{6}\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k} \text{ və } \bar{a}_0 = -\frac{3}{6}\bar{i} + \frac{5}{6}\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k}$$

olar.

Onda,

$$\bar{a} = 16 \cdot \bar{a}_0 = 16 \cdot \left(-\frac{3}{6}\bar{i} + \frac{5}{6}\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k} \right) = -8\bar{i} + \frac{40}{3}\bar{j} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\bar{k}$$

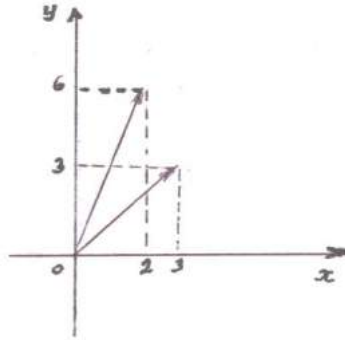
$$\text{Deməli, } \bar{a} = \left(-8; \frac{40}{3}; -\frac{8\sqrt{2}}{3} \right)$$

Məsələ.

OXY müstəvisi üzərində

$\overline{OA} = \bar{a} = 2\bar{i}$, $\overline{OB} = \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$, $\overline{OC} = \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$ vektorlarını qurun və $\bar{c}$ vektorunu $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları üzrə ayırın.

Həlli:



Şəkil 4.

Əvvəlcə $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarını quraq. Elə λ_1, λ_2 ədədləri tapaq ki, $\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$ olsun $2\vec{i} + 6\vec{j} = 2\lambda_1 \cdot \vec{i} + 3\lambda_2 \cdot \vec{i} + 3\lambda_2 \cdot \vec{j}$

Deməli,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \\ 3\lambda_2 = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3 \cdot 2 = 2, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \text{ və}$$

$\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$ olur.

30.2. Vektorların skalyar hasili

Sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqlarının, aralarındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabər olan ədədə bu vektorların skalyar hasili deyilir:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Skalyar hasilin aşağıdakı xassələri var:

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2. $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$;
3. $(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}) = \lambda \cdot (\bar{a}, \bar{b})$;
4. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$;

5. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları uyğun olaraq $(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z)$ koordinatları ilə verilmişdirsə onda,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Məsələ.

$\bar{m} = \bar{a} + 2\bar{b}$ və $\bar{n} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$ vektorlarının qarşılıqlı perpendikulyar olduğunu bilərək, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vahid vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

Şərtə görə $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ və $\bar{m} \perp \bar{n}$.

$\bar{m} \perp \bar{n}$ olduğundan $(\bar{m}, \bar{n}) = 0$ və ya

$$(\bar{a} + 2\bar{b}, 5\bar{a} - 4\bar{b}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\bar{a}^2 + 6(\bar{a}, \bar{b}) - 8\bar{b}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(\bar{a}, \bar{b}) = 3 \Rightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

Məsələ.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarının uzunluqları və cüt-cüt əmələ gətirdikləri bucaqlar bərabərdir. $\bar{a} = (1; 1; 0)$ və $\bar{b} = (0; 1; -1)$ olduğunu bilərək, $\bar{c}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli:

Şərtə görə $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ və $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})$

$\vec{c} = (x; y; z)$ olsun. Aydındır ki,

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \Rightarrow \frac{0 + y - z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - z = 1,$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \Rightarrow \frac{x \cdot 1 + y \cdot 1 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = 1,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}.$$

Ona görə,

$$\begin{cases} y - z = 1, \\ x + y = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z, \\ x = 1 - 1 - z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z, \\ x = -z, \\ z^2 + 1 + 2z + z^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

$$3z^2 + 2z - 1 = 0, \quad z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6}, \quad \begin{cases} z_1 = -1, \\ z_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Deməli, məsələnin şərtini ödəyən iki $\vec{c}$ vektoru var. Onlardan birincisi

$$(z_1 = -1, y_1 = 0, x_1 = 1) \quad \vec{c}_1 = (1; 0; -1)$$

və ikincisi

$$\left(z_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{1}{3} \right)$$

$$\bar{c}_2 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right)$$

vektorlarıdır.

30.3. Vektorların vektorial hasili

$\bar{a}, \bar{b}$ vektorlarının vektorial hasili aşağıdakı şərtləri ödəyən $\bar{c}$ vektoruna deyilir.

1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b};$

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi, \varphi = (\bar{a}, \bar{b});$

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorları sağ üçlük əmələ gətirirlər.

$\bar{a}, \bar{b}$ vektorial hasili $\bar{a} \times \bar{b}$ və ya $[\bar{a}; \bar{b}]$ kimi işarə edilir.

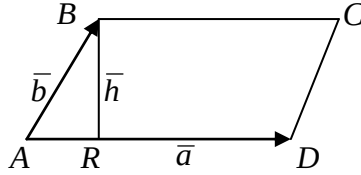
Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ koordinatları ilə verilərsə onda,

$$[\bar{a} \times \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Məsələ.

$\bar{a} = (2; -1; 7)$ və $\bar{b} = (1; 0; -4)$ vektorları üzərində paraleloqram qurulmuşdur. $\bar{b}$ vektorunun sonundan endirilmiş hündürlüyü və bu hündürlüklə paraleloqramın tərəfi arasında qalan üçbucağın sahəsini tapın.

Həlli:



Şəkil 5.

$[\vec{a} \times \vec{b}]$ vektorial hasilini tapaq.

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 15\vec{j} + \vec{k}$$

Vektorial hasilin tərifinə əsasən $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu ədədi qiymətə paraleloqramın sahəsinə bərabərdir, odur ki,

$$S_{ABCD} = \sqrt{16 + 225 + 1} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}.$$

Digər tərəfdən,

$$S_{ABCD} = |\vec{a}| \cdot BR.$$

Deməli,

$$BR = \frac{S_{ABCD}}{|\vec{a}|} = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{4+1+49}} = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{54}} = \frac{11\sqrt{2}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{11}{3\sqrt{3}},$$

$$BR = \frac{11}{3\sqrt{3}}$$

olur.

$$\triangle ABR \quad \text{-dən} \quad AR = \sqrt{|\vec{b}|^2 - |BR|^2} = \sqrt{17 - \frac{121}{27}} = \frac{\sqrt{338}}{3\sqrt{3}}.$$

Onda,

$$S_{\triangle ABR} = \frac{1}{2} \cdot AR \cdot BR = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{338}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{11}{3\sqrt{3}} = \frac{13 \cdot 11\sqrt{2}}{54},$$

$$S_{\triangle ABR} = \frac{143\sqrt{2}}{54}.$$

30.4. Vektorların qarışıq hasilı

$\bar{a} \times \bar{b}$ vektoru ilə $\bar{c}$ vektorunun skalyar hasilinə bərabər olan ədədə $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarının qarışıq hasilı deyilir və belə işarə edilir $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$. Deməli,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

Əgər

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z), \bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ olarsa,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sağ üçlük əmələ gətirirsə, $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} > 0$, sol üçlük əmələ gətirirsə $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} < 0$ olar.

Məsələ.

$A_1 A_2 A_3 A_4$ piramidasının təpə nöqtələrinin koordinatları verilmişdir:

$$A_1(1; 2; 3), A_2(-2; 4; 1), A_3(7; 6; 3), A_4(4; -3; -1)$$

a) $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$ tillərinin uzunluğunu;

- b) $A_1A_2A_3$ üzünün sahəsini;
 c) A_1A_4 və A_1A_3 tilləri arasındakı bucağı;
 d) piramidanın həcmi;
 e) $A_1A_2A_3$ üzünə endirilmiş hündürlüyü tapın.

Həlli:

a) $\overline{A_1A_2} = (-3; 2; -2)$ olduğundan

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$$

$\overline{A_1A_3} = (6; 4; 0)$ olduğundan

$$|\overline{A_1A_3}| = \sqrt{36 + 16 + 0} = \sqrt{52}$$

$\overline{A_1A_4} = (3; -5; -4)$ olduğundan,

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

b) $\overline{A_1A_2}$ və $\overline{A_1A_3}$ vektorlarının vektorial hasilini tapaq:

$$[\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8\bar{i} - 12\bar{j} - 24\bar{k}$$

$A_1A_2A_3$ üçbucağının sahəsi $\overline{A_1A_2}$ və $\overline{A_1A_3}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinin yarısına bərabərdir. Həmin paraleloqramın sahəsi isə ədədi qiymətcə

$$[\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}] = 8\bar{i} - 12\bar{j} - 24\bar{k}$$

vektorunun uzunluğuna bərabərdir. Deməli,

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 144 + 576} = \frac{1}{2} \sqrt{784} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\overline{A_1 A_4} \wedge \overline{A_1 A_3}) &= \arccos \frac{(\overline{A_1 A_4}, \overline{A_1 A_3})}{|\overline{A_1 A_4}| \cdot |\overline{A_1 A_3}|} = \arccos \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot (-5)}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13}} = \\ &= \arccos \frac{18 - 20}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13}} = \arccos \frac{-2}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13}} = \arccos \left(\frac{1}{5\sqrt{26}} \right) \end{aligned}$$

d) Aydındır ki,

$$V_{pir} = V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{6} V_{par-d} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} (48 + 60 + 24 + 48) = 8 + 10 + 4 + 8 = 30,$$

$$V_{pir} = 30.$$

e) $V_{pir} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot H$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$H = \frac{3 \cdot V_{pir}}{S_{\Delta A_1 A_2 A_3}} = \frac{3 \cdot 30}{14} = \frac{90}{14} = 6\frac{3}{7}, \quad H = 6\frac{3}{7} \text{ alarıq.}$$

XXXI FƏSİL. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ

31.1. Müstəvi üzərində koordinatlar üsulu

Koordinatlar üsulu dedikdə, düz xəttin (müstəvinin, fəzanın) nöqtələri ilə onun koordinatları arasındakı uyğunluğun müəyyən edilməsi başa düşülür.

Tutaq ki, müstəvi üzərində iki $M_1(x_1; y_1)$ və $M_2(x_2; y_2)$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələr arasındakı məsafə

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri verildikdə AB parçasını verilmiş λ nisbətində bölən M nöqtəsinin $\left(\lambda = \frac{AM}{MB}\right)$ $(x; y)$ koordinatları

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

düsturları ilə tapılır. Xüsusi halda $\lambda = 1$ (bu halda M nöqtəsi AB parçasını yarıya bölür) olduqda, parçanın orta nöqtəsinin koordinatlarını hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlar alınır:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Təpə nöqtələri $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ olan üçbucağın sahəsi

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələ.

Kvadratin iki qarşı təpəsi verilmişdir. $A(3;0)$ və $C(-4;1)$. Kvadratin qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.

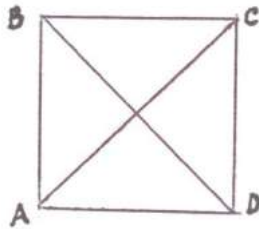
Həlli:

Tutaq ki, $ABCD$ kvadratının diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi O nöqtəsidir. O nöqtəsi AC parçasının orta nöqtəsi olduğundan:

$$O\left(\frac{3+(-4)}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \text{ və ya } O\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

olar. Pifaqor teoreminə əsasən

$$2AB^2 = AC^2,$$



$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(-4-3)^2 + (1-0)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5,$$

$AB = 5$ olur. $B(x, y)$ olarsa,

$$\begin{cases} AO = \frac{1}{2} AC, \\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC. \end{cases} \quad \text{münasibətindən}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50}, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{50}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{50}{4}, \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25. \end{cases}$$

və ya

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 12, \\ x^2 + y^2 - 6x = 16. \end{cases}$$

İkinci tənlikdən $y^2 = 16 - x^2 + 6x$ ifadəsini birinci tənlikdə nəzərə alsaq:

$$x^2 + 16 - x^2 + 6x + x - \sqrt{16 - x^2 + 6x} = 12,$$

və ya $4 + 7x = \sqrt{16 - x^2 + 6x}$. Hər tərəfi kvadrata yüksəltmək:

$$16 + 56x + 49x^2 = 16 - x^2 + 6x$$

olar və ya

$$\begin{aligned} 50x^2 + 50x &= 0, \\ x(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Deməli, $x_1 = 0$; $x_2 = -1$ olur. Bu qiymətləri əvəzləmədə nəzərə alaq.

$$x_1 = 0 \quad \text{-a uyğun} \quad y_1^2 = 16 \Rightarrow y_1^{(1)} = 4 \quad \text{və} \quad y_1^{(2)} = -4;$$

$$x_2 = -1 \text{ -ə uyğun } y_2^2 = 9 \Rightarrow y_2^{(1)} = 3 \text{ və } y_2^{(2)} = -3$$

alırıq.

Beləliklə, $B(0;4), D(-1;-3)$ və $B'(0;-4), D'(-1;3)$ təpələr cütünü alırıq. B və D nöqtələri kvadratin təpə nöqtələridir, çünki

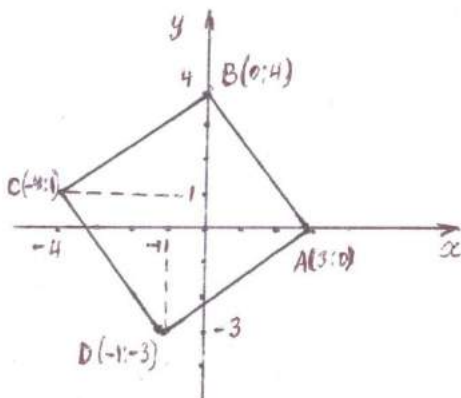
$$AB = BC = CD = DA = 5.$$

B' və D' nöqtələri isə kvadratin təpə nöqtələri ola bilməzlər, belə ki,

$$AB' = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} = 5, \text{ ancaq}$$

$$CB' = \sqrt{((-4-0)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \text{ olur.}$$

Odur ki, $B(0;4)$ və $D(-1;-3)$ axtarılan nöqtələrdir. (şəkil 6)



Şəkil 6.

31.2. Müstəvi üzərində düz xətt

OXY müstəvisi üzərində hər bir düz xətt iki məcullu bir dərəcəli xətti tənliklə müəyyən edilir və tərsinə, hər bir ikiməcullu birdərəcəli xətti tənlik müstəvi üzərində bir düz xətti müəyyən edir.

Müstəvi üzərində düz xətti müxtəlif tənliklərin köməyi ilə təyin etmək olar.

1. $y = kx + b$ düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi adlanır, burada k düz xəttin bucaq əmsalı (düz xəttin OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi α bucağının tangensi, yəni $k = \operatorname{tg} \alpha$), b düz xəttin OY oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin ordinatıdır.

2. $Ax + By + C = 0$ düz xəttin ümumi tənliyidir, burada A, B, C sabit ədədlər olub, əmsallardır və $A^2 + B^2 \neq 0$ (yəni A və B əmsalları eyni zamanda sıfıra bərabər ola bilməzlər).

3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ düz xəttin parçalarla tənliyi adlanır, burada a və b düz xəttin uyğun olaraq, OX və OY oxlarından ayırdığı parçaların uzunluğudur (işarələri nəzərə alınmaqla).

4. Verilmiş nöqtədən verilmiş istiqamətdə keçən düz xətt tənliyi $y - y_0 = k(x - x_0)$ şəklindədir, burada (x_0, y_0) verilmiş nöqtənin koordinatları, $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α - düz xətlə OX oxu arasındakı bucaqdır).

Bu tənlik həm də mərkəzi $(x_0; y_0)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyi adlanır; $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətlər dəstəsinin tənliyi

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

şəklindədir, burada λ -ədədi vuruqdur.

5. Verilmiş iki $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrindən keçən $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$ düz xətt tənliyi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

şəklindədir. Bu düz xəttin bucaq əmsalı $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ kimi

təyin edilir. Əgər $x_1 = x_2$ olarsa, düz xətt tənliyi $x = x_1$, $y_1 = y_2$ olarsa, düz xətt tənliyi $y = y_1$ şəklində olur.

6. Düz xəttin normal tənliyi

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

şəklindədir, burada p -koordinat başlanğıcından düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğudur, α bu perpendikulyarın OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Düz xəttin ümumi tənliyinin

hər tərəfini $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ normallaşdırıcı vuruğuna

vurmaqla onu normal tənlik şəklinə gətirmək olar; burada λ -nın işarəsi ümumi tənlikdə C -nin işarəsinin əksinə götürülür.

7. Düz xəttin polyar koordinatlarla tənliyi

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p$$

şəklindədir, burada r , φ düz xətt üzərindəki ixtiyari nöqtənin polyar koordinatlarıdır; p koordinat başlan-

ğısından bu düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu, α həmin perpendikulyarın polyar oxla əmələ gətirdiyi bucaqdır.

Müstəvi üzərində iki düz xətt arasındakı bucaq dedikdə, bu düz xətlərin əmələ gətirdiyi iki qonşu bucaqdan ən kiçiyi (iti bucaq) başa düşülür.

Əgər l_1 və l_2 düz xətləri bucaq əmsallı tənliklərlə verilmişdirsə,

$$y = k_1x + b_1 \text{ və } y = k_2x + b_2$$

Onda onlar arasındakı φ bucağı

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$k_1 = k_2$ şərti l_1 və l_2 düz xətlərinin paralellik,

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ isə perpendikulyarlıq şərtidir.

Əgər l_1 və l_2 düz xətləri $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ümumi tənlikləri ilə verilmişdirsə, onda onlar arasındakı φ bucağı

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|$$

düsturu ilə hesablanır. Bu halda düz xətlərin paralellik şərti

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ (və ya } A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \text{)}$$

və perpendikulyarlıq şərti $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ şəklində olar.

Verilmiş $M(x_0; y_0)$ nöqtəsindən $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə qədər olan d məsafəsi həmin nöqtədən bu düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu olub,

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

düsturu ilə hesablanır.

$M(x_0; y_0)$ nöqtəsindən $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafə

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$$

düsturu ilə hesablanır.

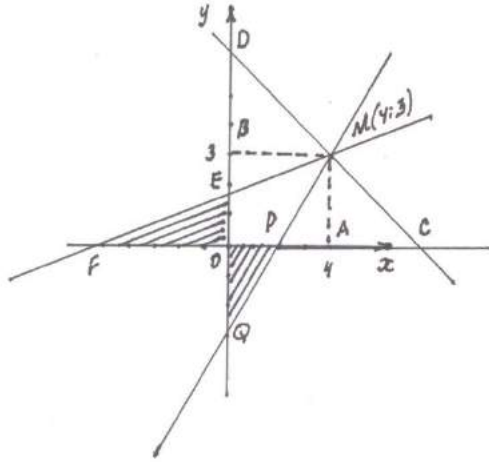
Məsələ.

$M(4;3)$ nöqtəsindən keçən və koordinat bucağından sahəsi 3-ə bərabər üçbucaq ayıran düz xəttin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

Həlli:

M nöqtəsindən keçməklə koordinat bucaqlarından üçbucaq ayıran düz xətt koordinat oxlarını: 1) I rübdə ($x > 0; y > 0$); 2) II rübdə ($x < 0; y > 0$); 3) III rübdə ($x < 0; y < 0$) kəsə bilər.

$S_{\triangle ODC} > S_{\triangle OBM} = 12$ olduğundan birinci hal ola bilməz.



Şəkil 7.

İkinci və üçüncü halların mümkünlüyünü araşdıraraq. Şərtə görə $S_{\Delta} = 3$; düz xəttin koordinat oxlarından ayırdığı parçalar a və b olarsa, onda $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a \cdot b|$

($a \cdot b < 0$) və $a \cdot b = -6$ yəni $a = -\frac{6}{b}$ olar.

Axtarılan düz xəttin tənliyini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

kimi yazmaq olar. M nöqtəsi bu düz xəttin üzərində olduğundan,

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$$

və ya

$$\frac{4}{-\frac{6}{b}} + \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow \frac{-4b^2 + 18}{6b} = 1 \Rightarrow 4b^2 + 6b - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -3, \\ b_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Onda uyğun olaraq, $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = -4. \end{cases}$ alırıq.

Beləliklə, axtarılan nöqtələr cütü $P(2;0)$ və $Q(0;-3)$ ya da

$E\left(0; \frac{3}{2}\right)$ və $F(-4;0)$ olar.

31.3. İki tərtibli əyrilər

x və y dəyişənlərinə nəzərən iki dərəcəli tənliklər-lə, yəni

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

şəklində tənliklərlə təyin edilən xətlər iki tərtibli əyrilər adlanır. Bu tənlik müstəvi üzərində çevrəni, ellipsi, hiperbolanı və ya parabolanı təyin edir.

Mərkəzi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində radiusu R -ə bərabər çevrənin tənliyi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

şəklindədir. Xüsusi halda çevrənin mərkəzi kooordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşürsə, onda onun tənliyi

$$x^2 + y^2 = R^2$$

şəklində olar. Qeyd edək ki, $A = C \neq 0$ və $B = 0$ olduq-da iki dərəcəli tənlik çevrəni təyin edir.

Ellipsin kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şəklindədir.

Burada a -ellipsin böyük yarımoxu, b -isə kiçik yarımoxu adlanır. c -fokuslar arasındakı məsafənin yarısına bərabər olub, a və b ilə

$$c^2 = a^2 - b^2$$

münasibəti ilə bağlıdır. Ellipsin ekssentrisiteti fokuslar arasındakı məsafənin ($2c$), böyük yarımoxa ($2a$) nisbəti şəklində təyin edilir:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (c < a \text{ olduğundan, } \varepsilon < 1).$$

Ellipsin fokal radiusları:

$$r_1 = a + \varepsilon x, r_2 = a - \varepsilon x \quad (r_1 + r_2 = 2a)$$

düsturları ilə təyin edilir.

Ellipsin direktrisləri

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ və } x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

şəklində düz xətlərdir.

Hiperbolanın kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ şəklindədir.}$$

Burada $2a$ -hiperbolanın həqiqi oxu, $2b$ isə xəyali oxudur. Hiperbolanın fokusları arasındakı məsafənin yarısı olan c , a və b arasında $c^2 = a^2 + b^2$ münasibəti doğrudur.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (c > a \text{ olduğundan, } \varepsilon > 1) \text{ ədədi}$$

hiperbolanın ekssentristeti adlanır. Sağ qanad üçün hiperbolanın fokal radiusları

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x$$

düsturları və sol qanad üçün

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

düsturları ilə təyin edilir.

Hiperbolanın asimptotları

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

tənlikləri ilə təyin edilir.

Hiperbolanın direktrisləri

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ və } x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

düsturları ilə təyin edilən düz xətlərdir.

Parabolanın kanonik tənliyi

$$y^2 = 2px$$

şəklindədir. Burada $p > 0$ ədədi parametr adlanan, fokus nöqtəsindən direktris arasındakı məsafəyə bərabər olan ədəddir. Fokus nöqtəsinin koordinatları

$\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ kimidir. $O(0;0)$ nöqtəsi parabolun təpə nöqtəsi

adlanır. Parabolanın direktrisinin tənliyi

$$x = -\frac{p}{2}$$

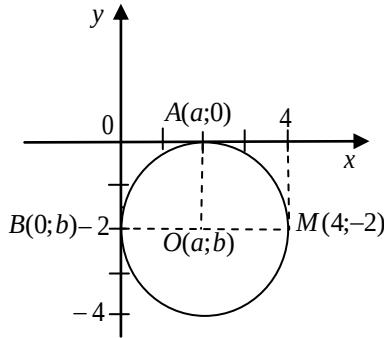
şəklindədir və fokal radius

$$r = x + \frac{p}{2}$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələ.

$M(4;-2)$ nöqtəsindən keçib koordinat oxlarına toxunan çevrənin tənliyini yazın.



Şəkil 8.

Həlli:

ζ : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ şəklində axtaraq.

Çevrənin koordinat oxlarına toxunma nöqtələrini A və B ilə işarə edək. Onda aydındır ki, $A(a;0)$ və $B(0;b)$

$$M \in \zeta \Rightarrow (4-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2$$

$$A \in \zeta \Rightarrow (a-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \Rightarrow b^2 = R^2,$$

$$B \in \zeta \Rightarrow (0-a)^2 + (b-b)^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = R^2,$$

Deməli, $|a|=|b|=R$. $M(4;-2)$ nöqtəsinin absisi müsbət, ordinatı mənfi olduğundan, A nöqtəsinin absisi müsbət, B nöqtəsinin ordinatı isə mənfi olmalıdır. Deməli, $b=-a$. Onda,

$$(4-a)^2 + (-2-(-a))^2 = a^2 \Rightarrow 16-8a+a^2+a^2-4a+4=a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -2, R_1 = 2 \\ b_2 = -10, R_2 = 10 \end{cases}$$

Beləliklə, verilən şərtləri ödəyən çevrələr

$$\zeta_1: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

və

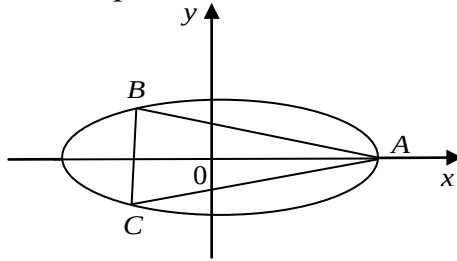
$$\zeta_2: (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

şəklindədir.

Məsələ.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ellipsinin daxilinə çəkilmiş bərabərtərəfli üçbucağın tərəp nöqtələrindən biri ellipsin sağ tərəsi ilə üst-üstə düşür. Üçbucağın qalan iki tərəsinin koordinatlarını tapın.}$$

rəfli üçbucağın tərəp nöqtələrindən biri ellipsin sağ tərəsi ilə üst-üstə düşür. Üçbucağın qalan iki tərəsinin koordinatlarını tapın.



Şəkil 9.

Həlli:

Üçbucağı ABC ilə işarə edək. Ellipsin

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

tənliyindən $a=1, b=2$. Ona görə də A nöqtəsinin koordinatları $A(1;0)$ olur. ABC üçbucağı bərabərtərəfli olduğundan, onun tərələri ellipsin üzərində olduğundan B və C tərələri OX oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr olar. Deməli, əgər $B(x,y)$ isə, onda $C(x;-y)$ olacaq.

Ellipsin tənliyindən

$$4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$AB = BC$ olduğundan,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-x) + (y-(-y))^2}$$

və ya

$$(x-1)^2 + y^2 = 4y^2$$

olur. Buradan,

$$3y^2 = (x-1)^2 \text{ və ya } y^2 = \frac{1}{3}(x-1)^2.$$

y^2 -nin bu qiymətini ellipsin tənliyində nəzərə alsaq,

$12x^2 + x^2 - 2x + 1 - 12 = 0$ və ya $13x^2 - 2x - 11 = 0$ tənliyini alırıq ki, buradan da,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{11}{13}$$

($x_1 = 1$, A təpəsinin absisidir).

$$y^2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{11}{13} - 1 \right)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{24}{13} \right)^2 \Rightarrow y = \pm \frac{24}{\sqrt{3} \cdot 13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 13} \Rightarrow y = \pm \frac{8\sqrt{3}}{13}.$$

Beləliklə, $B \left(-\frac{11}{13}; \frac{8\sqrt{3}}{13} \right)$ və $C \left(-\frac{11}{13}; -\frac{8\sqrt{3}}{13} \right)$ alırıq.

Məsələ.

Xəyəli yarımoxunun 2-yə bərabər olduğunu və $M\left(4; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək, koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olan hiperbolanın tənliyini yazın. M nöqtəsi ilə sağ fokus arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

Axtarılan tənlik $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ şəklində olmalıdır.

Şərtə görə $b = 2$ və M nöqtəsi hiperbola üzərindədir. Ona görə də

$$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow \frac{16}{a^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 = 12$$

və hiperbolanın tənliyi

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

olur.

Bilirik ki,

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4.$$

Deməli sağ fokus nöqtəsi $F_1(4; 0)$ olur. Onda,

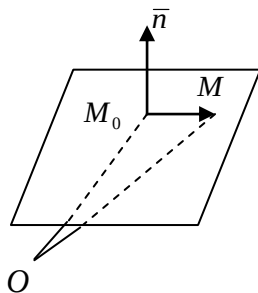
$$MF_1 = \sqrt{(4-4)^2 + \left(0 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Yəni $MF_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ alırıq.

XXXII FƏSİL. FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

32.1.Fəzada müstəvi tənlikləri

Verilmiş müstəviyə perpendikulyar olan, sıfırdan fərqli $\vec{n} = (A; B; C)$ vektoru həmin müstəvinin normal vektoru adlanır. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən keçən, normal vektoru $\vec{n} = (A; B; C)$ olan müstəvinin vektorial tənliyi $\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ şəklindədir, burada $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsinin,



Şəkil 10.

$\vec{r} = \overline{OM}$ isə müstəvi üzərindəki ixtiyari $M(x; y; z)$ nöqtəsinin radius vektorlarıdır. Bu tənlik dekart koordinat sistemində

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

və ya

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

şəklində yazılır. Sonuncu tənlik müstəvinin ümumi tənliyi adlanır. Qeyd edək ki, $\vec{n} \neq \vec{0}$ olduğundan A, B, C əmsalları eyni zamanda sıfıra bərabər ola bilməzlər. Əgər $A \neq 0, B \neq 0$ və $C \neq 0$ olarsa, ümumi tənliyi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

şəklində yazmaq olar ki, bu da müstəvinin parçalarla tənliyi adlanır, burada $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ olub, müstəvinin uyğun olaraq, OX, OY və OZ oxlarından ayırdığı parçaların uzunluğudur.

Verilmiş üç $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$ və $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

şəklindədir.

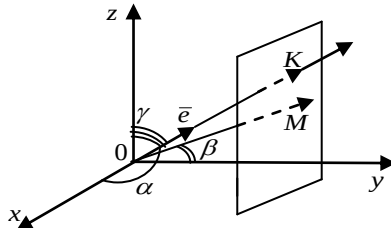
Müstəvinin ümumi tənliyinin hər tərəfini normallaşdırıcı

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

vuruğuna vurmaqla onu normal

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

şəklinə gətirmək olar. Burada p koordinat başlanğıcından müstəviyə endirilmiş OK perpendikulyarının uzunluğu, α, β, γ isə istiqaməti OK perpendikulyarının istiqaməti ilə eyni olan $\bar{e}$ vahid vektorunun uyğun olaraq OX, OY və OZ oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlardır.



Şəkil 11.

Fəzada verilmiş

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

və

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

müstəviləri arasındakı bucağın kosinusu

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

düsturu ilə təyin edilir. Verilmiş iki müstəvinin birbirinə paralel olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

şəklindədir;

İki müstəvinin üst-üstə düşməsi şərti

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

münasibəti ilə təyin edilir.

İki müstəvinin perpendikulyar olması üçün zəruri və kafi şərt

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

bərabərliyi ilə ifadə edilir.

Verilmiş $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

müstəvisinə qədər olan məsafə

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Əgər müstəvi normal

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

tənliyi ilə verilmişdirsə onda, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafə

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|$$

düsturu ilə tapılır.

Məsələ.

$M(2;5;-4)$ nöqtəsindən keçən və koordinat oxlarından bərabər parçalar ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Müstəvinin parçalarla tənliyi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

şəklindədir. Şərtə görə $a = b = c$ olduğundan müstəvinin tənliyi

$$x + y + z = a$$

şəklini alır. Müstəvi M nöqtəsindən keçdiyindən

$$2 + 5 + (-4) = a,$$

və ya $a = 3$ alırıq. Deməli, axtarılan müstəvinin tənliyi

$$x + y + z - 3 = 0$$

olar.

Məsələ.

$M(8;3;6)$, $N(4;2;7)$ nöqtələrindən keçən və OZ oxundan $c = 6$ parçasını ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvi M, N nöqtələrindən və $P(0;0;6)$ nöqtəsindən keçdiyindən:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-6 \\ 8-0 & 3-0 & 6-6 \\ 4-0 & 2-0 & 7-6 \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

və ya

$$3x - 8y + 4z - 24 = 0$$

axtarılan müstəvinin tənliyidir.

Məsələ.

Koordinat başlanğıcından və $M(2;1;-1)$ nöqtəsindən keçib, $2x - 3z = 0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvi $O(0;0;0)$ nöqtəsindən keçdiyindən onun tənliyi

$$Ax + By + Cz = 0$$

şəklindədir.

Axtarılan müstəvinin $\vec{n} = (A; B; C)$ normalı, həmin müstəvinin üzərində yerləşən $\overline{OM} = (2;1;-1)$ vektoruna (çünki, həm O , həm də M nöqtəsi müstəvinin üzərindədir) və $2x - 3z = 0$ müstəvinin $\vec{n}_1 = (2;0;-3)$ normal vektoruna perpendikulyar olmalıdır.

Deməli,

$$A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

və ya

$$A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Odur ki, $\bar{n} = (3; -4; 2)$ və axtarılan müstəvinin tənliyi:

$$3x - 4y + 2z = 0$$

olur.

32.2. Fəzada düz xətt tənlikləri

Verilmiş düz xəttin və ya ona paralel düz xəttin üzərində yerləşən hər hansı sıfırdan fərqli vektor həmin düz xəttin istiqamətverici vektoru adlanır.

Fəzada düz xətti müxtəlif tənliklərlə ifadə etmək olar.

1. Verilmiş $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən keçib $\bar{s} = (m, n, p)$ vektoruna paralel düz xəttin kanonik tənliyi

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

şəklindədir, burada məxrəclərdən birinin sıfıra bərabər olması, uyğun surətin də sıfıra bərabər olması deməkdir.

2. t dəyişən parametrlərdə düz xəttin parametrik tənlikləri

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

şəklindədir.

3. Verilmiş iki $M_1(x_1; y_1; z_1)$ və $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

şəklindədir, burada $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ və $z_1 \neq z_2$.

4. Hər bir düz xəttə iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi baxmaq olar:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Bu, düz xəttin ümumi tənliyidir. Bu düz xəttiin istiqamətverici $\vec{s}$ vektorunu

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

düsturunun köməyi ilə tapmaq olar.

Tutaq ki, fəzada L_1 və L_2 düz xətləri verilmişdir:

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

və

$$L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Bu düz xətlər arasındakı iti bucağı

$$\cos \varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

düsturu ilə tapmaq olar.

L_1 və L_2 düz xətlərinin perpendikulyarlıq şərti

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

və paralellik şərti isə $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ şəklindədir.

L_1 və L_2 düz xətlərinin bir müstəvi üzərində olması şərti

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

münasibətindən ibarətdir. Bu halda $\bar{S}_1 // \bar{S}_2$ olarsa L_1 və L_2 kəsişirlər. L_1 və L_2 düz xətləri arasındakı ən qısa məsafə

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}$$

düsturun köməyi ilə hesablanı bilər.

Məsələ.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z + 4 = 0, \\ 2x + 3y - z + 3 = 0. \end{cases} \text{ düz xəttinin kanonik tənliyini}$$

yazın.

Həlli:

İki müstəvinin kəsişməsi kimi verilmiş bu düz xəttin üzərində bir $M(x_0; y_0)$ nöqtəsini təyin edək. Bunun üçün, məsələn, $x_0 = 1$ qəbul edək, onda

$$\begin{cases} 3y_0 - 2z_0 = -9, \\ 3y_0 - z_0 = -5. \end{cases}$$

Buradan $y_0 = -\frac{1}{3}$ və $z_0 = 4$. Deməli, $M_0\left(1; -\frac{1}{3}; 4\right)$

nöqtəsi düz xəttin üzərindədir. İndi isə düz xəttin yönəldicisi $\bar{s}$ vektorunu tapaq. Müstəvilərin normalları $\bar{N}_1 = (5; 3; -2)$ və $\bar{N}_2 = (2; 3; -1)$ olduğundan,

$$\bar{s} = [\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 1\bar{j} + 9\bar{k}.$$

Deməli, verilmiş düz xəttin kanonik tənliyi

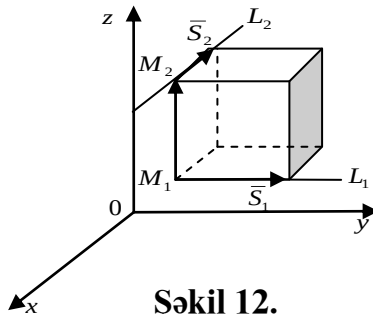
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+\frac{1}{3}}{1} = \frac{z-4}{9}$$

olur.

Məsələ.

$$L_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1} \text{ və } L_2: \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$

düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyənləşdirin və aralarındakı məsafəni tapın.



Şəkil 12.

Həlli:

Ayındır ki, L_1 düz xətti $M_1(0;1;-2)$ nöqtəsindən, L_2 düz xətti isə $M_2(-4;-4;1)$ nöqtəsindən keçir. Onda,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4 - 0; -3 - 1; 1 - (-2))$$

və ya

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4, -4, 3) \text{ olar.}$$

L_1 düz xəttinin istiqamətverici vektoru $\vec{S}_1 = (2; -3; 1)$ və L_2 düz xəttinin istiqamətverici vektoru $\vec{S}_2 = (3; 2; 4)$ olduğunu nəzərə alaraq $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{S}_1$ və $\vec{S}_2$ vektorlarının bir müstəvinin üzərində olmasının (onların komplanarlığını) yoxlayaq. Bunun üçün onların qarışıq hasilini hesablayaq:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, [\vec{S}_1, \vec{S}_2] \right) = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 115 \neq 0$$

Deməli, L_1 və L_2 çarpaz düz xətlərdir. İndi isə L_1 və L_2 arasındakı məsafəni tapaq. Bilirik ki,

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, [\vec{S}_1, \vec{S}_2])$$

qarışıq hasili $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{S}_1$ və $\vec{S}_2$ vektorları üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminə bərabərdir:

$$V_{par} = (\overrightarrow{M_1M_2}, [\vec{S}_1, \vec{S}_2]) = 115.$$

Bu paralelepipedin oturacağının sahəsi isə ədədi qiymətcə $[\vec{S}_1, \vec{S}_2]$ vektorial hasilinin nəticəsi olan vektorun uzunluğuna bərabərdir. Odur ki,

$$[\overline{S_1}, \overline{S_2}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -14\overline{i} - 5\overline{j} + 13\overline{k} \quad \text{və}$$

$$S_{ot} = \sqrt{196 + 25 + 169} = \sqrt{390}.$$

Digər tərəfdən

$$V_{par} = |S_{ot}| \cdot H \text{ olduğundan,}$$

$$H = \frac{V_{par}}{|S_{ot}|} = \frac{115}{\sqrt{390}} \approx \frac{115}{19,748} = 5,82.$$

alırıq.

32.3. Fəzada düz xətt və müstəvi

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \text{ düz xətti və } Q: Ax + By + Cz + D = 0$$

müstəvisi arasındakı bucağın

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

düsturunun köməyi ilə hesablamaq olar.

L düz xətti ilə Q müstəvisinin

a) Perpendikulyarlıq şərti

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

b) Paralellik şərti

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

şəklindədir.

Düz xətlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün, düz xəttin parametrik tənliklərini

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

müstəvinin tənliyində nəzərə almaq kifayətdir:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

L düz xəttinin Q müstəvisi üzərində olması şərti:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Əgər $Am + Bn + Cp \neq 0$ olarsa, onda düz xətt müstəvinə kəsir; $Am + Bn + Cp = 0$ və $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ olduqda isə düz xətt müstəviyə paraleldir.

Məsələ.

$$M(4; -3; 6) \text{ nöqtəsindən keçən və } \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$$

düz xəttinə perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvinin $\bar{N}$ normalı bu müstəvinin perpendikulyar olduğu düz xəttin yönəldici $\bar{S} = (2; 1; -2)$ vektoru ilə eyni olacaqdır:

$$\bar{N} = (2; 1; -2).$$

Onda müstəvinin tənliyi:

$$2x + y - 2z + D = 0$$

olar. D -ni tapmaq üçün müstəvinin $M(4; -3; 6)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə almaq kifayətdir:

$$2 \cdot 4 - 3 - 2 \cdot 6 + D = 0$$

və $D = 7$. Deməli, axtarılan müstəvinin tənliyi

$$2x + y - 2z + 7 = 0$$

olur.

Məsələ.

$\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ (L) düz xəttinin $2x - 3y + z - 4 = 0$ (Q) tənliyi ilə verilmiş müstəvi üzərindəki proyeksiyasının tənliyini yazın.

Həlli:

Verilmiş düz xətti iki müstəvinin kəsişməsi kimi yazmaq olar:

$$\begin{cases} \frac{z+1}{-3} = \frac{x}{5}, \\ \frac{y+1}{-2} = \frac{x}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5z + 5 = 0, \\ 2x + 5y + 5 = 0. \end{cases}$$

Belə müstəvilər dəstəsinə baxaq:

$$3x + 5z + 5 + \alpha(2x + 5y + 5) = 0$$

və ya

$$(3 + 2\alpha)x + 5\alpha y + 5z + (5\alpha + 5) = 0.$$

Bu müstəvilər dəstəsindən elə müstəvi seçək ki, həmin müstəvi verilmiş müstəviyə perpendikulyar olsun. Onda

$$2 \cdot (3 + 2\alpha) + (-3) \cdot 5\alpha + 1 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ alırıq.}$$

Odur ki, $2x - 3y + z - 4 = 0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyi

$$5x + 5y + 5z + 10 = 0 \text{ və ya } x + y + z + 2 = 0(R) \text{ olar.}$$

L düz xəttinin Q üzərindəki proyeksiyası düz xətt olacaqdır. Ona görə də tənliyi axtarılan proyeksiya P və R müstəvilərinin kəsişmə xətti olar:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0, (Q) \\ x + y + z + 2 = 0. (R) \end{cases}$$

XXXIII FƏSİL: XƏTTİ FƏZALAR. XƏTTİ ÇEVİRMƏLƏR

33.1. Xətti fəzalar

a) Xətti fəzanın tərifı

Biz əvvəlki fəsillərdə bir neçə müxtəlif təbiətli elementlər çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməllərindən (xətti əməllərdən) danışmışıq. Məsələn, eyni ölçülü matrislərin cəmindən və ədədə vurulmasından, verilmiş matrisin sətirlərinin (və sütunlarının) cəmindən və ədədə vurulmasından və s. danışılmışdır. Başqa çoxluqların da elementlərinin cəmindən və ədədə vurulmasından danışmaq olar. Məsələn, dərəcəsi n -dən böyük olmayan cəbri çoxhədlilər çoxluğunda da xətti əməllər təyin olunur.

Xətti əməllər həqiqi ədədlər çoxluğunda (və eləcə də kompleks ədədlər çoxluğunda) da təyin olunmuşdur: istənilən iki həqiqi ədədin **cəmi** və **hasili** yenə də həqiqi ədəddir.

Yuxarıda saydığımız çoxluqların hər birində xətti əməllər müxtəlif şəkildə (hər çoxluğun özünə uyğun şəkildə) təyin olunsada, onların hamısı eyni xassələrə: yerdəyişmə, qruplaşdırma və s. xassələrinə malikdir. Buna görə də belə bir təbii sual qarşıya çıxır: iki ixtiyari elementinin cəmi və elementlərinin ədədə (həqiqi və ya kompleks) hasili təyin oluna bilən istənilən təbiətli elementlər çoxluğunu öyrənmək olmazmı? Olar. Elementləri arasında hər hansı yolla müəyyən xassələri ödəyən xətti əməllər təyin olunan daha ümumi çoxluqları öyrənmək mümkündür. Belə çoxluqlara **xətti fəzalar** deyilir.

Tərif. Tutaq ki, istənilən təbiətli $x, y, z, u, \dots$ elementlərinin R çoxluğu üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

I. Çoxluğun istənilən iki x və y elementinə, həmin çoxluğun yeganə bir $z \in R$ elementini qarşı qoyan müəyyən qayda (toplama əməli) göstərsin. z elementinə x və y elementlərinin cəmi deyilir və $z=x+y$ ilə işarə olunur.

II. Çoxluğun istənilən x elementinə və istənilən λ həqiqi ədədinə həmin çoxluğun yeganə bir $u \in R$ elementini qarşı qoyan müəyyən qayda (ədədə vurma əməli) göstərsin. u elementinə x elementinin həqiqi λ ədədinə hasili deyilir və $u = \lambda x$ və ya $u = x \lambda$ ilə işarə olunur.

III. R çoxluğunda təyin olunmuş toplama və ədədə vurma əməlləri (xətti əməllər) üçün aşağıdakı aksiomlar ödənilsin:

1°. İstənilən $x \in R$ və $y \in R$ üçün

$$x+y=y+x.$$

2°. İstənilən $x \in R, y \in R$ və $z \in R$ üçün

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

3°. Elə sıfır $\theta \in R$ elementi var ki, istənilən $x \in R$ üçün:

$$x + \theta = x.$$

4°. İstənilən $x \in R$ elementi üçün onun əksi adlanan elə $-x \in R$ elementi var ki, $x + (-x) = \theta$

5°. İstənilən $x \in R$ üçün $1 \cdot x = x$

6°. İstənilən $x \in R$ və həqiqi λ, μ ədədləri üçün:

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$$

7°. İstənilən $x \in R$ və həqiqi λ, μ ədədləri üçün:

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

8°. İstənilən $x \in R, y \in R$ və həqiqi λ ədədi üçün:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Onda R çoxluğuna həqiqi xətti fəza deyilir. Bu tərifdə kompleks ədədlərə vurma əməli təyin olunduqda, R çoxluğuna **kompleks xətti fəza** deyilir.

Xətti fəzanın tərifində yalnız elementlər deyil, təyin olunan toplama və ədədə vurma əməlləri də ümumi (mücərrəd) götürülür. Baxılan elementlərin və təyin olunmuş xətti əməllərin təbiəti (şəkli) göstərildikdə konkret xətti fəzalar alınır.

Qeyd edək ki, bəzən istənilən xətti fəzaya **xətti vektorial fəza**, onun elementlərinə isə **vektorlar** deyilir. Əlbəttə, bu zaman xətti fəzanın elementi olan ümumi “vektor” anlayışını əvvəl öyrəndiyimiz dar mənada “vektor” anlayışı ilə qarışdırmaq olmaz.

Xətti fəzanın 1°- 8° aksiomlarından aşağıdakı nəticələr alınır:

1. Xətti fəzanın sıfır elementi yeganədir. Doğrudan da, tutaq ki, R fəzasında iki θ_1 və θ_2 sıfır elementi vardır. Onda istənilən $x \in R$ üçün $x + \theta_1 = x$ və $x + \theta_2 = x$ olduğundan $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$ və $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$. Buradan $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ olmasına əsasən $\theta_1 = \theta_2$ olar.

2. Xətti fəzanın hər bir $x \in R$ elementinin “-x” əks elementi yeganədir. Bunu isbat etmək üçün x elementinin iki $-x_1$ və x_2 əks elementi olduğunu fərz edək. Onda

$$\begin{aligned}(-x_1) + x + (-x_2) &= (-x_1 + (x + (-x_2))) \\ &= (-x_1) + \theta = -x_1\end{aligned}$$

və

$$\begin{aligned}(-x_1) + x + (-x_2) &= ((-x_1) + x) + (-x_2) = \\ &= \theta + (-x_2) = -x_2\end{aligned}$$

olduğundan $-x_1 = -x_2$ alınar.

$x + (-x) = \theta$ olmasından aydındır ki, $-x \in R$ elementinin də əks elementi x -dir.

y və $(-x)$ elementlərinin cəminə y və x elementlərinin fərqi deyilir və $y - x$ ilə işarə olunur.

3. İstənilən $x \in R$ elementinin sıfır ədədinə hasili R fəzasının sıfır elementinə bərabərdir:

$$0 \cdot x = \theta$$

Doğrudan da,

$$0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

bərabərliyinin hər iki tərəfinə $-0 \cdot x$ elementini əlavə etsək $\theta = 0 \cdot x$ alınar.

4. İstənilən həqiqi λ ədədi və $\theta \in R$ elementi üçün

$$\lambda \cdot \theta = \theta \text{ olar.}$$

5. $\lambda x = \theta$ olarsa, onda ya $x = \theta$, ya da $\lambda = 0$.

Doğrudan da, $\lambda \neq 0$ olarsa, onda:

$$x = 1 \cdot x = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta.$$

6. Hər bir $x \in R$ üçün $(-1) \cdot x$ elementi x -in əks elementidir. Buna inanmaq üçün

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \theta$$

bərabərliyinə və əks elementini yeganəliyi xassəsinə əsaslanmaq lazımdır:

$$(-1)x = -x.$$

b) Konkret xətti fəzalar

Xətti fəzanın tərifində baxılan R çoxluğu elementlərinin və həmin çoxluqda təyin olunan xətti əməllərin (toplama və ədədə vurma əməllərinin) təbiətini və ya konkret şəklini göstərməklə müxtəlif konkret xətti fəzalar almaq olar.

I. Elementləri həqiqi ədədlər olan bütün n -tərtibli matrislər çoxluğunu R ilə işarə edək. R çoxluğunda toplama və həqiqi vurma əməllərini əvvəlki paragrafda təyin etdiyimiz kimi qəbul etsək, 1° - 8° aksiomlarının hamısı ödənilər, yəni n -tərtibli matrislər çoxluğu həqiqi xətti fəza təşkil edir. Bu fəzanın sıfır elementi n -tərtibli sıfır matris olur:

$$\theta = \underbrace{\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|}_{n}$$

II. Müstəvi üzərindəki bütün vektorlar (yəni istiqamətli parçalar) çoxluğunu V_2 ilə işarə edək. Belə vektorların cəmi və həqiqi ədədə hasili təyin edilmişdir. Bu xətti əməllər üçün 1° - 8° aksiomları ödənilir. Deməli, V_2 çoxluğu həqiqi xətti fəzadır. Buna ikiölçülü vektorial fəza deyilir.

Eləcə də, düz xətt üzərində yerləşən bütün vektorlar çoxluğu V_1 xətti fəzasını (birölçülü vektorial fəzanı), fəza-

da yerləşən bütün adi vektorlar çoxluğu isə V_3 xətti fəzası-
nı – üçölçülü vektorial fəzanı təşkil edir.

Bu vektorial fəzaların sıfır elementi sıfır vektordur.

III. Dərəcəsi verilmiş n ədədindən böyük olmayan bütün $p(x)$ cəbri çoxhədlilər çoxluğunu P_n ilə işarə etsək, bu çoxluqda toplama və ədədə vurma əməllərini riyazi analizdə göstərildiyi kimi təyin etmək olar. Bu halda $1^\circ - 8^\circ$ aksiomaları ödənilir, yəni P_n çoxluğu həqiqi xətti fəzadır.

P_n xətti fəzasının sıfır elementi bütün əmsalları sıfıra bərabər olan çoxhədlidir.

IV. R_n ilə həqiqi ədədlərdən düzəlmiş bütün nizamlı $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çoxluqları çoxluğunu (n -liklər çoxluğunu) işarə edək. Bu çoxluğun elementini $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ilə işarə etsək, onda həqiqi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri x elementinin koordinatları adlanır.

R_n çoxluğunda iki ixtiyari $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementinin cəmini

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\end{aligned}$$

kimi, x elementinin həqiqi λ ədədinə hasilini isə

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

kimi təyin edək. Belə təyin olunmuş xətti əməllər n həqiqi ədəddən ibarət olan sətirlər üzərində təyin olunmuş toplama və ədədə vurma əməllərini xatırladır.

R_n çoxluğunda sıfır element $\theta = (0, 0, \dots, 0)$, x elementinin əks elementi isə $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ olar.

Yoxlamaq olar ki, R_n çoxluğunda təyin olunmuş xətti

əməllər üçün $1^{\circ} - 8^{\circ}$ aksiomları ödənilir, yəni R_n çoxluğu xətti fəzadır.

Riyazi analizdə R_n fəzasına **n-ölçülü hesabi fəza** və ya **n-ölçülü koordinat fəzası** deyilir.

V. Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu adi toplama və vurma əməllərinə görə həqiqi xətti fəza təşkil edir. Bu halda $1^{\circ} - 8^{\circ}$ aksiomlarının ödənilməsi hesab əməllərinin xassələrindən aydındır. Bu fəzanın sıfır elementi sıfır ədəddir.

Bütün kompleks ədədlər çoxluğu isə toplama və kompleks ədədə vurma əməllərinə görə kompleks xətti fəza təşkil edir.

Kompleks xətti fəzanın sıfır elementi, həqiqi və xəyali hissəsi sıfır olan

$$\theta = 0 + i \cdot 0$$

kompleks ədəddir.

VI. Verilmiş $[a, b]$ parçasında kəsilməyən həqiqi funksiyalar çoxluğunda $x=x(t)$ və $y=y(t)$ funksiyalarının cəmini adi qayda ilə

$$x + y = x(t) + y(t)$$

və həqiqi λ ədədinə vurma əməlini isə

$$\lambda x = \lambda x(t)$$

kimi təyin etsək, həqiqi xətti fəza alırıq. Bu fəzanı $C[a, b]$ ilə işarə edirlər.

Riyazi analizdən məlumdur ki, $[a, b]$ parçasında kəsilməyən iki funksiyanın cəmi və bu funksiyaalrın hər birinin ixtiyari həqiqi ədədə hasili yenə də həmin parçada kəsilməyən funksiyaadır, yəni $C[a, b]$ fəzasına daxildir.

$C[a, b]$ fəzasında sıfır elementi $[a, b]$ parçasında eyniliklə sıfıra bərabər olan $\theta = x(t) \equiv 0 (t \in [a, b])$ funksiyasıdır. Bu fəzada 1^o -8^o aksiomlarının ödənilməsi- ni yoxlamaq olar.

VII. Yalnız sıfır ədədindən ibarət olan çoxluq da xətti fəza təşkil edir. Bu fəzada elementlərin cəmi və həqiqi λ ədədinə vurma əməlləri $0 + 0 = 0, \lambda 0 = 0$ kimi təyin olunur. Bu fəza sıfır fəza adlanır.

Xətti fəzaya aid çoxlu misallar göstərmək olar. Lakin hər bir çoxluq xətti fəza əmələ gətirmir. Bunu aşağıdakı misallardan aydın görmək olar.

1. Dərəcəsi dəqiq $n (n > 1)$ ədədinə bərabər olan cəbri $P(x)$ çoxhədliləri çoxluğunu $P_n^* (P_n^* \subset P_n)$ ilə işarə etsək, bu çoxluq xətti fəza əmələ gətirməz. Doğrudan da, P_n^* çoxluğuna daxil olan iki $P'(x)$ və $P''(x)$ çoxhədlilərinin cəmi həmin çoxluğa daxil olmaya bilər. Məsələn, n -dərəcəli hədlərinin əmsalları qarşılıqlı əks ədədlər (ax^n və $-ax^n$ kimi) olan iki çoxhədlinin cəmi, dərəcəsi $(n-1)$ – dən böyük olmayan çoxhədlidir.

2. Müstəvi üzərində yerləşən bütün vektorlar çoxluğundan hər hansı düz xəttə paralel olan bütün vektorları kənar etsək, yerdə qalan vektorlar çoxluğu xətti fəza əmələ gətirməz. Çünki bu çoxluqda istənilən iki vektorun cəmi göstərilən düz xəttə paralel olan vektordursa, onda bu vektorların cəmi həmin çoxluğa daxil olmaz.

c) Xətti fəzanın bazisi və ölçüsü

Biz əvvəllər sətirlərin və sütunların xətti asılı olmasından və xətti kombinasiyasından danışmışıq. Daha ümumi olan xətti fəzaların elementləri üçün də həmin

anlayışları analoji olaraq söyləmək olar. Tutaq ki, R həqiqi xətti fəzadır. Bu fəzanın $x_k \in R(1, n)$ elementləri və həqiqi $\lambda_k (k=1, n)$ ədədləri vasitəsilə düzəlmiş

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (1)$$

ifadəsinə həmin elementlərin **xətti kombinasiyası** deyilir.

Əgər

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (2)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $x \in R$ elementi $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinin xətti kombinasiyasıdır.

Tərif. *Xətti R fəzasının $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinə o zaman xətti asılı elementlər deyilir ki, heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan və*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \quad (3)$$

münasibətini ödəyən həqiqi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədləri olsun.

Əgər (3) münasibəti yalnız $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ olduqda ödənilirsə, onda $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinə xətti asılı olmayan elementlər deyilir.

Verilmiş $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinin biri sıfır element (θ) olarsa, onda həmin elementlər həmişə xətti asılıdır. Xətti asılı olmayan $x_1, x_2 \dots x_n$ elementləri çoxluğunun istənilən alt hissəsi də xətti asılı olmayandır.

Xətti asılı olan vektorlar haqqında isbat etdiyimiz teoremə analoji olaraq aşağıdakı teoremi də isbat etmək olar:

Teorem 1. *Həqiqi xətti R fəzasının $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinin xətti asılı olması üçün onlardan birinin qalanlarının xətti kombinasiyası olması zəruri və kafi şərtidir.*

İndi xətti R fəzasının bazisi anlayışını verək.

Tərif. *Həqiqi xətti R fəzasının istənilən x elementini həmin fəzanın xətti asılı olmayan $x_1, x_2 \dots x_n$ elementləri üzrə ayırmaq mümkün olduqda, yəni istənilən $x \in R$ üçün*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (4)$$

münasibətini ödəyən həqiqi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədləri tapmaq mümkün olduqda $x_1, x_2 \dots x_n$ elementlərinin nizamlı çoxluğuna R fəzasının bazisi deyilir.

(4) bərabərliyinə x elementinin $x_1, x_2 \dots x_n$ bazisi üzrə ayrılışı $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ həqiqi ədədlərinə isə x elementinin həmin bazisə nəzərən **koordinatları** deyilir. Bunu $x(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ və ya $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ şəklində yazırlar.

Teorem 2. *Həqiqi xətti R fəzasının istənilən x elementinin həmin fəzanın $x_1, x_2, \dots, x_n$ bazisi üzrə*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (4)$$

ayrılışı yeganədir.

İsbatı: Doğrudan da, x elementinin həmin bazis üzrə (4) – dən başqa

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n \quad (5)$$

ayrılışı da olarsa, onda (4) və (5) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxmaqla

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)x_n \\ = \theta \quad (6) \end{aligned}$$

münasibətini almaq olar. R fəzasının bazisini təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementləri xətti asılı olmadığından (6) bərabərliyi ancaq $\lambda_k - \mu_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olduqda, yəni

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

olduqda mümkündür. Deməli, x elementinin (4) ayrılığı yeganədir.

Bu teorem göstərir ki, hər bir $x \in R$ elementinə $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədlərinin yeganə çoxluğu və tərsinə $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədlərinə (4) bərabərliyi ilə təyin olan yeganə bir x elementi uyğundur, yəni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ədədləri x elementini birqiymətli təyin edir.

Xətti fəza elementlərinin bazis üzrə ayrılmasının böyük əhəmiyyəti vardır. Bu ayrılışlar müxtəlif təbiətli elementlər üzərində aparılan toplama və ədədə vurma əməllərinin həmin elementlərin koordinatları olan həqiqi ədədlər üzərində aparmağa imkan verir:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

və

$$y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n$$

olarsa, onda

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + (\lambda_2 + \mu_2)x_2 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)x_n$$

və istənilən həqiqi λ ədədi üçün

$$\lambda x = (\lambda \lambda_1)x_1 + (\lambda \lambda_2)x_2 + \dots + (\lambda \lambda_n)x_n.$$

Belə bir təbii sual qarşıya çıxır: xətti R fəzasında xətti asılı olmayan neçə element tapmaq olar?

Tərif. *Xətti R fəzasında n sayda xətti asılı olmayan element varsa və istənilən $n+1$ sayda element xətti asılıdırsa, onda həmin fəzaya n -ölçülü xətti fəza deyilir. Bu halda n ədədi R fəzasının ölçüsü adlanır və $n=d(R)$ kimi işarə olunur.*

Əgər xətti R fəzasında istənilən sonlu sayda xətti asılı olmayan element varsa, onda həmin fəzaya **sonsuz ölçülü xətti fəza** deyilir.

Teorem 3. *n -ölçülü fəzanın n sayda xətti asılı olmayan elementlərinin hər bir nizamlı $x_1, x_2 \dots x_n$ çoxluğu həmin fəzanın bazisini təşkil edir.*

İsbatı: Doğrudan da, fəzanın istənilən x elementi verilmiş $x_1, x_2, \dots, x_k$ elementləri üzrə ayrılır, çünki əks halda həmin fəzada xətti asılı olmayan $(n+1)$ sayda element tapmaq olar ki, bu da şərtə ziddir.

Tutaq ki, n -ölçülü R fəzasında k sayda ($k < n$) xətti asılı olmayan $x_1, x_2 \dots x_k$ elementləri verilmişdir. Bu halda, R fəzasında həmin elementlə xətti asılı olmayan bir x_{k+1} elementi də tapmaq mümkündür. Çünki əks halda, $x_1, x_2, \dots, x_k$ elementləri R fəzasının bazisini təşkil edər, bu isə ola bilməz. Beləliklə, R fəzasında $k+1$ sayda xətti asılı olmayan $x_1, x_2 \dots x_n, x_{k+1}$ elementləri seçilmiş olur. $k + 1 < n$ olduqda bu prosesi davam etdirmək olar.

Nəticədə R fəzasının n sayda xətti asılı olmayan elementi seçilər ki, bu elementlər də 3-cü teoremə görə fəzanın bazisini təşkil edir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq:

Teorem 4. *n -ölçülü fəzanın $k(k < n)$ sayda xətti asılı olmayan elementlərin hər bir nizamlı çoxluğunu həmin fəzanın bazisinə qədər tamamlamaq olar.*

Xüsusi halda, fəzanın sıfır olmayan hər bir elementini bazisə qədər tamamlamaq olar.

Misal 1. V_2 fəzası ikiölçülü fəzadır. Müstəvi üzərində yerləşən və kolleniar olmayan iki ixtiyari vektor həmin fə-

zanın bazisini təşkil edir. Müstəvi üzərində hər bir vektorun bazis üzrə yeganə ayrılışı vardır.

Misal 2. V_3 fəzası üçölçülü fəzadır. Komplanar olmayan üç ixtiyari vektor bu fəzanın bazisini təşkil edir.

Misal 3. R_n fəzası n-ölçülü xətti fəzadır. Həmin fəzanın bazisi olaraq xətti asılı olmayan

$$e_1(1,0,\dots,0), \quad e_2(0,1,0,\dots,0), \quad e_n(0,0,0,\dots,1)$$

elementləri çoxluğunu götürmək olar.

İstənilən $x \in R_n$ elementi üçün elə $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ həqiqi ədədləri var ki,

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

ayrılışı doğrudur.

Misal 4. $C[a, b]$ fəzası sonsuzölçülü xətti fəzadır. Doğrudan da, istənilən n üçün həmin fəzaya daxil olan və xətti asılı olmayan n sayda $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ elementləri vardır. Bu elementlərin xətti asılı olmaması

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots + \lambda_{n-1} t^{n-1} = 0 \quad (7)$$

münasibətinin ancaq $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ olduqda ödənilməsindən aydındır. Heç olmasa bir əmsalı sıfır olmayan (n-1) dərəcəli cəbri çoxhədli ən çoxu (n-1) sayda nöqtədə sıfıra çevrilə bilər.

d) Xətti fəzaların izomorfluğu

Tutaq ki, həqiqi R və Q xətti fəzaları verilmişdir. Əgər hər hansı qayda və ya qanun vasitəsilə R fəzasının hər bir x elementinə Q fəzasının müəyyən bir x' elementi uyğun qoyulursa, onda deyirlər ki, **R fəzasının Q fəzasına f inikası verilmişdir.** Bunu $f: R \rightarrow Q$ şəklində, x' elementinin x elementinə uyğun olmasını isə

$$x' = f(x) \quad (1)$$

şəklində işarə edirlər. Bu halda, x' elementinə x -in **obrazı**, x -ə isə **proobrazı** deyilir.

Əgər R fəzasının Q fəzasına $f: R \rightarrow Q$ inikası zamanı R -in müxtəlif elementlərinə Q -nün müxtəlif elementləri uyğundursa və Q –nün hər bir elementi R –in müəyyən bir elementinin obrazıdırsa, onda həmin inikasa **qarşılıqlı birqiymətli inikas** deyilir.

Verilmiş R və Q xətti fəzalarının

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

şərtlərini ödəyən qarşılıqlı birqiymətli $f: R \rightarrow Q$ inikası varsa, onda həmin fəzalara **izomorf fəzalar** deyilir. Bu halda f inikası **izomorfizm** adlanır.

Tərifdən aydındır ki, izomorf R və Q fəzaları müxtəlif təbiətli elementlərdən ibarət olsa da, onlar toplama və ədədə vurma əməllə ilə ifadə olunan xassələr baxımından eyni fəzalardır.

Belə fəzaların bir sıra ümumi xassələri vardır:

Eyniölçülü bütün həqiqi fəzalar izomorfdur. Müxtəlif ölçülü istənilən iki fəza isə izomorf deyildir.

Buradan aydındır ki, sonlu ölçülü xətti fəzaların yeganə xarakteristikası onların ölçüsüdür. Eyniölçülü fəzalar cəbri (xətti əməllər) cəhətdən eyni fəzalardır.

Deməli, istənilən n –ölçülü həqiqi xətti fəza ilə n - ölçülü R_n hesabi fəza (n -ölçülü sətirlər çoxluğu) eynidir (izomorfdur). Buna görə də, n –ölçülü istənilən həqiqi xətti fəzanı R_n ilə işarə etmək olar.

e)Xətti altfəzalar.

Tutaq ki, R hər hansı xətti fəza, L isə onun boş olmayan altçoxluğudur.

Əgər xətti R fəzasının L altçoxlğu həmin fəzada təyin olunmuş toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəzadırsa, onda L çoxluğuna R fəzasının **xətti altfəzası** deyilir.

Yalnız sıfır elementdən ibarət olan çoxluq və fəzanın özü xətti R fəzasının xətti altfəzalarıdır. Bunlara bəzən **trivial (və ya qeyri-məxsusi) altfəzalar** deyilir.

Misal 1. Dərəcəsi verilmiş n ədədindən böyük olmayan bütün cəbri $p(x)$ çoxhədlilərinin L çoxluğuna həqiqi xətti $C[a, b]$ fəzasının xətti altfəzasıdır.

Misal 2. V_3 vektorial xətti fəzanın hər hansı müstəviyə paralel olan bütün vektorları çoxluğu, yəni V_2 vektorial fəzası, onun xətti altfəzasıdır.

Verilmiş n –ölçülü xətti R fəzasının L altfəzasına daxil olan xətti asılı olmayan elementlər fəzanın özünə də daxil olduğundan xətti L altfəzasının ölçüsü fəzanın ölçüsündən böyük ola bilməz. Əgər L altfəzası n –ölçülü xətti R fəzası ilə üst-üstə düşmürsə, onda L -in ölçüsü n -dən ciddi kiçik olacaqdır.

Xətti fəza verildikdə onun xətti altfəzasını aşağıdakı kimi də qurmaq olar.

Xətti R fəzasının $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementlərini götürək və onların mümkün olan bütün xətti kombinasiyaları çoxluğunu L_m ilə işarə edək:

$$L_m = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m\}.$$

Bu çoxluq altfəzadır. Buna $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementlərinin doğurduğu altfəza və ya həmin elementlər üzərinə çəkilmiş altfəza deyilir. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementləri xətti asılı deyilsə, onda L_m altfəzasının ölçüsü m ədədinə

bərabərdir. Həmin elementlər xətti asılı olduqda L_m altfəzasının ölçüsü m –dən kiçik olar.

Xətti altfəzanın ölçüsü fəzanın özünün ölçüsünə bərabər olarsa, onda altfəza həmin fəza ilə üst –üstə düşür. Göstərmək olar ki, xətti fəzanın hər bir xətti altfəzası müəyyən elementlərin doğurduğu altfəzadır. Bunu aşağıdakı teorem şəklində söyləmək olar:

Teorem . *Sonlu ölçülü xətti fəzanın hər bir xətti altfəzası sonlu sayda elementlərin doğurduğu xətti altfəzadır.*

Misal 3. V_3 vektorial fəzasının, $\bar{i}, \bar{v}, \bar{j}$ koordinat ortlarının yerləşdiyi müstəvi üzərindəki bütün vektorlar çoxluğundan ibarət olan xətti altfəzası həmin $\bar{i}, \bar{v}, \bar{j}$ vektorlarının doğurduğu xətti altfəzadır.

f) Evklid fəzası

Xətti fəzaya tərif verərkən istənilən təbiətli elementlər çoxluğunda 1°-8° aksiomlarını ödəyən toplama və ədədə vurma əməllərinin təyin olunmasını tələb etdik. Bu xətti əməllərin təbiəti və ya şəkli haqqında tərifdə başqa heç nə tələb olunmur.

Xətti fəzada məsafə anlayışı olmadığından baxılan çoxluğun elementlərinin uzunluğu, onların arasındakı bucaq və s. kimi anlayışları təyin etmək mümkün olmur. Buna görə də xətti fəzalarda baxdığımız iki əməldən (toplama və ədədə vurma) başqa yeni bir əmələ, skalyar hasil düzəltmə əməlinə baxmaq lazım gəlir.

Xətti fəzada skalyar hasil təyin olunduqda ona **Evklid fəzası** deyilir.

Tərif. *Tutaq ki, həqiqi xətti R fəzasının istənilən iki x və y elementinə, həmin elementlərin skalyar hasili adlanan*

və (x, y) ilə işarə olunan, müəyyən bir həqiqi ədədi uyğun qoyma qanunu (skalyar hasil) verilmişdir və bu zaman aşağıdakı şərtlər (aksiomlar) ödənilir:

9°. İstənilən $x \in R$ və $y \in R$ üçün

$$(x, y) = (y, x).$$

10°. İstənilən $x \in R, y \in R$ və $z \in R$ üçün

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

11°. İstənilən $x \in R, y \in R$ və həqiqi λ ədədi üçün

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y).$$

12°. İstənilən $x \neq \theta$ üçün $(x, x) > 0$ və $x = \theta$ olduqda:

$$(x, x) = 0.$$

Bu halda, həqiqi xətti R fəzasına **həqiqi Evklid fəzası** və ya sadəcə olaraq **Evklid fəzası** deyilir. Kompleks xətti fəzada uyğun aksiomları ödəyən skalyar hasil təyin olunduqda ona **kompleks Evklid fəzası** deyilir. Burada ancaq həqiqi Evklid fəzası öyrənilir.

Tərifdən aydındır ki, istənilən təbiətli elementlər çoxluğunun Evklid fəzası olması üçün həmin çoxluqda 1° -12° aksiomlarını ödəyən üç əməl (toplama, ədədə vurma və skalyar hasil) təyin olunmalıdır. Bu zaman baxılan elementlərin və təyin olunan əməllərin təbiəti haqqında ayrı heç nə tələb olunmur.

Evklid fəzasının 10° və 11° aksiomlarını ardıcıl tətbiq etməklə istənilən həqiqi λ_k və μ_k ədədləri üçün

$$\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k, y \right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k (x_k, y) \quad (1)$$

və

$$\left(x, \sum_{k=1}^m \mu_k y_k \right) = \sum_{k=1}^m \mu_k (x, y_k) \quad (2)$$

bərabərliklərini almaq olar. Bundan başqa, istənilən $x \in R$ üçün $(x, \theta) = 0$. Doğrudan da, $\theta = 0 \cdot x$ olduqda

$$(x, \theta) = (x, 0 \cdot x) = 0(x, x) = 0.$$

Misal 1. Fəzada yerləşən bütün vektorlar çoxluğundan ibarət olan həqiqi xətti V_3 fəzasında iki vektorun skalyar hasilini təyin edək: $(a, b) = |a| \cdot |b| \cos \varphi$. Bu zaman 9° - 12° aksiomlarının ödənilməsi skalyar hasilin uyğun xassələrindən aydındır. Deməli, V_3 fəzasında göstərilən şəkildə skalyar hasil təyin etsək, o üç ölçülü Evklid fəzası olacaqdır.

Eyni qayda ilə V_1 və V_2 fəzalarından uyğun olaraq birölçülü və ikiölçülü Evklid fəzaları alınır.

Misal 2. İndi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementlərindən ibarət olan həqiqi xətti R_n fəzasını götürək. Bu fəzanın istənilən

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ və } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

elementlərinin skalyar hasilini

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (3)$$

şəkildə təyin edək. (3) skalyar hasili üçün 9° - 11° aksiomlarının ödənilməsi aydındır. 12° aksiomunun doğruluğu isə

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

münasibətindən görünür.

Beləliklə, (3) skalyar hasili təyin olunmuş n –ölçülü Evklid fəzası almış oluruq. Bu fəzanı bəzən E_n ilə işarə edirlər.

g) Norma anlayışı. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi

Tutaq ki, R həqiqi Evklid fəzasıdır. Bu fəzanın istənilən $x \in R$ elementinin uzunluğu və ya norması $\sqrt{(x, x)}$ ədədinə deyilir və $\|x\|$ ilə işarə olunur:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1)$$

12° aksiomundan aydındır ki, istənilən $x \in R$ elementinin norması mənfi olmayan həqiqi ədəddir. Verilmiş elementin norması yalnız o zaman sıfıra bərabər olar ki, o sıfır element olsun.

Norması vahidə bərabər olan elementə **normalaşmış element** deyilir. İstənilən $x \in R$ həqiqi λ ədədi üçün

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} \\ &= |\lambda| \|x\|, \end{aligned}$$

yəni

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (2)$$

bərabərliyi doğru olduğundan, hər bir $x \neq \theta$ elementini öz normasına bölərək həmişə norması vahidə bərabər olan element almaq olar:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Bu əməliyyata **elementin normallaşdırılması** deyilir.

Teorem . Evklid fəzasının istənilən x və y elementi üçün

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y) \quad (3)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(3) bərabərsizliyinə **Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyi** deyilir.

İsbatı . Evklid fəzasının 12° aksiomuna görə istənilən həqiqi λ və μ ədədləri üçün

$$(\lambda x - \mu y, \lambda x - \mu y) \geq 0,$$

onda

$$\lambda^2(x,x) - 2\lambda\mu(x,y) + \mu^2(y,y) \geq 0$$

və

$$\lambda = (y,y), \quad \mu = (x,y) \text{ qəbul etsək,} \\ (y,y)[(x,x)(y,y) - (x,y)^2] \geq 0$$

bərabərsizliyini alarıq. Deməli, $y \neq \theta$ olduqda $(y,y) > 0$ və buna görə də

$$(x,x)(y,y) - (x,y)^2 \geq 0,$$

yəni (3) bərabərsizliyi doğrudur. $y = \theta$ olduqda (3) bərabərsizliyinin doğruluğu $(x,\theta) = 0$ və $(\theta,\theta) = 0$ münasibətlərindən aydındır.

İsbat etdiyimiz (3) bərabərsizliyini

$$(x,y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

və ya

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (4)$$

şəklində yazmaq olar.

Nəticə. Evklid fəzasının istənilən x və y elementi üçün

$$|(x+y)| \leq \|x\| + \|y\| \quad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Doğrudan da, (4) bərabərsizliyinə görə:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Buradan (5) münasibətinin doğruluğu aydındır. (5) bərabərsizliyinə **üçbucaq bərabərsizliyi** deyilir.

h) Ortoqonallıq və Ortonormal bazis

Əvvəlki paraqrafda isbat etdiyimiz Koşi –Bunyakovski bərabərsizliyindən

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad (1)$$

münasibəti alınır. Buradan aydındır ki, $\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ həqiqi ədədini bir φ bucağının kosinusu hesab etmək olar:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (2)$$

Həmin φ bucağına $x \in R$ və $y \in R$ elementləri arasındakı bucaq deyilir və $\varphi = (\widehat{x, y})$ şəklində yazılır. (2) münasibətini q

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi \quad (3)$$

şəklində yazdıqda vektorların hasilinin məlum tərfi xüsusi hal kimi alınır.

x və y elementləri xətti asılı olarsa, yəni $y = \lambda x$, onda (2) düsturundan aydındır ki, $\lambda > 0$ olduqda $\varphi = 0$, $\lambda < 0$ olduqda isə $\varphi = \pi$. Tərsinə,

$\cos \varphi = \pm 1$ olduqda x və y elementləri xətti asılı olar.

x və y elementlərinin skalyar hasili sıfıra bərabər , yəni

$$(x, y) = 0$$

olduqda, deyirlər ki, x və y **elementləri ortoqonal**dır və bunu $x \perp y$ şəklində yazırlar. Aydındır ki, x və y elementləri ortoqonal olduqda onların arasındakı bucaq 90° olar.

Məlumdur ki, x və y elementlərindən biri sıfır element olduqda da onların skalyar hasili həmişə sıfırdır, yəni sıfır element istənilən elementə ortoqonaldır. Lakin sıfır element verilmiş elementlə istənilən bucaq əmələ gətirə bilər.

Teorem. Evklid fəzasının ortoqonal olan ixtiyari x və y elementləri üçün

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (4)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı . $(x, y) = 0$ olduğundan normanın tərifinə görə:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + \\ &+ (y, y) = (x, x) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Bu teoremə **Pifaqor teoremi** deyilir. V_2 (və V_3) fəzasında bu teorem klassik Pifaqor teoremi ilə üst-üstə düşür.

(4) bərabərliyi cüt-cüt ortoqonal olan n sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementləri üçün də doğrudur:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

İndi n –ölçülü R Evklid fəzasında ortonormal bazis anlayışını müəyyən edək. R fəzasında hər hansı elementləri

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (5)$$

olsun. Əgər

$$\begin{aligned} (e_i, e_j) &= 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n), \\ (e_i, e_i) &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

şərtləri ödənilərsə, onda (5) elementləri çoxluğuna R fəzasında **ortonormal sistem** deyilir.

Ortonormal sistem təşkil edən (5) elementləri xətti asılı deyildir. Doğrudan da,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \theta \quad (6)$$

bərabərliyi ödənildikdə, onun hər iki tərəfini e_k elementinə skalyar olaraq vursaq:

$$\lambda_k(e_k, e_k) = 0, \quad \lambda_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Deməli, (6) münasibəti ancaq

$$\lambda_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

olduqda ödənilir, yəni (5) elementləri xətti asılı deyildir.

Məlumdur ki, n –ölçülü fəzanın n sayda xətti asılı olmayan elementlərinin hər bir nizamlı çoxluğu həmin fəzanın bazisini təşkil edir. Deməli, n –ölçülü Evklid fəzasının (5) ortonormal sistemi onun bazisidir. Belə bazisə **Evklid fəzasının ortonormal bazisi** və ya sadəcə olaraq **Evklid bazisi** deyilir.

Evklid fəzası elementlərinin ortonormal bazis üzrə ayrılışından istifadə edərək, elementlərin skalyar hasilini koordinatları ilə ifadə etmək olar. Doğrudan da,

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

və

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$$

olarsa, onda (f) bəndində göstərdiyimiz (1) və (2) bərabərliklərinə görə:

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \right) = \lambda_1 \mu_1 (e_1, e_1) + \\ + \lambda_2 \mu_2 (e_2, e_2) + \dots + \lambda_n \mu_n (e_n, e_n) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \mu_n$$

və ya

$$(x, y) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (7)$$

Tutaq ki, $x \in R$ elementi verilmişdir. Onda onu ortonormal bazis üzrə ayırmaq olar:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \quad (8)$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini e_k ($k = 1, 2, \dots, n$) elementinə skalyar olaraq vursaq:

$$(x, e_k) = \lambda_1 (e_1, e_k) + \lambda_2 (e_2, e_k) + \dots + \lambda_n (e_n, e_k)$$

və ya

$$(x, e_k) = \lambda_k.$$

Alınan qiymətləri (8) bərabərliyində yerinə yazsaq, x elementi üçün

$$x = (x, e_1) e_1 + (x, e_2) e_2 + \dots + (x, e_n) e_n \quad (9)$$

ayrılışını alırıq. (x, e_k) skalyar hasilinə x elementinin

e_k ($\|e_k\| = 1$) üzərində **proyeksiyası** deyilir. Bunu nəzərə alsaq (9) ayrılışına görə deyə bilərik ki, istənilən x elementinin ortonormal bazisə nəzərən koordinatları həmin elementin uyğun bazis elementləri üzərində proyeksiyalardır.

Belə bir sual qarşıya çıxır: hər bir Evklid fəzasında ortonormal bazis varmı?

Sonlu ölçülü hər bir Evklid fəzasında ortonormal bazis var.

Əgər $e_1', e_2', \dots, e_n'$ elementləri n – ölçülü Evklid fəzasının hər hansı bazisini təşkil edirsə, onda ortoqonallaşdırma prosesi vasitəsilə onlardan həmin fəzanın ortonormal bazisini almaq olar. Bu proses belədir: $e_1 = e_1'$ qəbul edirik və elə α ədədi tapırıq ki, $e_2 = e_2' + \alpha e_1$ elementi e_1 elementi ilə ortoqonal olsun:

$$(e_2, e_1) = (e_2' + \alpha e_1, e_1) = (e_2', e_1) + \alpha(e_1, e_1) = 0.$$

Buradan axtarılan ədəd tapılır:

$$\alpha = -\frac{(e_2', e_1)}{(e_1, e_1)} \quad ((e_1, e_1) \neq 0).$$

Tutaq ki, bir-birilə ortoqonal olan $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ elementləri tapılmamışdır. İndi elə $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ ədədləri tapaq ki,

$$e_k = e_k' + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1}$$

elementi $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ elementlərinin hər biri ilə ortoqonal olsun. Bunun üçün

$$(e_k, e_i) = (e_k', e_i) + \alpha_i(e_i, e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan:

$$\alpha_i = -\frac{(e_k', e_i)}{(e_i, e_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

Bu proses n sayda bir-birilə ortoqonal olan $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementləri alınana qədər davam etdirilir. Nəticədə, n -ölçülü fəzanın axtarılan ortonormal bazisi

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \quad f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \quad f_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}$$

şəklində tapılır.

j) Xətti normalaşmış fəzalar

Tutaq ki, xətti R fəzasının hər bir x elementinə həmin elementin norması adlanan və $\|x\|$ ilə işarə olunan müəyyən bir həqiqi ədəd qarşı qoyulur və bu zaman aşağıdakı şərtlər (aksiomlar) ödənilir:

1°. İstənilən $x \in R$ ($x \neq \theta$) üçün $\|x\| > 0$ və yalnız $x = \theta$ olduqda $\|x\| = 0$.

2°. İstənilən $x \in R$ və həqiqi λ ədədi üçün

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3°. İstənilən $x \in R$ və $y \in R$ üçün

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Onda R fəzasına **xətti normalaşmış fəza** deyilir.

(1) bərabərsizliyinə **üçbucaq bərabərsizliyi** və ya **Minkovski bərabərsizliyi** deyilir.

Misal 1. Xətti $C[a, b]$ fəzasında ixtiyari $x = x(t)$ ($a \leq t \leq b$) elementinin normasını

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

kimi təyin etsək, xətti normalaşmış fəza alırıq. Bu halda 1°-3° aksiomlarının ödənilməsi aşkardır.

İndi göstərək ki, hər bir Evklid fəzası xətti normalaşmış fəzadır:

Teorem. *Evklid fəzasının istənilən x elementinin normasını*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

kimi təyin etdikdə, xətti normalaşmış fəza olur.

İsbatı . 1° və 2° aksiomlarının ödənilməsi Evklid fəzasının 11° və 12° aksiomlarından və g) bəndində isbat etdiyimiz (2) bərabərliyindən aydındır.

3° aksiomunun ödənilməsi isə g) bəndində isbat edilmiş nəticədə (5 bərabərsizliyi) göstərilir.

Misal 2. E_n Evklid fəzasında $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementinin normasını

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

kimi təyin etsək, xətti normalaşmış fəza alırıq.

k) Afin fəzası

Afin fəzası anlayışını izah etmək üçün V_3 xətti vektorial fəzası ilə afin koordinat sistemi daxil edərək öyrəndiyimiz adi üçölçülü fəzanı müqayisə edək. V_3 fəzası ancaq adi üçölçülü fəzada yerləşən vektorlardan ibarətdir. Bu fəzada nöqtələr yoxdur. Adi üçölçülü fəza isə nöqtələr və vektorlar çoxluğundan ibarətdir. Burada hər nizamlı iki nöqtə bir vektor təyin edir, başlanğıcı O nöqtəsində olan hər bir OM vektoruna isə bir M nöqtəsi uyğundur. Fəzada hər bir M nöqtəsinin vəziyyəti $\overrightarrow{r_m} = OM$ radius-vektorunun koordinatları ilə təyin olunur.

Əgər V_3 vektorial fəzasına, onu təşkil edən vektorlardan başqa aşağıdakı tələbləri ödəyən bütün $M, N, \dots$ nöqtələrini də əlavə etsək, onda üç ölçülü afin fəzası alırıq: 1) hər bir nizamlı iki M, N nöqtəsinə ancaq bir a vektoru uyğun qoyulur: $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$; 2) verilmiş hər bir M nöqtəsi və $\vec{a}$ vektoru üçün yalnız bir N nöqtəsi var ki, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ olur; 3) ixtiyari M, N və Q nöqtələri üçün

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}$$

münasibəti ödənilir.

V_2 vektorial fəzasına müstəvi üzərindəki bütün nöqtələri əlavə etməklə ikiölçülü afin fəzası alırıq. Vektorlar cəbri fəslində göstərdiyimiz kimi təyin olunur.

Üçölçülü ümumi afin fəzası da üçölçülü xətti fəzadan eyni qayda ilə alınır. Bu halda xətti fəzanın elementləri

çoxluğuna göstərilən 1), 2) və 3) şərtlərini ödəyən nöqtələr çoxluğunu əlavə etmək lazımdır.

n -ölçülü afin fəzası da həmin qayda ilə təyin olunur. n –ölçülü xətti R fəzasının elementləri çoxluğuna 1) -3) şərtlərini ödəyən bütün $M, N, \dots$ nöqtələri çoxluğunu əlavə etməklə alınan fəzaya **n –ölçülü afin fəzası** deyilir. n –ölçülü afin fəzasında nöqtənin koordinatları belə təyin olunur. Hər hansı O nöqtəsini koordinat başlanğıcı olaraq götürürlər və R fəzasının ixtiyari x elementi üçün

2) şərtinə görə elə bir M nöqtəsi tapırlar ki, $\overline{OM}=x$ olsun. x elementinin n – ölçülü xətti R fəzasının $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisinə nəzərən $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatları həmin M nöqtəsinin koordinatları hesab olunur.

33.1.1. Xətti operatorun tərifı

Tutaq ki, R . və Q sonlu ölçülü xətti fəzalardır və R fəzasının Q fəzasına $F: R \rightarrow Q$ inikası verilmişdir. Bu o deməkdir ki, F inikası vasitəsilə R fəzasının hər bir x elementinə Q fəzasının müəyyən bir y elementi uyğun qoyulur. R fəzasının Q fəzasına $F: R \rightarrow Q$ inikasına R fəzasından Q fəzasına təsir edən və ya R fəzasını Q fəzasına çevirən **operator** da deyilir və

$$y=F(x) \text{ və ya } y=Fx$$

ilə işarə olunur. R -dən Q = y ə təsir edən bütün operatorlar çoxluğunu $E(R, Q)$ ilə işarə edək.

Tərif. $F \in E(R, Q)$ operatoru istənilən

$x_1 \in R, x_2 \in R$ elementləri və λ ədədi üçün:

1. $F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2)$ (additivlik xassəsi)
2. $F(\lambda x_1)=\lambda F(x_1)$

xassələrini ödədikdə, ona **xətti operator** deyilir.

Q fəzası həqiqi və ya kompleks ədədlər çoxluğu olduqda $F \in E(R, Q)$ xətti operatoruna **xətti forma** və ya **xətti funksional** deyilir.

Q fəzası R fəzası ilə üst-üstə düşdükdə $F \in E(R, R)$ xətti operatoruna R fəzasının **xətti çevirməsi** deyilir.

Ayındır ki, bu halda R fəzasının θ sıfır elementini xətti $F \in E(R, R)$ operatoru öz-özünə çevirir:

$$F(\theta) = \theta \quad (1)$$

Doğrudan da, tərifin 2-ci şərtində $\lambda = 0$ götürsək və $0 \cdot x = \theta$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$F(0 \cdot x) = 0 \cdot F(x), \quad F(\theta) = \theta$$

33.1.2.Xətti operatorların növləri

I. **Sıfır operator.** R fəzasının istənilən x elementini sıfır elementə çevirən (inikas etdirən), yəni istənilən $x \in R$ üçün

$$0(x) = \theta \quad (2)$$

münasibətini ödəyən 0 operatoruna deyilir.

II. **Vahid və ya eynilik operator,** R fəzasının istənilən x elementini öz-özünə çevirən, yəni istənilən $x \in R$ üçün

$$I(x) = x \quad (3)$$

münasibətini ödəyən I operatoruna deyilir.

III. Oxsarlıq operatoru, istənilən $x \in R$ üçün

$$\Pi(x) = \mu x \quad (4)$$

münasibətini (burada μ qeyd olunmuş hər hansı ədəddir) ödəyən, Π operatoruna deyilir.

Bu operatorun xətti olması

$$\Pi(x_1 + x_2) = \mu(x_1 + x_2) = \mu x_1 + \mu x_2 = \Pi(x_1) + \Pi(x_2)$$

və

$$\Pi(\lambda x) = \mu(\lambda x) = \lambda(\mu x) = \lambda \Pi(x).$$

Münasibətlərinin ödənilməsindən aydındır.

Oxsarlıq operatorundan, $\mu = 0$ olduqda sıfır operator, $\mu = 1$ olduqda isə vahid operator alınır.

33.1.3. Xətti çevirmənin matris vasitəsilə verilməsi

Tutaq ki, R , n -ölçülü xətti fəzadır və $F \in E(R, R)$.
Bu fəzanın bazisi

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (1)$$

olsun. Onda istənilən $x \in R$ üçün

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

ayrılığı vardır. Bu halda, F çevirməsinin xətti olmasına əsasən

$$F(x) = x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2) + \dots + x_n F(e_n) \quad (2)$$

bərabərliyi alınar. Sağ tərəfdəki $F(e_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) elementləri R fəzasının özünə daxil olduğundan onları da (1) bazisi üzrə ayırmaq olar:

$$F(e_k) = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \dots + a_{nk}e_n \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Bu qiymətləri (2) bərabərliyinin sağ tərəfində yerinə yazsaq:

$$\begin{aligned} F(x) = & x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + x_2(a_{12}e_1 + \\ & + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots + x_n(a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \\ & + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e_2 + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + \\ & + a_{nn}x_n)e_n \quad (4) \end{aligned}$$

Şərtə görə $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ olduqda $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. Buna görə də $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ elementinin (1) bazisi üzrə ayrılışı vardır:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \dots + y_n \mathbf{e}_n. \quad (5)$$

Məlumdur ki, fəzanın hər bir elementinin bazis üzrə ayrılışı yeganədir. Deməli, (4) və (5) ayrılışlarının sağ tərəfləri eyni olmalıdır:

[illegible]

Bu sistemin matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ilə işarə etsək və

$$x(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X,$$

$$y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Y$$

olduğunu qəbul etsək, onda (6) sistemini

$$Y = AX \quad (8)$$

matris şəklində yazmaq olar.

Beləliklə, n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş hər bir $F \in E(R, R)$ xətti çevirməsinə həmin fəzanın verilmiş $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində bir n -tərtibli kvadrat A matrisi uyğundur. Verilmiş $x \in R$ elementinə xətti F çevirməsinin uyğun olduğu $y=F(x)$ elementini (yəni, onun $y_1, y_2, \dots, y_n$ koordinatlarını) həmin matris vasitəsilə (6) və ya (8) münasibətindən təyin etmək olar.

A matrisinə $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində xətti F çevirməsinin matrisi deyilir. Bu matrisin birinci sütun elementləri birinci e_1 bazis elementi obrazının (yəni $F(e_1)$ -in) həmin bazisə nəzərən koordinatları, ikinci sütun elementləri isə $F(e_2)$ elementinin həmin bazisə nəzərən koordinatları və s. axırncı sütun elementləri isə $F(e_n)$ obrazının həmin bazisə nəzərən koordinatlarıdır.

33.2.1. Qeyri məxsusi çevirmə

Apardığımız mühakimədən aydın olur ki, n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş hər bir $F \in E(R, R)$ xətti çevirməsinə həmin operatorun matrisi adlanan bir n -tərtibli kvadrat A matrisi uyğundur. Tərsinə, verilmiş n -tərtibli hər bir kvadrat A matrisi n -ölçülü fəzada bir $F \in E(R, R)$ xətti çevirməsini təyin edir. Bu xətti çevirmə (6) və ya (8) münaibəti ilə təyin olunur və onun verilmiş bazisdə matrisi elə həmin A matrisidir. Bu halda, bəzən deyirlər ki, $y_1, y_2, \dots, y_n$ ədədləri (6) düsturları ilə $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərindən, A matrisi ilə təyin olunmuş xətti çevirmə və istətilə alınmışdır.

Beləliklə, isbat etmiş olduq ki, n -ölçülü xətti fəzada təyin olunmuş hər bir xətti $F \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ çevirməsi (8) şəklində yazıla bilər

Biz yuxarıda gördük ki, hər bir xətti çevirmə fəzanın sıfır elementinin öz-özünə çevirir:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} \quad (1)$$

Əgər $F(x) = \theta$ münasibəti ancaq $x = \theta$ olduqda ödənilirsə, onda xətti F çevirməsinə cırlaşmayan və ya **qeyri-məxsusi çevirmə** deyilir. Əks halda xətti **çevirməyə cırlaşan** və ya **məxsusi çevirmə** deyilir.

Çevirmənin cırlaşan olması $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \theta$ və ya

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = 0, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = 0, \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

bircinsli xətti tənliklər sisteminin **sıfır olmayan** həllinin olması deməkdir. Bu isə o zaman ola bilər ki, siste-

min **determinantı sıfıra bərabər** olsun. Deməli, n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş $F \in E(R, R)$ xətti çevirməsinin cırlaşmayan olması üçün onun (7) matrisinin $\Delta(A)$ determinantının **sıfırdan fərqli olması**, yəni A matrisinin **cırlaşmayan olması** zəruri və kafi şərtidir.

Misal 1. n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş O sıfır operatorunun (çevirməsinin) matrisi n -tərtibli kvadrat

$$O_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

sıfır matrisidir.

Misal 2. n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş I vahid çevirməsinin (operatorun) matrisi n -tərtibli kvadrat

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

vahid matrisdir.

Misal 3. n -ölçülü xətti R fəzasında təyin olunmuş Π oxşarlıq operatorunun matrisi n -tərtibli kvadrat

$$\Pi_n = \begin{vmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

matrisidir. Bu halda (6) sistemi

şəklində yazılar. Hər bir $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementinə uyğun olan $y = \Pi(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementi (3) sisteminə tapılır.

xətti çevirmə, həmin matrisin determinantı sıfırdan fərqli, yəni

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

olduqda afin çevirmədir. (3) şərtindən alınır ki, (2) xətti çevirməsi qarşılıqlı birqiymətli **çevirmədir və onun tərsi olan.**

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} y_1 - \frac{a_{12}}{\Delta} y_2, \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta} y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} y_2 \end{cases} \quad (4)$$

xətti çevirməsi yenə də afin çevirmədir. Bunun doğruluğuna inanmaq üçün (4) sistemi determinantının sıfırdan fərqli olduğunu göstərmək kifayətdir:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \neq 0. \end{aligned}$$

Misal 1. İkiölçülü afin fəzasının və ya müstəvinin

$$\Pi_2 = \left\| \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix} \right\| \quad (\mu \neq 0)$$

matrisi ilə təyin olunan oxşarlıq çevirməsi (və yaxud müstəvinin bütün istiqamətlərdə μ dəfə dartılması) afin çevirməsidir. Bu çevirmə

$$y_1 = \mu x_1,$$

$$y_2 = \mu x_2$$

şəklindədir və onun matrisinin determinantı sıfırdan fərqlidir:

$$\Delta(\Pi_2) = \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 \neq 0.$$

Misal 2. Müstəvinin

$$\Pi_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

matrisi ilə təyin olunan xətti çevirməsi və ya müstəvinin koordinat başlanğıcı ətrafında α bucağı qədər fırlanması afin çevirmədir. Doğrudan da, bu çevirmə

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\ y_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{cases}$$

şəklindədir və onun matrisinin determinantı sıfırdan fərqlidir:

$$\Delta(\Pi_2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0.$$

Afin çevirməsi zamanı düz xətt düz xəttə keçdiyindən, həmin çevirmədə iki kəsişən düz xətt yenə də kəsişən iki düz xəttə, paralel iki düz xətt isə yenə də paralel iki düz xəttə keçir.

33.3.1. Xətti çevirmələr üzərində əməllər

Sonlu ölçülü xətti R fəzasını öz-özünə inikas etdirən bütün xətti çevirmələr çoxluğunda, yəni $E(R, R)$ çoxluğunda çevirmələrin cəmindən, çevirmənin ədədə hasilindən, çevirmələrin hasilindən və s. danışmaq olar.

Tərif. $F_1 \in E(R, R)$ və $F_2 \in E(R, R)$ xətti çevirmələrinin cəmi elə xətti $F = F_1 + F_2$ çevirməsinə deyilir ki, istənilən $x \in R$ üçün

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) \quad (1)$$

münasibətini ödəsin.

Xətti $F \in E(R, R)$ çevirməsinin λ skalyar ədədinə hasili

$$(\lambda F)(x) = \lambda F(x) \quad (2)$$

münasibəti ilə təyin olunan λF xətti çevirməsinə deyilir.

İstənilən xətti F çevirməsinin “-F” çevirməsinin

$$-F = (-1) \cdot F$$

şəklində təyin etmək olar. $E(R, R)$ çoxluğunun o sıfır çevirməsini isə əvvəlki paragrafda təyin etmişik.

Yoxlamaq olar ki, xətti çevirmələr üçün təyin etdiyimiz cəm və ədədə vurma əməlləri xətti fəzanın 1° - 8° aksiomlarını ödəyir. Deməli, sonluölçülü R fəzasını öz-özünə inikas etdirən bütün xətti F çevirmələri çoxluğu, yəni $E(R, R)$ çoxluğu, təyin etdiyimiz cəm və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəzadır.

İndi xətti çevirmələrin hasilini və tərsini müəyyən edək.

Xətti $F \in E(R, R)$ və $\Phi \in E(R, R)$ çevirmələrinin hasilini elə $\Psi = F\Phi$ çevirməsinə deyilir ki, istənilən $x \in R$ üçün

$$(F\Phi)(x) = F[\Phi(x)] \quad (3)$$

münasibəti ödənilsin. Xətti çevirmələrin hasilini, ümumiyyətlə, yerdəyişmə xassəsinə malik deyildir:

$$F\Phi \neq \Phi F.$$

I vahid çevirmə olmaqla

$$F\Phi = \Phi F = I \quad (4)$$

münasibəti ödənilərsə Φ çevirməsinə F çevirməsinin tərsi deyilir və $\Phi = F^{-1}$ ilə işarə olunur. Deməli,

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I. \quad (5)$$

(8) sisteminin matrisi (6) sisteminin A matrisinin tərsidir, yəni

Bu nəticə, (7) bərabərliyinin hər iki tərəfini A^{-1} matrisinə vurmaqla da alınır:

Dediklərimizdən aydındır ki, n -ölçülü R fəzasında verilmiş xətti F çevirməsinin A matrisi cırlaşmayan olduqda, həmin F çevirməsinin xətti tərs çevirməsi var və bu tərs çevirmənin matrisi A^{-1} -dir. Bunun tərsi də doğrudur. Deməli, F xətti çevirməsinin cırlaşmayan olması onun tərs çevirməsinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtidir.

XXXIV FƏSİL. XƏTTİ ÇEVİRMƏNİN MATRİS ŞƏKLİ. ORTOQONAL MATRİSLƏR

34.1. Xətti çevirmənin matris şəkli. Bazis dəyişdikdə xətti çevirmə matrisinin dəyişməsi.

n – ölçülü R fəzasını öz – özünə inikas etdirən xətti F çevirməsinin həmin fəzanın $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində matrisi $A = \|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) olsun. Bu halda ixtiyari $x \in R$ elementinin həmin bazisə nəzərən $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatları ilə ona uyğun olan $y = F(x) \in R$ elementinin $y_1, y_2, \dots, y_n$ koordinatları arasında

$$Y = AX \quad (1)$$

münasibət var. (1) bərabərliyinə verilmiş xətti çevirmənin matris şəkli deyilir. Burada:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

İndi həmin R fəzasında başqa $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ bazisi götürək. Verilmiş xətti F çevirməsinin bu bazisə nəzərən matrisi $B = \|b_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) olarsa, onda $x \in R$ elementinin bu bazisə nəzərən $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ koordinatları ilə ona uyğun olan $y \in R$ elementinin $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ koordinatları arasında yenə də (1) kimi münasibət olar:

$$Y' = BX', \quad (2)$$

burada

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Fəzanın $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisini köhnə, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ bazisini isə yeni bazis adlandıraraq. Əgər yeni bazisi təşkil edən β_k ($k = 1, 2, \dots, n$) elementlərinin köhnə bazis üzrə ayrılışları aşağıdakı kimi olarsa

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n, \\ \beta_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \beta_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

onda $C = \| c_{ij} \|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) matrisi köhnə bazisdən yeni bazisə keçid matrisi olar. Bu halda, x və y elementlərinin yeni və köhnə bazislərə nəzərən koordinatları arasında

$$X = CX' \quad (4)$$

və

$$Y = CY' \quad (5)$$

kimi matris münasibətlərini yazmaq olar.

Cırlaşmayan C matrisinin C^{-1} tərs matrisi var. İndi (4) və (5) qiymətlərini (1) – də yerinə yasaq

$$CY' = ACX'$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini soldan C^{-1} matrisinə vuraq:

$$Y' = C^{-1} ACX' \quad (6)$$

(6) bərabərliyini (2) ilə müqayisə etsək

$$B = C^{-1} AC. \quad (7)$$

münasibətini alırıq. Bu düstur, müxtəlif bazislərdə və-

rilmiş xətti çevirməyə uyğun olan matrislər arasındakı asılılığı ifadə edir.

(7) düsturundan, aşağıdakı münasibətini alırıq:

$$\Delta(B) = \Delta(C^{-1}AC) = \Delta(C^{-1}) \cdot \Delta(A) \cdot \Delta(C) = \Delta(C^{-1}C) \cdot \Delta(A) = \Delta(I) \cdot \Delta(A) = \Delta(A)$$

Deməli, xətti çevirmə matrisinin determinatı bazisdən asılı deyil.

34.2. Xətti çevirmənin məxsusi qiyməti və məxsusi vektoru

Tərif. Sıfır elementdən fərqli və

$$F(x) = \lambda x \quad (1)$$

bərabərliyini ödəyən hər bir $x \in R$ elementinə F çevirməsinin məxsusi vektoru, λ ədədinə isə onun məxsusi qiyməti deyilir.

Xətti $F \in E(R, R)$ çevirməsinin matrisi

$$A = \|a_{ij}\| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

olarsa, onda verilmiş bazisdə $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementi ilə ona uyğun olan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementinin ($y = F(x)$) koordinatları arasında

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

münasibəti doğrudur. Bu halda, x elementi (1) münasibətini də ödəyərsə, onda,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

və yaxud

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

bərabərlikləri ödənilir.

Məlumdur ki, xətti bircinsli tənliklərin (3) sisteminin sıfırdan fərqli $x_1, x_2, \dots, x_n$ həllinin varlığı üçün həmin sistemin determinantının sıfıra bərabər olması zəruri və kafi şərtidir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(4) bərabərliyinin sol tərəfi $A - \lambda I$ matrisinin determinantıdır. Buna görə də (4) bərabərliyini

$$\Delta(A - \lambda I) = 0 \quad (5)$$

şəklində yazmaq olar. (4) (və ya (5)) bərabərliyi λ -ya nəzərən n -dərəcəli cəbri tənlikdir. A matrisi üçün xarakteristik tənlik olan **(4) tənliyi F xətti çevirməsinin xarakteristik tənliyi adlanır.** (4) xarakteristik tənliyinin cəbrin əsas teoreminə görə heç olmazsa bir həqiqi və ya kompleks λ_0 kökü var : $\Delta(A - \lambda_0 I) = 0$. Bu λ_0 ədədini (3) sistemində λ əvəzinə yazsaq, həmin sistemin sıfırdan fərqli $x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n$ həllini tapırıq. Tapdığımız x_0 ($x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n$) elementi F xətti çevirməsinin **λ məxsusi ədədinə** uyğun məxsusi vektorudur. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etdik:

Teorem. Hər bir xətti çevirmənin məxsusi ədədi və məxsusi vektoru var.

34.3.Ortonormal bazisin əvəz edilməsi və ortoqonal matrislər

Sadəlik üçün iki ölçülü R Evklid fəzasına baxaq və fərz edək ki, e_1, e_2 həmin fəzanın ortonormal bazisidir.

Tutaq ki, bu bazis yeni ortonormal β_1, β_2 bazisi ilə əvəz edilmişdir. Bu halda, keçid matrisi

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 \\ \beta_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases} \quad (1)$$

ayrılışlarının əmsalları ilə təyin olunan

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bazislər ortonormal olduğundan

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$$

və

$$\beta_1^2 = \beta_2^2 = 1, \quad \beta_1 \cdot \beta_2 = 0$$

olmalıdır. Bu şərtlərə əsasən (1) sisteminin tənliklərindən

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1, \quad \beta_2^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} &= 0 \end{aligned}$$

münasibətini almaq olar. Bunlara əsasən C matrisi ilə onun transponirə edilməsindən alınan

$$C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

matrisinin hasilini tapaq:

$$C^*C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}^2 + c_{21}^2 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} & c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$C^*C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I \Rightarrow C^*C = I$$

Buradan

$$C^* = C^{-1}. \quad (3)$$

(3) bərabərliyini ödəyən C matrisinə ortoqonal matris deyilir. Deməli, bir ortonormal bazisindən başqa ortonormal bazisə keçid matrisi həmişə ortoqonal matrisdir. Bunun tərsi də doğrudur.

Ortoqonal matrislər Evklid fəzalarının ortoqonal çevirmələri ilə də sıx əlaqədardır.

Əgər R Evklid fəzasının bütün x və y elementləri üçün

$$(F_x, F_y) = (x, y) \quad (4)$$

bərabərliyi ödənilirsə, onda R fəzasının xətti F çevirməsinə ortoqonal çevirmə deyilir. Ortoqonal çevirmə zamanı skalyar hasil dəyişmir, buna görə də elementlərin norması (uzunluğu) və elementlər arasındakı bucaq sabit qalır. Ortoqonal çevirmə zamanı $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)$ bazisinə keçir:

$$(Fe_k, Fe_j) = (e_k, e_j) = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

Bunun tərsi də doğrudur: heç olmasa bir ortonormal bazisi ortonormal bazisə çevirən xətti F çevirməsi ortoqonal çevirmədir.

Doğrudan da, tutaq ki, xətti F çevirməsi ortonormal e_k ($k = 1, 2, \dots, n$) bazisini ortonormal $\beta_k = F(e_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) bazisinə çevirmişdir.

Onda ixtiyari

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

və

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

elementləri üçün:

$$F x = F(x) = x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2) + \dots + x_n F(e_n)$$

və

$$F y = F(y) = y_1 F(e_1) + y_2 F(e_2) + \dots + y_n F(e_n).$$

Buradan

$$(F(x), F(y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (x, y)$$

alınır ki, bu da F çevirməsinin ortoqonal olduğunu göstərir.

R Evklid fəzasının ortoqonal çevirməsinin istənilən ortonormal bazisdə matrisi ortoqonaldır və tərisnə, F çevirməsinin hər hansı ortonormal bazisdə matrisi ortoqonaldırsa, onda o ortoqonal çevirmədir. Ortoqonal F çevirməsinin matrisini A ilə işarə etsək, onda :

$$A \cdot A = I$$

və məlum teoremə görə

$$\Delta(A^*) \Delta(A) = \Delta(I) = 1.$$

Buradan, $\Delta(A) = \Delta(A^*)$ olduğundan $[\Delta(A)]^2 = 1$ və ya $\Delta(A) = \pm 1$.

Deməli, ortoqonal matrisin determinantı (± 1) ə bərabərdir. Ortoqonal çevirmənin də məxsusi qiymətinin (± 1) - ə bərabər olduğunu göstərmək üçün ortoqonal F çevirməsinin məxsusi vektorunu x və ona uyğun məxsusi qiyməti λ ilə işarə edək. Onda

$$(x, x) = (F(x), F(x)) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x)$$

və buradan $(x, x) \neq 0$ olduğundan $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$.

XXXV FƏSİL.QABARIQ ÇOXBUCAQLAR VƏ XƏTTİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR SİSTEMİ

35.1. Qabarıq çoxluqlar və xətti bərabərsizliklər sistemi

n -ölçülü A_n afin fəzasında O nöqtəsi və $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisi (uyğun n -ölçülü xətti R fəzasının bazisi) birlikdə **koordinat sistemi** adlanır. Hər bir $M \in A_n$ nöqtəsinin bu koordinat sisteminə görə koordinatları n sayda ədəddən ibarətdir, yəni n sayda ədəddən təşkil olunmuş bir sətirdir: $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Bu halda, koordinat başlanğıcı olan O nöqtəsinin bütün koordinatları sıfıra bərabər olar. İndi koordinat sistemi daxil edilmiş n -ölçülü A_n afin fəzasında

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (1)$$

xətti tənliklər sisteminə baxaq. Bu sistemin əmsallarından düzəlmiş matrisin rəngi r olsun.

Tərif. A_n fəzasının koordinatları (1) sistemini ödəyən bütün nöqtələri çoxluğuna **($k=n-r$)-ölçülü müstəvi** deyilir. Birölçülü müstəvilərə **düz xətlər**, $(n-1)$ -ölçülü müstəvilərə isə **hipermüstəvilər** deyilir.

Sistemin əmsallarından düzəlmiş matrisin rənkının $r=1$ olması o deməkdir ki, həmin sistemin bir xətti asılı olmayan tənliyi vardır. Buna görə də hər bir hiper-müstəvini bir xətti tənliklə təyin etmək olar:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{b} \quad (2)$$

Buradan aydındır ki, üçölçülü afın fəzasında hiper-

müstəvilər adi müstəvilər, ikiölçülü fəzadə isə hipermüstəvilər düz xətlərdir.

A_n afin fəzası (2) hipermüstəvisi vasitəsilə iki yarım fəzaya ayrılır: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna və $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna. Bu yarım fəzaların birincisini $A_n^{(1)}$ ilə, ikincisini isə $A_n^{(2)}$ ilə işarə etmək. $A_n^{(1)}$ və $A_n^{(2)}$ yarım fəzaları (2) hipermüstəvisi üzrə kəşisir.

Xüsusi halda $n=2$ olarsa, onda ikiölçülü fəzanı (müstəvini)

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (3)$$

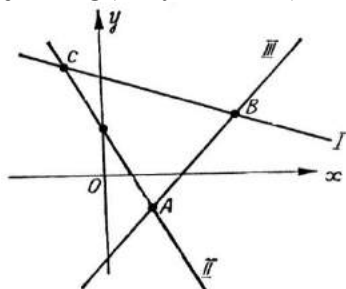
hipermüstəvisi, yəni (3) düz xətti, iki yarım fəzaya (yarım müstəviyə) ayırır. Bu yarım fəzalardan biri düz xətin bir tərəfində yerləşən bütün nöqtələr çoxluğu, o biri isə düz xətin o biri tərəfində yerləşən bütün nöqtələr çoxluğu olacaqdır (şəkil 1).

Bu yarım fəzalardan hər birinin belə bir xassəsi vardır: iki ixityari A və B nöqtəsi yarım fəzaya daxildirsə, onda həmin nöqtələri birləşdirən AB düz xətt parçasının bütün nöqtələri də ona daxildir. Çoxluğun belə xassəsi olduqda, yəni iki ixityari A və B nöqtəsi çoxluğa daxil olduqda, bu nöqtələri birləşdirən AB düz xətt parçasının bütün nöqtələri də həmin çoxluğa daxildirsə, ona **qabarıq çoxluq** deyilir. Deməli, yarım fəzalar qabarıq çoxluqlardır (1-ci şəkil).

rıq çoxüzlü deyilir. Məsələn,

$$\begin{cases} x + y \leq 9, \\ 5x + y \geq 5, \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi müstəvi üzərində ABC qabarıq çoxüzlüsünü (üçbucağı) təyin edir (şəkil 2).

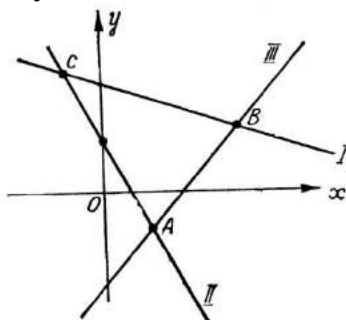


Şəkil 2.

Lakin

$$\begin{cases} x + y \leq 9, \\ 5x + y \geq 5, \\ 2x - y \geq 6 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi müstəvi üzərində qeyri-məhdud qabarıq oblastı təyin edir.



Şəkil 3.

35.2. İki dəyişənli xətti bərabərsizliklər sisteminin qrafik üsulla həlli

Qrafik üsulla bərabərsizliklərin həlli dəyişənlərin sayı $n=2$ olduqda əlverişlidir.

$n=3$ olduqda məsələni qrafik üsulla həll etmək nəzəri cəhətdən mümkün olsa da praktiki cəhətdən sərfəli deyil.

Çünki üçölçülü fəzada məsələlərin həllər oblastının qurulması kifayət qədər çətin prosesdir.

Fərz edək ki, aşağıdakı ikidəyişənli xətti bərabərsizliklər sistemi verilmişdir:

[illegible]

Məlum olduğu kimi (1) sisteminin hər bir xətti bərabərsizliyi müstəvi üzərində bir yarımüstəvi verir və bu yarımüstəvilər müstəvidən aşağıdakı sərhəd düz xətləri ilə ayrılır:

$$\mathbf{a}_{i1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{i2}\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_i \quad (\mathbf{i} = 1, \mathbf{m})$$

Əgər (1) sistemi ziddiyyətli deyilsə, onda bu yarım-müstəvilər müstəvi üzərində kəsişərək məsələnin həllər oblastını əmələ gətirirlər.

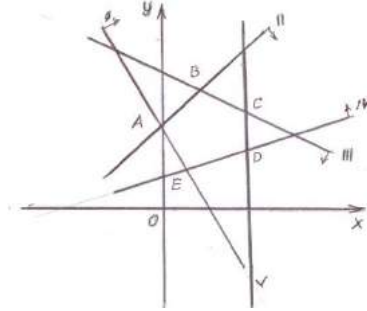
Qeyd edək ki, elə proseslərə rast gəlinir ki, həllər oblastı qapalı yox, açıq oblast olur.

Aşağıdakı kimi ikidəyişənli bərabərsizliklər sistemində həllər oblastını quraq. Bunun üçün sistemə daxil olan müstəvi oblastların hər birini eyni bir koordinat sistemində qurub həllər oblastını almaq lazımdır.

Misal 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

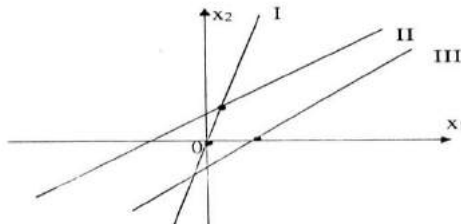
Sistemə daxil olan bərabərsizliklərin ifadə etdiyi oblastları eyni koordinat sistemində quraq.

**Şəkil 4.**

Həllər oblastı ABCDE çoxbucaqlıdır.

Misal 2.

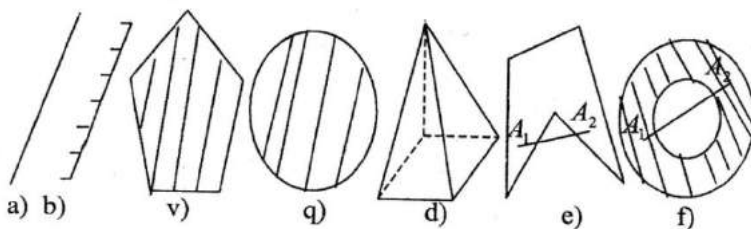
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

**Şəkil 5.**

Həllər oblastı şəkil 5-dakı kimi açıq oblast olacaq.

35.3.Qabarıq çoxluq.Təpə nöqtəsi,daxili nöqtə və kənar nöqtə

Qabarıq çoxluqların nöqtələri içərisində daxili, sərhəd və kənar (yaxud təpə) nöqtələri fərqləndirmək lazımdır.



Şəkil 6.

Əgər çoxluğun nöqtəsinin istənilən ətrafına yalnız həmin çoxluğun nöqtələri daxil olarsa, ona **daxili nöqtə** deyilir.

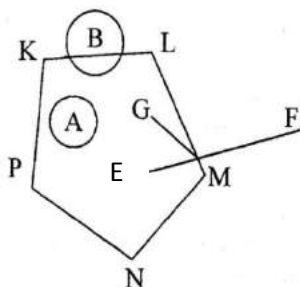
Əgər çoxluğun nöqtəsinin istənilən ətrafında həm bu çoxluğa daxil olan, həm də daxil olmayan nöqtələr varsa, ona **sərhəd nöqtəsi** deyilir. Qeyd edək ki, çoxluğun sərhəd nöqtələri onun sərhədini təşkil edir.

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsində, xüsusilə də XP məsələsinin həlli zamanı kənar nöqtələr mühüm əhəmiyyət kəsb edirlər.

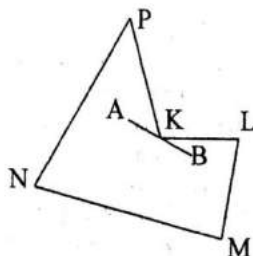
Əgər çoxluğun nöqtəsi bütövlüklə bu çoxluğa daxil olan heç bir parçanın daxili nöqtəsi olmazsa, ona kənar (təpə) nöqtə deyilir. Başqa sözlə desək, qabarıq çoxluğun kənar nöqtəsi onun ixtiyari iki nöqtəsinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməz.

Şəkil 7 – də qabarıq çoxluğun müxtəlif növ nöqtələrinə aid misallar göstərilmişdir.

Burada A-daxili nöqtə; B - sərhəd nöqtəsi, K,L,M,N,P – kənar nöqtələrdir. Məsələn, M- kənar nöqtədir, belə ki, bütövlüklə çoxbucaqlıya daxil olan istənilən parça (GM) üçün o daxili nöqtə deyildir.



Şəkil 7.



Şəkil 8.

Bununla bərabər M- nöqtəsi EF parçası üçün daxili nöqtə olsa da, bu parça verilmiş çoxbucaqlıya bütövlüklə daxil deyildir.

Qabarıq çoxbucaqlı sonlu və sonsuz sayda kənar nöqtələrə malik ola bilər. Əgər çoxluq yalnız düz xəttlər yaxud parçalarla məhdud olarsa, onun kənar nöqtələrinin sayı sonludur, çoxluğun sərhədi əyirxətli olan halda isə o sonsuz sayda kənar nöqtələrə malikdir. Məsələn, dairənin kənar nöqtələri onun çevrəsinin nöqtələrindən ibarətdir və aydındır ki, onların sayı sonsuzdur. Bununla bərabər düz xətt, müstəvi, yarımmüstəvi, fəza, yarımfəzanın kənar nöqtələri yoxdur.

Qeyd edək ki, qabarıq çoxluqlarda kənar nöqtələr həmişə onların təpə nöqtələri ilə üst-üstə düşürlər, qabarıq olmayan çoxluqlarda isə bu belə olmaya da bilər.

Məsələn, şəkil 8-də K nöqtəsi qabarıq olmayan çoxbucaqlının təpə nöqtəsi olsa da, o kənar nöqtə deyildir. Belə ki, bu nöqtə bütövlüklə çoxbucaqlıya daxil olan AB parçasının daxili nöqtəsidir.

Əgər çoxluq bütün kənar nöqtələrini özündə saxlayarsa, ona **qapalı çoxluq** deyilir. Qapalı çoxluq məhdud və qeyri-məhdud ola bilər.

Əgər çoxluğun istənilən nöqtəsində mərkəzi olmaqla sonlu radiusa malik elə kürə qurmaq mümkündürsə ki, verilmiş çoxluq tamamilə buraya daxil olsun, ona **məhdud çoxluq** deyilir. Əks halda isə verilmiş çoxluğa **qeyri-məhdud çoxluq** deyilir.

Qabarıq çoxluqların mühüm xassəsi onların kəsişməsi ilə əlaqədardır.

İki (yaxud bi neçə) çoxluğun ümumi hissəsinə həmin **çoxluqların kəsişməsi** deyilir.

Qabarıq çoxluqların aşağıdakı teoremlərlə müəyyən edilən xassələri vardır:

Teorem 1. İstənilən sayda qabarıq çoxluqların kəsişməsi də qabarıq çoxluqdur.

Teorem 2. Qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) öz kənar (təpə) nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyasından ibarətdir.

XXXVI FƏSİL. TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR VƏ SINAQLAR. HADİSƏNİN NƏTİCƏSİ. HADİSƏLƏR CƏBRİ

36.1.1.Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri: Təsadüfi hadisələr, sınaqlar və onların təsnifatı.

Təbiətdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr və ölçmə işləri aparırlar. Məsələn, hər hansı fiziki hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq təcrübələr aparılır və onların nəticəsi qeyd olunur. Mümkün qədər çox aparılan bu təcrübələrin nəticəsinə əsasən həmin hadisənin gedişi haqqında müəyyən qanunauyğunluq təyin edilir.

Lakin eyni şəraitdə eyni bir hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşahidə və təcrübələrin nəticəsi çox zaman eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə, müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və ya müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək çox zaman mümkün olmur. Məsələn, metal pulu döşəmə üzərinə atdıqda onun gerb üzünün yuxarı düşüb-düşməməsini əvvəlcədən təyin etmək mümkün deyildir. Pulun gerb üzünü yuxarıya düşsə də bilər, düşməyə də bilər.

Deməli, pulun xəritə üzünün yuxarıya düşməsinə bir hadisə kimi baxdıqda, aparılan təcrübə zamanı bu hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər (hadisənin baş verməsi təsadüfi xarakter daşıyır). Belə hadisənin bir konkret təcrübə zamanı baş verməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün olmasa da, çox sayda ardıcıl aparılan təcrübələr nəticəsində onun baş verib-verməməsi haqqında bə-

zən müəyyən qanunauyğunluq almaq olar. Belə qanuna uyğunluqlar ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilir.

Buradan aydındır ki, hər hansı bir hadisənin qanuna uyğunluğunu təcrübi olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni şəraitdə təkrarən çox sayda müşahidə etmək lazımdır. Belə təkrarən çox sayda müşahidə oluna bilməyən hadisələrin qanunauyğunluğunu müəyyən etmək çətindir. Buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsində, əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir.

Hər bir riyazi nəzəriyyə kimi, ehtimal nəzəriyyəsi də ayrı-ayrı konkret təsadüfi hadisə və kəmiyyətləri deyil, onların ümumi xassələrini və qanunauyğunluqlarını öyrənir. Bu məqsədlə uyğun riyazi model qurulur. Ehtimal nəzəriyyəsində qurulan bu riyazi model təcrübə, müşahidə, ölçmə və s. anlayışları əvəzinə ümumi “sınaq” anlayışı işlədilir. Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır. Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı bir fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyununu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir. Sınağın aparılma şərtləri əvvəlcədən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır. Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır.

Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır.

Tutaq ki, S, təkrarən aparılan bilən (əlbəttə, eyni şərtlər kompleksi daxilində) sınaqdır. S sınağının hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə **hadisə deyilir**. Məsələn, S sınağı, tam

düzgün formada olan bir dənə zəri çox hamar səthi olan taxta üzərinə atmaqdan ibarət olduqda, hadisə olaraq

a) “zərin 6 xalı olan üzünün yuxarı düşməsinə”,

b) “zərin cüt sayda xalı olan üzünün yuxarı düşməsinə”,

c) “zərin tək sayda xalı olan üzünün yuxarı düşməsinə” və s. götürmək olar.

Aparılan sınaq nəticəsində nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə **yəqin hadisə** deyilir.

Sınağın heç bir icrasında baş verməyən (və ya hökmən baş verə bilməyən) hadisəyə **mümkün olmayan hadisə** deyilir.

Nəhayət, sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə, yəni sınaq zamanı həmin hadisənin baş verib – verməməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün deyilsə, onda həmin hadisəyə **təsadüfi hadisə** deyilir.

Əlbəttə, hər bir hadisənin müəyyən bir sınağa nəzərən (yəni aparılan müəyyən sınaq nəticəsində) **yəqin**, **mümkün olmayan** və **təsadüfi** olmasından danışmaq olar. Bir sınağa nəzərən **yəqin**, **mümkün olmayan** və **təsadüfi** olan hadisə başqa bir sınağa nəzərən başqa xarakterli də ola bilər.

Misal. Bir oyun zərini atmaqdan ibarət olan sınaq nəticəsində zərin yuxarı düşən üzündə 1, 2, 3, 4, 5, 6 xallarının hər hansı birisinin olması **yəqin hadisə**, yuxarı düşən üzündə xallar sayının 8 olması **mümkün olmayan hadisə**, yuxarı düşən üzündə cüt xalların olması isə **təsadüfi hadisə**dir.

Ehtimal nəzəriyyəsində hadisələri $A, B, C, \dots$ hərfləri (latın əlifbasının ilk böyük hərfləri) ilə işarə edirlər. Aparılan sınaq nəticəsində hadisələrin baş verib – verməməsi həmin sınağı keyfiyyətə xarakterizə edir.

Sınağın kəmiyyətə xarakteristikasından da danışmaq olar. Tutaq ki, aparılan sınaqla bağlı olan hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətləri müəyyən etmək lazımdır. Bu halda, sınağı xarakterizə edən kəmiyyətin mümkün ola bilən qiymətlərin hər hansı birini alması təsadüfi xarakter daşıdığından, həmin kəmiyyətin mümkün qiymətlərin hansını alacağını əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir. Ehtimal nəzəriyyəsində belə kəmiyyətlər təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Məsələn, sınaq zamanı ölçülən kəmiyyət təsadüfi kəmiyyətdir. Sınaqda ölçülən kəmiyyət müxtəlif qiymətlər alır və hansı qiyməti alacağını qabaqcadan demək olmur. Ölçülən kəmiyyətin xətası da təsadüfi kəmiyyətə misal ola bilər. Sınaq nəticəsində xətanın hansı qiyməti alacağını qabaqcadan demək mümkün deyildir.

36.1.2. Sınaqlar seriyası və hadisələrin baş vermə tezliyi

Yuxarıda göstərdik ki, ehtimal nəzəriyyəsi kütləvi təsadüfi hadisələrin, yəni praktiki olaraq istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənir. Təsadüfi hadisələri elmi-riyazi şəkildə öyrənmək üçün onların müəyyən ədədi xarakteristikaları olmalıdır. Hər bir hadisəyə onun ehtimalı adlanan bir həqiqi ədəd uyğun qoymaq üçün aşağıdakı kimi hərəkət etmək olar.

Tutaq ki, S təkrarən aparıla bilən sınaq və A bu sınaqla bağlı olan hadisədir. S sınağı n dəfə aparıldıqda A hadisəsinin baş verməsinin sayı $S_n(A)$ olsun. Başqa sözlə,

S sınağı n dəfə təkrarən aparıldıqda A hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayı $S_n(A)$ ilə işarə olunur. Bu halda,

$$t_n(A) = \frac{S_n(A)}{n} \quad (1)$$

nisbəti n sınaqdan ibarət olan seriyada A hadisəsinin **baş-vermə tezliyi** və ya sadəcə olaraq **tezliyi** adlanır.

Tezliyin statistik dayanıqlıq xassəsi vardır. Bu o deməkdir ki, S sınağının çox sayda aparıldığı müxtəlif seriyalar təkrar olunduqda A hadisəsinin (1) tezliyi bir – birindən çox az fərqlənir. S sınağının uyğun olaraq $n_1, n_2, n_3 \dots$ dəfə təkrarən aparıldığı müxtəlif seriyalara baxdıqda

$$\frac{S_{n_1}(A)}{n_1} \approx \frac{S_{n_2}(A)}{n_2} \approx \frac{S_{n_3}(A)}{n_3} \approx \dots \quad (2)$$

olur.

Misal 1. Metal pulun döşəmə üzərinə atılmasından ibarət olan sınaqda “pulun gerb üzünün yuxarı düşməsi” hadisəsinin tezliyi

$$n_1 = 4040, n_2 = 12000 \text{ və } n_3 = 24000$$

olan üç seriya üçün aşağıdakı cədvəldə göstərilir:

Təcrübəçi	Sınaqların sayı	Pulun gerb üzünün düşməsi sayı	Gerb üzün düşməsi tezliyi
Byuffon	4040	2048	0,5080
Pirson	12000	6019	0,5016
Pirson	24000	12012	0,5005

Buradan aydındır ki, pulun gerb üzünün yuxarı düşməsi hadisəsinin baxılan seriyalarda tezlikləri bir – birinə çox yaxındır və təqribən 0,5 ədədinə bərabərdir:

$$0,5050 \approx 0,5016 \approx 0,5005 \approx 0,5$$

Bu vəziyyət təsadüfi deyildir.

Eksperimental olaraq isbat edilmişdir ki, kifayət qədər böyük sayda sınaqlardan ibarət olan müxtəlif seriyalarda baxılan A hadisəsinin tezlikləri bir – birinə çox yaxın olmaqla bərabər, müəyyən bir sabit $P(A)$ ədədi ətrafında ehtizaz (rəqs) edir. Seriyalardakı sınaqların sayı artdıqca hadisənin tezliyi həmin ədədə daha çox yaxınlaşır.

Baxılan A hadisəsinin, S sınaq nəticəsində baş verməsi imkanının obyektiv ölçüsü olan bu $P(A)$ ədədi A hadisəsinin **ehtimalı (və ya statistik ehtimalı)** adlanır. Hadisənin tezliyi və ehtimalı ölçüsüz (adsız) kəmiyyətdir.

Yuxarıda verilmiş misaldan aydındır ki, pulun gerb üzünün yuxarı düşməsi hadisəsinin ehtimalı $P(A)=0,5$ olar. Belə hadisələrin ehtimalını bilavasitə hesablamaq da çətin deyildir. Pulun forması simmetrikdir, onun iki üzü vardır və döşəmə üzərinə atıldıqda hər iki üzün yuxarı düşməsi “ehtimalı” eynidir. Buna görə də aparılan sınaqların təxminən yarısında gerb üzünün yuxarı düşməsinə gözləmək olardı ki, bunun da doğruluğunu aparılan təcrübələr sübut edir.

Buradan aydındır ki, bu üsulla təsadüfi hadisənin ehtimalını təyin etmək üçün sınaq nəticələri **eyniehtimallı (eyniimkanlı)** olmalıdır. Bunun ümumi sxemi belədir: tutaq ki, A sınağının $A_1, A_2, \dots, A_n$ kimi n dənə mümkün nəticəsi vardır və hər bir sınaq nəticəsində bu hadisələrdən yalnız biri və həm də hökmən baş verir. Bu hadisələrdən hər hansı birinin baş verməsinin, digərinin baş verməsinə nəzərən heç bir üstünlüyü (daha artıq imkanı) yoxdursa, deyirlər ki, həmin hadisələr eyni ehtimallı (eyni imkanlı)

hadisələrdir və onlar tam qrup və ya tam sistem təşkil edir. Belə hadisələrin hər birinin ehtimalı $\frac{1}{n}$ – ə bərabərdir:

$$P(A_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Verilmiş sınaq nəticəsində eyni zamanda (birgə) baş verə bilməyən hadisələrə **uyuşmayan hadisələr** deyilir. Ehtimal nəzəriyyəsində cüt-cüt uyuşmayan hadisələrin tam qrupunun böyük əhəmiyyəti vardır.

Misal 2. Bir zəri bir dəfə atdıqda onun yuxarı düşən üzündəki xallar sayının 1, 2, 3, 4, 5, 6 olması hadisələrini uyğun olaraq $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ ilə işarə edək. Bu hadisələr eyni ehtimallıdır, tam qrup əmələ gətirir və cüt-cüt uyuşmayandır. Onların ehtimalı

$$P(\omega_k) = \frac{1}{6} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ olar.}$$

Burada hadisənin ehtimalına tək-cə tezlik vasitəsilə verilən statistik tərifin (bunu ilk dəfə P. Mizes vermişdir) müəyyən nöqsanları olduğundan, o, ehtimal nəzəriyyəsinin elmi əsasını təşkil edə bilmir. Buna görə də hadisələrin ehtimalına daha əsaslı, aksiomatik olaraq tərif vermək zərurəti yaranmış olur.

36.2.1. Elementar hadisələr fəzası

Yuxarıda göstərdik ki, hər bir təsadüfi hadisənin müəyyən ehtimalı vardır. Bun ağrə də, ehtimala, ehtimal nəzəriyyəsində hadisələrin funksiyası kimi baxılır.

Birdəyişənli həqiqi funksiyaları öyrənmək üçün əvvəlcə onların təyin oblastını təşkil edən həqiqi ədədlər çoxluğu qurulur və onun xassələri öyrənilir. Ehtimalı öyrənmək üçün də onun təyin oblastını təşkil edən hadisələr

çoxluğunu müəyyən etmək və bir sıra xassələrini öyrənmək lazımdır.

Tutaq ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı S sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan ω_i ($i = 1, 2, \dots$) nəticələrindən ancaq biri baş verir. Bu halda, ω_i nəticələrinin hər biri S sınağının elementar hadisəsi (və ya elementar nəticəsi) adlanır. Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna S sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və Ω ilə işarə olunur :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ və ya } \Omega = \{\omega\}$$

Həyatda istənilən sayda təkrarən aparıla bilən müxtəlif sınaqlar və onların elementar nəticələri vardır. Bunların hər birini ayrılıqda öyrənməyin heç bir elmi əhəmiyyəti yoxdur. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində konkret elementar hadisələr və elementar hadisələr fəzası deyil, ümumi (abstrakt) elementar hadisələr fəzası öyrənilir.

Ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli ω , elementlərinin Ω çoxluğu **elementar hadisələr fəzası**, onu təşkil edən ω elementləri isə **elementar hadisələr** adlanır. Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt-cüt uyuşmayan uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur.

Misal 1. Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda zərin yuxarı düşən üzündəki xallar sayının 1, 2, 3, 4, 5, 6 olması nəticələrini uyğun olaraq $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ ilə işarə etsək, bu halda elementar hadisələr fəzasını $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ kimi təyin etmək daha əlverişlidir. Burada hər bir sınaq nəticəsində ω_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) elementar hadisələrinin ancaq biri baş verir və onlar cüt-cüt uyuşmayandır.

Bu misalda göstərilən sınağın icrası zamanı “zərin yuxarı düşən üzündə cüt sayda xalın olması” (A hadisəsi) və ya “zərin yuxarı üzündə tək sayda xalın olması” (B hadisəsi) kimi təsadüfi hadisələrə də baxmaq olar. Sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsi ω_2, ω_4 və ω_6 elementar hadisələrinin hər hansı birinin baş verməsi deməkdir. B hadisəsinin baş verməsi isə $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ elementar hadisələrinin hər hansı birinin baş verməsinə ekvivalentdir. Buna görə də, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ elementar hadisələr fəzasının $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ və $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ alt çoxluqlarını təsadüfi hadisə hesab etmək olar.

Hadisə anlayışı ümumi halda da uyğun şəkildə təyin edilir. Elementar hadisələr fəzasının hər bir altçoxluğuna **təsadüfi hadisə** və ya sadəcə olaraq **hadisə** deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təşkil edən elementar hadisələrin heç olmazsa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu Ω fəzasının bütün altçoxluqları çoxluğundan ibarətdir. Ω çoxluğundan (fəzanın özündən) ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Bu o deməkdir ki, Ω hadisəsi hər bir sınaq nəticəsində baş verir. Deməli, Ω fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni $\emptyset$ boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir.

Qeyd edək ki, hər bir elementar hadisəyə Ω fəzasının bir elementli alt çoxluğu kimi baxmaq olar. Buna görə də Ω fəzasını təşkil edən ω elementar hadisələrinin hər biri təsadüfi hadisədir.

Məlumdur ki, n sayda elementdən ibarət olan sonlu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ çoxluğunun 2^n sayda altçoxluğu vardır. Doğrudan da, bu çoxluğun k elementli müxtəlif altçoxluqlarının sayı

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{k!} \quad (C_n^0 = 1; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

olduğundan

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$$

olar. Buradan aydındır ki, n sayda elementar hadisədən ibarət olan $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ fəzası 2^n sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə (fəzanın özü), o biri isə mümkün olmayan hadisədir (boş çoxluq).

Hər bir real prosesə uyğun olan elementar hadisələr fəzası vardır.

Misal 2. Metal pulu bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınağın ancaq iki nəticəsi vardır: ya pulun gerb üzünü yuxarı düşər (ω_k hadisəsi), ya da pulun şəbəkə üzünü yuxarı düşər (ω hadisəsi). Bu halda elementar hadisələr fəzası ancaq iki ω_y və ω_s elementlərindən ibarət olar: $\Omega = \{\omega_y, \omega_s\}$.

Misal 3. Tutaq ki, üzərində Oxy koordinat sistemi təyin olunmuş müstəviyə atəş açılır. Bu sınağın nəticəsi güllənin bir (x, y) nöqtəsinə düşməsidir. Hər bir atəşə, atılan güllənin düşdüyü (dəydiyi) (x, y) nöqtəsinə qarşı qoyduqda, elementar hadisələr fəzası müstəvinin bütün (x, y) nöqtələri çoxluğundan ibarət olar:

$$\Omega = \{(x, y) - \infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}.$$

36.2.2. Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər

Tutaq ki, hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{\omega\}$ ilə işarə edilmişdir. Burada həmin fəzanın altçoxluqları olan $A, B, C, \dots$ hadisələrinə baxılır. Bu hadisələr bəzən $A_k, B_k, C_k, (k = 1, 2, \dots)$ və s. kimi də işarə edilir.

1. Hadisələrin bərabərliyi. Baxılan sınaq nəticəsinə **A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi də hökmən baş verirsə, onda deyirlər ki, “A hadisəsi B hadisəsini doğrurur”** və ya **“B hadisəsi A hadisəsinin nəticəsidir”** və bunu

$A \subset B$ (A daxildir B –yə) kimi işarə edilir.

Bu daxilolma münasibətinin aşağıdakı kimi xassələri vardır: 1) $A \subset A$, 2) $A \subset B$ və $B \subset C$ olarsa, onda $A \subset C$ olar.

Tərif: Əgər $A \subset B$ və $B \subset A$ münasibətləri eyni zamanda ödənilirsə, onda A və B hadisələrinə eynigüclü və ya bərabər hadisələr deyilir və $A=B$ kimi işarə edilir.

Hadisələrin eynigüclülük münasibətinin simmetriklik, refleksivlik xassələri vardır:

1) simmetriklik: $A=A$.

2) refleksivlik: $A=B$ olduqda $B=A$ olar.

3) tranzitivlik: $A=B$ və $B=C$ olduqda $A=C$ olar.

II. Hadisələrin cəmi və ya birləşməsi. A və B hadisələrinin heç olmasa birinin baş verməsindən ibarət olan hadisəyə həmin hadisələrin cəmi və ya birləşməsi deyilir və $A + B$ vəə ya $A \cup B$ kimi işarə edilir.

Buradan aydındır ki, A və B hadisələrinin cəmi, həmin hadisələrin heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir:

$$A + B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ və ya } \omega \in B\} \quad (1)$$

İstənilən A və B hadisələri üçün $A+A=A$, $A+B=B+A$, $A+\Omega=\Omega$, $A+\emptyset=A$ və s. xassələri doğrudur. Eyni qayda ilə istənilən sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (2)$$

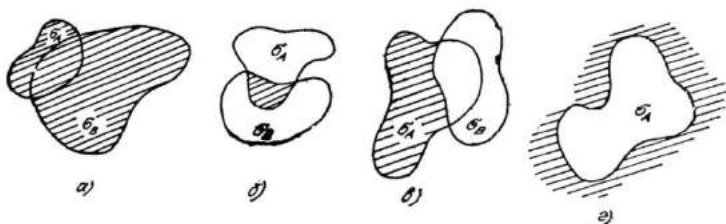
cəmini də təyin etmək olar. (2) cəmi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin heç olmasa birinin baş verməsindən ibarət olan hadisədir. Hadisələrin cəmi anlayışı hesabi sayda çoxluqlar üçün də ümumiləşdirilir:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (3)$$

Misal 1. Tutaq ki, A və B ilə atılan güllənin uyğun olaraq σ_A və σ_B oblastına düşməsi hadisəsi işarə edilmişdir. Onda $A+B$ cəmi atılan güllənin cızıqlanmış $\sigma_A + \sigma_B$ oblastına düşməsi hadisəsidir (Şəkil 1, a).

III. Hadisələrin hasili. A və B hadisələrinin hər ikisinin eyni zamanda hökmən baş verməsindən ibarət olan hadisəyə həmin hadisələrin hasili deyilir və AB (və ya $A \cap B$) kimi işarə olunur. Buradan aydındır ki, A və B hadisələrinin hasili həmin hadisələrin hər birini hökmən daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir:

$$AB = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ və } \omega \in B\} \quad (4)$$



Şəkil 1.

Misal 2. A və B ilə atılan güllənin uyğun olaraq σ_A və σ_B oblastına düşməsi hadisəsi işarə edildikdə, AB hasili güllənin σ_A və σ_B oblastlarının ortaq hissəsinə düşməsi hadisəsi olar (şəkil 1, b).

İstənilən sonlu sayda və ya hesabi sayda hadisələrin hasilindən də danışmaq olar. Hesabi sayda $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hadisələrinin hasili

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega / \omega \in A_k, \quad k = 1, 2, \dots\} \quad (5)$$

kimi təyin olunur.

İxtiyari A, B, C, ... hadisələri üçün

$$AA = A, AB = BA, A(B + C) = AB + AC, A\Omega = A, \\ A\emptyset = \emptyset, \dots$$

xassələri doğrudur. Hadisələrin cəmi və hasili üçün qruplaşdırma xassələri də doğrudur. Yəni ixtiyari A, B və C hadisələri üçün

$$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B$$

və

$$ABC=A(BC)=(AB)C=(AC)B$$

münasibətləri ödənilir. Bu xassələrin hamısı eyni üsulla isbat olunduğundan, onların birini, məsələn,

$$A(B+C)=AB+AC \quad (6)$$

bərabərliyini isbat etməklə kifayətlənək.

Tutaq ki, $A(B+C)$ çoxluğunun ixtiyari elementi ω –dır: $\omega \in A(B+C)$. Onda tərifə görə, $\omega \in A$ və $\omega \in B+C$ olar. $\omega \in (B+C)$ olduğundan, ω elementi B və C çoxluqlarının heç olmasa birinə daxil olmalıdır. Tutaq ki, $\omega \in B$, onda $\omega \in AB$ və buna görə də $\omega \in (AB+AC)$ olar. $\omega \in C$ olduqda da $\omega \in AC$ və buna görə yenə də $\omega \in (AB+AC)$ olar. Deməli, (6) bərabərliyinin sol tərəfinə daxil olan hər bir $\omega \in A(B+C)$ elementi həmin bərabərliyin sağ tərəfinə də daxildir:

$$\omega \in AB+AC$$

Buradan $A(B+C) \subset AB+AC$ alınır.

Eyni mühakimə ilə $AB+AC \subset A(B+C)$ münasibətini, yəni (6) bərabərliyinin sağ tərəfinə daxil olan hər bir $\omega \in (AB+AC)$ elementinin sol tərəfə də daxil olduğunu $\omega \in A(B+C)$ göstərmək olar. Beləliklə, alınan

$A(B+C) \subset AB+AC$ və $AB+AC \subset A(B+C)$ münasibətləri (6) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərir.

Ω fəzası yəqin hadisə, boş çoxluq ($\emptyset$) isə mümkün olmayan hadisəsidir. Buna görə də $AB = \emptyset$ olması A və B hadisələrinin uyuşmayan olması deməkdir.

Cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi üçün $A_k A_m = \emptyset (k, m = 1, 2, \dots, n)$ münasibətləri ödənilir. Belə sistem üçün əlavə

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$$

münasibəti ödənildikdə, ona cüt-cüt uyuşmayan hadisələrin **tam qrupu və ya tam sistemi** deyilir. Bu anlayışı hesabi sayda $A_1, A_2, \dots$ hadisələr sistemi üçün də ümumiləşdirmək olar.

Əgər $A_1, A_2, \dots$ hadisələr sistemi üçün

$$1) A_k \neq \emptyset (k \geq 1), \quad 2) A_k A_m = \emptyset,$$

$$3) \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$$

şərtləri ödənilirsə, onda ona hadisələrin **tam sistemi** deyilir.

Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmidirsə, yəni

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

münasibəti ödənilirsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi $A_1, A_2, \dots, A_n$ xüsusi hallarına ayrılır.

Misal 3. Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda zərin yuxarı düşən üzündə cüt sayda xalların olmasından ibarət olan A hadisəsi ω_2 (2 düşməsi), ω_4 (4 düşməsi) və ω_6 (6 düşməsi) kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6.$$

Zərin yuxarı düşən üzündə tək sayda xalın olmasından ibarət olan B hadisəsi ω_1 (1 düşməsi), ω_3 (3 düşməsi) və ω_5 (5 düşməsi) kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$B = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5.$$

IV. Hadisələrin fərqi. A və B hadisələrinin $A-B$ fərqi A hadisəsinin baş verməsi, B -nin isə baş verməsindən ibarət olan hadisəyə deyilir. $A-B$ fərqi

$$A - B = \{\omega = \Omega / \omega \in A, \omega \notin B\}$$

kimi təyin etmək olar.

Misal 4. A və B ilə atılan güllənin uyğun olaraq σ_A və σ_B oblastına düşməsi hadisəsi işarə edildikdə, $A-B$ hadisəsi güllənin σ_A oblastının σ_B -nin nöqtələri daxil olmayan hissəsinə düşməsi hadisəsi olar (şəkil 1, c)).

Ω -A fərqinə A hadisəsinin **qarşılıqlı əksi** deyilir və $\bar{A} = \Omega - A$ kimi işarə edilir. $\bar{A}$ hadisəsi A -nın baş verməməsini göstərir. A və $\bar{A}$ hadisələri qarşılıqlı əks hadisələr adlanır. Onların biri baş verdikdə, o biri hökmən baş vermir. Deməli, A və $\bar{A}$ hadisələri uyuşmayan-
dır $\bar{A}A = \emptyset$ və onların cəmi yəqin hadisədir: $A + \bar{A} = \Omega$.

Misal 5. A hadisəsi atılan güllənin σ_A oblastına düşməsi olduqda, $\bar{A}$ hadisəsi atılan güllənin σ_A oblastına düşməməsi olar (şəkil 1, d)).

36.3.1. Hadisələr cəbri

Tutaq ki, $\Omega = \{\omega\}$ ilə hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzası və A, B, C, ... (indeksli və ya indekssiz) ilə onun altçoxluqları olan hadisələr işarə edilmişdir.

Yuxarıda göstərdik ki, ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala hadisələrin funksiyası kimi baxılır. Lakin Ω fəzasının istənilən altçoxluğu üçün ehtimalı təyin etmək mümkün deyildir. Ehtimal anlayışı fəzanın müəyyən hadisələri (altçoxluqları) sisteminə daxil olan hadisələr (çoxluqlar) üçün təyin edilir. Buna görə də hadisələrin ehtimalını riyazi olaraq təyin etmək üçün belə hadisələr sistemi əvvəldən müəyyən edilməlidir.

Tutaq ki, Ω fəzasının hər hansı hadisələri (altçoxluqları) sistemi F ilə işarə edilmişdir və bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

- 1) $\Omega \in F$,

- 2) $A \in F$ və $B \in F$ olduqda $AB \in F, A + B \in F$,

$A - B \in F$ olur. Onda F sisteminə **hadisələr cəbri** deyilir. Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır.

Ω fəzası F sisteminə daxil olduğundan 2) şərtinə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir: $\emptyset \in F$.

Hadisələrin cəmi və hasili üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir. Yəni $A_k \in F$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olduqda

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F \text{ və } \bigcap_{k=1}^n A_k \in F.$$

Bir çox məsələləri həll etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsinə hadisələr cəbri anlayışı ilə kifayətlənmək olar. Lakin bir sıra mürəkkəb məsələləri, xüsusilə həndəsi xarakterli məsələləri həll etmək üçün hadisələr cəbrinin əlavə bir xassəni də ödəməsi tələb olunur. Bu xassə, sistemin hesabi sayda hadisələrinin cəmi və hasilinin yenə də həmin sistemə daxil olmasından ibarətdir:

3) $A_k \in F$ ($k = 1, 2, \dots$) olduqda

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F \text{ və } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in F.$$

Bu halda, yəni F hadisələr cəbri 3) şərtini ödədikdə, ona **σ – cəbr** və ya **Borel cəbri** deyilir.

Misal 1. Ω fəzası və boş çoxluqdan ibarət olan $F = \{\Omega, \emptyset\}$ sistemi hadisələr cəbridir. Bu, “ən kiçik” alt çoxluqlar sistemi cəbridir.

Misal 2. Metal pulu atmaqdan ibarət olan sınağın $\Omega = \{\omega_g, \omega_q\}$ elementar hadisələr fəzasının bütün hadisələri (alt çoxluqları) çoxluğundan ibarət olan

$$F = \left\{ \{\emptyset\}, \{\omega_g\}, \left\{ \{\omega_q\}, \{\omega_g \omega_q\} \right\} \right\} = \Omega \quad (1)$$

sistemi cəbrdir. (1) hadisələr sistemi üçün hadisələr cəbrinin tərifində göstərilən 1) və 2) şərtləri ödənilir.

Misal 3. n elementdən ibarət olan

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

fəzasının 2^n sayda altçoxlğu (hadisəsi) vardır. Bu altçoxlqlar sistemi cəbrdir.

Xüsusi halda, zəri atmaqdan ibarət olan sınağın $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ elementar hadisələr fəzasının $2^6=64$ saydas altçoxlğu (hadisəsi) vardır:

$$F = \left\{ \{\emptyset\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \right. \\ \left. \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots, \right. \\ \left. , \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \right\} = \Omega$$

Bu hadisələr sistemi cəbridir.

Misal 4. Ω fəzasının bütün altçoxlqlarından ibarət olan F_Ω hadisələr sistemi σ – cəbrdir. Bu, Ω fəzasında, “ən geniş” σ – cəbrdir. Xüsusi halda, Ω fəzası sonlu elementli çoxluq olduqda F sistemi eyni zamanda cəbr olar. 3-cü misalda göstərildiyi kimi n elementli Ω fəzası üçün F_Ω sistemi 2^n sayda hadisədən ibarət olur.

36.3.2. Hadisələrin ehtimalı və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları

Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega\}$, hər hansı elementar hadisələr fəzası və $A, B, C, \dots$ onun hadisələridir. Bu hadisələrin σ – cəbr olan F sisteminə baxaq. F hadisələr sistemində təyin olunmuş və aşağıdakı

xassələri (aksiomları) ödəyən **həqiqi P funksiyasına ehtimal deyilir.**

E₁ Hər bir $A \in F$ hadisəsinin ehtimalı mənfi olmayan ədəddir, yəni $P(A) \geq 0$ olur.

E₂ (normallıq aksiomu). Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir: $P(\Omega) = 1$.

E₃ (ehtimalların toplama aksiomu). Cüt-cüt uyuşmayan $A_k \in F$ ($k = 1, 2, \dots$) hadisələri cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \quad (1)$$

Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin **aksiomları** adlanır. Onları ilk dəfə görkəmli rus riyaziyyatçısı **Andrey Nikolayeviç Kolmoqorov** vermişdir. Bu aksiomlar əsasında ehtimal nəzəriyyəsinin bir elmi nəzəriyyə kimi qurulması da A.N.Kolmoqorova məxsusdur. Onun əsərləri ehtimal nəzəriyyəsinin bir müasir elm kimi yaranmasına və sürətlə inkişafına səbəb olmuşdur.

Kolmoqorov aksiomları bir-birindən asılı deyildir və ziddiyyət təşkil etmir. Bu o deməkdir ki, elə real hadisələr və obyektlər vardır ki, onla üçün E_1 - E_3 aksiomları ödənilir.

Qeyd edək ki, hadisələrin ehtimalı birqiymətli təyin olunmur. Eyni bir F hadisələr cəbrində E_1 - E_3 aksiomlarını ödəyən müxtəlif $P(A)$ funksiyalarının (ehtimallarını) təyin etmək olar. Bu baxımdan E_1 - E_3 aksiomlar sistemi tam deyildir.

Misal 1. Tutaq ki, $\Omega = \{\omega_g, \omega_q\}$ - metal pulu atmaqdan ibarət olan sınağın elementar hadisələr fəzasıdır. Bu fəzanın bütün alt çoxluqlarından təşkil olunmuş

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

cəbri 4 dənə hadisədən ibarətdir:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{\omega_g\}, A_3 = \{\omega_q\}, A_4 = \{\omega_g, \omega_q\} = \Omega.$$

F çoxluğunda $P=P(A)$ funksiyasını

$$P(A_1) = 0, \quad P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_4) = \frac{2}{2} = 1 \quad (2)$$

kimi təyin edək. Belə təyin olunmuş $P(A)$ funksiyası üçün E_1 - E_3 aksiomları ödənilir. Deməli, (2) bərabərliklərlə təyin olunan $P = P(A)$ funksiyası ehtimaldır.

Misal 2. Zəri atmaqdan ibarət olan sınağın $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ elementar hadisələr fəzasına və onun bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş F hadisələr sisteminə baxaq. Bu F sistemi 64 hadisədən ibarətdir. Ona daxil olan ixtiyari hadisə $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ olsun. Burada $i_1, i_2, \dots, i_k$ indeksləri 1 ilə 6 arasında ixtiyari müxtəlif qiymətlər alır; A hadisəsinin elementlərinin sayı $k(0 \leq k \leq 6)$ ilə işarə olunmuşdur. Boş altçoxluq üçün $k=0$ götürülür.

F sistemi üzərində

$$P(A) = \frac{k}{6} \quad (3)$$

bərabərliyi ilə $P=P(A)$ funksiyasını təyin edək. Bu funksiya üçün E_1 - E_3 aksiomları ödənilir:

1) $P(A) \geq 0$, 2) $P(\Omega) = 1$ ($k = 6$), 3) $AB = \emptyset$ şərtini ödəyən $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ və $B = \{\omega_{m_1}, \omega_{m_2}, \dots, \omega_{m_s}\}$ hadisələri üçün $A + B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{k+s}}\}$ və buna görə də

$$P(A + B) = \frac{k + s}{6} = \frac{k}{6} + \frac{s}{6}$$

olar. Buradan aydındır ki, F cəbri üzərində (3) bərabərlikləri ilə təyin olunan $P=P(A)$ funksiyası ehtimaldır.

Yuxarıda verilmiş aksiomatikada ehtimala hadisələrin (çoxluqların) σ – cəbrində təyin olunmuş funksiya kimi tərif verilir. Hər bir $A \in F$ hadisəsinə, onun ehtimalı adlanan (və əlbəttə, E_1 - E_3 aksiomlarını ödəyən) $P=P(A)$ ədədi qarşı qoyulur. $P=P(A)$ funksiyasının argumentləri hadisələrin σ – cəbrinə daxil olan çoxluqlardır (hadisələrdir).

Çoxluqlar funksiyası istənilən sonlu n ədədi üçün

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (4)$$

münasibətini ödədikdə, ona sonlu **additiv funksiya** deyilir. $P(A)$ funksiyası (4) bərabərliyini $n = \infty$ olduqda ödəyirsə, yəni onun üçün (1) bərabərliyi ödənilirsə, onda ona **hesabi – additiv və ya σ – additiv funksiya** deyilir. Hər bir hesabi-additiv funksiya additivdir, lakin bunun tərsi doğru deyildir, additiv funksiya hesabi-additiv olmaya da bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin sadə məsələlərini, xüsusilə, yuxarıdakı misallarda olduğu kimi eyniehtimallı sonlu nəticəsi olan sınaqlarla bağlı olan məsələləri həll etmək üçün ehtimalın sonlu additiv olmasını, yəni (4) bərabərliyini ödəməsinə tələb etmək kifayətdir. Lakin həndəsi

xarakterli və bir sıra başqa mürəkkəb məsələləri həll etmək üçün ehtimalın hesabi-additiv olması tələb olunur.

Dediklərimizdən aydındır ki, hadisələrin $P(A)$ ehtimalı mənfi olmayan qiymətlər alan hesabi-additiv çoxluq funksiyasıdır. Ehtimal anlayışını təyin etmək üçün Ω elementar hadisələr fəzası, onun σ – cəbr olan F hadisələr sistemi və bu sistem üzərində təyin olunmuş $P(A)$ funksiyası göstərməlidir. Bunların $\{\Omega, F, P\}$ üçlüyü **ehtimal fəzası** adlanır.

Hər bir təsadüfi prosesi öyrənmək üçün onun ehtimal fəzası qurulur. Bu ehtimal fəzası həmin prosesin riyazi modelidir. Ehtimal nəzəriyyəsində də təsadüfi hadisələrin belə riyazi modelləri öyrənilir. Ehtimal nəzəriyyəsində qurulmuş ehtimal fəzalarını tədqiq etmək üçün çoxluqlar nəzəriyyəsindən və ölçü nəzəriyyəsindən istifadə edilir.

XXXVII FƏSİL. EHTİMALIN SADƏ XASSƏLƏRİ. EHTİMALIN KLASSİK TƏRİFİ. ŞƏRTİ EHTİMAL

37.1.1. Ehtimalın sadə xassələri

Əvvəlki paraqrafda ehtimala, Ω elementar hadisələr fəzasının F hadisələr cəbrində təyin olunmuş hesabi-additiv çoxluq funksiyası kimi verilmiş tərifdən bir sıra nəticələr alınır.

1. Verilmiş $A \in F$ hadisəsinin qarşılıqlı əksi olan $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1)$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Doğrudan da, $A \in F$ və $\Omega \in F$ olduğundan $\bar{A} = \Omega - A$ olur. A və $\bar{A}$ hadisələri uyuşmayanlardır və onların cəmi yəqin hadisədir: $A + \bar{A} = \Omega$. Onda E_2 və E_3 aksiomlarına görə

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

olar.

2. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfra bərabərdir:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2)$$

Bu nəticəni almaq üçün (1) bərabərliyində $A = \Omega$ götürmək və E_2 aksiomundan istifadə etmək lazımdır.

3. İstənilən uyuşan $A \in F$ və $B \in F$ hadisələrinin cəminin ehtimalı üçün

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

Bu bərabərliyi isbat etmək üçün $A+B$ və B hadisələrinin

$$A + B = A + B\bar{A}, \quad B = AB + B\bar{A} \quad (4)$$

göstərişlərindən istifadə etmək lazımdır. (4) bərabərliklərinin hər birinin sağ tərəfindəki toplananlar uyğun olaraq uyuşmayan hadisələrdir. Onda E_3 aksiomuna görə

$P(A + B) = P(A) + P(\overline{BA})$, $P(B) = P(AB) + P(\overline{BA})$ olar. İkinci bərabərlikdən $P(\overline{BA})$ ifadəsini tapıb, birinci bərabərlikdə yerinə yazdıqda, (3) bərabərliyi alınır.

4. İstənilən $A \in F$ və $B \in F$ hadisələri üçün

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B) \quad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Buna ehtimalın yarımadditivlik xassəsi deyilir.

İstənilən A və B hadisələri üçün $P(AB) \geq 0$ olduğundan (E_1 aksiomuna görə), (3) bərabərliyindən (5) bərabərsizliyi alınır.

Ehtimalın (5) yarımadditivlik xassəsi istənilən sonlu və ya hesabi sayda $A_k \in F$ ($k = 1, 2, \dots$) hadisələri üçün də doğrudur:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) &\leq \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Bunu riyazi induksiya metodu vasitəsilə isbat etmək olar.

5. A hadisəsi B hadisəsini doğurursa, yəni $A \subset B$ münasibəti doğrudursa, onda

$$P(A) \leq P(B) \quad (7)$$

olar. Doğrudan da, $B = A + \overline{BA}$ münasibətinə və $P(\overline{BA}) \geq 0$ bərabərsizliyinə görə

$$P(B) = P(A) + P(\overline{BA}) \geq P(A).$$

6. İstənilən $A \in F$ hadisəsinin ehtimalı

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (8)$$

bərabərsizliyini ödəyir.

Doğrudan da, istənilən A hadisəsi üçün $\emptyset \subset A \subset \Omega$ münasibəti ödənildiyindən, E_2 aksiomuna, (2) bərabərliyinə və (7) münasibətinə görə

$$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

Tutaq ki, cüt-cüt uyuşmayan sonlu və ya hesabi sayda $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hadisələri tam qrup təşkil edir, yəni onların biri hökmən baş verir. Onda

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots = \Omega$$

olar və E_3 aksiomuna görə

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots = 1 \quad (9)$$

bərabərliyi alınır.

7. Hadisələr ardıcılığının aşağıdakı kimi xassəsi də vardır.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots \text{ və } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

və ya

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots \text{ və } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduqda

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) \quad (10)$$

bərabərliyi doğrudur.

37.1.2. Ehtimalın klassik tərfi

Tutaq ki, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Bu fəzanın hadisələr cəbrini təşkil edən $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$ hadisələrinin ehtimalını bəzən Ω fəzasının təşkil edən elementar hadi-

sələrin aparılan sınağa nəzərən simmetrik olmasına və ya onların eyni ehtimallı olmasına əsasən təyin etmək mümkün olur. Ehtimalın klassik tərifı də bu prinsipə əsaslanır.

Tutaq ki, ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) elementar hadisələri eyniehtimallıdır:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n).$$

Onda fəzanı təşkil edən elementar hadisələrin cüt-cüt uyuşmayan olmasına və

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} = \{\omega_1\} + \{\omega_2\} + \dots + \{\omega_n\}$ hadisəsinin (fəzanın özünün) yəqin hadisə olmasına əsasən

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1, \quad nP(\omega_k) = 1$$

və ya

$$P(\omega_k) = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

alınır. Bu halda istənilən

$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\} = \{\omega_{i_1}\} + \{\omega_{i_2}\} + \dots + \{\omega_{i_m}\}$ hadisəsinin ehtimalı E_3 aksiomuna görə

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (2)$$

düsturu ilə hesablanır. A hadisəsi m dənə ω_{i_k} elementar hadisəsindən təşkil olunmuşdur və (2) kəsrinin surətində də elə həmin bu m ədədi yazılmışdır.

Deməli, eyniehtimallı sonlu sayda elementar hadisədən ibarət olan fəzanın ixtiyari hadisəsinin ehtimalı bu hadisəyə daxil olan elementar hadisələr sayının, fəzanın bütün elementar hadisələrinin ümumi sayına olan nisbətində bərabərdir.

A hadisəsinin baş verməsi onu təşkil edən ω_{i_k} ($k = 1, 2, \dots, m$) elementar hadisələrinin birinin baş

verməsi deməkdir. Buna görə də, bəzən A hadisəsini təşkil edən m dənə ω_{ik} ($k = 1, 2, \dots, m$) elementar hadisələrinin hər birinə həmin A hadisəsi üçün “**əlverişli hal**” deyilir. A hadisəsi üçün “əlverişli hal” baş verdikdə A hadisəsi baş verir. Ω fəzasının $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ elementar hadisələri isə “mümkün hallar” adlanır. Bu halda, ehtimalın (2) düsturu ilə hesablanmasına aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

Tərif. A hadisəsi üçün əlverişli hallar sayının mümkün hallar sayına nisbətinə həmin hadisənin ehtimalı deyilir:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{əlverişli hallar sayı}}{\text{mümkün hallar sayı}} \quad (3)$$

Bu, ehtimalın **klassik tərif**i adlanır. Onu 1812-ci ildə Laplas vermişdir.

Ehtimalın klassik tərifinin tətbiq dairəsi məhduddur. Çünki bir çox hallarda elementar hadisələrin eyni ehtimallı olmasını təyin etmək çətin olur.

İndi hadisələrin ehtimalını klassik tərifə əsasən hesablamağa aid misasllar göstərək.

Misal 1. Bir zəri bir dəfə atdıqda onun yuxarı düşən üzündə tək sayda xalın olması hadisəsinin ehtimalını tapmalı.

Həlli. Zərin yuxarı düşən üzündəki xallar sayının k olması hadisəsini ω_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ilə işarə etsək, onda zəri atmaqdan ibarət olan sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ olar. Buradan aydındır ki, göstərilən A hadisəsi üçün əlverişli olan $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ halları sayı 3, mümkün halların sayı isə 6-dır. Onda (3) düsturuna görə

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Misal 2. İki zəri birgə atdıqda yuxarı düşən üzlərdəki xallar cəminin uyğun olaraq 2, 6, 10, 12 olmasından ibarət olan A, B, C, D hadisələrinin ehtimalını tapmalı.

Həlli. İki zəri birgə atdıqda birinci zərin hər bir üzü ilə ikinci zərin hər bir üzü düşə bildiyindən mümkün halların sayı $n=36$ olar. A, B, C və D hadisələri üçün əlverişli hallar isə aşağıdakı cədvəldə göstərilmişdir.

A	1+1	$m = 1$
B	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	$m = 5$
C	4+6, 5+5, 6+4	$m = 3$
D	6+6	$m = 1$

Deməli,

$$P(A) = \frac{1}{36}, P(B) = \frac{5}{36}, P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, P(D) = \frac{1}{36}$$

37.1.3. Birləşmələr nəzəriyyəsinin elementləri və ehtimalın klassik tərifə əsasən hesablanmasına aid misallar

Bir sıra məsələlərin həlli üçün sonlu sayda elementlərdən müxtəlif qruplar düzəltmək lazım gəlir. Sonlu sayda elementlər üzərində aparılan belə əməliyyatlardan bəhs edən bölmə **birləşmələr nəzəriyyəsi (və ya kombinatorika)** adlanır. Birləşmələrin üç növü vardır: permutasyon, aranjeman və kombinezon.

Birləşmələrdən elm və texnikanın müxtəlif sahələrində, bir sıra ehtimal məsələlərinin həllində, hesablama maşınları və idrəetmə sistemlərində və s. çox istifadə olunur. Biz yalnız təkrarsız birləşmələrdən danışacağıq.

37.2.1. Permutasyon

Üç elementli $M = \{a, b, c\}$ çoxluğu verilmiş olsun. Bu çoxluğun elementlərini nömrələdikdə (hər bir elementin hansı yerdə olduğunu göstərdikdə) nizamlanmış çoxluq alınır. Bunu (a, b, c) ilə işarə edirlər. Bu halda, $M = \{a, b, c\}$ çoxluğunun elementlərindən aşağıdakı kimi nizamlanmış çoxluqlar alınar:

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$.

Göründüyü kimi üçelementli çoxluqdan altı dənə nizamlanmış çoxluq alınır. Bir-birindən elementlərinin sırası ilə fərqlənən belə nizamlanmış çoxluqlara **permutasyon birləşmələr** deyilir. Verilən n -elementli nizamlanmış çoxluqların sayı P_n (fransızca “permutation” sözünün baş hərfi) ilə işarə olunur.

Bir elementdən düzələn nizamlı çoxluqların sayı $P_1 = 1$, iki elementdən düzələn nizamlı çoxluqların sayı $P_2 = 2$, üç elementdən düzələn nizamlı çoxluqların sayı $P_3 = 6$ -dır. Əgər dörd elementli çoxluq verilərsə, ondan düzələn nizamlı çoxluqların sayını müəyyən etmək üçün aşağıdakı kimi mühakimə aparmaq lazımdır: Üçelementli nizamlı çoxluqların (bunların sayı 6-dır) hər birində, verilən dördüncü elementi növbə ilə birinci,

ikinci, üçüncü və dördüncü yerdə yazmaqla $6 \cdot 4 = 24$ dənə nizamlı çoxluq alarıq, yəni $P_4 = 6 \cdot 4 = P_3 \cdot 4 = 24$ olar.

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2! \\ P_3 &= P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! \\ P_4 &= P_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots P_n = P_{n-1} \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

rekurrent ardıcılığı adlanır ($n!$ faktorial – vahiddən n – dək ardıcıl tam müsbət ədədlərin hasilidir).

$P_n = n!$ olduğunu riyazi induksiya üsulu ilə isbat etmək olar. $P_1 = 1$ təklifi doğrudur, $n = k$ olduqda $P_k = P_{k-1} \cdot k$ qəbul edərək, $P_{k+1} = P_k(k+1)$ olduğunu göstərək.

Doğrudan da,

$$P_{k+1} = P_{(k+1)-1} \cdot (k+1) = P_k \cdot (k+1) = (k+1)!$$

Deməli, $P_n = n!$ təklifi istənilən $n \in N$ üçün doğrudur.

Misal 1. Sıfırdan fərqli dörd müxtəlif rəqəmlə neçə dörd rəqəmli ədəd yazmaq olar?

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

37.2.2. Aranjeman

Tutaq ki, n – elementli $M = \{a, b, c, \dots, k, l\}$ çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun bir, iki, üç və s. elementli nizamlanmış altçoxluqları, uyğun olaraq n elementdən bir, iki, üç və s. elementli **aranjemanlar** adlanır. Bu altçoxluqlar bir-birindən həm elementlərinin müxtəlifliyi və həm də elementlərinin sırası ilə fərqlənir.

Verilmiş n elementdən düzəldilən m – elementli aranjemanların sayı A_n^m ilə işarə olunur. $A_n^0 = 1$ və $A_n^1 = n$ olması aydındır. Verilmiş n elementdən, ikielementli altçoxluqları düzəltmək üçün elementlərdən birini saxlamaqla, qalan $n-1$ elementi növbə ilə onun yanında yazmaq lazımdır. Beləliklə $A_n^2 = n(n-1)$ və ya $A_n^2 = A_n^1 \cdot (n-1)$ olar. Üçelementli altçoxluqları düzəltmək üçün, ikielementli nizamlı altçoxluqların (bunların sayı $A_n^2 = n(n-1)$ – dir) hər birinin yanına, qalan $n-2$ elementi növbə ilə yazmaq lazımdır. Onda

$$A_n^3 = A_n^2 \cdot (n-2) = n(n-1)(n-2)$$

olar. Beləliklə,

$A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m) = n(n-1)(n-2) \dots (n-m)$ alınır ki, bunun da doğruluğunu riyazi induksiya üsulu ilə isbat etmək olar. Verilmiş n – elementli çoxluğunu m – elementli bütün nizamlı altçoxluqlarının sayı

$$\begin{aligned} A_n^m &= n(n-1) \dots (n-(m-1)) - \text{dir.} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-(m-1))}{1} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)(n-m) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

olduğundan

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ və ya } A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}}.$$

Misal 2. Səkkiz kitabı hər dəfə üçünü götürməklə, kitab rəfində neçə üsulla düzmək olar?

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

37.2.3. Kombinezon

Dördelementli $M = \{a, b, c, d\}$ çoxluğu verilmiş olsun. Bu çoxluğun elementlərindən üç-üç mümkün olan aranjemaları yazaq:

(a, b, c)	(a, b, d)	(a, c, d)	(b, c, d)
(a, c, b)	(a, d, b)	(a, d, c)	(b, d, c)
(b, a, c)	(b, a, d)	(c, a, d)	(c, b, d)
(b, c, a)	(b, d, a)	(c, d, a)	(c, d, b)
(c, a, b)	(d, a, b)	(d, a, c)	(d, b, c)
(c, b, a)	(d, b, a)	(d, c, a)	(d, c, b)

Hər sətirdə yerləşən çoxluqlar, verilmiş dördelementli çoxluğun bir-birindən heç olmasa bir elementlə fərqlənən üçelementli altçoxluqlardır. Bunlar nizamlanmamış, yəni ancaq öz elementlərinin tərkibi ilə fərqlənən altçoxluqlardır.

Verilmiş n - elementli çoxluğun, nizamlanmamış m - elementli altçoxluqları, n elementdən **m - elementli kombinezonlar** adlanır. Bunların sayı C_n^m ilə işarə olunur.

Aydındır ki, $C_4^3 = 4$ olar. Yuxarıda hər sütunda 3-elementli permutasyonların olduğunu nəzərə aldıqda

$$A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$$

bərabərliyi alınır. Ümumiyyətlə, n elementdən, hər birinə m element daxil olan bütün nizamlı altçoxluqları almaq üçün, əvvəlcə n elementdən ixtiyari m - elementli nizamlanmış altçoxluqları ayırmaq (bunlar C_n^m saydadır), sonra isə hər bir ayrılan çoxluğun nizamlanmış

altçoxluqlarını (bunlar P_m saydadır) müəyyən etmək lazımdır. Beləliklə, alınan nizamlı altçoxluqların sayı

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

olar. Buradan

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_{n-m}} : P_m = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} \quad (1)$$

alınır. Hesablamanı asanlaşdırmaq üçün $m > \frac{1}{2} n$ olduqda $C_n^m = C_n^{n-m}$ düsturundan istifadə etmək daha əlverişlidir. Bu düsturun doğruluğuna inanmaq üçün

$$C_n^{n-m} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{P_n}{P_{n-(n-m)}} : P_{n-m} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}} \quad (2)$$

bərabərliyinin sağ tərəfinin (1) bərabərliyinin sağ tərəfinə bərabər olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Beləliklə, verilmiş n elementdən düzəldilən permutasyonlar $P_n = n!$, elementdən düzəldilən m -elementli aranjemanlar $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ və n elementdən düzəldilən m -elementli kombinezonlar $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ düsturu ilə hesablanır.

Misal 3. Səkkiz kitabdan neçə üsulla üç kitab seçmək olar?

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Bir sıra ehtimal məsələlərinin həllində birləşmələr nəzəriyyəsinin elementlərindən istifadə edilir.

Misal 4. Qutuda 10 ağ və 5 qara kürə vardır. Bu qutudan təsadüfən 5 kürə çıxarılır. Çıxarılan kürələrin 3-nün ağ və 2-nin qara olması (A hadisəsi) ehtimalını tapmalı.

Həlli. Qutuda olan 15 kürədən hər birində 5 kürə olmaqla C_{15}^5 sayda altçoxtluq düzəltmək olar:

$$C_{15}^5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003.$$

Deməli, A hadisəsi üçün mümkün halların sayı $n=3003$ -dür. A hadisəsi üçün əlverişli hallar elə altçoxtluqlar olar ki, onların hər birində 3 ağ və 2 qara kürə olsun.

Qeyd edək ki, 10 ağ kürədən hər birində 3 kürə olan C_{10}^3 sayda altçoxtluq (və ya qrup) düzəltmək olar. Bu altçoxtluqların hər biri ilə, 5 qara kürədən hər birində 2 kürə olmaqla düzəldilən bilən C_5^2 sayda altçoxtluqların hər birini götürdükdə A hadisəsi üçün əlverişli olan hallar alınır. Deməli, A hadisəsi üçün əlverişli olan halların sayı

$$m = C_{10}^3 \cdot C_5^2 = 1200$$

olar. Onda ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1200}{3003} \approx 0,4.$$

Misal 5. Üzərində 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri yazılmış kubiklərlə oynayan uşağın, həmin kubikləri yan-yana düzməklə, təsadüfən “54321” ədədini yazması hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri vasitəsilə $P_5 = 5! = 120$ dənə beşrəqəmli ədəd yazmaq olar. Bu ədədlərin ancaq biri A hadisəsi üçün əlverişli haldır. Onda klassik tərifə görə

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

37.3.1. Ehtimalin toplama teoremi

Teorem. Uyuşmayan iki hadisənin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (1)$$

İsbatı. A və B hadisələri üçün mümkün olan bütün halların sayını n , əlverişli hallar sayını uyğun olaraq m_1 və m_2 ilə işarə edək. A və B uyuşmayan hadisələr olduğundan $A+B$ hadisəsi üçün əlverişli halların sayı m_1+m_2 olacaqdır. Onda ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

alırıq.

Bu teoremi analoji olaraq sonlu sayda hadisələrin cəmi üçün də isbat etmək olar.

Nəticə 1. Sonlu sayda cüt – cüt uyuşmayan hadisələrin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, A , B və C cüt – cüt uyuşmayan hadisələrdir, yəni AB , AC və CB hadisələri mümkün olmayan hadisələrdir.

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B)+P(C) = P(A)+P(B)+P(C).$$

Nəticə 2. Tam qrup təşkil edən hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir.

İsbatı. A və B hadisələri uyuşmayan hadisələr olduğundan və hadisələrin tam qrupunu təşkil etdiyindən $A+B=U$ olar. Buradan $P(U)=1$. Digər tərəfdən ehtimalın toplama teoreminə əsasən

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=1.$$

Sonlu sayda hadisələr üçün nəticəni isbat etmək olar.

Nəticə 3. $\bar{A}$ qarşılıqlı hadisəsinin ehtimalı vahidlə A hadisəsinin ehtimalı fərqi bərabərdir.

İsbatı. A hadisəsilə $\bar{A}$ qarşılıqlı hadisəsi tam qrup təşkil edirlər. Nəticə 1-ə görə

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1$$

olduğundan,

$$P(\bar{A})=1-P(A) \quad (2)$$

olar.

Misal . Yeşikdə 3 ağ, 5 qırmızı və 4 qara rəngli kürə vardır. Təsadüfən götürülən kürənin ağ olması ehtimalını tapmalı.

Həlli. Tutaq ki, götürülən kürənin qırmızı olması hadisəsi A , qara olması hadisəsi isə B -dir.

Aydındır ki,

$$P(A)=\frac{5}{12}, P(B)=\frac{4}{12}.$$

A və B uyuşmayan hadisələr olduğundan

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = 0,75.$$

37.3.2. Ehtimalin statistik tərifı

Ehtimalın klassik tərifini verdikdə aşağıdakı şərtlərin varlığı fərz olunur:

- 1) Sınağın nəticələri sayı sonludur;
- 2) Nəticələr eyni imkanlı olmalıdır.

Belə olmadıqda ehtimalın klassik tərifini tətbiq etmək, ümumiyyətlə, mümkün deyil.

Tutaq ki, n sayda sınaq aparılır.

Tərif. A hadisəsinin faktiki baş verdiyi sınaqlar sayının (m), bütün sınaqlar sayına (n) olan nisbətində A hadisəsinin **nisbi tezliyi** deyilir.

$$W_n(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Aydındır ki, $0 \leq W_n(A) \leq 1$. (1) düsturundan alırıq ki,

$$m = W_n(A) \cdot n, \quad (2)$$

yəni A hadisəsinin baş vermə sayı, nisbi tezliklə ümumi sınaqlar sayının hasilinə bərabərdir.

Əgər $N_1, N_2, \dots, N_n$ seriyalı müşahidələr aparsaq və uyğun olaraq A hadisəsinin baş verməsi sayını $M_1, M_2, \dots, M_k$ ilə işarə etsək, onda bu seriyalarda A hadisəsinin nisbi tezliyi

$$W_k(A) = \frac{\sum_{i=1}^k M_1}{\sum_{i=1}^k N_i}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Müşahidələr göstərir ki, k -nın kifayət qədər böyük qiymətlərində $W_k(A)$ tezliyi müəyyən bir p ədədinə yaxın olur. Bu p ədədinə **A** hadisəsinin **statistik ehtimalı** deyilir.

$$W_k(A) = \frac{\mu}{k} \approx p$$

olduqda

$$\mu = k \cdot p \quad (4)$$

kəmiyyəti **k** sayda sınaqda **A** hadisəsinin başvermə sayının orta qiymətini ifadə edir.

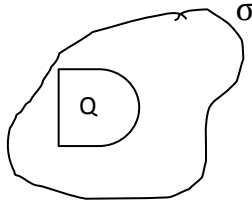
37.4.1. Həndəsi ehtimal

Hadisələrin ehtimalını klassik tərifə əsasən hesabladıqda baxılan fəzanın elementar hadisələri eyniehtimallı və sonlu sayda olmalıdır. Lakin elə hadisələr vardır ki, onlar üçün mümkün və əlverişli hallar sayı sonsuzdur və ya onların sayından danışmaq mümkün deyildir. Belə ehtimal məsələlərini həll etmək üçün həndəsi ehtimal anlayışı verilir. İndi belə bir məsələyə baxaq:

Tutaq ki, müstəvi üzərində bir σ oblastı və onun daxilində yerləşən Q oblastı verilmişdir (Şəkil 1). σ ob-

lastına atılmış nöqtənin onun hissəsi olan Q oblastının daxilinə düşməsi ehtimalını tapmalı.

Şəkil 1.



Bu məsələni ehtimalın klassik tərifı vasitəsilə həll etmək mümkün deyildir. Çünki bu halda mümkün hallar σ oblastının nöqtələri çoxluğu, əlverişli hallar isə Q oblastının nöqtələri çoxluğu olar. Onlar isə sonsuz saydadır. Buna görə də göstərilən hadisənin ehtimalını hesablamaq üçün əlverişli hallar sayının mümkün hallar sayına nisbətini götürmək olmaz.

Belə məsələləri həll etmək üçün ehtimalın həndəsi tərifindən istifadə edilir. Bu tərifı vermək üçün qəbul etmək lazımdır ki, σ oblastına atılan nöqtənin Q oblastına düşməsinin $P(Q)$ ehtimalı həmin oblastın ölçüsü (sahəsi) ilə mütənasib olub, onun formasından və tutduğu yerdən asılı deyildir. Onda

$$P(Q) = \mu \cdot \text{sahə } Q$$

olar. Burada $Q = \sigma$ qəbul etdikdə, $P(\sigma) = 1$ olmasına əsasən

$$1 = \mu \cdot \text{sahə } \sigma, \mu = \frac{1}{\text{sahə } \sigma}$$

olar və nəticədə

$$P(Q) = \frac{\text{sahə } Q}{\text{sahə } \sigma} \quad (1)$$

münasibəti alınar.

Bu düsturla hesablanan ehtimala **həndəsi ehtimal** deyilir. Həndəsi ehtimal üçün E_1 - E_3 aksiomları ödənilir.

Həndəsi ehtimalın (1) tərifini ikiölçülü fəzada verilmişdir. Birölçülü və üçölçülü fəzalarda verilmiş məsələləri həll etmək üçün ehtimalın (1) tərifində fiqurun sahəsi əvəzinə baxılan oblastın uyğun olaraq uzunluğu və həcmi götürülməlidir. Beləliklə, ehtimalın həndəsi tərifini ümumi şəkildə

$$P(Q) = \frac{\text{mes } Q}{\text{mes } \sigma} \quad (2)$$

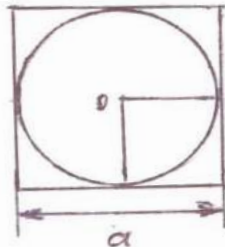
(Q-nun ölçüsünün σ – nin ölçüsünə nisbəti) kimi yazılır. İndi ehtimalın həndəsi tərifinə əsasən həll olunan bir neçə misal göstərək.

Misal 1. Tərəfinin uzunluğu a – ya bərabər olan kvadratin daxilində dairə çəkilmişdir (Şəkil 2). Kvadratin daxilinə atılan bir nöqtənin dairənin daxilinə düşməsi ehtimalını tapmalı.

Həlli. Tərəfinin uzunluğu a -ya bərabər olan kvadratin sahəsi a^2 və onun daxilinə çəkilmiş dairənin sahəsi $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}a^2$ olduğundan, (1) düsturuna görə axtarılan ehtimal

$$P = \frac{\pi/4a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

olar.



Şəkil 2.

Misal 2. R radiuslu dairə, 2n sayda bərabər sektora ayrılmış və bu sektorlar növbə ilə qara və qırmızı rənglə boyanmışdır. Sürətlə fırlanan bu dairəyə atılan güllənin qırmızı sektora dəyməsi ehtimalını tapmalı.

Həlli. Dairənin sahəsi πR^2 və qırmızı rənglə boyanmış sektorların sahəsi $\frac{1}{2} \pi R^2$ olduğundan, axtarılan ehtimal (1) düsturuna görə tapılır:

$$P = \frac{1/2 \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}.$$

Misal 3. $[-2, 2]$ parçasından təsadüfi götürülmüş nöqtənin $[0, 1]$ parçasından olması ehtimalını tapmalı.

Həlli. $G = [-2, 2]$, $Q = [0, 1]$, uzunluq $\sigma = \text{mes } \sigma = 4$ və uzunluq $Q = \text{mes } Q = 1$ olduğundan, axtarılan ehtimal (2) düsturuna görə tapılır:

$$P(Q) = \frac{\text{mes } Q}{\text{mes } \sigma} = \frac{1}{4}.$$

37.4.2. Şərti ehtimal

Hər bir təsadüfi prosesi öyrənmək üçün müəyyən $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal fəzası qurulur. Bu fəzada hadisələrin ehtimalı heç bir əlavə şərt qoymadan hesablanır. Belə hesablanan ehtimallar **şərtsiz ehtimallar** adlanır.

Bəzən bir çox hadisələrin ehtimalını əlavə şərtlər daxilində, yəni başqa bir hadisənin baş verməsi şərtində hesablamaq lazım gəlir. B hadisəsinin baş verməsi şərti

tində A hadisəsinin ehtimalına **şərti ehtimal** deyilir və $P(A/B)$ ilə işarə edilir.

Tərif. A hadisəsinin, B hadisəsinin baş verməsi şərtində $P(A/B)$ şərti ehtimalı həmin hadisələrin hasilinin ehtimalının B hadisəsinin ehtimalına olan nisbətinə deyilir:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1)$$

Bu tərifin $P(B) > 0$ olduqda mənası var. Ehtimalı sıfır olan hadisəyə, yəni $P(B)=0$ olan B hadisəsinə nəzərən hadisələrin şərti ehtimalına baxılmaz.

Burada baxılan A və B hadisələri σ – cəəbr olan F hadisələr sisteminə daxildir. İndi, verilmiş $B \in F$ hadisəsi üçün istənilən $AB(A \in F$ ixtiyari hadisədir) şəklində hasillərdən təşkil olunmuş $F_B = \{AB/A \in F\}$ hadisələr cəəbrinə baxaq. Bu halda $P(A/B)$ şərti ehtimalına F_B hadisələr cəəbrində təyin olunmuş funksiya kimi baxmaq olar. Belə təyin olunmuş şərti ehtimal üçün ehtimalın E_1 - E_3 aksiomları ödənilir, yəni şərti ehtimal F_B hadisələr cəəbrində təyin olunmuş ehtimaldır. Buna görə də şərti ehtimal ehtimalın bütün xassələrini ödəyir.

Məsələn,

$0 \leq P(A/B) \leq 1, P(\Omega/B) = 1, P(B/B) = 1, A_1 A_2 = \emptyset$ olduqda $P(A_1 + A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$ və's. bərabərlikləri doğrudur.

(1) bərabərliyi vasitəsilə F cəəbrində təyin olunmuş $P(A)$ ehtimalı ilə F_B cəəbrində təyin olunmuş $P(A/B)$ ehtimalı arasında əlaqə yaradılır.

Misal 1. Bir zəri bir dəfə ardıqda, onun yuxarı düşən üzündəki xallar sayının cüt olması hadisəsinə B

ilə, 6 olması hadisəsini isə A ilə işarə edək. A hadisəsinin şərtsiz ehtimalını və B – nin baş verməsi şərtində şərti ehtimalını tapmalı.

Həlli. Burada ümumi halların sayı $n=6$ (Ω fəzası 6 dənə eyniehtimallı elementar hadisədən ibarətdir) və A hadisəsi üçün əlverişli halların sayı $m=1$ -dir. Onda

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

olar. İndi tutaq ki, B hadisəsi baş vermişdir, yəni zəri atdıqda ancaq 2, 4, 6 olan üzləri düşür. Onda bu üç hal-dan ancaq biri A hadisəsi üçün əlverişli olar. Deməli,

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

olar. Bu nəticə (1) düsturu vasitəsilə də alınır.

Doğrudan da,

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ və } P(AB) = \frac{1}{6}$$

olduğundan (1) düsturuna əsasən:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Misal 2. Bir qutuda 3 ağ və 4 qara kürə vardır. Qutudan hər dəfə bir kürə götürməklə, iki dəfə ardıcıl kürə çıxarılır (çıxarılan kürələr qutuya qaytarılmır). Çıxarılan birinci kürənin ağ olduğunu (B hadisəsi) bilərək, sonra çıxarılan kürənin qara olması (A hadisəsi) ehtimalını tapmalı.

Həlli. B hadisəsi baş verdikdən sonra qutuda 2 ağ və 4 qara kürə qalır. Onda qara kürənin çıxarılması ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

olar. Bu nəticə, $P(B) = \frac{3}{7}$ vəə $P(AB) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$ olduğundan, (1) düsturundan da alınır:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2}{7} : \frac{3}{7} = \frac{2}{3}.$$

37.5. Hadisələrin hasilinin ehtimalı

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin $P(A/B)$ şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan, B hadisəsinin $P(B) > 0$ şərtsiz ehtimalı məlum olduqda, A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

$$P(AB) = P(B)P(A/B). \quad (2)$$

Burada A və B hadisələrinin yerini dəyişdikdə

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad (3)$$

bərabərliyi alınır.

(2) və (3) bərabərlikləri ehtimalların “vurma teoremini” ifadə edir. Həmin bərabərliklərdən

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \quad (4)$$

münasibəti də alınır.

(3) bərabərliyini istənilən sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün ümumiləşdirmək olar.

Teorem. (ehtimalların vurma teoremi).

$$P(A_1) > 0 \quad P(A_1 A_2) > 0, \dots, P(A_1, A_2, \dots, A_n) > 0$$

şərtlərini ödəyən sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

Döğrudan da, (1) düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) &= \\ = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} \dots \frac{P(A_1A_2 \dots A_n)}{P(A_1 \dots A_{n-1})} &= \\ = P(A_1, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Misal 1. Qutuda 8 dənə ağ, 5 dənə qara və 7 dənə qırmızı kürə vardır. Qutudan hər dəfə bir kürə götürməklə, üç dəfə ardıcıl kürə çıxarılır və çıxarılan kürələr qutuya qaytarılır. Çıxarılan birinci kürənin ağ (A hadisəsi), ikinci kürənin qara (B hadisəsi) və üçüncü kürənin qırmızı (C hadisəsi) olması hadisəsinin ehtimalını hesablamalı.

Həlli. Qutudan birinci çıxarılan kürənin ağ olmasının (A hadisəsinin) ehtimalı

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

olar. A hadisəsi baş verdikdən sonra qutuda 19 kürə qalır və onların 5 dənəsi qara rənglidir. Buna görə də ikinci sınaq zamanı, yəni A hadisəsinin baş verməsi şərtində qutudan qara kürə çıxarılmasının ehtimalı

$$P(B/A) = \frac{5}{19}$$

olar. A və B hadisələrinin baş verməsi şərtində qutudan qırmızı kürə çıxarılması hadisəsinin, yəni C hadisəsinin ehtimalı

$$P(C/AB) = \frac{7}{18}$$

kimi hesablanır. Beləliklə, A,B və C hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalı (5) düsturu vasitəsilə tapılır:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A)P(C/AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{171}$$

XXXVIII FƏSİL. ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR. EHTİMALLAR POLİQONU

38.1.1. Asılı olmayan hadisələr

Hadisələrin asılı olmaması ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir.

Tərif. A və B hadisələri üçün

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənildikdə onlara **asılı olmayan hadisələr** deyilir.

(1) bərabərliyini əvvəlki paraqrafda alınmış

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (2)$$

və

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad (3)$$

bərabərlikləri ilə müqayisə etsək, onda

$P(B) \neq 0$ və $P(A) \neq 0$ olduqda uyğun olaraq.

$$P(A/B) = P(A) \quad (4)$$

və

$$P(B/A) = P(B) \quad (5)$$

bərabərlikləri alınar.

$P(B) > 0$ olduqda isə (4) bərabərliyindən (1) alınır. Deməli, $P(B) > 0$ olduqda A və B hadisələrinin asılı olmaması üçün (4) bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtidir.

$P(A) > 0$ olduqda isə A və B hadisələrinin asılı olmaması üçün (5) bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtidir.

(4) və (5) bərabərliklərinin hər hansı birinin doğruluğundan o birisinin doğruluğu çıxır. Doğrudan da, tutaq ki, (4) bərabərliyi doğrudur. Onda

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

bərabərliyindən (5) alınır.

Dediklərimizdən aydındır ki, asılı A və B hadisələri üçün

$$P(A/B) \neq P(A), \quad P(B/A) \neq P(B)$$

olar. **Uyuşmayan A və B hadisələri asılı hadisələrdir. Doğrudan da, bu halda A və B hadisələrinin birinin baş verməsi digərinin baş verməməsi deməkdir, yəni**

$$P(A/B) = P(B/A) = 0$$

bərabərlikləri ödənilir.

Qeyd edək ki, A və B hadisələri asılı olmadıqda A və $\overline{B}$, $\overline{A}$ və B, $\overline{A}$ və $\overline{B}$ hadisələri də asılı olmur. A və B hadisələri asılı olmadıqda onların cəminin ehtimalını

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İstənilən sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin asılı olmamasından da danışmaq olar.

Tərif 2. Verilmiş $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin ixtiyari biri yerdə qalan hadisələrin hər birindən və onların mümkün ola bilən istənilən hasilindən asılı olmadıqda, onlara **qarşılıqlı asılı olmayan və ya sadəcə olaraq asılı olmayan hadisələr** deyilir.

Asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılı olmayandır, lakin bunun tərsi doğru deyildir.

Tutaq ki, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri asılı olmayandır. Onda tərifə görə

$$P(A_2/A_1) = P(A_2),$$

$$P(A_3/A_1A_2) = P(A_3),$$

$$P(A_{n-1}/A_1 \dots A_{n-2}) = P(A_{n-1}),$$

$$P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_n)$$

münasibətləri ödənilər. Bu halda, əvvəlki paraqrafda isbat etdiyimiz

$$P(A_1A_2 \dots A_n) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1})$$

bərabərliyi

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \quad (6)$$

kimi yazılar. Beləliklə, aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olunur

Teorem (asılı olmayan hadisələr üçün ehtimalların vurma teoremi). Asılı olmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin hasilinin ehtimalı onların ehtimalları hasilinə bərabərdir:

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Misal 1. Qutuda 8 ağ və 5 qara kürə vardır. Qutudan bir kürə çıxarılır və rəngini qeyd etdikdən sonra yenidən qutuya qaytarılır. Sonra isə qutudan yeni bir kürə çıxarılır. Hər iki dəfə qutudan qara kürə çıxarılmasının ehtimalını hesablamalı.

Həlli. Qutudan birinci dəfə qara kürə çıxarılmasının (A hadisəsinin) ehtimalı $P(A) = \frac{5}{13}$ olar. Çıxarılmış kürə qutuya qaytarıldığından ikinci dəfə qutudan qara kürə çıxarılmasının (B hadisəsinin) da ehtimalı $P(B) = \frac{5}{13}$ olar. A və B hadisələri asılı deyildir. Buna görə də (1) düsturuna görə

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{25}{169}$$

alınır.

Misal 2. Üç nəfər atıcı bir-birindən asılı olmayaraq eyni hədəfə atəş açır. Birinci atıcının hədəfi vurma-
sının (A_1 hadisəsinin) ehtimalı $P(A_1) = 0,3$, ikinci
atıcının hədəfi vurma-
sının (A_2 hadisəsinin) ehtimalı
 $P(A_2) = 0,2$ və üçüncü atıcının hədəfi vurma-
sının (A_3 hadisəsinin) ehtimalı $P(A_3) = 0,5$ olduğunu bilərək,
atıcıların üçünün də atdığı güllələrin eyni zamanda
hədəfə dəyməsinin ehtimalını tapmalı.

Həlli. Asılı olmayan A_1, A_2 və A_3 hadisələrinin
hasili $A = A_1 A_2 A_3$ olsun. A hadisəsinin baş verməsi
ehtimalı (6) düsturu ilə hesablanır:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,03.$$

38.1.2 Tam ehtimal və Bayes düsturu

Tutaq ki, cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisə-
ləri tam qrup təşkil edir və B hadisəsi bu hadisələrin
hər hansı biri (və ancaq biri) ilə eyni zamanda baş
verir. A_k hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalı və B hadisəsinin

$P(B/A_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) şərti etimalları məlum-
dur. B hadisəsinin $P(B)$ ehtimalını tapmaq tələb olunur.

Bu məsələni həll etmək üçün qeyd edək ki, cüt-cüt
uyuşmayan və tam qrup təşkil edən A_k hadisələrinin
cəmi yəqin hadisədir

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

Buna görə də B hadisəsini cüt-cüt uyuşmayan BA_k hadisələrinin

$$B = \bigcup_{k=1}^n (BA_k) \quad (1)$$

cəmi şəklində göstərmək olar. Buradan E_3 aksiomuna görə

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)$$

münasibətini və sağ tərəfdəki hədlərə ehtimalların vurma teoremini tətbiq etdikdə

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) P(B/A_k) \quad (2)$$

bərabərliyi alınır.

(2) düsturuna **tam ehtimal düsturu** deyilir.

Tam ehtimal düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı məsələni də həll etmək olar.

Tutaq ki, cüt-cüt uyuşmayan və tam qrup təşkil edən A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalları keçirilməli olan müəyyən sınaqdan əvvəl verilmişdir. Sınaq aparıldıqda B hadisəsi baş verir və bu hadisənin A_k hadisələrinə nəzərən $P(B/A_k)$ şərti ehtimalları məlumdur.

B hadisəsinin baş verməsi A_k hadisəsinin ehtimalını necə dəyişir?

Bu məsələni həll etmək üçün

$$P(BA_k) = P(B)P(A_k/B) = P(A_k)P(B/A_k)$$

bərabərliklərindən istifadə etmək lazımdır. Buradan

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$$

bərabərliyi və (2) düsturuna əsasən

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)} \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

münasibəti alınır.

(3) bərabərliyinə **Bayes düsturu** deyilir. (3) düsturunda iştirak edən və sınaqdan əvvəl hesablanan $P(A_k)$ ehtimalları **apriori** (mənası “əvvəlki” (burada sınaqdan əvvəlki) olan apriori latın sözündən götürülmüşdür) ehtimallar, sınaqdan sonra hesablanan $P(A_k/B)$

($k = 1, 2, \dots, n$) ehtimalları isə **aposteriori** (mənası “sonrakı” (burada sınaqdan sonrakı) olan aposteriori latın sözündən götürülmüşdür) ehtimalları adlanır.

Burada baxılan A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) hadisələrinə bəzən **fərziyyələr**, (3) düsturuna isə **fərziyyələr teoremi** deyilir.

Misal 1. Eyni formalı üç qutunun birincisində 2 ağ və 3 qara, ikincisində 4 ağ və 5 qara və üçüncüsündə 3 ağ və 4 qara kürə vardır. Bu qutuların biri təsadüfən götürülür və ondan bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapmalı.

Həlli. Birinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_1 , ikinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_2 , üçüncü qutunun götürülməsi hadisəsi A_3 və çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsi B olsun. Qutuların götürülməsi eyni ehtimallı hadisələr olduğundan

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

olar. $A_k (k = 1, 2, 3)$ hadisələrinin baş verməsi şərtində B hadisəsinin şərti ehtimalı uyğun olaraq

$$P(B/A_1) = \frac{2}{5}, P(B/A_2) = \frac{4}{9}, P(B/A_3) = \frac{3}{7}$$

kimi hesablanır. Onda B hadisəsinin baş verməsi ehtimalı (3) tam ehtimal düsturuna əsasən tapılır:

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{401}{945} \approx 0,424.$$

Misal 2. Eyni formalı iki qutunun birincisində 2 ağ və 5 qara, ikincisində isə 4 ağ və 7 qara kürə vardır. Bu qutuların biri təsadüfən götürülür və ondan bir ağ kürə çıxarılır. Kürənin həm birinci və həm də ikinci qutudan çıxarılması hadisələrinin (fərziyyələrinin) ehtimalını tapmalı.

Həlli. Birinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_1 , ikinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_2 və çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsi B olsun. A_1 və A_2 hadisələri eyniehtimallı olduğundan

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

olması aydındır. Çıxarılan ağ kürənin birinci qutudan olması ehtimalı $P(B/A_1) = \frac{2}{7}$, ikinci qutudan olması ehtimalı isə $P(B/A_2) = \frac{4}{11}$ olar. Onda tam ehtimal düsturuna görə

$$P(B) = \sum_{k=1}^2 P(A_k)P(B/A_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{25}{77}$$

alınır.

Bu halda, axtarılan ehtimallar (3) Bayes düsturuna əsasən tapılır:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{25}{77}} = \frac{11}{25},$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{25}{77}} = \frac{14}{25}.$$

38.2.1. Asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı. Təkrarlanan sınaqlar. Bernulli düsturu. Ön böyük ehtimallı qiymət və onların tapılması.

1. Tutaq ki, eyni bir sınaq təkrarən aparılır, yəni eyni şərtlər kompleksi daxilində təkrar olunur və hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi vardır: A hadisəsi ya baş verir, ya da baş vermir. Hər bir sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı eyni sabit $P(A) = p$ ($0 < p < 1$) ədədi, baş verməməsi (yəni $\bar{A}$ hadisəsinin baş verməsi) ehtimalı isə $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ ədədidir.

Aparılan bu sınaqlar asılı olmadıqda onlara **Bernulli sınaqları** deyilir. Sınaqların asılı olmaması o deməkdir ki, hər bir sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsinin ehtimalı, digər sınaqların nəticələrindən asılı deyildir. $p = q = \frac{1}{2}$ olduqda Bernulli sınaqları **simmetrik sınaqlar** adlanır.

İndi tutaq ki, asılı olmayan n sınaq aparılır. Bu sınaqlar nəticəsində A hadisəsinin düz m dəfə baş verməsinin $P_n(m)$ ehtimalını tapmaq lazımdır.

Aparılan n asılı olmayan nəticəsində A hadisəsinin m dəfə və onunla qarşılıqlı əks olan $\bar{A}$ hadi-

səsinin $n - m$ dəfə baş verməsi müxtəlif ardıcılıqla (kombinasiyalarla) mümkün ola bilər. Məsələn,

$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_n \quad \underbrace{\bar{A} \bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m}$$

$$\underbrace{\bar{A} \bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{m-1} \quad \underbrace{\bar{A} \bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m+1}$$

və s. Belə “əlverişli” kombinasiyalardandır.

Aparılan n sınaq nəticəsində bu tipli kombinasiyalar

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

sayda əmələ gələ bilər. A hadisəsinin düz m dəfə baş verdiyi hər belə kombinasiyaya bir ω hadisəsi kimi baxmaq olar. ω hadisələri “əlverişli” kombinasiyalar təşkil edən m sayda A və $n - m$ sayda $\bar{A}$ hadisələrinin hasilindən ibarətdir. Aparılan sınaqlar asılı olmadığından bu ω hadisələrinin hər birinin ehtimalı ehtimalların vurma teoreminə əsasən hesablanır:

$$P(\omega) = P(A \dots A \cdot \bar{A} \dots \bar{A}) = P(A) \dots P(A) \cdot P(\bar{A}) \dots P(\bar{A}) = p^m q^{n-m}.$$

Əlverişli kombinasiyalar cüt-cüt uyuşmayan hadisələrdir və onların sayı C_n^m ədədinə bərabərdir. Buna görə də n sınaq nəticəsində A hadisəsinin düz m dəfə baş verməsi (bütün əlverişli kombinasiyalardan ibarət olan hadisələrin cəmi) hadisəsinin ehtimalı, ehtimalların toplanma teoreminə əsasən bütün əlverişli kombinasiyaların ehtimalları cəminə bərabər olar:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (1)$$

(1) düsturu Bernulli düsturu adlanır.

Bernulli düsturu vasitəsilə A hadisəsinin başvermə tezliyi olan $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ədədləri ilə $P_n(m)$ ehtimalları arasında uyğunluq yaradılır. Bu uyğunluğa ehtimalların **binomial paylanma qanunu**, n və p ədədlərinə isə bu **paylanmanın parametrləri** deyilir. Burada binomial qanun ifadəsinin işlədilməsi, $P_n(m)$ ehtimalının $(q + px)^n$ ifadəsinin Nyuton binomu düsturu ilə açılışında x^m qüvvətinin əmsalına bərabər olması ilə bağlıdır. Bu halda:

$$\varphi_n(x) = (q + px)^n \quad (2)$$

funksiyası $P_n(m)$ ehtimalları üçün **doğuran funksiya**, $P_n(m)$ ədədləri isə **binomial ehtimallar** adlanır.

Binomial ehtimallar cəminin vahidə bərabər olması

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = (p + q)^n = 1$$

göstərir ki, asılı olmayan n sınaq nəticəsində A hadisəsinin bütün mümkün kombinasiyalarla baş verməsindən ibarət olan hadisələr çoxluğu, yəni A hadisəsinin başvermə tezliyinin $m = 0, 1, 2, \dots, n$ qiymətlərinə uyğun olan bütün hadisələr çoxluğu tam sistem təşkil edir.

2. Bernulli sınaqları ilə əlaqədar olan bir sıra hadisələrin ehtimalının hesablanması yuxarıda şərh edildi. Orada baxılan hala uyğun olan ehtimal fəzasını qurmaq üçün elementar hadisələr olaraq sonlu $\omega = (A_1 A_2 \dots A_n)$ ardıcılıqları götürülməlidir. Burada A_k ilə A hadisəsi və ya onun qarşılıqlı əksi olan $\bar{A}$ hadisəsi işarə edilmişdir. Onda F hadisələr cəbri, bu

elementar hadisələrin mümkün ola bilən bütün cəmləri çoxluğundan və boş çoxluqdan ibarət olar. Məlumdur ki, elementar $\omega = (A_1 A_2 \dots A_n)$ hadisəsində A_k hadisələrinin $m (m = 0, 1, 2, \dots, n)$ dənəsi A hadisəsi ilə üst-üstə düşürsə, onda onun ehtimalı $p^m q^{n-m}$ ədədinə bərabərdir. Başqa hadisələrin ehtimalı isə ona daxil olan elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi tapılır.

Məsələn, aparılan n sınaq nəticəsində A hadisəsinin ən azı k dəfə baş verməsindən ibarət olan $B(m \geq k)$ hadisəsi, A hadisəsinin k dəfə baş verməsindən ibarət olan

$B(m = k)$ hadisəsinin, $k + 1$ dəfə baş verməsindən ibarət olan $B(m = k + 1)$ hadisəsinin və başqa uyğun hadisələrin cəminə bərabərdir:

$$B(m \geq k) = \bigcup_{j=k}^n B(m = j).$$

Onda ehtimalların toplanma teoreminə görə $B(m \geq k)$ hadisəsinin $P_n(m \geq k)$ ehtimalı $B(m = j)$ hadisələrinin $P_n(j)$ ehtimallarının cəminə bərabər olar:

$$P_n(m \geq k) = \sum_{j=k}^n P_n(j). \quad (3)$$

Bernulli sınaqlarının ümumiləşməsi olan daha ümumi sınaqlara da baxmaq olar.

Tutaq ki, $A_1, A_2, \dots, A_k$ cüt-cüt uyuşmayan və tam qrup təşkil edən hadisələrdir və aparılan sınaq nəticəsində onların baş verməsinin ehtimalı uyğun olaraq $p_1, p_2, \dots, p_k$ ədədləridir, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Bu za-

man aparılan asılı olmayan n sınaq nəticəsində A_1 hadisəsinin m_1 dəfə, A_2 hadisəsinin m_2 dəfə və nəhayət, A_k hadisəsinin m_k dəfə baş verməsi hadisəsinin ehtimalı

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_k^{m_k} \quad (4)$$

düsturu ilə hesablanır.

(4) düsturu Bernulli düsturu kimi isbat olunur.

Ehtimalın (4) düsturu ilə verilməsi ehtimalların polinomial paylanma qanunu adlanır.

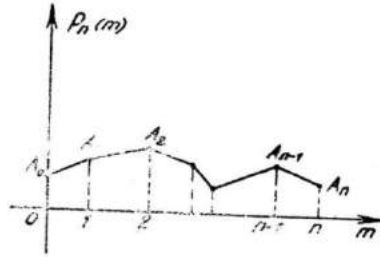
Bunun səbəbi odur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərinə nəzərən n -dərəcəli polinom (çoxhədli) olan

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_k x_k)^n$$

ifadəsinin ayrılışında alınan $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ qüvvətinin əmsalı (4) ədədinə bərabərdir.

3. Ehtimalların binomial paylanamsını əyani təsəvvür etmək üçün $P_n(m)$ ($m = 0, 1, \dots, n$) ehtimallarını həndəsi olaraq göstəriirlər.

Müstəvi üzərində təyin edilmiş düzbucaqlı koordinat sisteminin absis oxu üzərində A hadisəsinin baş vermə tezliyi olan m ədədi, ordinat oxu üzərində isə həmin ədədə uyğun olan $P_n(m)$ binomial ehtimalı göstərilir (koordinat oxları üzərində ölçü vahidləri eyni olmaya da bilər). Belə tapılan $A_m(m, P_n(m))$ ($m = 0, 1, \dots, n$) nöqtələri ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşdirildikdə nəticədə bir sınıq xətt alınır (şəkil 1). Buna **ehtimallar poliqonu** və ya **ehtimalların paylanma çoxbucaqlısı** deyilir.



Şəkil 1.

Ehtimallar poliqonu baxılan sınaqlar zamanı A hadisəsinin başvermə tezliyini, m -in hansı qiymətində $P_n(m)$ ehtimalının ən kiçik və ən böyük qiymət aldığını əyani olaraq görməyə imkan verir. $P_n(m)$ ehtimalının ən böyük qiymət aldığı $m = m_0$ ədədinə **binomial paylanmanın modası** və ya **ən böyük ehtimallı ədədi** deyilir.

Binomial paylanma üçün ən böyük ehtimallı ədəd

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = 1 + \frac{(n+1)p - m}{mq}$$

bərabərliyi vasitəsilə tapılır. Bu bərabərlikdən istifadə etməklə göstərmək olar ki, $(n+1)p$ ədədi kəsr olduqda $P_n(m)$ ehtimalı (m -in funksiyası kimi) ən böyük qiyməti $m_0 = [(n+1)p]$ aiymətində, $(n+1)p$ ədədi tam olduqda isə $m_0 = (n+1)p$ və $m_0 = (n+1)p - 1$ qiymətlərində alır.

Deməli, $(n+1)p$ ədədi kəsr olduqda binomial paylanmanın ancaq bir $m_0 = [(n+1)p]$ modası, $(n+1)p$ ədədi tam olduqda isə iki

$m_0 = (n+1)p - 1$ və $m_0 = (n+1)p$ modası vardır.

Misal 1. $n = 11$ və $p = \frac{1}{2}$ olduqda ən böyük ehtimallı ədədi tapmalı.

$(n + 1)p = \frac{12}{2} = 6$ tam ədəd olduğundan binomial paylanmanın ən böyük ehtimallı ədədi $m_0 = 5$ və $m_0 = 6$ olar.

Misal 2. $n = 12$ və $p = \frac{1}{2}$ olduqda ən böyük ehtimallı ədədi tapmalı.

$(n + 1)p = \frac{13}{2}$ kəsr ədəd olduğundan binomial paylanmanın ən böyük ehtimallı ədədi

$$m_0 = [(n + 1)p] = \left[\frac{13}{2} \right] = 6$$

olar.

38.2.2. Puassonun və Muavr – Laplasiın lokal və integral düsturları

Aparılan n Bernulli sınağında A hadisəsinin düz m dəfə baş verməsi ehtimalını

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m! (n - m)!} p^m q^{n-m} \quad (1)$$

Bernulli düsturu ilə hesablamaq n -nin böyük qiymətlərində bəzən çətin olur. Məsələn, $n = 2000$, $m = 1000$ və $p = \frac{1}{2}$ olduqda (1) düsturuna əsasən

$$P_n(m) = \frac{2000!}{(1000!)^2} \cdot \frac{2}{2^{2000}}$$

ifadəsini hesablamaq lazımdır. Bu hesablamayı aparmaq isə göründüyü kimi asan məsələ deyildir. Buna görə də belə hallarda (1) ifadəsinin n -nin böyük qiymətlərində

mətlərində asan hesablanan başqa ifadələrlə əvəz edilməsi məsələsi qarşıya çıxır. Bu məsələ riyaziyyatçılar tərəfindən müxtəlif şəkildə həll edilmişdir.

Bernulli paylanması parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində (1) ifadəsini hesablamaq üçün müxtəlif asimptotik düsturlar alınmışdır. Bu düsturların bir neçəsi burada şərh edilir.

Teorem 1 (Puasson). $n \rightarrow \infty$ şərtində $np \rightarrow \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$) olduqda hər bir sonlu $m = 0, 1, 2, \dots$ ədədi üçün

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

münasibəti ödənilir.

İsbatı . (1) ifadəsini, $\mu_n = np$ qəbul edərək,

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \frac{\mu_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)$$

kimi yazmaq olar. Buradan

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) = 1, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \text{ və } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)^{-m} = 1 \end{aligned}$$

bərabərliklərinə əsasən (2) alınır.

Qeyd edək ki, $n \rightarrow \infty$ şərtində $np \rightarrow \lambda$ olması üçün $p \rightarrow 0$ olmalıdır. Buna görə də (2) münasibətindən n -nin kifayət qədər böyük və p -nin kifayət qədər kiçik qiymətlərində

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \quad (3)$$

və ya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) \left[\frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right]^{-1} = 1 \quad (4)$$

asimptotik bərabərliyi alınır.

(3) düsturu binomial paylanmanın **Puasson yaxınlaşması** adlanır. Ondan, əsasən, $n > 100$ və $np < 30$ olduqda istifadə olunur.

Misal 1. $n = 2000$ və $p = 0,001$ olduqda $P_2(2)$ və $P_n(3)$ ehtimallarını hesablamalı.

n böyük ədəd, p kiçik ədəd və $np = 2 = \lambda$ olduğundan (2) və ya (3) bərabərliyinə görə

$$P_n(2) \approx \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0,271,$$

$$P_n(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{4}{3} e^{-2} = 0,180.$$

Teorem 2. (Muavr – Laplasın lokal teoremi). Bernulli paylanmasının p ($0 < p < 1$) parametri sabit ədəd olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{npq} P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_m^2} \right] = 1 \quad (5)$$

bərabərliyi m -in $-\infty < a \leq x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq b < +\infty$

bərabərsizliklərini ödəyən bütün qiymətlərində müntəzəm olaraq ödənilir.

İsbatı. x_m kəmiyyəti müntəzəm məhdud,

$a \leq x_m \leq b, m = np + \sqrt{npq} x_m$ və $n - m = nq - \sqrt{npq} x_m$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ şərtində $m \rightarrow \infty$ olar. Onda Stirlinqin

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \exp \left[-n + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$e^u = \exp u$$

düsturuna əsasən (1) ifadəsi

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \times \\ &\times \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \left[1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad (6) \end{aligned}$$

kimə göstərilə bilər.

$$m = np + \sqrt{npq} x_m \text{ və } n - m = nq - \sqrt{npq} x_m$$

olduğundan

$$\begin{aligned} m(n-m) &= (np + \sqrt{npq} x_m)(nq - \sqrt{npq} x_m) = \\ &= n^2 pq \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}} x_m\right) \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}} x_m\right) = \\ &= n^2 pq \left[1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \end{aligned}$$

olar və buna görə də

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} [1 + o(1)] \quad (7)$$

münasibəti alınır.

İndi

$$u_n = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

ifadəsinin loqarifmini qiymətləndirək:

$$\begin{aligned} \ln u_n = & -\min \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} = \\ & -(np + \sqrt{npq} x_m) \ln \left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right) - \\ & -(nq - \sqrt{npq} x_m) \ln \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right). \end{aligned}$$

Bu məqsədlə $\ln(1+x)$ funksiyasının

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad |x| < 1$$

Teylor ayrılışından istifadə edək. Onda

$$\begin{aligned} \ln u_n = & -(np + \sqrt{npq} x_m) \left[x_m \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{qx_m^2}{2np} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] - \\ & -(nq - \sqrt{npq} x_m) \left[x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{px_m^2}{2nq} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] = -\frac{x_m^2}{2} + \\ & + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

və ya

$$u_n = e^{-\frac{x_m^2}{2}} \cdot e^{O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-\frac{x_m^2}{2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \quad (8)$$

bərabərliyi doğru olar.

(6), (7) və (8) bərabərliklərindən (5) münasibəti alınır.

(5) bərabərliyindən n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \quad (9)$$

təqribi bərabərliyi alınır. Buna binomial paylanmanın **normal yaxınlaşması** deyilir.

(9) düsturunu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, -\infty < x < \infty \quad (10)$$

funksiyası vasitəsilə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (11)$$

Qeyd edək ki, n -in böyük qiymətlərində (9) və ya (11) təqribi bərabərliklərinin xətası çox kiçik olur. Buna görə də onlardan bəzən dəqiq bərabərlik kimi istifadə edirlər. Əlbəttə, bu zaman yalnız n -nin qiymətləri deyil, həm də p -nin qiymətləri nəzərə alınmalıdır. (11) düsturunun p -nin sıfıra yaxın qiymətlərində xətası nisbətən böyük olur, pq hasilinin 0,25-ə yaxın qiymətlərində isə həmin düstur daha dəqiq nəticə verir.

Binomial ehtimalı (11) düsturu ilə taparkən $\varphi(x)$ funksiyası qiymətlərinin hazır cədvəlindən istifadə etmək lazımdır. Bu cədvəl ehtimal nəzəriyyəsi kitablarında həmişə verilir. $\varphi(x)$ funksiyası cüt ($\varphi(x) = \varphi(-x)$) olduğundan onun qiymətləri cədvəli x -in yalnız müsbət qiymətləri üçün tərtib edilir.

Misal 2. $n = 1000, m = 500$ və $p = \frac{1}{2}$ olduqda $P_2(500)$ ehtimalını hesablamalı.

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - \frac{1}{2} \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} = 0$$

olduğundan (9) düsturuna görə

$$P_n(500) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1000 \cdot \frac{1}{4}}} e^0 \approx 0,2523 \text{ olar.}$$

Yenə də fərz edək ki , n sayda Bernulli sınağı aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin baş verməsinin ehtimalı sabit $p(0 < p < 1)$ ədədidir. Bu n sınaqda A hadisəsinin baş verməsi sayını göstərən m ədədinin $a \leq m \leq b$ şərtini ödəməsinin $P_n(a \leq m \leq b)$ ehtimalını necə tapmaq olar?

Bu suala isbatsız verdiyimiz aşağıdakı teorem cavab verir.

Teorem 3. (Muavr – Laplasın integral teoremi).
Bernulli paylanması üçün $x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$ və $x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[P_n(a \leq m \leq b) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = 1 \quad (12)$$

bərabərliyi doğrudur.

Burada $a \leq m \leq b$ bərabərsizliyinin

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}} = x_2$$

bərabərsizliyinə ekvivalent olduğunu nəzərə aldıqda (12) bərabərliyini aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[P_n \left(x_1 \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq x_2 \right) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = 1 \quad (13)$$

Bu teoremdən n -nin böyük qiymətlərində

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (14)$$

və

$$P_n \left(x_1 \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq x_2 \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (15)$$

kimi təqribi bərabərliklər alınır. Bu bərabərliklərin sağ tərəfindəki integral Laplas funksiyası adlanan

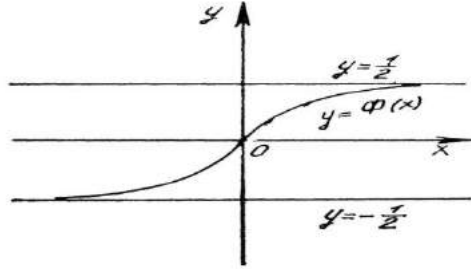
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < \infty \quad (16)$$

funksiyası ilə bağlıdır.

Laplas funksiyası təkdir: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Onun

$$\Phi(0) = 0 \text{ və } \Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

kimi xassələri vardır. Funksiyanın qrafiki 2-ci şəkildə verilmişdir.



Şəkil 2.

Burada

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \end{aligned}$$

olduğundan (14) münasibətini

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (17)$$

kimi yazmaq olar $(x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}})$.

Deməli, Bernulli paylanması üçün tələb olunan $P_n(a \leq m \leq b)$ ehtimalı Laplas funksiyasının uyğun x_1 və x_2 nöqtələrindəki qiymətlərinin fərfinə bərabərdir. Laplas funksiyasının bir sıra başqa məsələlərin həllində geniş tətbiqləri də vardır. Bunları nəzərə alaraq Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəli tətbiq edilmişdir. Bu cədvəldən və (16) düsturundan istifadə edərək binomial paylanma üçün axtarılan $P_n(a \leq m \leq b)$ ehtimalını tapmaq olar.

Muavr-Laplasın integral teoreminin bir çox tətbiqləri vardır. Bu teoremi tətbiq etməklə aşağıdakı məsələni həll edək.

Tutaq ki, n sayda Bernulli sınağı aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin başvermə ehtimalı sabit p ədədidir. Bu sınaqlar seriyasında A hadisəsinin başverməsinin sayı m olduqda $\frac{m}{n}$ kəsri həmin hadisənin başvermə tezliyi adlanır. Verilmiş istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon$ bərabərsizliyinin ödənilməsinin $P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon\right)$ ehtimalını tapmalı.

Bu məqsədlə $\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon$ bərabərsizliyini ona ekvivalent olan $-n\varepsilon \leq m - np \leq n\varepsilon$ şəklində yazaq və hər iki tərəfini müsbət $\sqrt{npq}$ ədədinə bölək:

$$-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon.$$

Onda

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right)$$

olar və (15) münasibətinə görə

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

və ya

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right). \quad (18)$$

$n \rightarrow \infty$ şərtində (18) münasibətinin sağ tərəfindəki ifadə vahidə yaxınlaşır: $2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right) \rightarrow 2\Phi(\infty) =$

$= 2 \cdot 1/2 = 1$. Deməli, n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$ ehtimalı vahidə çox yaxındır:

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 1$. Bu o deməkdir ki, n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ münasibətini yəqin hadisə hesab etmək olar, yəni hadisənin başvermə tezliyi $\frac{m}{n}$ onun p ehtimalına təqribən bərabər olur.

Buna **böyük ədədlər qanunu** deyilir. Onu ilk dəfə J. Bernulli isbat etmişdir.

Ehtimal nəzəriyyəsində “praktiki inamlılıq prinsipi” adlanan belə bir təklif vardır ki, əgər bir hadisənin aparılan sınaq nəticəsində başvermə ehtimalı vahidə çox yaxındırsa, onda onu “praktiki yəqin hadisə”, tə-

sinə, başvermə ehtimalı sıfıra çox yaxın olduqda isə onu “parktiki mümkün olmayan hadisə” hesab edirlər. Bu mənada n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində hadisənin başvermə tezliyinin onun ehtimalına bərabər olmasını “praktiki yəqin hadisə” hesab etmək olar.

(18) münasibəti vasitəsilə aşağıdakı kimi tərs məsələni də həll etmək olar: hadisənin $\frac{m}{n}$ başvermə tezliyinin p ehtimalından ε ədədindən az fərqlənməsi ehtimalının $1 - 2\alpha$ (α çox kiçik ədəddir) olması üçün neçə sınaq aparılmalıdır?

Bu halda (18) münasibətinə görə

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1 - 2\alpha \quad (19)$$

tənliyi həll edilməlidir.

Burada p ehtimalı çox vaxt məlum olmur. Buna görə də, $pq \leq \frac{1}{4}$ olmasından istifadə edərək, (18) bərabərliyinə görə alınan

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 2\Phi(2\varepsilon \sqrt{n}) = 1 - 2\alpha$$

münasibətindən istifadə olunur. Buradan, axtılan n ədədini (sınaqların sayını) tapmaq üçün

$$\Phi(x_\alpha) = \frac{1-2\alpha}{2} \quad (20)$$

tənliyi alınır. (19) bərabərliyini ödəyən x_α ədədi $\Phi(x)$ Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən tapılır. Nəticədə, $2\varepsilon\sqrt{n} = x_\alpha$ bərabərliyi və buradan da tələb olunan $n \geq \frac{x_\alpha^2}{4\varepsilon^2}$ ədədi təyin olunur.

Misal 3. Müəyyən sınaqlar seriyası aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin başvermə ehtimalı $\frac{1}{4}$ – dir. Bu hadisənin başvermə tezliyi ilə ehtimalı fərqlinin 0,025 ədəddindən kiçik olması ehtimalının 0,999 olması üçün neçə sınaq aparılmalıdır?

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad 1 - 2\alpha = 0,999$$

olduğundan (19) bərabərliyinə görə

$$2\Phi\left(\frac{0,025\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right) = 0,999, \quad 2\Phi\left(\frac{0,1\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) = 0,999$$

olar. Buradan $\Phi(x)$ funksiyasının qiymətləri cədvəlinə əsasən

$$\frac{0,1\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{3}} = 3,31, \quad n \geq 6287.$$

Nümunəvi məsələlər həlli

Məsələ 1. Eyni şəkildə olan dörd qutu vardır. Birinci qutuda 1 ağ, 1 qara, ikincidə 2 ağ, 3 qara, dördüncüdə 4 ağ, 7 qara kürə vardır. Bu qutulardan biri təsadüfən götürülüb, ondan bir kürə çıxarılır. Çıxarılan bu kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: Qutular eyni şəkildə olduqları üçün onların seçilmə imkanları bərabərdir. Ona görə əgər B_1, B_2, B_3, B_4 ilə uyğun olaraq I, II, III, IV qutuların seçilməsi hadisələrini işarə etsək aydındır ki, B_1, B_2, B_3, B_4 cüt-cüt uyuşmayan hadisələr olub tam qrup təşkil edirlər.

$$B_1+B_2+B_3+B_4 = P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = 1 \Rightarrow P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = 1.$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4)$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$$

$P(A/B_i)$ – şərti ehtimalı, i – isə qutudan çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını göstərir ($i = 1,2,3,4$). Ona görə

$$P(A/B_1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; \quad P(A/B_2) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5};$$

$$P(A/B_3) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}; \quad P(A/B_4) = \frac{4}{4+11} = \frac{4}{15}.$$

olar.

Qutulardan biri təsadüfən seçilib, oradan çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini A ilə işarə etsək, tam ehtimal düsturuna görə

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A/B_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{11} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{220+176+165+160}{440} = \frac{1}{4} \cdot \frac{721}{440} = \frac{721}{1760}$$

Cavab: $\frac{721}{1760}$

Məsələ 2. Qutuda 1 №-li zavodda hazırlanmış 12 detal, 2 №-li zavodda hazırlanmış 20 detal, 3 №-li zavodda hazırlanmış 18 detal vardır. 1, 2, 3 №-li zavodlarda hazırlanmış detalların əla keyfiyyətli olma ehtimalları uyğun olaraq 0,9; 0,6; 0,9-a bərabərdir. Qutudan təsadüfi olaraq götürülmüş detailın əla keyfiyyətli olması ehtimalını tapın.

Cavab: 0,78.

Məsələ 3. İki qutudan birincidə 5 ağ, 10 qara, ikincidə 3 ağ, 7 qara kürə vardır. İkinci qutudan təsadüfi olaraq bir kürə götürülüb birinci qutuya qoyulduqdan

sonra, birinci qutudan təsadüfi şəkildə bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: İkinci qutudan birinci qutuya bir kürə qoyulduqdan sonra birinci qutudan bir kürə çıxardıqda aşağıdakı iki hadisədən biri baş verə bilər:

B_1 – çıxarılan kürə birinci qutuda əvvəl olan kürələrdən biridir; B_2 – çıxarılan kürə sonradan ikinci qutudan birinci qutuya qoyulan kürədir.

$$\text{Aydın ki, } P(B_1) = \frac{15}{16}; P(B_2) = \frac{1}{16}.$$

A ilə çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini işarə etsək, onda $P(A/B_2)$ - şərti ehtimalı çıxarılan ağ kürənin birinci qutuda əvvəldən olan ağ kürələrdən birinin olması ehtimalıdır. Ona görə $P(A/B_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. $P(A/B_2)$ - şərti ehtimalı isə çıxarılan ağ kürənin, sonradan ikinci qutudakı kürələrdən birinin ikinci qutuya qoyulmasının olması ehtimalıdır: $P(A/B_2) = \frac{3}{10}$.

Tam ehtimal düsturuna görə

$$P(A) = P(B_1) \cdot P\left(\frac{A}{B_1}\right) + P(B_2) \cdot P\left(\frac{A}{B_2}\right) + \\ + P(B_3) \cdot P(A/B_3) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{10} = \frac{159}{480} - \frac{59}{160}.$$

Məsələ 4 . Eyni formalı iki qutunun birincisində 2 ağ, 5 qara, ikincisində isə 4 ağ, 7 qara kürə vardır. Bu qutulardan biri təsadüfən seçilir və ondan təsadüfən çıxarılan kürə ağ olur. Çıxarılan ağ kürənin a) birinci qutudan; b) ikinci qutudan olması ehtimalını tapın.

Həlli: Birinci qutunun seçilməsi hadisəsini B_1 , ikinci qutunun seçilməsi hadisəsini isə B_2 ilə işarə edək. Hər iki qutu eyni olduqlarından onların seçilmə imkanları eynidir. Ona görə

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

Çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini A ilə işarə edək. $P(A/B_1)$ - şərti ehtimalı birinci qutudan çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını göstərir. Ona görə

$$P(A/B_1) = \frac{2}{7}$$

$P(A/B_2)$ isə ikinci qutudan çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalıdır:

$$P(A/B_2) = \frac{4}{11}$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$P(A) = P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P\left(\frac{A}{B_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{25}{77}$$

a) $P(A/B_1)$ şərti ehtimalı çıxarılan ağ kürənin birinci qutudan olması ehtimalıdır. Bayes düsturuna görə

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{25}{77}} = \frac{11}{25}$$

b) Çıxarılan ağ kürənin ikinci qutudan olması ehtimalı $P(B_2/A)$ şərti ehtimalıdır. Bayes düsturuna görə

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(B_2/A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{25}{77}} = \frac{14}{25}$$

Cavab: a) $\frac{11}{25}$; b) $\frac{14}{25}$.

Məsələ 5. İki avtomat dəzgah ümumi konveyerə verilən eyni detal istehsal edir. Birinci avtomat dəzgahın məhsuldarlığı ikincisindən iki dəfə artıqdır. Birinci avtomat dəzgah orta hesabla bütün detalların 60%-ni, ikinci isə 84%-ni əla keyfiyyətlə hazırlayır. Konveyerdən təsadüfi olaraq götürülmüş detal əla keyfiyyətli

olur. Bu detalın avtomat dəzgahda istehsal olunma ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{10}{17}$. Göstəriş: B_1 – detal I dəzgahda istehsal olunub; B_2 – detal II dəzgahda istehsal olunub; A- götürülən detal əla keyfiyyətlidir – işarə edib, $P(B_1) =$

$= \frac{2}{3}$; $P(B_2) = \frac{1}{3}$; $P(A/B_1) = 0,6$; $P(A/B_2) = 0,84$ olduğunu nəzərə alaraq, Bayes düsturundan istifadə edin.

Məsələ 6. Qutuda 20 ağ, 10 qara kürə vardır. Çıxarılan hər kürə geri qaytarılıb qarışdırılmaqla qutudan dalbadal 4 kürə çıxarılır. Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: Hər dəfə qutudan çıxarılan kürənin ağ olma ehtimalını $P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ olar. Çıxarılan 4 kürə ikisinin ağ olması (1) Bernulli düsturu üzrə tapıla bilər. $q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $n=4, k=2$ olduğu üçün

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

Cavab: $\frac{8}{27}$.

Məsələ 7. Atıcının hər bir atəşdə hədəfi vurma ehtimalı 0,4-ə bərabərdir. Bu atıcı hədəfə ardıcıl olaraq 5 atəş açır. Bu zaman atıcının hədəfi: **a)** çox olmayan sayda; **b)** 2 dəfədən çox sayda; **c)** ən azı 4 dəfə; **ç)** ən çoxu 3 dəfə vurması ehtimalını tapın.

Həlli: $P = 0,4 \Rightarrow q = 1 - 0,4 = 0,6$

a) Atıcının hədəfi vurmalarının sayının 3-dən çox olmaması (2) düsturu üzrə, yəni

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3)$$

bərabərliyi tapılmalıdır.

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5; P_5(1) = C_5^1 p q^4 = 5 p q^4;$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 p^2 q^3;$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 p^3 q^2,$$

$$\begin{aligned} P &= q^5 + 5 p q^4 + 10 p^2 q^3 + 10 p^3 q^2 + q^2 (q^3 + 5 q^2 p + \\ &+ 10 p q^2 + 10 p^3) = 0,36 \cdot (0,216 + 5 \cdot 0,36 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,6 \cdot 0,16 + \\ &+ 10 \cdot 0,064) = 0,36 \cdot (0,216 + 0,72 + 0,96 + 0,64) = \\ &= 0,36 \cdot 2,536 = 0,91296 \Rightarrow P = 0,91296 \approx 0,91. \end{aligned}$$

b) Atıcının hədəfə 2 dəfədən çox vurması (3) düsturu üzrə tapıla bilər:

$$\begin{aligned} P &= P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^3 q + C_5^5 p^5 = \\ &= p^3 \left(\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot q^2 + 5 p q + p^2 \right) = 0,064 \cdot (3,6 + 1,2 + 0,16) = \\ &= 0,064 \cdot 4,96 = 0,31744 \Rightarrow P = 0,31744 \approx 0,32 \end{aligned}$$

c) Hədəfin ən azı 4 dəfə vurulma ehtimalı (4) düsturu ilə hesablanmalıdır:

$$\begin{aligned} P &= P_5(4) + P_5(5) = 5 p^4 q + p^5 = p^4 (5 q + p) = \\ &= 0,0256 \cdot (5 \cdot 0,6 + 0,4) = 0,0256 \cdot 3,4 = 0,08704 \Rightarrow P = \\ &= 0,08704 \approx 0,09. \end{aligned}$$

ç) Hədəfi ən çoxu 3 dəfə vurulma ehtimalı (5) düsturu ilə tapılır.

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) \approx 0,91.$$

Məsələ 8. Qutuda 10 ağ və 40 qara kürə vardır. Qutudan ardıcıl olaraq 14 kürə çıxarılır və rənginə baxılaraq qutuya qaytarılır. Ağ kürə çıxması hadisəsi üçün ən böyük ehtimallı ədədi tapın.

Həlli: Aydındır ki, ağ kürə çıxması ehtimalı

$$P = \frac{10}{10+40} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \text{ olar. Digər tərəfdən, } n=14,$$

$np + p = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$ tam ədəd olduğu üçün 8 dənə ən böyük ehtimallı ədəd vardır:

$$m_0^1 = np - q = 14 \cdot \frac{1}{5} - \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = 2.$$

$$m_0^{11} = np + p = 3.$$

Məsələ 9. Atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,7-dir. 25 dəfə atəş açılmışdır. Hədəfi vurmanın ən böyük ehtimalı ədədini tapın

Həlli: Şərtə görə $n=25$; $p=0,7$; $q=1-0,7=0,3$.

$$(n+1) \cdot p = 26 \cdot \frac{7}{10} = \frac{13 \cdot 7}{5} = \frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}$$

Kəsr ədəd olduğundan bir dənə ən böyük ehtimalı ədəd vardır:

$$m_0 = [(n+1)p] = \left[18\frac{1}{5}\right] = 18.$$

XXXIX FƏSİL. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT. PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ

39.1. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyası

Hadisə və onun ehtimalı anlayışları kimi təsadüfi kəmiyyət anlayışı da ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. Təsadüfi kəmiyyət, baxılan hadisəni kəmiyyətcə xarakterizə edən və təsadüfi amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətdir. Təsadüfi kəmiyyətin hansı qiyməti alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir. Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Təsadüfi kəmiyyətləri latın əlifbasının son böyük $X, Y, Z, \dots$ hərfləri və ya yunan əlifbasının kiçik $\xi, \eta, \mu, \dots$ hərfləri, onların ala biləcəyi qiymətləri isə uyğun olaraq kiçik $x, y, z, \dots$ hərfləri ilə işarə edirlər.

Misal 1. Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda düşən üzdəki xallar sayını X ilə işarə edək.

X – təsadüfi kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət 1, 2, 3, 4, 5, 6 qiymətlərinin birini ala bilər, lakin qiyməti alacağını qabaqcadan demək mümkün deyildir.

Misal 2. Müəyyən zaman müddətində telefon stansiyasına gələn siqnalların sayı təsadüfi kəmiyyətdir. Bu X kəmiyyəti 0, 1, 2, ... qiymətlərinin hər birini ala bilər.

Misal 3. İstənilən bir tələbənin boyunun uzunluğu təsadüfi X kəmiyyətidir. Bu kəmiyyət hər hansı sonlu (a, b) intervalındakı bütün qiymətləri ala bilər.

Misallardan aydındır ki, sınaqları kəmiyyətə xarakterizə edən təsadüfi X kəmiyyətlərinin qabaqcadan hansı qiyməti alacağını qəti demək mümkün deyildir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin ancaq ala bildiyi qiymətlər çoxluğu göstərilə bilər. Bu qiymətlər sonlu, hesabi və qeyri – hesabi çoxluq təşkil edə bilər. Əgər təsadüfi kəmiyyət, sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətlərini ala bilirsə, ona **diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir. Birinci iki misalda baxılan X kəmiyyəti diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edərsə, ona **kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir. Üçüncü misalda baxılan təsadüfi kəmiyyət kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir.

Diskret və kəsilməz olmayan təsadüfi kəmiyyətlər də vardır. Bundan başqa, bir intervalda kəsilməz olan təsadüfi kəmiyyət başqa bir intervalda diskret ola bilər.

Təsadüfi kəmiyyətləri, ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstərməklə təyin etmək mümkün deyildir. Qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimalla ala bilən müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlər vardır. Buna görə də, təsadüfi kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərməlidir.

Bu məqsədlə təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını təyin etmək üçün əvvəlcə təsadüfi kəmiyyətin ciddi – riyazi tərifini vermək lazımdır.

Tutaq ki, hər hansı $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal fəzası verilmişdir. Bu o deməkdir ki, $\Omega = \{\omega\}$ elementar hadisələr fəzası, onun σ - cəbr olan F hadisələr sistemi və bu sistem üzərində təyin olunmuş $P(A)$ ehtimalı göstərilmişdir. Tutaq ki, $X = X(\omega)$ ilə $\Omega = \{\omega\}$ çoxluğunda təyin olunmuş həqiqi funksiya və x ilə istənilən həqiqi ədəd işarə edilmişdir. Ω çoxluğunun $X(\omega) < x$ şərtini ödəyən bütün ω elementləri çoxluğu $\{\omega \mid X(\omega) < x\}$ və ya qısaca olaraq $\{X < x\}$ ilə işarə edilir.

Tərif. $\Omega = \{\omega\}$ elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi x ədədi üçün

$$\Omega_x = \{\omega \mid X(\omega) < x\} \subset F \quad (1)$$

şərtini ödəyən həqiqi $X = X(\omega)$ funksiyasına **təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

İstənilən həqiqi $x (-\infty < x < \infty)$ ədədi üçün Ω_x çoxluğu σ - cəbr olan F sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimala, yəni təsadüfi X kəmiyyətinin x -dən kiçik qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalına həmin təsadüfi X **kəmiyyətinin paylanma funksiyası** deyilir və

$$F(x) = F_x(x) = P(X < x) = P(X(\omega) < x) \quad (2)$$

ilə işarə edilir.

Verilmiş təsadüfi kəmiyyətlə bağlı olan bir çox hadisələrin ehtimalını həmin təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası vasitəsilə hesablamaq olar.

Baxılan F hadisələr sistemi σ - cəbr olduğundan $\{X < x\}$ hadisəsinin qarşılıqlı əksi olan $\{X \geq x\}$ hadisəsi də həmin sistemə daxildir. Buna görə də $\{X \geq x\}$ hadisəsinin ehtimalı (2) bərabərliyinə əsasən

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x) \quad (3)$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Bundan başqa, $x_1 < x_2$ olduqda $\{X < x_1\} \vee \{x_1 \leq X \leq x_2\}$ hadisələri uyuşmayandır və

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \leq X < x_2\}$$

bərabərliyi ödənilir. Onda ehtimalların toplanma aksiomuna görə

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

və ya

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X < x_2) &= P(X < x_2) - P(X < x_1) = \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

olar, yəni $\{x_1 \leq X < x_2\}$ hadisəsinin ehtimalı ehtimalın paylanma funksiyası vasitəsilə (4) bərabərliyi ilə hesablanır.

Misal 4. Tutaq ki, asılı olmayan n sınaq aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin başvermə ehtimalı sabit p ədədidir. Bu sınaqlar seriyasında A hadisəsinin baş verməsi sayı X olsun. X təsadüfi kəmiyyətdir və onun m -ə bərabər qiymət alması hadisəsinin ehtimalı Bernulli düsturu ilə hesablanır:

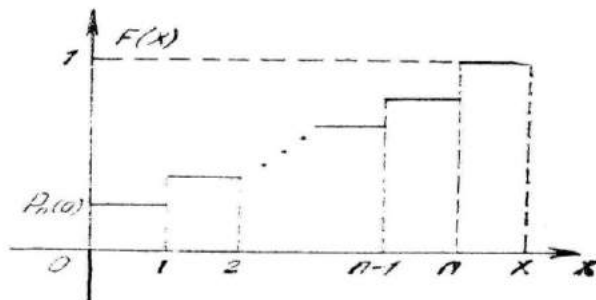
$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 & \text{olduqda} \\ \sum_{(k < x)} P_n(x), & 0 < x \leq n & \text{olduqda} \\ 1, & x > n & \text{olduqda} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

(5) funksiyası $x = 0, 1, 2, \dots, n$ nöqtələrində kəsilir və onun qrafiki pilləvari xətdir (Şəkil 1). Onun $x = m$ nöqtəsində sıçrayışı

$d = F(m + 0) - F(m - 0) = P_n(m)$
 ədədinə bərabərdir.



Şəkil 1.

Misal 5. Tutaq ki, tam m qiymətini ($m = 0, 1, 2, \dots$)

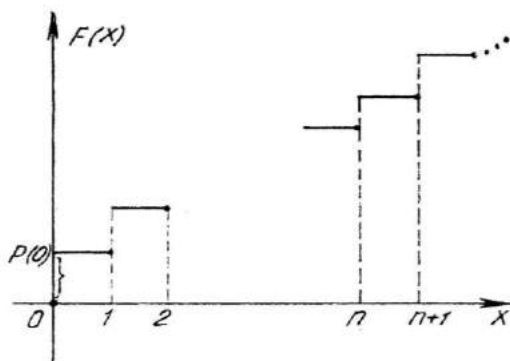
$$P(m) = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad (6)$$

(λ sabit ədəddir) ehtimalı ilə alan təsadüfi kəmiyyət X ilə işarə edilmişdir. Onun paylanma funksiyası

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ olduqda} \\ \sum_{k < x} P(k), & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (7)$$

kimi təyin edilir.

(7) funksiyası $x = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) nöqtələrində kəsilir və bu nöqtələrdə onun sıçrayışı $P(m)$ ədədinə bərabərdir. Funksiyanın qrafiki “sonsuz sayda” pillədən ibarət olan pilləvari xətdir (şəkil 2).



Şəkil 2.

Təsadüfi kəmiyyət, bu misalda göstərilən kimi verildikdə deyirlər ki, o, “ λ parametrlı Puasson qanunu ilə paylanmışdır”.

39.2. Paylanma funksiyasının xassələri

Tutaq ki, həqiqi dəyişənli $F(x)$ funksiyası hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır:

$F(x) = F_x(x) = P(X < x)$. Onda istənilən həqiqi $x_1 < x_2$ ədədləri üçün

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənilir. Burada $x_1 = x$ və $x_2 = x + \Delta x$ qəbul etdikdə

$$P(x \leq X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

olar və axırını bərabərlikdə $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x > 0$) şərtində limitə keçdikdə

$$P(X = x) = F(x + 0) - F(x) \quad (2)$$

münasibəti alınır.

(2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki fərqin qiyməti $F(x)$ -in x nöqtəsində kəsilən və ya kəsilməyən olma-

sından asılıdır: $F(x)$ funksiyası x nöqtəsində kəsilməyən olduqda (2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki fərq sıfıra, kəsilən olduqda isə paylanma funksiyasının həmin nöqtədəki sıçrayışına bərabər olur.

$$d = F(x + 0) - F(x).$$

Deməli, paylanma funksiyası hər yerdə kəsilməyən olan təsadüfi X kəmiyyətinin hər bir konkret tək x qiymətini alması hadisəsinin ehtimalı sıfıra bərabərdir: $P(X = x) = 0$. Bu təklifi “mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bərabərdir” təklifindən fərqləndirmək lazımdır. Burada təsadüfi X kəmiyyətinin x qiymətini alması mümkündür, lakin həmin qiyməti alması ehtimalı sıfıra bərabərdir.

Paylanma funksiyasının bir sıra ümumi xassələri vardır.

I. Paylanma funksiyası azalmayıdır.

Doğrudan da, hadisənin ehtimalı mənfi ədəd olmadığından, istənilən $x_1 < x_2$ ədədləri üçün (1) bərabərliyindən

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0, \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

alınır.

II. Paylanma funksiyası üçün

$$F(+\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1, \quad (3)$$

$$F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow -\infty} F(n) = 0 \quad (4)$$

bərabərlikləri doğrudur.

İsbati. $A_n = \{X < -n\}$ və $B_n = \{X < n\}$ hadisələri ardıcılıqları

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

münasibətlərini ödəyir. Buradan hadisələr ardıcılıqlarının məlum xassələrinə görə (3) və (4) bərabərlikləri alınır:

$$F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\emptyset) = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(\Omega) = 1.$$

III. Paylanma funksiyası istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən x nöqtəsində

$$F(x - 0) = F(x) \quad (5)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Monoton artan və x nöqtəsinə yığılan ixtiyari $\{x_n\}$ ardıcılığına baxaq:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Bu ardıcılıq soldan x nöqtəsinə yığıldığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x - 0)$$

olar. Ardıcılığın hədləri vasitəsilə təyin edilmiş $C_n = \{X < x_n\}$ hadisələr ardıcılığı

$$C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \{X < x\}$$

münasibətlərini ödəyir. Bu hadisələr ardıcılığına II xassənin isbatında göstərilən təklifi tətbiq etdikdə (5) bərabərliyi alınır:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X < x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x - 0) \end{aligned}$$

Bu xassələr paylanma funksiyasını tamamilə təyin edir. İsbat etmək olar ki, verilmiş $F(x)$ funksiyasının müəyyən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olması üçün onun I-III xassələrini ödəməsi zəruri və kafi şərtədir. Bu təklifdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə . Həqiqi dəyişənli $f(x)$ funksiyası

$$f(x) \geq 0 (-\infty < x < \infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (6)$$

şərtlərini ödədikdə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (7)$$

funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Hər bir təsadüfi kəmiyyət öz paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir. Lakin paylanma funksiyasının verilməsi ilə təsadüfi kəmiyyət birqiymətli təyin olunmur. Hər təsadüfi kəmiyyətin ancaq bir paylanma funksiyası olduğu halda, bir funksiya müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyası ola bilər.

Misal 1. X təsadüfi kəmiyyəti -2 və $+2$ qiymətlərinin hər birini eyni $p=0,5$ ehtimalı ilə alır və $Y=-X$. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyasını təyin etməli.

Həlli. $x \leq -2$ olduqda $\{X < x\}$ hadisəsi mümkün olmayan hadisə olduğundan $F(x) = P(X < x) = 0$ olar.

$-2 < x \leq 2$ olduqda $\{X < x\}$ hadisəsi $\{X = -2\}$ hadisəsinə bərabərdir və $F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2}$ olur. $x > 2$ olduqda isə $\{X < x\}$ hadisəsi $\{X = -2\}$ və $\{X = 2\}$ hadisələrinin cəminə bərabərdir. Bu halda alırıq:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -2) + P(x = 2) = 1.$$

Beləliklə, X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \text{ olduqda} \\ \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2 \text{ olduqda} \\ 1, & x > 2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

kimi təyin olunur. Eyni mühakimə ilə bu funksiyanın Y təsadüfi kəmiyyətinin də paylanma funksiyası olduğunu göstərmək olar. Buradan aydındır ki, iki müxtəlif X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni bir paylanma funksiyası vardır.

39.3.1. Diskret paylanmalar

Yuxarıda göstərdik ki, təsadüfi kəmiyyətin tamamilə təyin olunması üçün onun aldığı qiymətlər çoxluğu və bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası bu mənada onu tamamilə xarakterizə edən ən universal vasitələrdən biridir. Lakin təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə, bu qiymətlərə uyğun ehtimallar arasında əlaqə başqa üsullarla da verilə bilər.

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün (ala bildiyi) qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münsibətə **təsadüfi kəmiyyətin paylanma (və ya təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma) qanunu** deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da, onların hamısından paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların iki əsas növü burada göstərilir.

Diskret paylanmalar.

Tutaq ki, diskret təsadüfi X kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabi sayda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları

$$P(X = x_k) = p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (1)$$

göstərilmişdir. Burada cüt-cüt uyuşmayan

$$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots \quad (2)$$

hadisələri tam qrup təşkil etdiyindən

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1 \quad (3)$$

şərti ödənilir.

Diskret təsadüfi X kəmiyyətinin aldığı $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının $P(X = x_k) = p_k$ ehtimallarının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir. Diskret təsadüfi kəmiyyətin bu paylanma qanununu cədvəl şəklində də yazmaq olar:

X -in mümkün qiymətləri	x_1	x_2	...	x_n	...
Bu qiymətləri alma ehtimalları	p_1	p_2	...	p_n	...

Bu cədvələ diskret təsadüfi kəmiyyətin **ehtimalının paylanma cədvəli** deyilir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} P_k \quad (4)$$

kimi tapılır. (4) funksiyası x_k nöqtələrində kəsildir və bu nöqtələrdə sıçrayışı p_k ədədinə bərabərdir:

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k (k = 1, 2, \dots).$$

Ehtimal nəzəriyyəsində ən çox işlənən diskret paylanmalar aşağıdakılardır:

a) Binomial paylanma. X təsadüfi kəmiyyəti $m = 0, 1, 2, \dots, n$ mümkün qiymətlərini

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad 0 < p < 1 \quad (5)$$

ehtimalı ilə aldıqda, ona binomial qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir. n və p ədədləri binomial paylanmanın parametrləri adlanır.

b) Puasson paylanması

X təsadüfi kəmiyyəti tam $m = 0, 1, 2, \dots$ mümkün qiymətlərini

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (6)$$

ehtimalı ilə aldıqda, ona λ parametrlı Puasson qanunu ilə paylanmış **diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

c) Həndəsi paylanma

X təsadüfi kəmiyyəti $m = 0, 1, 2, \dots$ mümkün qiymətlərini

$P(X = m) = p(1 - p)^m, \quad 0 < p < 1 \quad (7)$
ehtimalları ilə aldıqda, ona p parametrlili həndəsi qanunla paylanmış **diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

d) Hiperhəndəsi paylanma

X təsadüfi kəmiyyəti $m = 0, 1, 2, \dots, \min(n, M)$ mümkün qiymətlərini

$$P(X = m) = \frac{C_m^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (8)$$

ehtimalı ilə aldıqda, ona hiperhəndəsi qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir. N , M və n ədədləri hiperhəndəsi paylanmanın parametrləri adlanır.

39.3.2. Kəsilməz paylanmalar

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir. Paylanma funksiyalarının quruluşu isə əsasən mürəkkəb və müxtəlifdir. Lakin elə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər vardır ki, onların $F(x)$ paylanma funksiyası, müəyyən xassəsi olan başqa bir $p(t) \geq 0 (-\infty < t < \infty)$ funksiyası vasitəsilə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad (1)$$

kimi sadə şəkildə göstərilir. Ehtimalın paylanması ilə əlaqədar olan məsələləri belə təsadüfi kəmiyyətlər üçün öyrənmək daha əlverişlidir.

Tərif. Paylanma funksiyası (1) şəklində göstərilə bilən X təsadüfi kəmiyyətinə, mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət, $p(t) = px(t)$ funksiyasına isə onun ehtimalının paylanma sıxlığı və ya sadəcə olaraq sıxlıq funksiyası deyilir.

Burada, sonlu sayda nöqtə müstəsna olmaqla, hər yerdə kəsilməyən sıxlıq funksiyasına baxılır.

Praktikada təsadüf olunan kəsilməz paylanma funksiyaları bir qayda olaraq (1) şəklində göstərilə bilər, yəni mütləq kəsilməz funksiyalardır. Buna görə də mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri sadəcə olaraq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər adlandırırlar (lakin bunları qarışdırmaq olmaz!). Bundan sonra, burada da kəsilməz təsadüfi kəmiyyət istilahı həmin mənada işlədilir.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı kimi xassələri vardır:

1. $p(t) \geq 0, -\infty < t < \infty.$

Bu xassənin doğruluğu paylanma funksiyasının mənfi qiymətlər almamasından aydındır.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1.$

Bu xassə paylanma funksiyasının $F(+\infty) = 1$ bərabərliyini ödəməsindən alınır.

3. $p(t)$ funksiyası $t=x$ nöqtəsində kəsilməz olduqda

$$F'(x) = p(x) \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

(2) bərabərliyi yuxarı sərhədi dəyişən olan müəyyən integralın törəməsi haqqındakı teoremdən alınır.

(1) bərabərliyindən istənilən $x_1 < x_2$ üçün

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt \quad (3)$$

münasibəti alınır. Doğrudan da,

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

və (1) bərabərliyinə görə

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$$

olduğundan (3) münasibəti doğru olar.

(3) bərabərliyindən istənilən x ədədi üçün

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x + \frac{1}{n}}^{x + \frac{1}{n} + 1} p(t) dt = 0 \end{aligned}$$

münasibəti alınır. Buradan aydındır ki, ixtiyari X kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti

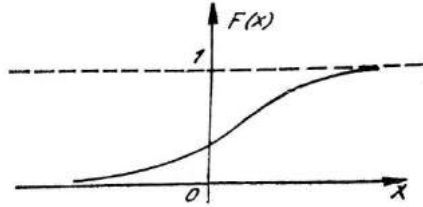
$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$ münasibətlərini ödəyir.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası verildikdə onun paylanma funksiyası (1) bərabərliyi ilə tapılır.

Paylanma funksiyası isə təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanununu təyin edir. Buradan ay-

dındır ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalının paylanma qanunu onun sıxlıq funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin olunur.

(1) bərabərliyi ilə təyin olunan paylanma funksiyasının qrafiki 1 –cü şəkildə göstərilən tipli ayrılır olur.



Şəkil 1.

Ehtimal nəzəriyyəsində ən çox istifadə olunan kəsilməz paylanmalar aşağıdakılardır:

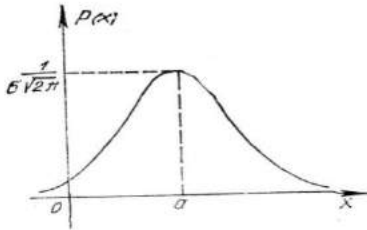
a) Normal paylanma.

X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

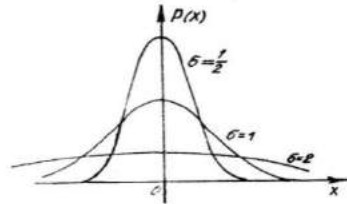
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0 \quad (4)$$

şəklində olduqda, ona **normal qanunla** və ya **Qauss qanunu ilə paylanmış kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir. a və σ ədədləri normal paylanmanın **parametrləri** adlanır.

“Normal paylanma” istilahını ehtimal nəzəriyyəsinə Pirson daxil etmişdir.



Şəkil 2.



Şəkil 3

(4) funksiyasının qrafikinə **normal əyri və ya Qauss əyrisi** deyilir. Bu əyrinin forması σ parametrinin qiymətlərindən asılıdır (Şəkil 2.). Bunu $P(x)$ – in $a=0$ olduqda $\sigma^2 = \frac{1}{4}$, $\sigma^2 = 1$ və $\sigma^2 = 4$ qiymətlərində qurulmuş qrafiklərindən görmək olar (Şəkil 3). Şəkildən görünür ki, σ parametri kiçildikcə normal əyri ordinat oxuna sıxılaraq, həmin ox boyunca yuxarıya dartılır. σ parametri artdıqda isə normal əyri absis oxuna sıxılır və həmin ox boyunca genəlir.

b) Üstlü paylanma

X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \text{ olduqda} \\ 0, & x \leq 0 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (5)$$

olduqda, ona **üstlü qanunla paylanmış kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir. α ədədi **üstlü paylanmanın parametri** adlanır. Bu halda, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \text{ olduqda} \\ 0, & x \leq 0 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (6)$$

olur.

c) Müntəzəm paylanma

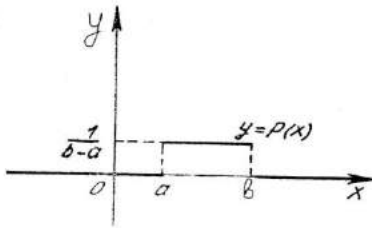
X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \quad a < b \text{ olduqda} \\ 0, & x \notin [a, b] \text{ olduqda} \end{cases} \quad (7)$$

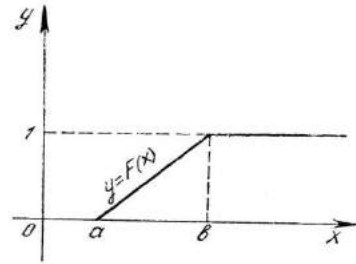
olduqda, ona **müntəzəm paylanan kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir. a və b sabitləri **müntəzəm paylanmanın parametrləri** adlanır. Bu paylanma üçün paylanma funksiyası aşağıdakı kimi tapılır:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ olduqda} \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \text{ olduqda} \\ 1, & x \geq b \text{ olduqda} \end{cases} \quad (8)$$

(7) və (8) funksiyalarının qrafiklərindən (şəkil 4,5) görünür ki, $y = F(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir.



Şəkil 4.



Şəkil 5.

**XXXX FƏSİL. ÇOXÖLÇÜLÜ FUNKSIYANIN
XASSƏLƏRİ. RİYAZİ GÖZLƏMƏNİN
XASSƏLƏRİ. BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU.
KORRELYASIYA VƏ REQRESSIYA ANALIZI.**

**40.1.Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər və onların
paylanma funksiyası**

Tutaq ki, $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal fəzası və $\Omega = \{\omega\}$ elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş

$$\xi_1 = \xi_1(\omega), \quad \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega)$$

Təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. Bu kəmiyyətləri bir ξ vektorunun komponentləri hesab etdikdə alınan

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

vektoruna n – ölçülü təsadüfi kəmiyyət və ya n – ölçülü təsadüfi vektor deyilir. Bu halda, n həqiqi dəyişənli

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

funksiyası $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ təsadüfi vektorunun n – ölçülü paylanma funksiyası və ya $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası adlanır.

$\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$ hadisəsi

$\{\xi_1 < x_1\}, \{\xi_2 < x_2\}, \dots, \{\xi_n < x_n\}$ hadisələrinin hamısının eyni zamanda ödənilməsindən ibarət olan elementar hadisə olduğundan, yəni həmin hadisələrin hasil

$$\begin{aligned} \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} &= \\ &= \{\xi_1 < x_1\}, \{\xi_2 < x_2\}, \dots, \{\xi_n < x_n\} \end{aligned}$$

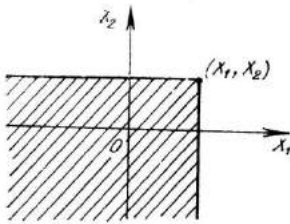
olduğundan o, F sisteminə daxildir və buna görə də onun (2) ehtimalı həmişə təyin olunur.

Ehtimalın tərifinə görə $0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$ olar.

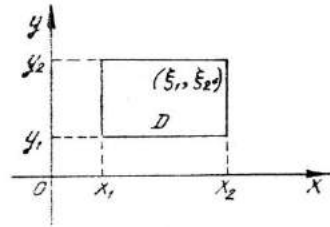
Xüsusi halda, iki ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası, $\xi_1 < x_1$ və $\xi_2 < x_2$ bərabərsizliklərinin eyni zamanda ödənilməsinin baş verməsindən ibarət hadisənin ehtimalını göstərən

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(\xi_1 < x_1 \text{ və } \xi_2 < x_2) \\ &= P(\{\xi_1 < x_1\}, \{\xi_2 < x_2\}) \end{aligned} \quad (3)$$

ikidəyişənli funksiyası olar. Bu funksiya həndəsi olaraq, (ξ_1, ξ_2) nöqtəsinin, təpəsi (x_1, x_2) nöqtəsində olan və həmin nöqtədən solda və aşağıda yerləşən sonsuz kvadrata düşməsinin ehtimalını göstərir (Şəkil 1, a).



a)



b)

Şəkil 1.

Burada sadəlik üçün əsasən ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətlər və onların (3) paylanma funksiyası ödənilir.

İkiölçülü (ξ_1, ξ_2) kəmiyyətinin

$$D = \{(x, y) | x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2\}$$

düzbucaqlısına düşməsinin (şəkil 1, b), yəni

$$\{x_1 \leq \xi_1 < x_2, y_1 \leq \xi_2 < y_2\}$$

hadisəsinin ehtimalı (3) paylanma funksiyası vasitəsilə

$$P(x_1 \leq \xi_1 < x_2, y_1 \leq \xi_2 < y_2) = F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \quad (4)$$

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da,

$$A = \{x_1 \leq \xi_1 < x_2, y_1 \leq \xi_2 < y_2\},$$

$$A_1 = \{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y_2\}$$

$$A_2 = \{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y_1\} \vee$$

$$A_3 = \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y_2\}$$

hadisələri üçün

$$A_1 = A + A_2 + A_3,$$

$$A_2 A_3 = \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y_1\} = A_4$$

münasibəti ödənilir. Buradan

$$\begin{aligned} P(A_2 + A_3) &= P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3) = \\ &= P(A_2) + P(A_3) - P(A_4) \end{aligned}$$

bərabərliyinə əsasən

$$P(A) = P(A_1) + P(A_4) - P(A_2) - P(A_3)$$

münasibəti və ya (4) bərabərliyi alınır.

(4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadə $F(x, y)$ funksiyasının D düzbucaqlısında ikitərtibli artımı adlanır və $\Delta^2 F$ ilə işarə olunur. Buna əsasən (4) bərabərliyini

$$P(x_1 \leq \xi_1 < x_2, y_1 \leq \xi_2 < y_2) = \Delta^2 F \quad (5)$$

kimi yazmaq olar.

40.2.1. Çoxölçülü funksiyanın xassələri

Çoxölçülü paylanma funksiyasının bir sıra xassələri vardır.

I. Paylanma funksiyası hər bir arqumentinə görə azalmayıdır.

Doğrudan da, $\alpha < \beta$ olduqda

$$\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < \alpha\} \subset \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < \beta\}$$

olar və buna görə də

$$F(x_1, \alpha) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < \alpha) \leq P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < \beta) = F(x_1, \beta)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

II. Paylanma funksiyası hər bir argumentinə görə soldan kəsilməyəndir.

III. $F(x_1, x_2)$ funksiyası üçün

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} F(x_1, x_2) = F(+\infty, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0, \quad (k = 1, 2)$$

münasibətləri ödənilir.

ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü $F(x_1, x_2)$ birgə paylanma funksiyasına əsasən onların birölçülü

$$F_1(x_1) = F_{\xi_1}(x_1) \text{ və } F_2(x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$$

paylanma funksiyalarını tapmaq olar. Doğrudan da, $\{\xi_2 < +\infty\} = \Omega$ yəqin hadisə olduğundan

$$\{\xi_1 < x_1\} = \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < +\infty\}$$

və buradan

$$F_1(x_1) = F_{\xi_1}(x_1) = P(\xi_1 < x_1) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < +\infty) = F(x_1, +\infty) \quad (1)$$

alınır.

$$\begin{aligned} \text{Eyni qayda ilə } F_2(x_2) &= F_{\xi_2}(x_2) = P(\xi_2 < x_2) = \\ &= P(\xi_1 < +\infty, \xi_2 < x_2) = F(+\infty, x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

münasibətini də almaq olar.

İkiölçülü diskret və kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər uyğun birölçülü təsadüfi kəmiyyətlər kimi təyin olunur.

(ξ_1, ξ_2) təsadüfi vektorunun hər bir komponenti diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda, ona **ikiölçülü dis-**

diskret təsadüfi vektor (və ya ikiölçülü diskret təsadüfi kəmiyyət) deyilir.

İkiölçülü diskret təsadüfi vektorun paylanma funksiyası

$$P(u_1, u_2) = P(\xi_1 = u_1, \xi_2 = u_2)$$

kəmiyyəti vasitəsilə

$$F(x_1, x_2) = \sum_{u_1 < x_1, u_2 < x_2} P(u_1, u_2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada toplama əməli (ξ_1, ξ_2) vektorunun $u_1 < x_1, u_2 < x_2$ şərtlərini ödəyən bütün mümkün olan (u_1, u_2) qiymətləri üçün aparılır. Bu halda,

$$P(\xi_1 = u_1^{(i)}, \xi_2 = u_2^{(j)}) = P_{ij},$$

$$i, j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

şəkildə verilmiş ikiölçülü diskret paylanma üçün

$$P_{ij} \geq 0, \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij} = 1$$

münasibətləri ödənilər. Onda ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin uyğun birölçülü paylanmaları

$$P(\xi_1 = u_1^{(i)}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi_1 = u_1^{(i)}, \xi_2 = u_2^{(j)}) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij},$$

$$P(\xi_2 = u_2^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_1 = u_1^{(i)}, \xi_2 = u_2^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij},$$

bərabərlikləri şəklində təyin olunur.

Paylanma funksiyası

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} P(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4)$$

şəklində göstərilə bilən (ξ_1, ξ_2) təsadüfi kəmiyyətinə **iki-ölçülü kəsilməz təsadüfi vektor** (və ya **ikiölçülü kəsilməz təsadüfi kəmiyyət**), $P(t_1, t_2) = P_{\xi_1 \xi_2}(t_1, t_2)$ funksiyasına isə onun **sıxlıq funksiyası** deyilir.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı kimi xassələri vardır:

$$1. P(t_1, t_2) \geq 0, -\infty < t_1 < \infty, -\infty < t_2 < \infty.$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1.$$

3. $P(t_1, t_2)$ sıxlıq funksiyası $(x_1, x_2) \in E_2$ nöqtəsində kəsilməz olduqda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = P(x_1, x_2) \quad (5)$$

bərabərliyi doğrudur.

(4) bərabərliklərindən

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq \xi_1 < x_2, y_1 \leq \xi_2 < y_2) \\ = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6)$$

bərabərliyi alınır. Ümumiyyətlə, istənilən kvadratlanan $\sigma \in E_2$ müstəvi oblastı üçün

$$P(\xi_1 \xi_2) \in \sigma = \int \int P(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (7)$$

münasibəti doğrudur.

İkiölçülü kəsilməz təsadüfi vektorun paylanma funksiyasına əsasən (1) və (2) düsturları vasitəsilə uyğun birölçülü paylanma funksiyasını tapmaq olar.

40.2.2. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər

Təsadüfi hadisələrin asılı olmaması anlayışı təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamasını uyğun şəkildə təyin etməyə imkan verir.

Tutaq ki, müəyyən ehtimal fəzası və ξ_1, ξ_2 təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. Burada elə ixtiyari A, B çoxluqlarına baxılır ki, onlar üçün $\{\xi_1 \in A\}$ və $\{\xi_2 \in B\}$ hadisələrinin uyğun şəkildə ehtimalı təyin olunmuş olsun.

Tərif. İstənilən A və B çoxluqları üçün $\{\xi_1 \in A\}$ və $\{\xi_2 \in B\}$ hadisələri asılı olmadıqda, yəni

$P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B) = P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \in B)$ (1)
bərabərliyi ödəniləndə ξ_1, ξ_2 kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər deyilir.

Buradan aydındır ki, ξ_1, ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmadıqda onların heç biri haqqındakı məlumatlar digərinin ehtimalının paylanmasına təsir etmir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması şərtini başqa şəkildə də yazmaq olar. Doğrudan da ξ_1, ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmadıqda istənilən x_1 və x_2 həqiqi ədədləri üçün $A = \{\xi_1 < x_1\}$ və $B = \{\xi_2 < x_2\}$ hadisələri də asılı olmaz. Onda (1) bərabərliyinə görə

$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) = P(\xi_1 < x_1) \cdot P(\xi_2 < x_2)$
və ya

$$F(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2} \quad (2)$$

alınır. Deməli, asılı olmayan kəmiyyətlərin birgə paylanma funksiyası onların paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir. Bu təklifin tərsi də doğrudur: istənilən x_1 və x_2 üçün (2) bərabərliyi ödənildikdə ξ_1 , və ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmur.

Bunu ikiölçülü kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün isbat edək. Bu məqsədlə, ikiölçülü kəsilməz (ξ_1, ξ_2) kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını $P(t_1, t_2)$, ξ_1 kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını $P_{\xi_1}(t_1)$ və ξ_2 kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını $P_{\xi_2}(t_2)$ ilə işarə etməklə, (2) bərabərliyini $P(t_1, t_2), P_{\xi_1}(t_1), P_{\xi_2}(t_2)$ funksiyalarının kəsilməz olduğu bütün nöqtələrdə

$$P(t_1, t_2) = P_{\xi_1}(t_1)P_{\xi_2}(t_2) \quad (3)$$

ekvivalent şəkildə yazaq.

İndi, tutaq ki, A və B ixtiyari çoxluqlardır və (3) bərabərliyi ödənilir. Onda $\{\xi_1 \in A\}$ və $\{\xi_2 \in B\}$ hadisələri hasilinin ehtimalı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\begin{aligned} P(\{\xi_1 \in A\}\{\xi_2 \in B\}) &= P\{(\xi_1, \xi_2) \in (A \times B)\} = \\ &= \iint_{A \times B} P(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \iint_{A \times B} P_{\xi_1}(t_1) P_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_A P_{\xi_1}(t_1) \cdot \int_B P_{\xi_2}(t_2) dt_2 \\ &= P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \in B) \end{aligned}$$

və ya

$$P(\{\xi_1 \in A\}\{\xi_2 \in B\}) = P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \in B). \quad (4)$$

Burada aparılan mühakimədə $A \times B$ ilə A və B çoxluqlarının düzgün hasili işarə edilmişdir. (4) bərabərliyində

$$P(\{\xi_1 \in A\}\{\xi_2 \in B\}) = P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B)$$

olduğunu nəzərə aldığında ixtiyari A və B çoxluqları üçün

$$P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B) = P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \in B).$$

bərabərliyi alınır. Deməli, ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətləri asılı deyildir.

Beləliklə, ikiölçülü kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün belə bir teorem isbat olunur:

Teorem 1. $P(t_1, t_2), P_{\xi_1}(t_1), P_{\xi_2}(t_2)$ funksiyalarının kəsilməz olduqları bütün nöqtələrdə (3) bərabərliyinin ödənilməsi ξ_1, ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtidir.

Belə teorem ikiölçülü diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün də doğrudur.

Teorem 2. Tutaq ki, ikiölçülü (ξ_1, ξ_2) diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanması

$$P(\xi_1 = u_1^{(i)}, \xi_2 = u_2^{(j)}) = P_{ij} \geq 0, \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij} = 1 \quad (5)$$

şəklində verilmişdir. Onda istənilən i, j ədədləri üçün

$$P_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij} \right) \quad (6)$$

bərabərliyinin ödənilməsi ξ_1, ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtidir.

Bu halda

$$P(\xi_i = u_1^{(i)}) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} \text{ və } P(\xi_2 = u_2^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}$$

olması əvvəlki paraqrafda göstərilmişdir.

Misal. Tutaq ki, $\xi_1, \text{ və } \xi_2$ komponentlərinin hər biri

$$F_{\xi_k}(x_k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{(t_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dt_k, \quad k = 1, 2$$

$$P_{\xi_k}(t_k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}}, \quad k = 1, 2$$

normal qanunu ilə paylanmış ikiölçülü (ξ_1, ξ_2) təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(t_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(t_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt_1 dt_2$$

və sıxlıq funksiyası

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(t_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(t_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (7)$$

olar. Burada

$$P(t_1, t_2) = P_{\xi_1}(t_1)P_{\xi_2}(t_2)$$

bərabərliyi ödənildiyindən ξ_1, ξ_2 təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyildir.

40.3.1. Təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyası

Tutaq ki, $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal fəzası və $\Omega = \{\omega\}$ elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş

$$\xi_k = \xi_k(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. Bu halda n – ölçülü həqiqi E_n fəzasında təyin olunmuş hər bir kəsilməz həqiqi $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası vasitəsilə təyin olunmuş yeni

$$\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

təsadüfi kəmiyyət alınır.

n – ölçülü $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası məlum olduqda (1) təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapmaq olar?

Məsələn, n – ölçülü $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ olduqda, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$\iint\limits_{\varphi(t_1, \dots, t_n) < x} \int P(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2, \dots, dt_n \quad (2)$$

kimi təyin edilir.

Bu məsələnin $n = 2$ və $\eta = \xi_1 + \xi_2$ olan halda tam həlli aşağıdakı teoremlə verilir.

Teorem. Asılı olmayan və kəsilməz ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi olan $\eta = \xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti kəsilməzdir və onun sıxlıq funksiyası

$$P_\eta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t) P_{\xi_2}(\tau - t) dt \quad (3)$$

düsturu ilə təyin edilir.

İsbatı. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin

$F_{\eta}(x) = P(\eta < x) = P(\xi_1 + \xi_2 < x) = P((\xi_1, \xi_2) \in D_x)$ paylanma funksiyasını 40.2.1-dəki(7) düstur ilə tapmaq olar:

$$F(x) = \iint_{D_x} P_{\eta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4)$$

Burada D_x ilə $D_x = \{(t_1, t_2)/t_1 + t_2 < x\}$ oblastı işarə edilmişdir.

Şərtə görə ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmadığından

$$P_{\eta}(t_1, t_2) = P_{\xi_1}(t_1)P_{\xi_2}(t_2)$$

olar. Onda (4) düsturu

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= \iint_{D_x} P_{\xi_1}(t_1)P_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t_1) \left(\int_{\infty}^{-t_1+x} P_{\xi_2}(t_2) dt_2 \right) dt_1 \end{aligned}$$

şəklində yazılar. Burada $t_2 = \tau - t_1$ əvəzləməsini apardıqda

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^x P_{\xi_2}(\tau - t_1) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t_1) P_{\xi_2}(\tau - t_1) dt_1 \right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^x P_{\eta}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

və ya

$$F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^x P_{\eta}(\tau) d\tau$$

alınır. Deməli, η təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t_1) P_{\xi_2}(\tau - t_1) dt_1$$

bərabərliyi və ya (3) düsturu ilə təyin olunur.

(3) düsturunu $P_{\xi_1}(t)$ və $P_{\xi_2}(t)$ funksiyalarının bağlısı adlanan

$$(P_{\xi_1} \cdot P_{\xi_2})(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(t) P_{\xi_2}(\tau - t) dt$$

ifadəsi ilə müqayisə etdikdə

$$P_{\eta}(\tau) = \sqrt{2\pi} (P_{\xi_1} \cdot P_{\xi_2})(\tau) \quad (5)$$

düsturu alınır. Buradan aydındır ki, iki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəminin sıxlıq funksiyası onların sıxlıq funksiyalarının bağlısı vasitəsilə təyin olunur.

Belə təklif n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğudur.

Asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ cəminin ehtimalının paylanma sıxlılığı

$$P_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(\tau - t_2 - \dots - t_n) P_{\xi_2}(t_2) \dots P_{\xi_n}(t_n) dt_2 \dots dt_n \quad (6)$$

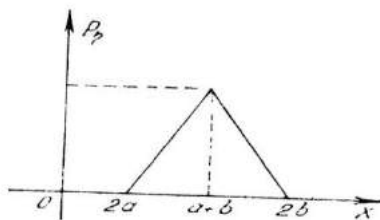
düsturu ilə təyin edilir.

(3) düsturundan istifadə etməklə göstərmək olar ki, normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi də normal qanunla paylanmışdır.

Misal. Asılı olmayan və (a, b) intervalında müntəzəm paylanmış ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin $\eta = \xi_1 + \xi_2$ cəminin sıxlıq funksiyası

$$P_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (2a, 2b) \text{ olduqda,} \\ \frac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a \leq x < a+b \text{ olduqda,} \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b \leq x < 2b \text{ olduqda} \end{cases} \quad (7)$$

bərabərlikləri ilə təyin edilir (Şəkil 1).



Şəkil 1.

Həlli. ξ_1 (vəə həəm də ξ_2) kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [a, b] \text{ olduqda} \\ \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b] \text{ olduqda} \end{cases}$$

olduğundan $\eta = \xi_1 + \xi_2$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası (3) düsturu ilə hesablanır:

$$P_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)P(x-t)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x-t)dt$$

Burada aşağıdakı hallara baxaq:

1) $x < 2a$ və $x > 2b$ olduqda $x-t < 2a-t < a$,
 $x-t > 2b-t < b$ olur və buna görə də

$P(x-t) = 0$ və $P_{\eta}(x) = 0$ olar.

2) $2a \leq x < a+b$ olduqda

$$P_{\eta}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^{x-a} P(t)dt = \frac{x-2a}{(b-a)^2}$$

olar.

3) $a+b \leq x < 2b$ olduqda

$$P_{\eta}(x) = \frac{1}{b-a} \int_{b-a}^b P(t)dt = \frac{2b-x}{(b-a)^2}$$

olar. Bu üç hal birlikdə (7) düsturunun doğruluğunu göstərir.

(7) düsturu ilə təyin olunan paylanma **Simpson paylanması** adlanır.

40.3.2. Riyazi gözləmə

Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu onun tam xarakteristikası olduğu məlumdur. Lakin bəzən ehtimalın paylanma qanunu məlum olmur, təsadüfi kəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini nisbətən az və ya sadə məlumatlar vasitəsilə öyrənmək lazım olur.

Təsadüfi kəmiyyətin belə sadə xassələri, onun ədədi xarakteristikaları adlanan bir neçə ədədlə ifadə olunur.

Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiyyətə xarakterizə edir. Bu ədədi xarakteristikalar təsadüfi kəmiyyət haqqındakı bəzi ehtimal məsələlərini çox zaman qısa yolla tam həll etməyə və həm də həmin kəmiyyət haqqındakı yığıcam və ətraflı məlumat almağa imkan verir.

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxu üzərində necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan (riyazi gözləmə, dispersiya, orta kvadratik meyl, momentlər və s.) istifadə olunur. Həmin anlayışların bir neçəsi burada və sonrakı paragraflarda şərh edilir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin ən mühüm ədədi xarakteristikalarından biri **riyazi gözləmədir**.

Diskret və kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmənin tərfi daha sadə şəkildə verilir.

Tutaq ki, diskret təsadüfi X kəmiyyətinin ala bildiyi

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

qiymətləri və uyğun olaraq bu qiymətləri almasının

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

ehtimalları verilmişdir.

Tərif 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (1)$$

sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə diskret təsadüfi X kəmiyyətinin **riyazi gözləməsi** deyilir və

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \quad (2)$$

ilə işarə olunur. (1) sırası mütləq yığılan olmadıqda, deyirlər ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

Təsadüfi X kəmiyyəti ancaq sonlu sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini ala bilirsə, onda (1) cəmi həmişə sonlu olar və onun riyazi gözləməsi

$$M[X] = \sum_{k=1}^n x_k P_k \quad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə onun **orta qiyməti** deyilir. Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin elə orta qiymətini göstərir ki, onun ala bildiyi qiymətlər bunun ətrafında yerləşir. Doğrudan da, tutaq ki, N sayda sınaq aparılır və bu sınaqlar nəticəsində təsadüfi X kəmiyyəti x_1 qiymətini n_1 dəfə, x_2 qiymətini n_2 dəfə və nəhayət, x_m qiymətini n_m dəfə alır ($n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$). Onda ehtimalın statistik tərifinə görə $P_k = P(X = x_k) \approx \approx \frac{n_k}{N}$ olduğundan, təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi üçün

$$M[X] = \sum_{k=1}^m x_k P_k \approx \sum_{k=1}^m x_k \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{N}$$

təqribi bərabərliyi alınır. Buradan aydındır ki, sadə təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun aparılan çox sayda sınaqlar nəticəsində aldığı qiymətlərin ədədi ortasına bərabərdir.

Xüsusi halda, X təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $P = \frac{1}{n}$ ehtimalı ilə aldıqda onun riyazi gözləməsi üçün

$$M[X] = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

bərabərliyi alınır.

Riyazi gözləmənin mexaniki mənasından da danışmaq olar. X təsadüfi kəmiyyəti sonlu sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini aldıqda

$$\sum_{k=1}^n P_k = 1$$

olar və (3) bərabərliyi

$$M[X] = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} \quad (4)$$

kimi yazılar. Buradan aydındır ki, $M[x]$ ədədi, kütlələri uyğun olaraq $P_1, P_2, \dots, P_n$ olan və absis oxu üzərində yerləşən $M_1(x_1), M_2(x_2), \dots, M_n(x_n)$ maddi nöqtələri sisteminin ağırlıq mərkəzinin absisinə bərabərdir.

Tərif 2. Ehtimalının paylanma sıxlığı $P(x)$ olan kəsilməz təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, mütləq yığılan

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \quad (5)$$

integralına deyilir. (5) integralı mütləq yığılan olmadıqda, deyirlər ki, kəsilməz təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

X təsadüfi kəmiyyətinin $F(x)$ paylanma funksiyası üçün $F'(x) = P(x)$ *və* ya $dF(x) = P(x)dx$ olduğundan, (5) düsturunu

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (6)$$

kimi də yazmaq olar.

Təriflərdən aydındır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi sabit ədəddir (təsadüfi kəmiyyət deyildir).

Misal 1. Üstlü qanunla paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapmalı.

Həlli. Bu halda sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \text{ olduqda} \\ 0, & x \leq 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

olduğundan, (5) düsturuna görə alırıq:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

Misal 2. Müntəzəm paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapmalı

Həlli. Müntəzəm paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \text{ olduqda} \\ 0, & x \notin [a, b] \text{ olduqda} \end{cases}$$

olduğundan, (5) düsturuna görə

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b xdx = \frac{a+b}{2}.$$

Riyazi gözləməsi olmayan təsadüfi kəmiyyətlər də vardır.

Misal 3. Paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x > 0 \text{ olduqda} \\ 0, & x \leq 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

olan təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi yoxdur.

Doğrudan da, (6) düsturuna görə

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^2} = \infty$$

olar.

40.4. Riyazi gözləmənin xassələri

Riyazi gözləmənin bir sıra ümumi xassələri vardır. Həmin xassələr burada diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün isbat edilir.

I. Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$$M[C] = C. \quad (1)$$

Doğrudan da, sabit C ədədinə ancaq bir C qiymətini $p=1$ ehtimalı ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar. Onda riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$M[C] = C \cdot 1 = C.$$

II. Sabit vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\mathbf{M}[CX] = \mathbf{C}\mathbf{M}[X] \quad (2)$$

İsbati. X təsadüfi x_k qiymətini P_k ehtimalı ilə alırsa, yəni $P(X = x_k) = P_k$ olarsa, onda $Y = CX$ təsadüfi kəmiyyəti də CX_k qiymətini həmin ehtimalla alır:

$P(Y = CX_k) = P_k$. Onda tərifə görə

$$\mathbf{M}[CX] = \sum_k Cx_k P_k = C \sum_k x_k P_k = \mathbf{C}\mathbf{M}[X].$$

III. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{M}[X + Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y] \quad (3)$$

İsbati. Tutaq ki, X diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərini uyğun olaraq $P_1, P_2, \dots$ ehtimalları ilə, Y təsadüfi kəmiyyəti isə $y_1, y_2, \dots$ qiymətlərini uyğun olaraq $q_1, q_2, \dots$ ehtimalları ilə alır. Onda $X + Y$ təsadüfi kəmiyyəti $x_k + y_n$ ($k, n = 1, 2, \dots$) qiymətlərini $P_{k,n}$ ehtimalı ilə alır. Bu halda

$$P_k = P(X = x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{k,n}$$

və

$$q_n = P(Y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,n}$$

bərabərlikləri doğru olar. Onda riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$\mathbf{M}[X + Y] = \sum_{k,n} (x_k + y_n) P_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x_k + y_n) P_{k,n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_{k,n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,n} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k + \sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n = M[X] + M[Y]
\end{aligned}$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur:

$$M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n] \quad (4)$$

Nəticə 1. $Y=kX+b$ xətti funksiyası (təsadüfi kəmiyyət) üçün

$$M[Y] = kM[X] + b \quad (5)$$

bərabərliyi doğrudur.

Nəticə 2. İki təsadüfi kəmiyyətin fərqlərinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin fərqinə bərabərdir:

$$M[X - Y] = M[X] - M[Y] \quad (6)$$

Doğrudan da, II və III xassələrə görə

$$\begin{aligned}
M[X - Y] &= M[X + (-1)Y] = M[X] + M[(-1)Y] \\
&= M[X] + (-1)M[Y] = M[X] - M[Y].
\end{aligned}$$

IV. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

$$M[XY] = M[X]M[Y]. \quad (7)$$

İsbatı . Yenə də fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti x_k qiymətini uyğun olaraq $P_k (k = 1, 2, \dots)$ ehtimalı ilə, Y təsadüfi kəmiyyəti isə y_n qiymətini uyğun olaraq

$q_n (n = 1, 2, \dots)$ ehtimalı ilə alır. Onda XY təsadüfi kəmiyyəti $x_k y_n$ qiymətlərini uyğun olaraq

$$P[\{X = x_k\} \cdot \{Y = y_n\}] = P(X = x_k) \cdot P(Y = y_n) = P_k q_n$$

ehtimalları ilə (vuruqlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün) alar. Riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$\begin{aligned} M[XY] &= \sum_{k,n} x_k y_n P_k q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_n P_k q_n = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n \right) = \\ &= M[X] \cdot M[Y] \end{aligned}$$

alınır.

Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasili üçün də doğrudur:

$$M[X_1 X_2 \dots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \dots M[X_n] \quad (8)$$

8) bərabərliyi riyazi gözləmənin **multiplikativlik xassəsi** adlanır.

V. İstənilən X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$|M[X]| \leq M[|X|] \quad (9)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(9) bərabərsizliyi, istənilən sonlu cəm və sıra üçün doğru olan

$$\left| \sum_k x_k P_k \right| \leq \sum_k |x_k| P_k$$

bərabərsizliyindən alınır.

40.5.1. Median, kvantil və moda

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun mümkün qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikası olduğu məlumdur. Burada təsadüfi kəmiyyətin başqa yerləşmə xarakteristikaları olan **median, kvantil və moda anlayışları** şərh edilir.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyət və $F(x)$ onun paylanma funksiyasıdır. Onda

$$F(x_M) \leq 0,5 \leq F(x_M + 0)$$

münasibətini ödəyən hər bir x_M nöqtəsinə x kəmiyyətinin **medianı** deyilir.

Verilmiş təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi olmaya bilər, lakin hər bir təsadüfi kəmiyyətin heç olmasa bir medianı var. Doğrudan da, paylanma funksiyası

0 – dan 1 - ə kimi monoton artan olduğundan, elə x_M nöqtəsi vardır ki, funksiya bu nöqtədə $\frac{1}{2}$ qiymətindən keçir. $F(x)$ funksiyası bu nöqtə ətrafında kəsilməz olduqda x_M medianı yeganə olur, həmin nöqtənin müəyyən (α, β) ətrafında yerləşən bütün nöqtələrdə $F(x) = \frac{1}{2}$ bərabərliyi ödənildikdə isə bu ətrafın bütün nöqtələri median olar.

Paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda (1) münasibəti

$$F(x_M) = 0,5 \quad (2)$$

bərabərliyinə çevrilir. Bu halda, X təsadüfi kəmiyyətinin medianı (2) bərabərliyini ödəyən yeganə x_M kökü olar.

(2) münasibətini

$$P(X < x_M) = P(X > x_M) \quad (3)$$

bərabərliyi şəklində yazmaq olar. Doğrudan da,

$$P(X < x_M) + P(X \geq x_M) = 1$$

və

$$F(x_M) = P(X < x_M) = \frac{1}{2}$$

olmasından

$$P(X \geq x_M) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

alınır. $F(x)$ funksiyası kəsilməz olduğuna görə isə

$P(X = x_M) = 0$ bərabərliyi ödənilir. Buna görə də (4) bərabərliyini

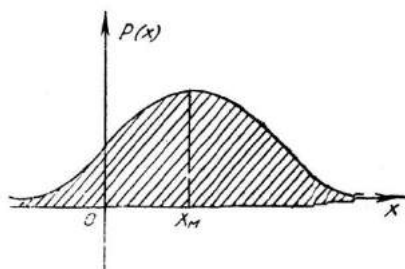
$$P(X > x_M) = \frac{1}{2}$$

kimi yazmaq olar. Buradan tələb olunan

$$P(X < x_M) = P(X > x_M) = \frac{1}{2}$$

münasibəti alınır.

(3) bərabərsizliyi göstərir ki, həndəsi olaraq median, sıxlıq funksiyasının qrafiki ilə əhatə olunmuş sahəni yarıya bölən düz xətt nöqtələrinin absisidir (şəkil 1). Xüsusi halda, simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür. Məsələn, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür.



Şəkil 1.

Paylanmanın (və ya təsadüfi kəmiyyətin) kvantili də mediana analogi olaraq təyin olunur.

$F(x) = P$ ($0 < P < 1$) tənliyinin kökünə **P-tərtibli kvantil** deyilir. $P = \frac{1}{2}$ tərtibli kvantil paylanmanın medianıdır. P-nin bir neçə qiymətində kvantilləri bilməklə paylanma funksiyasının artma istiqamətini təyin etmək olar.

İndi də kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modası anlayışını təyin edək. Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $P(x)$ – dir. Onda $P(x)$ funksiyasının hər bir x_M maksimum nöqtəsinə X kəmiyyətinin **modası** deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin bir modası olduqda ona **birmodalı**, bir neçə modası olduqda isə ona **çoxmodalı kəmiyyət** deyilir.

Simmetrik təsadüfi kəmiyyətin modası onun riyazi gözləməsinə bərabərdir. Xüsusi halda, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin medianı, modası və riyazi gözləməsi üçü də bir – birinə bərabərdir.

40.5.2. Dispersiya

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından biridir. Yuxarıda dediyimiz kimi, təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında qruplaşır. Lakin bu qiymətlərin riyazi gözləmə ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur.

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin **səpələnmə xarakteristikası** deyilir. Burada təsadüfi kəmiyyətin dispersiya və orta kvadratik meyl adlanan səpələnmə xarakteristikalarına baxılır.

Tərif 1. X təsadüfi kəmiyyətinin $M[X]$ riyazi gözləməsi sonlu ədəd olduqda,

$$M[(X - M[X])^2]$$

ifadəsinə həmin X kəmiyyətinin **dispersiyası** deyilir və $D[X]$ ilə işarə edilir:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] \quad (1)$$

Xüsusi halda, X diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda onun dispersiyası

$$D[X] = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M[X])^2 P(X = x_k) \quad (2)$$

bərabərliyi ilə, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda isə

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 P(x) dx \quad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Tərifdən aydındır ki, istənilən təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası mənfi olmayan ədəddir: $D[X] \geq 0$.

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək (1) ifadəsini aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X^2 - 2XM[X] + (M[X])^2] = \\ &= M[X^2] - 2M[X] \cdot M[X] + (M[X])^2 = \\ &= M[X^2] - (M[X])^2 \end{aligned}$$

və ya

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \quad (4)$$

Dispersiyanın mənfi olmamasına əsasən istənilən X təsadüfi kəmiyyəti üçün (4) bərabərliyindən

$$M[X^2] - (M[X])^2 \geq 0$$

və ya

$$M[X^2] \geq (M[X])^2 \quad (5)$$

bərabərsizliyi alınır.

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası onun mümkün qiymətlərinin riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsinin sıxlığını göstərməsi aşağıdakı mühakimədən aydındır. X təsadüfi kəmiyyətinin x_k qiymətləri $M[X]$ riyazi gözləməsinə çox yaxın olduqda (2) cəminin $(x_k - M[X])^2 P_k$ hədləri çox kiçik ədədlər və buna görə də (2) cəmi kiçik ədəd olur. Əksinə, X təsadüfi kəmiyyətinin x_k qiymətləri $M[X]$ riyazi gözləməsindən uzaqda yerləşdikdə

$(x_k - M[X])^2 P_k$ hədləri böyük ədədlər və buna görə də (2) cəmi böyük ədəd olur. Buradan aydındır ki, $D[X]$ ədədini X təsadüfi kəmiyyəti qiymətlərinin $M[X]$ orta qiyməti ətrafında səpələnməsinin ölçüsü hesab etmək olar.

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsinin xarakteristikalarından biri də **orta kvadratik** meylidir.

Tərif 2. X təsadüfi kəmiyyəti dispersiyasının kvadrat kökünə həmin kəmiyyətin orta kvadratik meyli deyilir və

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \quad (6)$$

ilə işarə edilir.

Qeyd edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti ilə onun $M[X]$ riyazi gözləməsi eyni vahidlərlə ölçüldüyü halda, onun $D[X]$ dispersiyası bu xassəyə malik deyildir. X kəmiyyətinin dispersiyası onun ölçüldüyü vahidlərin kvadratı ilə ifadə olunur. Lakin (6) bərabərliyi ilə təyin olunan orta kvadratik meyl, X kəmiyyətinin ölçüldüyü vahidlərlə ölçülür, yəni X və $\sigma[X]$ eyniölçülü kəmiyyətlərdir. Buna görə də, X kəmiyyəti qiymətlərinin səpələnməsini onun özünün ölçüldüyü vahidlərlə ifadə etmək üçün dispersiyasını deyil, orta kvadratik meylini hesablamaq lazımdır.

Misal 1. Normal qanunla paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını hesablamalı.

Həlli. Normal qanunla paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğundan, X kəmiyyətinin dispersiyası (3) bərabərliyi ilə hesablanır:

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Burada $M[X] = a$ olmasını nəzərə alıqda və $x - a = \sigma t$ əvəzləməsindən istifadə etdikdə

$$\begin{aligned} D[X] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2 \end{aligned}$$

və ya

$$D[X] = \sigma^2, \sigma[X] = \sigma \quad (7)$$

alınır.

Misal 2. Müntəzəm paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapmalı.

Həlli. Bu halda, müntəzəm paylanmanın sıxlıq funksiyasının (39.3.2-də.7) ifadəsindən və $M[X] = \frac{a+b}{2}$ olmasından istifadə etmək lazımdır. Onda (3) düsturuna görə

$$\begin{aligned} D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 P(x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

olar.

Misal 3. Puasson qanunu ilə paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapmalı.

Həlli. X kəmiyyətinin dispersiyasını (4) düsturu vasitəsilə hesablayaq. Puasson paylanması üçün $M[X] = \lambda$ olması məlumdur. İndi $M[X^2]$ kəmiyyətini hesablayaq:

$$\begin{aligned}
M[X^2] &= M[X(X-1) + X] = M[X(X-1)] + M[X] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda = \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

(4) düsturuna görə alırıq:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

40.5.3. Dispersiyanın xassələri

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə etməklə dispersiyanın aşağıdakı xassələrini isbat etmək olar.

I. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir:

$$D[C] = 0 \quad (1)$$

Doğrudan da, $X = C$ və $M[C] = C$ olduğundan

$$D[C] = M[C - M[C]^2] = M[0] = 0.$$

II. İstənilən C sabiti üçün

$$D[CX] = C^2 D[X] \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $M[CX] = CM[X]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
D[CX] &= M[(CX - M[CX])^2] = M[C^2(X - M[X])^2] = \\
&= C^2 M[(X - M[X])^2] = C^2 D[X].
\end{aligned}$$

III. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] \quad (3)$$

İsbatı . Tərifə görə

$$\begin{aligned}
D[X+Y] &= M[(X+Y-M[X+Y])^2] = M[((X-M[X]) + \\
&+ (Y-M[Y]))^2] = M[(X-M[X])^2 + 2(X-M[X])(Y- \\
&- M[Y]) + (Y-M[Y])^2] = M[(X-M[X])^2] + 2M[(X- \\
&- M[X])(Y-M[Y])] + M[(Y-M[Y])^2] = D[X] + \\
&+ D[Y] + 2M[(X-M[X]) \cdot (Y-M[Y])]
\end{aligned}$$

alınır. X və Y kəmiyyətləri asılı olmadığından, $X - M[X]$ və $Y - M[Y]$ kəmiyyətləri də asılı deyildir. Buna görə də riyazi gözləmənin IV xassəsinə görə

$$\begin{aligned}
M[(X - M[X])(Y - M[Y])] &= \\
&= M[(X - M[X])M[(Y - M[Y])] = \\
&= (M[X] - M[X])(M[Y] - M[Y]) = 0
\end{aligned}$$

olar. Onda əvvəlki bərabərlikdən tələb olunan (3) bərabərliyi alınır:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y].$$

Bu xassə sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur:

$$D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n] \quad (4)$$

Nəticə. Asılı olmayan istənilən iki təsadüfi kəmiyyət üçün

$$D[X - Y] = D[X] + D[Y] \quad (5)$$

bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, II və III xassəyə görə

$$\begin{aligned}
D[X - Y] &= D[X] + D[(-1)Y] = D[X] + (-1)^2 D[Y] = \\
&= D[X] + D[Y].
\end{aligned}$$

IV. Asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$D[XY] = M[X^2]M[Y^2] - (M[X])^2(M[Y])^2 \quad (6)$$

bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, tərifə görə

$$\begin{aligned} D[XY] &= M[(XY - M[XY])^2] = M[(XY - M[X]M[Y])^2] = \\ &= M[X^2Y^2 - 2XYM[X]M[Y] + (M[X])^2(M[Y])^2] = \\ &= M[X^2]M[Y^2] - 2(M[X])^2(M[Y])^2 + (M[X])^2(M[Y])^2 = \\ &= M[X^2]M[Y^2] - M[X]^2(M[Y])^2. \end{aligned}$$

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $M[X]$ sonlu ədəddir. Onda $X_1 = X - M[X]$ fərqi təsadüfi kəmiyyət olar. Bu kəmiyyətə, yəni $X - M[X]$ fərqinə **X kəmiyyətinin meyli**,

$$X_2 = \frac{X - M[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - M[X]}{\sqrt{D[X]}}$$

nisbətinə isə həmin kəmiyyətin **normallaşdırılmış meyli deyilir**.

Bu meyllər üçün

$$\begin{aligned} M[X_1] &= M[X - M[X]] = M[X] - M[X] = 0, \\ D[X_2] &= D\left[\frac{X - M[X]}{\sqrt{D[X]}}\right] = \frac{D[X - M[X]]}{D[X]} = \frac{D[X]}{D[X]} = 1 \end{aligned}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Misal. Asılı olmayan n ardıcıl sınaq aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı eyni sabit p ədədidir. Bu sınaqlarda A hadisəsinin baş verməsi sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapmalı.

Həlli. Tutaq ki, X_k ilə k – cı sınaqda A hadisəsinin baş verməsi sayı işarə edilmişdir. Onda X kəmiyyəti

asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin cəminə bərabər olar:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n \quad (7)$$

Buradan III xassəyə görə

$$\mathbf{D}[\mathbf{X}] = \mathbf{D}[\mathbf{X}_1] + \mathbf{D}[\mathbf{X}_2] + \dots + \mathbf{D}[\mathbf{X}_n] \quad (8)$$

alınır. Hər bir sınaq nəticəsində A hadisəsi ya baş verir ($X_k = 1$), ya da baş vermir ($X_k = 0$). A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı p və baş verməməsi ehtimalı $q = 1 - p$ ədədidir.

Beləliklə, X_k kəmiyyətlərinin hər biri iki qiymət ala bilər: 1 (p ehtimalı ilə) və 0 (q ehtimalı ilə). Buna görə də istənilən $k (k = 1, 2, \dots, n)$ üçün

$$\mathbf{M}[X_k] = \mathbf{1} \cdot p + \mathbf{0} \cdot q = p$$

olar. Onda (7) bərabərliyinə görə

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}] = \mathbf{M}[\mathbf{X}_1] + \mathbf{M}[\mathbf{X}_2] + \dots + \mathbf{M}[\mathbf{X}_n] = np$$

və ya

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}] = np \quad (9)$$

alınır.

İndi $\mathbf{D}[X_k]$ kəmiyyətini

$$\mathbf{D}[X_k] = \mathbf{M}[X_k^2] - (\mathbf{M}[X_k])^2 \quad (10)$$

bərabərliyi ilə hesablayaq. X_k kəmiyyəti 1 və 0 qiymətlərini uyğun olaraq p və $q = 1 - p$ ehtimalları ilə ala bilirsə, onda X_k^2 kəmiyyəti də 1 və 0 qiymətlərini uyğun olaraq p və $q = 1 - p$ ehtimalları ilə alar. Onda

$$\mathbf{M}[X_k^2] = \mathbf{1} \cdot p + \mathbf{0} \cdot q = p$$

olar və (10) bərabərliyinə görə

$$\mathbf{D}[X_k] = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

alınır. Beləliklə, (8) bərabərliyinə əsasən $\mathbf{D}[\mathbf{X}]$ kəmiyyəti hesablanır:

$$D[X] = \sum_{k=1}^n D[X_k] = \sum_{k=1}^n pq = npq$$

və ya

$$D[X] = npq. \quad (11)$$

Aldığımız bu nəticəni belə də söyləmək olar: n və p parametrlə binomial qanunla paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası npq ədədinə bərabərdir.

40.5.4. Təsadüfi kəmiyyətin momentləri

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətləri və bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığını göstərən paylanma funksiyası onun ən mükəmməl xarakteristikasıdır. Paylanma funksiyası isə bəzən bir və ya bir neçə parametrdən asılı olur. Məsələn, təsadüfi kəmiyyətin normal paylanması iki parametrlə verilməsi ilə təyin olunur. Paylanma funksiyasının parametrləri, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətin mühüm ədədi xarakteristikaları olan müxtəlif tərtibli momentlər vasitəsilə ifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətin momentlərini hesablamaqla onun paylanma funksiyasını təyin etmək mümkün olur. Buna görə də təsadüfi kəmiyyətin momentləri anlayışlarının ehtimal nəzəriyyəsində böyük əhəmiyyəti vardır.

Təsadüfi kəmiyyətin çox mühüm ədədi xarakteristikaları olan riyazi gözləmə və dispersiyası da onun xüsusi növ momentləridir.

Tərif 1: X^n kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə X təsadüfi kəmiyyətinin n -tərtibli başlanğıc momenti (və ya n -tərtibli momenti) deyilir və ν_n ilə işarə olunur:

$$\nu_n = M[X^n]. \quad (1)$$

$(X - M[X])^n$ kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə isə X təsadüfi kəmiyyətinin n tərtibli mərkəzi momenti deyilir və

$$\mu_n = M[(X - M[X])^n]. \quad (2)$$

Aydındır ki, X təsadüfi kəmiyyətinin birtərtibli başlanğıc momenti onun riyazi gözləməsi

$$\nu_1 = M[X]. \quad (3)$$

ikitetrtibli mərkəzi momenti isə dispersiyasıdır:

$$\mu_2 = M[(X - M[X])^2] = D[X]. \quad (4)$$

Bundan başqa ,

$$\mu_0 = M[(X - M[X])^0] = M[1] = 1,$$

$$\mu_1 = M[(X - M[X])] = M[X] - M[X] = 0$$

bərabərlikləri doğrudur.

Təsadüfi kəmiyyətin müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında sadə əlaqələr vardır.

Məsələn, sadə hesablamalar vasitəsilə

$$\begin{aligned} \mu_2 &= M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2M[X]X + (M[X])^2] = \\ &= \nu_2 + \nu_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[(X - M[X])^3] = M[X^3 - 3X^2M[X] + \\ &\quad + 3X(M[X])^2 - (M[X])^3] = m[X^3] - \\ &\quad - 3M[X^2]M[X] + 2(M[X])^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 \end{aligned}$$

və s. Kimi münasibətlər alınır. Bu düsturların statistika böyük əhəmiyyəti vardır.

Tək yüksəktərtibli momentləri **paylanmanın “asimetrikliyinin” xarakteristikası** hesab etmək olar. Doğ-

rudan da, paylanma riyazi gözləməyə nəzərən simmetrik olduqda

$$M[(x-M[X])^n] = 0 \quad (n \text{ tək ədəddir})$$

olar. Məsələn, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanması riyazi kəsilməyə nəzərən simmetrik olduqda

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^n p(x) dx \quad n \text{ tək ədəddir}$$

momenti tək funksiyanın simmetrik oblastı üzrə götürülmüş integralı olduğu üçün sıfıra bərabərdir.

Paylanmanın asimmetrikliliyinin xarakteristikası olaraq hər bir tək indeksli momentı götürmək olar. Əlbəttə, bu məqsədlə üçtətibli momentı götürmək daha məqsədəuyğundur. Təsadüfi kəmiyyətin üçtətibli momentı onun ölçü vahidinin kubu ilə ölçülür. Buna görə də asimmetrikliliyin ölçüsüz xarakteristikasını almaq üçün üçtətibli momentin, orta kvadratik meylin üçtətibli qüvvətinə nisbəti götürülür:

$$\rho = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (5)$$

ρ ədədinə asimmetriya əmsalı deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanması simmetrik olduqda $\rho=0$, simmetrik olmadıqda isə $\rho \neq 0$ olar. Xüsusi halda, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət üçün $\rho=0$ olar.

Təsadüfi kəmiyyətin başlanğıc və mərkəz momentlərindən başqa, onun mütləq və mərkəzi mütləq momentlərinə də baxılır.

X təsadüfi kəmiyyətinin n -tətibli mütləq və mərkəzi mütləq momentı uyğun olaraq

$$\alpha_n = M[|X|^n]$$

və

$$\beta_n = M[|X - M[X]|^n]$$

bərabərlikləri ilə təyin edilir.

Cüttərtibli mütləq momentlərlə adi momentlər üst-üstə düşür.

40.5.5. Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı

İki təsadüfi kəmiyyətin asılı olmaması anlayışı əvvəlki, mövzularda təyin edilmişdir. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin meyilləri hasilinin riyazi gözləməsi, yəni

$$M[X(X-M[X])(Y-M[Y])] \quad (1)$$

kəmiyyəti onların asılılığının xarakteristikası kimi götürülür.

(1) ədədinə X və Y kəmiyyətlərinin kovariasiyası və ya rabitə momenti deyilir və

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X-M[X])(Y-M[Y])] \quad (2)$$

kimi işarə edilir. Buradan aydındır ki,

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

bərabərliyi ödənilir.

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək , (2) ifadəsini

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= M[XY - XM[Y] - YM[X] + M[X]M[Y]] = M[XY] - M[X]M[Y] \end{aligned}$$

və ya

$$\text{cov}(X, Y) = M[XY] - M[X]M[Y] \quad (3)$$

şəklində yazmaq olar.

Xüsusi halda, (3) bərabərliyində $X=Y$ götürdükdə

$$\text{cov}(X, X) = M[X^2] - (M[X])^2$$

münasibəti və buradan da dispersiyanın məlum ifadəsinə əsasən

$$\text{cov}(X, X) = D[X] \quad (4)$$

bərabərliyi alınır.

Asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri

$$M[XY] = M[X]M[Y]$$

münasibətini ödədiyindən, onlar üçün (3) bərabərliyindən

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad (5)$$

bərabərliyi alınır. Buradan aydındır ki, $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ şərtini ödəyən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri asılıdır. Onların asılılığını $\text{cov}(X, Y)$ kəmiyyəti ilə xarakterizə etmək əlverişli deyildir, çünki bu kəmiyyət təsadüfi X və Y kəmiyyətlərinin ölçüldüyü vahiddən asılıdır. Buna görə də, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılığını kəmiyyətcə xarakterizə etmək üçün həmin kəmiyyətlərin normallaşmış meyllərinin kovariasiyası olan

$$\rho(X, Y) = M \left[\frac{X - M[X]}{\sigma[X]} \cdot \frac{Y - M[Y]}{\sigma[Y]} \right]$$

və ya

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} \quad (6)$$

kəmiyyəti götürülür. Bu ifadə adsız ədəddir. Ona X və Y **kəmiyyətlərinin korrelyasiyası əmsalı deyilir.**

X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sıfıra bərabər olması zəruri şərtidir, lakin kafi deyildir. $\rho(X, Y) = 0$ olmasından X və Y kəmiyyətlərinin asılı olmaması çıxır. Məsələn, tutaq ki, X ilə koordinat başlanğıcı ətrafında simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyət işarə edilmişdir. Onda $[M] = 0$ və $Y = X^2$ təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$M[XY]=M[X^3]=0=M[X]M[Y]$$

və

$$\text{cov}[X,Y]=M[XY]-M[X]M[Y]=0$$

olar. Buradan (6) düsturuna görə $\rho(X,Y)=0$ bərabərliyi alınır. Deməli, funksiyonal asılı olan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri ($Y=X^2$) üçün $\rho(X,Y)=0$ bərabərliyi **ödənir**.

Korrelyasiya əmsalı sıfıra bərabər olan təsadüfi kəmiyyətlərə korrelyasiyalanmamış (bəzən, “asılı olmayan”) , korrelyasiya əmsalı sıfıra bərabər olmayan təsadüfi kəmiyyətlərə isə korrelyasiyalanmış kəmiyyətlər deyilir.

Yuxarıda dediklərimiz göstərir ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər korrelyasiyalanmamış kəmiyyətlərdir. Lakin korrelyasiyalanmış kəmiyyətlərin asılı olmadığını hökm etmək olmaz. Deməli, **təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması, onların korrelyasiyalanmamış olmasına nəzərən güclü şərt**dir.

Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə asılı olmamaq və korrelyasiyalanmamaq anlayışları ekvivalentdir:

Normal paylanmış X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sıfıra bərabər olması (yəni korrelyasiyalanmamış olmaları, zəruri və kafi şərtdir.

Eyni zamanda (6) bərabərliyindən aydındır ki, X və Y kəmiyyətlərinin korrelyasiyalanmamış olması onların kovariasiyasının sıfıra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

Korrelyasiya əmsalının bir sıra xassələri vardır:

1)Korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti vahiddən böyük deyildir,yəni istənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$|\rho(X, Y)| \leq 1 \quad (7)$$

bərabərliyi ödənilir.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} 0 \leq M \left[\left(\frac{X-M[X]}{\sigma[X]} \pm \frac{Y-M[Y]}{\sigma[Y]} \right)^2 \right] &= 2 \pm 2 \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]} = \\ &= 2[1 \pm \rho(X, Y)] \end{aligned}$$

münasibətinə əsasən

$$1 - \rho(X, Y) \geq 0, \quad 1 + \rho(X, Y) \geq 0$$

bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan,

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

və ya tələb olunan

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

bərabərsizliyi alınır.

(7) bərabərsizliyini

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma[X] \cdot \sigma[Y]$$

və ya

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{D[X]D[Y]}$$

kimi də yazmaq olar.

2) X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin xətti çevirməsi, onların korrelyasiya əmsalının mütləq qiymətini dəyişmir, yəni istənilən sabit a,b,c,d ədədləri üçün

$$|\rho(aX + b, cY + d)| = |\rho(X, Y)| \quad (8)$$

Bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, tərifi görə

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{M[(aX+b)(cY+d)] - M[aX+b]M[cY+d]}{\sqrt{D[aX+b]D[cY+d]}} =$$

$$= \frac{ac(M[XY] - M[X]M[Y])}{\sqrt{a^2 D[X] \cdot c^2 D[Y]}} = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$$

olduğundan (8) bərabərliyi ödənilir,

$$3) \text{Sabit } a \text{ və } b \text{ ədədləri üçün } Y=aX+b \text{ olduqda,}$$

$$|\rho(X, Y)|=1 \quad (9)$$

bərabərliyi ödənilir.

Doğrudan da,

$$\rho(X, Y) = \frac{M[X(aX+b)] - M[X]M[aX+b]}{\sqrt{D[X] \cdot D[aX+b]}} = \frac{a[M[X^2] - (M[X])^2]}{\sqrt{a^2 (D[X])^2}}$$

$$= \frac{aD[X]}{|a|D[X]}$$

olduğundan, (9) bərabərliyi ödənilir.

Aparılan mühakimədən aydındır ki, $a>0$ olduqda $\rho(X, Y)=1$, $a<0$ olduqda isə $\rho(X, Y)=-1$ olar.

İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin və fərqlinin dispersiyasını onların kovariasiyası vasitəsilə ifadə etmək olar.

Doğrudan da,

$$D[X \pm Y] = M[(X \pm Y) - M[X \pm Y]]^2 =$$

$$M[((X - M[X]) \pm (Y - M[Y]))^2] = M[(Y - M[Y])^2] +$$

$$+ M[(Y - M[Y])^2] \pm 2M[(X - M[X])(Y - M[Y])] =$$

$$= D[X] + D[Y] \pm 2cov(X, Y)$$

münasibətindən

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2cov(X, Y) \quad (10)$$

bərabərliyi alınır.

Xüsusi halda, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmadıqda $cov(X, Y)=0$ olar və (10) bərabərliyi

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \quad (11)$$

şəklində yazılır. Bu nəticə istənilən sonlu sayda asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi üçün də doğrudur:

$$D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n] \quad (12)$$

Buradan, n dənə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin hesabi ortasının dispersiyası üçün

$$D = \left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right] = \frac{D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n]}{n^2} \quad (13)$$

düsturu, $D[X_1] = D[X_2] = \dots = D[X_n] = D[X]$ olduqda isə

$$D = \left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right] = \frac{D[X]}{n} \quad (14)$$

düsturu alınır.

40.5.6. Korrelyasion asılılıq və xətti regressiya.

Korrelyasiya və regressiya analizi.

Tutaq ki, iki təsadüfi kəmiyyətin biri artdıqda o birisi bundan asılı olaraq orta hesabla, xətti olaraq ya artır, ya da azalır. Onda deyirlər ki, həmin kəmiyyətlər arasında xətti ehtimal asılılıq vardır. Xüsusi halda, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında olan $Y = aX + b$ şəklində xətti funksional asılılıq, həmin kəmiyyətlərin xətti ehtimal asılılığına ən yaxşı misaldır.

İndi tutaq ki, Y kəmiyyəti X – in xətti funksiyası deyildir. Lakin Y kəmiyyətini X – in xətti funksiyası olan $\varphi(X) = \alpha X + \beta$ şəklində funksiyalarla yaxınlaşdırmaq lazımdır.

$$Y \approx \varphi(x) = \alpha X + \beta \quad (1)$$

Elə α_0 və β_0 əmsalları tapmaq lazımdır ki, $\varphi_0(X) = \alpha_0 X + \beta_0$ xətti funksiyası hər hansı mənada Y kəmiyyətinə daha yaxın olsun. Bu məsələni müxtəlif

üsullarla həll etmək olar. Y kəmiyyətinə “ən yaxın” olan $\varphi(X)$ funksiyanın əmsalları $Y - \varphi(X)$ fərqi xətasının hesablanma qaydasına əsaslanan müxtəlif üsullarla tapılır. Burada həmin məsələ ən kiçik kvadratlar üsulu ilə həll edilir.

İkidəyişənli

$$F(\alpha, \beta) = M \left[(Y - \varphi(X))^2 \right] = M[(Y - \alpha X - \beta)^2]$$

funksiyanın (riyazi gözləmənin) ən kiçik qiymət aldığı $\varphi_0(X) = \alpha_0 X + \beta$ funksiya Y kəmiyyətinə orta kvadratik mənada ən **yaxşı yaxınlaşan funksiya** deyilir.

Verilmiş Y kəmiyyətinə orta kvadratik mənada ən yaxşı yaxınlaşan xətti funksiyanın varlığını göstərmək çətin deyildir.

Doğrudan da,

$m_x = M[X], m_y = M[Y], \sigma[X] = \sqrt{D[X]}, \sigma[Y] = \sqrt{D[Y]}$ işarələrini və

$$M[X - m_x] = M[Y - m_y] = 0,$$

$M[(X - m_x)(Y - m_y)] = cov(X, Y) = \rho\sigma[X]\sigma[Y]$ olduğunu nəzərə aldıqda, həmin funksiyanı

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= M \left[\left\{ (Y - m_y) - \alpha(X - m_x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (m_y - \alpha m_x - \beta) \right\}^2 \right] = M \left[(Y - m_y)^2 \right] + \\ &\quad + \alpha^2 M[(X - m_x)^2] + (m_y - \alpha m_x - \beta)^2 - \\ &\quad - 2\alpha\rho\sigma[X]\sigma[Y] = D[Y] + \alpha^2 D[X] + (m_y - \alpha m_x - \\ &\quad - \beta)^2 - 2\alpha\rho\sigma[X]\sigma[Y] = (\sigma[Y])^2 + \alpha^2 (\sigma[X])^2 + \\ &\quad + (m_y - \alpha m_x - \beta)^2 - 2\alpha\rho\sigma[X]\sigma[Y] \end{aligned}$$

şəklində yazmaq olar. Buradan

$$F(\alpha, \beta) = (\alpha\sigma[X] - \rho\sigma[Y])^2 + (\sigma[Y])^2(1 - \rho^2) + (m_y - \alpha m_x - \beta)^2 \quad (2)$$

bərabərliyi alınır. (2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadənin ən kiçik olması üçün

$$\begin{cases} \alpha\sigma[X] - \rho\sigma[Y] = 0, \\ m_y - \alpha m_x - \beta = 0 \end{cases}$$

bərabərlikləri ödənilməlidir. Bu sistemdən $F(\alpha, \beta)$ funksiyasının ən kiçik qiymət aldığı α_0 və β_0 əmsalları tapılır:

$$\begin{cases} \alpha = \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} = \alpha_0, \\ \beta = m_y - \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} m_x = \beta_0 \end{cases} \quad (3)$$

Əmsalları (3) bərabərlikləri ilə təyin olunan

$$\varphi_0(X) = \alpha_0 X + \beta_0 = \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} X + m_y - \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} m_x$$

və ya

$$\varphi_0(X) = m_y + \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} (X - m_x) \quad (4)$$

xətti funksiyası Y kəmiyyətinə orta kvadratik mənada ən yaxşı yaxınlaşan xətti funksiyadır. Bu halda, $F(\alpha, \beta)$ funksiyasının aldığı ən kiçik qiymət

$$F(\alpha_0, \beta_0) = (\sigma[Y])^2(1 - \rho^2) \quad (5)$$

olar. (5) ifadəsinə Y təsadüfi kəmiyyətinin X kəmiyyətinə nəzərən **qalıq dispersiyası** deyilir. Qalıq dispersiyası Y kəmiyyətini $\varphi_0(X) = \alpha_0 X + \beta_0$ xətti funksiyası ilə əvəz etdikdə buraxılan xətanı xarakterizə edir. ρ^2 kəmiyyəti vahidə yaxın olduqda X və Y kəmiyyətləri arasındakı xətti asılılıq güclü, sıfıra yaxın olduqda isə

zəif olur. $\rho^2 = 1$ olduqda isə qalığ dispersiyası sıfıra bərabərdir, yəni X və Y kəmiyyətləri arasında xətti funksional asılılıq vardır.

Deməli, X və Y kəmiyyətlərinin $\rho = \rho(X, Y)$ korrelyasiya əmsalı bu kəmiyyətlər arasındakı istənilən asılılığı deyil, ancaq xətti asılılığı xarakterizə edir. Korrelyasiya əmsalı kəmiyyətlər arasındakı xətti asılılığın ölçüsüdür, yəni bu əmsal bir təsadüfi kəmiyyətin digər kəmiyyətin xətti funksiyası şəklində hansı dəqiqliklə göstərilə bildiyini göstərir. Buna görə də, bəzən $\rho(X, Y)$ kəmiyyətinə **xətti asılılıq əmsalı** deyilir. (4) funksiyasına Y təsadüfi kəmiyyətinin X kəmiyyətinə nəzərən orta kvadratik reqressiyası, $\alpha_0 = \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}$ kəmiyyətinə reqressiya əmsalı,

$$Y - m_y = \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} (X - m_x) \quad (6)$$

düz xəttinə isə orta kvadratik reqressiya düz xətti deyilir. Eyni qayda ilə X təsadüfi kəmiyyətinin Y kəmiyyətinə nəzərən orta kvadratik reqressiyası, reqressiya əmsalı və

$$X - m_x = \rho \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} (Y - m_y) \quad (7)$$

orta kvadratik reqressiya düz xətti təyin edilir. Aydındır ki, (6) və (7) reqressiya düz xətlərinin hər ikisi (m_x , m_y) nöqtəsindən keçir. Bu nöqtə X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin **birgə paylanma mərkəzi** adlanır.

XXXXI FƏSİL. BAŞ YIĞIM VƏ SEÇMƏ ANLAYIŞI. RİYAZİ STATİSTİKANIN ELEMENTLƏRİ.

41.1.1. Riyazi statistikanın məsələləri haqqında

Ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilən qanunlar riyazi abstraksiya olmayıb, bir çox kütləvi hadisə və proseslərə xas olan real qanuna uyğunluqlardır. Hər bir belə qanunauyğunluğu müəyyən etmək üçün kifayət qədər təcrübə və müşahidələr aparılır. Bu təcrübə və müşahidələrin nəticələri və həm də başqa yolla alınmış müşahidələrin nəticəsini qeyd etmək, onları qruplaşdırmaq və analiz etmək üsulları riyazi statistika elmində müəyyən edilir. Riyazi statistikada müxtəlif məsələlər öyrənilir.

Bunlardan statistik məlumatların toplanma və qruplaşdırılmasını, naməlum paylanma funksiyasının və paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsini (onların münasib təqribi qiymətlərinin tapılmasını), bir təsadüfi kəmiyyətin başqa təsadüfi kəmiyyətlərdən asılılığının qiymətləndirilməsini, naməlum paylanmanın növü və növü məlum olan paylanmanın parametrlərinin qiymətləri haqqında fərziyyələrin statistik yoxlanmasını və başqalarını göstərmək olar.

41.1.2. Baş yığım və seçmə anlayışı

Tutaq ki, sonlu və ya sonsuz sayda eyni növ obyektlər çoxluğuna baxılır və bu çoxluğın təşkil edən ele-

mentlərin müəyyən əlaməti (və ya xassəni) ödəməsi tədqiq edilir.

Baxılan əlamət təsadüfi kəmiyyətdir və onun qiyməti bir elementdən başqasına keçdikdə dəyişir. Məsələn, bir zavodda hazırlanmış detalların tələb olunan standartda uyğun olması əlaməti, detalların müəyyən ölçülərinin dəqiqliyi əlaməti və s. tədqiq edilə bilər. Çoxluğu təşkil edən elementlərin sayı az olduqda, onun bütün elementlərinin həmin əlaməti ödəyib – ödəməməsini yoxlamaq olar, lakin elementlərin sayı çox böyük olduqda bu mümkün deyildir. Çoxluğun baxılan elementlərinin tələb olunan əlaməti ödəməsini yoxlamaq bəzən böyük çətinliklərlə bağlı olur və ya bu iş böyük xərc tələb edir.

Buna görə də, çox zaman baxılan çoxluğun bütün elementləri deyil, ondan təsadüfi olaraq seçilən məhdud sayda elementlər tədqiq edilir və alınan nəticəyə əsasən ümumi çoxluq elementlərinin tələb edilən əlaməti ödəməsi haqqında müəyyən fikir yürüdüldür. Bu halda, müşahidə və ya tədqiq olunan çoxluq **baş yığım** və ondan təsadüfi şəkildə seçilən kiçik həcmli çoxluq (elementlər yığımı) isə **təsadüfi seçmə yığım və ya qısaca seçmə** adlanır. Yığımı təşkil edən elementlərin sayına onun **həcmi** deyilir.

Məsələn, 10 000 elementi olan çoxluqdan tələb edilən əlamətin ödənilməsini yoxlamaq üçün 100 təsadüfi element seçilmişdirsə, onda baş yığının həcmi $N = 10\,000$ və təsadüfi seçmə yığının həcmi isə $n = 100$ olar.

Burada baxılan baş yığım və təsadüfi seçmə yığım anlayışları yeni olsa da, onlar mahiyyətə paylanma qanunu tədqiq edilən müəyyən təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlər çoxluğundan başqa bir şey deyildir. Bunu aşağıdakı kimi başa düşmək lazımdır.

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan X təsadüfi kəmiyyəti müəyyən sınaqlar nəticəsində x qiymətlərini ala bilər. Bu halda, paylanma funksiyası $F(x)$ olan X təsadüfi kəmiyyətin əvəzinə, “ x qiymətlərinin baş yığımı” və ya “paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığım” istilahi işlədilir.

X təsadüfi kəmiyyəti sınaq nəticəsində x qiymətini alır əvəzinə isə, “baş yığımın x qiymətlərinin təsadüfi birinin seçilməsi” istilahi işlədilir. Aparılan n asılı olmayan sınaq nəticəsində X kəmiyyətinin aldığı $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətləri baş yığımdan təsadüfi seçilən yığım adlanır, n ədədi bu yığımın həcmidir.

Riyazi statistikanın əsas məsələsi baş yığımdan təsadüfi ayrılan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə yığımın xassələrinə əsasən baş yığımın uyğun xassələri haqqında düzgün elmi nəticələr almaqdır. Seçmə yığım müxtəlif üsullarla düzəldilə bilər.

Tutaq ki, baş yığımın elementlərindən biri təsadüfi seçilir, tədqiq edilir və yenidən baş yığma qaytarılır. Bu prosesi n dəfə təkrar etdikdə, həcmi n olan **təkrarlı seçmə yığım** adlanır.

Baş yığımın təsadüfi seçilən elementləri yenidən baş yığma qaytarılmadıqda isə **təkrarsız seçmə yığım** adlanır. Praktikada əsasən təkrarsız seçmədən istifadə olunur. Bunun səbəbi odur ki, təkrarsız seçmədə daha

çox element müşahidə olunur və alınan nəticələr baş yığımın uyğun nəticələrini daha düzgün ifadə edir.

Ümumiyyətlə, seçmə yığım elə olmalıdır ki, o baş yığımın uyğun xassələrini daha düzgün ifadə etsin. Buna seçmə yığımın **nümayəndəli (representativ) olması xassəsi** deyilir.

Baş yığımın bütün elementlərinin seçmə yığma düşmə ehtimalı eynidirsə və seçmə yığımın bütün elementləri baş yığımdan təsadüfi seçilirsə, onda böyük ədədlər qanununa görə həmin seçmənin nümayəndəli olma xassəsi vardır.

41.1.3. Empirik paylanma funksiyası

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. Seçilən bu x_k qiymətlərinə **variantlar**, həmin qiymətlərin artan ardıcılıq şəklində

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (1)$$

yazılışına isə **variatsiya sırası** deyilir.

$$x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Seçmənin əsas xarakteristikalarından biri onun paylanmasıdır. Tutaq ki, seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $\frac{1}{n}$ ehtimalı ilə ala bilən köməkçi diskret təsadüfi kəmiyyət X^* ilə işarə edilmişdir:

$$p_k = P(X^* = x_k) = \frac{1}{n}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Diskret təsadüfi X^* kəmiyyətinin paylanmasına $x_1, x_2, \dots, x_n$ **seçmənin paylanması** deyilir. Təsadüfi seç-

məni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərinin x – dən kiçik olanlarının sayını $\mu_n(x)$ ilə işarə etsək, onda

$$P(X^* < x) = \frac{\mu_n(x)}{n} \quad (2)$$

olar. Bu ifadəyə **seçmənin paylanma funksiyası və ya empirik paylanma funksiyası** deyilir və $F_n^*(x)$ ilə işarə edilir:

$$F_n^*(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} \quad (3)$$

Hadisənin başvermə tezliyi onun ehyimalının təqribi qiyməti olduğu kimi təsadüfi kəmiyyət olan $F_n^*(x)$ funksiyası da baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasının (buna bəzən baş yığımın nəzəri paylanma funksiyası da deyilir) təqribi qiyməti hesab oluna bilər. (3) empirik paylanma funksiyasının baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasının xassələrinə oxşar xassələri vardır: azalmayıdır, qiymətləri $[0,1]$ parçasında yerləşir və $F_n^*(x_{(1)}) = 0, F_n^*(x) = 1$ ($X > x_{(n)}$) bərabərliklərini ödəyir.

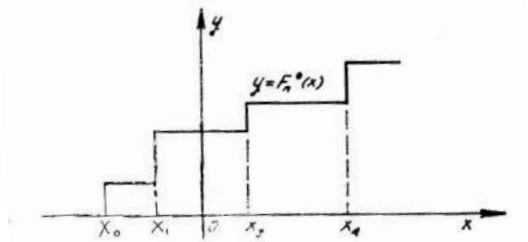
Bernulli teoreminə görə $n \rightarrow \infty$ şərtində seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası ehtimala görə baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasına yığılır, yəni istənilən $x(-\infty < x < \infty)$ və $\varepsilon > 0$ ədədlədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1 \quad (4)$$

münasibəti ödənilir. Bu göstərir ki, seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyasını baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasının təqribi qiyməti kimi götürmək olar.

Seçməni və onun paylanmasını əyani təsəvvür etmək üçün qrafiklərdən istifadə olunur. Əvvəlcə seçmənin empirik paylanma funksiyasının qrafikini quraq. $y = F_n^*(x)$ funksiyası seçmənin iki qonşu elementi arasında $\frac{1}{n} - n$

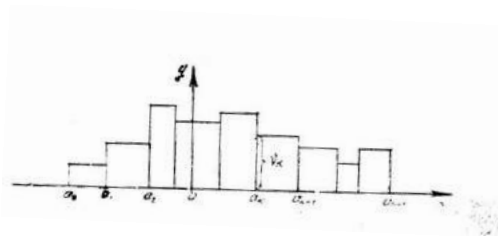
mislinə bərabər olan, yəni $\frac{m}{n}$ şəklində sabit qiymət alır. Seçmənin x_k nöqtələri həmin funksiyanın sonlu sıçrayışlı kəsilmə nöqtələridir və bu nöqtələrdə onun sıçrayışı $\frac{1}{n}$ (və ya m dənə x_k nöqtəsi üst – üstə düşdükdə $\frac{m}{n}$) ədədinə bərabərdir. Bunlar göstərir ki, $y = F_n^*(x)$ funksiyanın qrafiki 1 – ci şəkildə göstərildiyi kimi pilləvari xətdir.



Şəkil 1.

Seçmənin başqa bir həndəsi göstərilişi də onun **histoqramıdır**.

Seçmənin histoqramını qurmaq üçün ədəd oxu üzərində sonlu sayda $[a_k, a_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) parçaları götürülür. Seçmənin bu parçalarda yerləşən x_k nöqtələrinin sayı uyğun olaraq v_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) olsun. İndi hər bir $[a_k, a_{k+1}]$ parçası üzərində, oturacağı həmin parça və hündürlüyü v_k olan düzbucalı quraq. Alınan pilləvari fiqur (şəkil 2) $x_1, x_2, \dots, x_n$ **seçməsinin histoqramı** adlanır.



Şəkil 2.

Seçmənin histoqramı və onun empirik paylanma funksiyasının qrafiki baş yığımın naməlum $F(x)$ paylanma funksiyasının şəkli haqqında müəyyən fikir söyləməyə imkan verir.

41.2.1. Seçmənin ədədi xarakteristikaları

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığım-dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. Bu seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $\frac{1}{n}$ ehtimalı ilə ala bilən və əvvəlki paraqrafda təyin olunmuş köməkçi diskret təsadüfi X^* kəmiyyətinin ədədi xarakteristikalarına (riyazi gözləmə, dispersiya, momentlər və s.) seçmənin **ədədi xarakteristikaları** deyilir. Burada nəzərə almaq lazımdır ki,

$$p_k = P(X^* = x_k) = \frac{1}{n}$$

və xüsusi halda, seçmə daxilində x_k qiyməti m dəfə təkrar olunduqda

$$p_k = P(X^* = x_k) = \frac{m}{n}$$

olar. Diskret təsadüfi X^* kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$M[X^*] = \sum_{k=1}^n p_k x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (1)$$

kimi təyin olunur. (1) ifadəsinə seçmənin **riyazi gözləməsi** (**orta qiyməti**) deyilir və $\bar{x}$ ilə işarə edilir:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2)$$

X^* kəmiyyətinin dispersiyasına **seçmənin dispersiyası** deyilir və s^2 ilə işarə edilir:

$$s^2 = D[X^*] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Seçmənin r – tərtibli momenti (və ya başlanğıc momenti) və mərkəzi momenti uyğun olaraq

$$a_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^r \quad (4)$$

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^r \quad (5)$$

düsturları ilə təyin olunur. Aydındır ki,

$$a_1 = \bar{x} \quad \text{və} \quad m_2 = s^2 = D[X^*]$$

olar. (2) – (5) düsturlarından aydındır ki, seçmənin xarakteristik ədədlərinin tərifləri təsadüfi kəmiyyətlərin xarakteristik ədədləri təriflərinin tamamilə analoqudur. Fərqi burasındadır ki, seçmə yığımın xarakteristik ədədlərini təyin edərkən riyazi gözləmə əvəzinə seçmənin orta qiyməti götürülür.

Baş yığımın N həcmi kifayət qədər böyük olduqda seçmə yığımın paylanması və xarakteristikaları əslində N – dən asılı olmur. Buna görə də, baş yığımın həcmnin çox zaman sonsuz hesab edirlər. Seçmə yığımın həcmi isə həmişə məhdud götürülür. Lakin seçmə yığımın n həcmi qeyri – məhdud artdıqda onun xarakteristik ədədləri baş yığımın uyğun xarakteristik ədədlərinə yaxınlaşır. Buna görə də n –nin böyük qiymətlərində seçmənin xarakteristik ədədlərini baş yığımın (X təsadüfi kəmiyyətinin) uyğun xarakteristik ədədlərinin təqribi qiymətləri hesab edirlər:

$$M[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$D[X] \approx s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

(4) və (5) ifadələri isə baş yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) uyğun başlanğıc və mərkəzi momentlərinin təqribi qiymətləri kimi götürülür:

$$a_r \approx v_r = M[X^r],$$

$$m_r \approx \mu_r = M[(X - M[X])^r].$$

İndi seçmə yığımın riyazi gözləməsinin (və ya orta qiymətinin) riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq. Bu məqsədlə seçməni təşkil edən x_k qiymətlərinin asılı olmayan və X təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni paylanması olan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu nəzərə almaq lazımdır. Onda

$$M[\bar{x}] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[x_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[X] = M[X] = v_1,$$

$$D[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D[x_k] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D[X] = \frac{D[X]}{n} = \frac{\mu_2}{n}$$

və ya

$$M[\bar{x}] = M[X], \quad (6)$$

$$D[\bar{x}] = \frac{D[X]}{n} \quad (7)$$

olar. Eyni qayda ilə

$$M[a_r] = M[X^r] \quad (8)$$

$$D[a_r] = \frac{\nu_{2r} - \nu_r^2}{n} \quad (9)$$

bərabərliklərini də isbat etmək olar.

Seçmə yığımın dispersiyasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablamaq üçün onun (3) ifadəsini

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \nu)^2 - (\nu - \bar{x})^2$$

şəklində yazaq. Buradan

$$M[(x_k - \nu)^2] = M[(X - \nu)^2] = M[(X - M[X])^2] = D[X]$$

və

$$M[(\nu - \bar{x})^2] = D[\bar{x}] = \frac{D[X]}{n}$$

bərabərliklərinə əsasən

$$M[s^2] = \frac{nD[X]}{n} - \frac{D[X]}{n} = \frac{n-1}{n} D[X]$$

alınır. Deməli, seçmənin s^2 dispersiyasının riyazi gözləməsi baş yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) dispersiyasına bərabər deyildir. Lakin s^2 əvəzinə

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s, \quad \bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \quad (10)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\bar{s}^2$ kəmiyyətini götürdükdə, tələb olunan

$$M[\bar{s}^2] = D[X] \quad (11)$$

bərabərliyi alınır, yəni $\bar{s}^2$ kəmiyyətinin riyazi gözləməsi baş yığımın dispersiyasına bərabər olur. (10) ifadəsinə seçmə yığımın **məşihli (düzəliş edilmiş) dispersiyası** deyilir.

Eyni qayda ilə

$$D[s^2] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - \mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

bərabərliyi və buradan da n – nin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$D[s^2] \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}$$

təqribi bərabərliyi alınır.

41.2.2. Paylanma parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi

Tutaq ki, baxılan X təsadüfi kəmiyyətinin (və ya baş yığımın) paylanma funksiyası məlum deyildir. Bu funksiyanı tapmaq üçün asılı olmayan n sınaq aparılmış və nəticədə X təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətləri tapılmışdır (baş yığımından $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə yığım ayrılmışdır). Bu tapılmış $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərinə əsasən naməlum $F(x)$ paylanma funksiyasını tapmaq olarmı? Müşahidə nəticəsində alınmış $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərinə əsasən axtarılan paylanma funksiyası haqqında müəyyən fikir söyləmək üçün onların sayı (seçmənin n həcmi) çox böyük olmalıdır. Praktikada isə belə olmur. Müşahidələrin

nəticəsi adətən məhdud olur, yəni 10, 20 və ya bəzən daha da az olur. Bu halda həmin ədədlərə əsasən paylanma funksiyası haqqında əsaslı fikir söyləmək mümkün olmur.

Lakin bir çox hallarda paylanma funksiyası məlum olmasa da, onun hansı şəkildə funksiya olduğu və ya müəyyən sayda parametrdən asılı olan funksiyalar sinfinə daxil olduğu məlum olur: $F(x) = F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Bu halda, naməlum $F(x)$ paylanma funksiyasının tapılması məsələsi, onun naməlum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ parametrlərinin seçmə yığımının $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərinə əsasən tapılması məsələsinə gətirilir. Əlbəttə, nəzərə almaq lazımdır ki, ümumiyyətlə seçmə yığımının qiymətləri vasitəsilə naməlum parametrlərin dəqiq qiymətlərini tapmaq mümkün deyildir, bu yolla həmin parametrlərin ancaq müəyyən təqribi qiymətlərini tapmaq olar. Parametrlərin təqribi qiymətlərinin tapılmasına onların **qiymətləndirilməsi** deyilir.

Riyazi statistikanın bu mühüm məsələsini bir naməlum parametr üçün belə söyləmək olar. Tutaq ki,

$$F(x) = F(x, \theta)$$

paylanma funksiyası bir naməlum θ parametrindən asılı olan baş yığımdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə yığımı ayrılmışdır. Seçmənin bu $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərindən asılı olan və axtarılan θ parametrinin təqribi qiymətini verə bilən $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasını tapmaq tələb olunur.

Seçmə yığımdan asılı olan hər bir $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasına **statistika** deyilir. Hər bir θ_n statistikasını paylanma funksiyasının **naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi** adlanır.

Belə bir sual qarşıya çıxır: hansı şərtləri ödəyən $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasını θ parametri üçün ən yaxşı (və ya sadəcə yaxşı) qiymətləndirmə hesab etmək olar?

Bu məsələni tədqiq etmək üçün, fərz edək ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri eyni paylanma funksiyası olan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun qiymətləridir. Onda $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası asılı olmayan və eyni $F(x, \theta)$ paylanma funksiyasına malik olan n sayda $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətin və ya bir dənə $n -$ ölçülü $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun funksiyası olar.

Hər bir seçməyə $\theta_n^* = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyasının bir qiyməti – argumentlərin $X_k = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) qiymətlərinə uyğun olan qiyməti kimi baxmaq olar. Təsadüfi X_k kəmiyyətləri asılı deyildir və onların eyni $F(x, \theta)$ paylanma funksiyası vardır.

Buna görə də $n -$ ölçülü $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$\begin{aligned} F_x[t_1, t_2, \dots, t_n] &= P(X_1 < t_1, X_2 < t_2, \dots, X_n < t_n) = \\ &= P(X_1 < t_1)P(X_2 < t_2) \dots P(X_n < t_n) = \\ &= F(t_1)F(t_2) \dots F(t_n) \end{aligned}$$

bərabərliyi ilə birqiymətli təyin olunur və axtarılan θ parametrindən asılıdır. Onda $\theta_n^*(X) = \theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyasının paylanma funksiyası da θ parametrindən asılı olar. $\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyası elə seçilməlidir ki, onun qiymətləri axtarılan (təsadüfi olmayan) θ parametrinin qiymətinə çox yaxın olsun. Bu halda, $\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyasının bütün qiymətləri θ - dan ancaq böyük və ya ancaq kiçik ola bilməz, çünki belə olduqda axtarılan θ parametrini $\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ilə qiymətləndirdikdə həmişə birişarəli sistematik xətlər alınar. Buna görə də, zə-

ruri olaraq $M[\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta$ bərabərliyi ödənilməlidir.

Tərif 1. n – nin bütün qiymətlərində

$$M[\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta \quad (1)$$

bərabərliyini ödəyən $\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyasına θ parametrinin **sürüşdürülməmiş qiymətləndirilməsi** deyilir. Əks halda, yəni

$$M[\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)] \neq \theta$$

olduqda, $\theta_n^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **sürüşdürülmüş qiymətləndirmə** adlanır.

Baxılan qiymətləndirmə sürüşdürülmüş olduqda, bəzən ona düzəliş verməklə sürüşdürülməmiş qiymətləndirmə şəklinə gətirmək olar. Məsələn, əvvəlki paraqrafda seçmə yığımın s^2 dispersiyası düzəliş edilməklə sürüşdürülməmiş qiymətləndirməyə gətirildi. Əgər θ_n^* qiymətləndirmənin θ parametrindən $\theta_n^* - \theta$ “sürüşməsi” (və ya meyli) çox kiçikdirsə, onda onu seçmənin həcmi kifayət qədər böyük olduqda nəzərə almamaq olar. Seçmənin həcmi kiçik olduqda isə bu mümkün deyildir. Buna görə də seçmənin həcmi kiçik olduqda qiymətləndirmənin sürüşdürülməmiş olmasının böyük əhəmiyyəti vardır.

θ_n^* funksiyası qiymətlərinin axtarılan θ parametrinə çox yaxın olması üçün həmin θ_n^* kəmiyyətinin θ ətrafında səpələnməsi də mümkün qədər kiçik olmalıdır. Təsadüfi θ_n^* kəmiyyəti qiymətlərinin θ ətrafında səpələnməsi ikitərtibli $M[(\theta_n^* - \theta)^2]$ momenti ilə xarakterizə olunur. Bu momentin ən kiçik qiymət aldığı qiymətləndirmə daha yaxşı hesab olunur. θ_n^* qiymətləndirmə sürüşdürülməmiş olduqda ikitərtibli $M[(\theta_n^* - \theta)^2]$ momenti onun $D[\theta_n^*]$ dispersiyasına bərabər olur.

Tərif 2. Verilmiş θ_n^* və θ_n^{**} qiymətləndirmələri üçün

$$M[(\theta_n^* - \theta)^2] < M[(\theta_n^{**} - \theta)^2] \quad (2)$$

bərabərsizliyi ödənildikdə, θ_n^* qiymətləndirməsi θ_n^{**} qiymətləndirməsinə nəzərən daha effektiv qiymətləndirmə adlanır.

Tutaq ki, ikitərtibli $M[(\theta_n^* - \theta)^2]$ momentinin sonlu olduğu bütün θ_n^* qiymətləndirmələri çoxluğunda

$$\gamma = \inf_{(\theta_n^*)} M[(\theta_n^* - \theta)^2] \quad (3)$$

dəqiq aşağı sərhədinə baxılır. Bu dəqiq aşağı sərhədi verən θ_n^* funksiyası **effektiv qiymətləndirmə** adlanır. Effektiv qiymətləndirmənin dispersiyası ən kiçik mümkün dispersiya olur.

Seçmə yığımın həcmi böyük olduqda, parametrin qiymətləndirilməsi bir şərti də ödəməlidir. Tələb edilir ki, $n \rightarrow \infty$ şərtində parametrin qiymətləndirilməsi hər hansı mənada (ehtimala görə, orta kvadratik mənada və s.) həmin parametrin özünə yığılsın.

Tərif 3. θ_n^* qiymətləndirmə $n \rightarrow \infty$ şərtində ehtimala görə θ parametrinə yığılırsa (yəni istənilən kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$$

bərabərliyi ödənilirsə, ona θ parametrinin **əsaslı qiymətləndirilməsi** deyilir.

Baxılan parametrin bir neçə əsaslı və sürüşdürülməmiş qiymətləndirilməsi olduqda, onların içərisindən effektiv olanını götürmək lazımdır. Bir çox paylanmalar üçün baxılan parametrin effektiv qiymətləndirilməsi göstərilə bilər.

Misal 1. Tutaq ki, baş yığımın $\theta_1 = M[X]$ parametri, yəni riyazi gözləməsi axtarılır.

Onun qiymətləndirilməsi olaraq

$$\begin{aligned}\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \bar{x} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \text{ və } \theta_n^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\end{aligned}$$

funksiyalarını götürək. Bu qiymətləndirmələrin ikisi də sürüşdürülməmişdir:

$$M[\theta_n^*] = M[\bar{x}] = \theta_1 = M[X],$$

$$M[\theta_n^{**}] = M[x_1] = \theta_1 = M[X].$$

Böyük ədədlər qanununa görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{x} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

olduğundan, $\theta_n^* = \bar{x}$ qiymətləndirməsi həm də əsaslıdır, lakin θ_n^{**} qiymətləndirməsi əsaslı deyildir.

Normal paylanma üçün $\theta_n^* = \bar{x}$ funksiyası (seçmənin riyazi gözləməsi) həm də effektiv qiymətləndirmədir.

Misal 2. Tutaq ki, axtarılan parametr baş yığımın $\theta_2 = D[X]$ dispersiyasıdır.

Bu halda parametrin qiymətləndirilməsi olaraq

$$\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

funksiyasını (seçmənin dispersiyasını) götürdükdə,

$$M[s^2] = \frac{n-1}{n} D[X]$$

münasibətinə əsasən o sürüşdürülmüş qiymətləndirmə olar.

Lakin $n \rightarrow \infty$ şərtində ehtimala görə $M[s^2] \rightarrow \theta_2 = D[X]$

münasibətinin ödənilməsi həmin qiymətləndirmənin əsaslı olduğunu göstərir.

θ_2 parametrinin qiymətləndirilməsi olaraq s^2 əvəzinə əvvəlki paraqrafda təyin olunmuş

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

funksiyasını götürdükdə, həmin qiymətləndirmə həm sürüşdürülməmiş

$$M[\bar{s}^2] = \theta_2 = D[X]$$

həm də əsaslı olar.

41.2.3. Qiymətləndirmənin dəqiqliyi və etibarlılıq intervalı

Tutaq ki, baş yığımın $F(x, \theta)$ paylanma funksiyası naməlum θ parametrindən asılıdır. Bu parametrin seçmənin uyğun xarakteristik ədədləri vasitəsilə qiymətləndirilməsindən əvvəlki paraqrafda danışılmışdır. Parametrlər üçün orada tapılmış qiymətlər bir ədəddən ibarət olduğu üçün onlara **nöqtəvi qiymətləndirmələr** deyilir. Nöqtəvi qiymətləndirmələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin xüsusi qiymətləridir və onlar axtarılan parametrin əsil qiymətindən xeyli fərqlənə bilər. Buna görə də naməlum parametrlər üçün tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyinin və etibarlılığının öyrənilməsi riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biridir.

Parametrlər üçün tapılmış qiymətlərin dəqiqlik və etibarlılıq məsələləri interval qiymətləndirmə üsulu ilə tədqiq edilir.

Tutaq ki, axtarılan sabit θ parametri üçün

$$\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

qiymətləndirməsi tapılmışdır və $\delta > 0$ ixtiyari həqiqi ədəddir. θ_n^* qiymətləndirməsinin θ – ya yaxın olmasını

$$|\theta_n^* - \theta| < \delta \quad (1)$$

bərabərsizliyi vasitəsilə xarakterizə etmək olar. Bu bərabərsizliyi ödəyən $\delta > 0$ ədədi nə qədər kiçik olarsa, θ_n^* qiymətləndirməsi də θ – ya bir o qədər çox yaxın olar.

Deməli, (1) bərabərsizliyini ödəyən δ ədədi qiymətləndirmənin dəqiqliyini ifadə edir. Lakin θ_n^* təsadüfi kəmiyyət olduğundan (1) bərabərsizliyinin hökmən ödənildiyini demək olmaz, (1) bərabərsizliyinin müəyyən ehtimalla ödənilməsindən danışmaq olar.

Tutaq ki, ixtiyari $0 < \alpha < 1$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ vardır ki,

$$\begin{aligned} P(|\theta - \theta_n^*| < \delta) &= P(-\delta < \theta - \theta_n^* < \delta) = \\ &= P(\theta_n^* - \delta < \theta < \theta_n^* + \delta) = \alpha \end{aligned}$$

bərabərliyi ödənilir, yəni ucları təsadüfi kəmiyyətlər olan $(\theta_n^* - \delta, \theta_n^* + \delta)$ intervalının naməlum θ parametrini örtməyinin (onu öz daxilinə almağının) ehtimalı α ədədinə bərabərdir. Bu halda, $(\theta_n^* - \delta, \theta_n^* + \delta)$ intervalına **etibarlılıq intervalı**, $\theta_n^* - \delta$ və $\theta_n^* + \delta$ ədədlərinə **etibarlılıq sərhədləri** və α ədədinə **etibarlılıq ehtimalı** (və ya **etibarlılıq əmsali**) deyilir. Etibarlılıq intervalı tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyini, etibarlılıq ehtimalı isə qiymətləndirmələrin etibarlılığını xarakterizə edir.

Etibarlılıq intervalının daha ümumi tərifini də vermək olar. Ucları $a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $a_2 = a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ təsadüfi kəmiyyətləri olan və

$P(a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < \theta < a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \alpha$ bərabərsizliyini ödəyən (a_1, a_2) intervalı **θ parametrinin etibarlılıq intervalı** adlanır.

Bir çox praktiki məsələlərin həlli paylanmanın naməlum parametrinin qiymətləndirilməsi üçün etibarlılıq intervalının tapılmasını tələb edir. Verilmiş α etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalları müxtəlif üsullarla qurulur. Əlbəttə, bu zaman çalışırlar ki, qurulan etibarlılıq intervallarının uzunluğu mümkün qədər kiçik olsun. Burada normal paylanmanın naməlum parametrlərinin qiymətləndirmələri üçün etibarlılıq intervalları tapılır.

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış baş yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) dispersiyası $D[X] = \sigma^2$ məlumdur, riyazi gözləməsi a isə məlum deyildir. Bu naməlum a parametrinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinin

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

orta qiyməti vasitəsilə qiymətləndirilməsinin etibarlılıq intervalını tapmaq lazımdır.

Yuxarıda dediyimiz kimi, seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərini asılı olmayan və eyni normal qanunla paylanmış təsadüfi $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin qiymətləri kimi qəbul etsək, onda $\bar{x}$ kəmiyyəti də həmin (a, σ) parametrlə normal qanunla paylanmış olar və

$$M[\bar{x}] = M[X] = a,$$

$$D[\bar{x}] = \frac{D[X]}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

bərabərlikləri ödənilir. Bu halda,

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$$

bərabərliklərinə əsasən normal paylanmış X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &\quad \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

münasibəti alınır. Burada

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

məlum Lapalas funksiyasıdır.

Xüsusi halda,

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \\ &= \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

və ya

$$P(|X - a| < \delta) = P(X - \delta < a < X + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

olar. Burada X əvəzinə $\bar{x}$ götürdükdə σ^2 əvəzinə $\frac{\sigma^2}{n}$ yazılmalıdır və nəticədə

$$P(\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right)$$

bərabərliyi, $t = \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}$ əvəzləməsini apardıqda isə

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right) = 2\Phi(t)$$

bərabərliyi alınır. Burada $2\Phi(t_\alpha) = \alpha$ qəbul etdikdə,

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha\right) = \alpha \quad (2)$$

münasibəti alınır ki, bu da a parametrinin α etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının

$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha\right)$ olduğunu göstərir.

Qeyd edək ki, α ədədi (etibarlılıq ehtimalı) verildikdə $2\Phi(t_\alpha) = \alpha$ bərabərliyinə əsasən Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən t_α tapılır. Məsələn, $\alpha = 0,98$ götürdükdə $2\Phi(t_\alpha) = 0,98$, $\Phi(t_\alpha) = 0,49$ və cədvəldən $t_\alpha = 2,3263$ tapılır. $\alpha = 0,999$ götürdükdə isə $t_\alpha = 3,29$ alınır.

Dediklərimizdən aydındır ki, $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha\right)$ intervalının naməlum $a = M[X]$ parametrini öz daxilinə almasının (yəni onu örtməsinin) ehtimalı α ədədinə bərabərdir. (2) bərabərliyindən klassik qiymətləndirilmə adlanan

$$|\bar{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

və ya

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha} < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha}$$

münasibəti alınır.

Baş yığının dispersiyası (və ya $\sigma = \sqrt{D[X]}$ kəmiyyəti) məlum olmadıqda yuxarıda alınmış qiymətləndirmələrdən istifadə etmək olmaz.

Bu halda, seçmənin $\bar{x}$ orta qiyməti və təşhili

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\bar{x} - x_k)^2}{n-1}}$$

dispersiyası vasitəsilə təyin edilmiş

$$T = \frac{\bar{x} - a}{\bar{s}/\sqrt{n}}$$

təsadüfi kəmiyyətinə baxılır və göstərilir ki, T kəmiyyəti paylanma sıxlığı

$$s_n(t) = \frac{q\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} q\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad (3)$$

olan Styudent paylanmasına malikdir. Styudent paylanması X təsadüfi kəmiyyətinin (a, σ) normal paylanma parametrlərindən asılı olmayıb, yalnız seçmənin n həcmindən asılıdır. Styudent paylanmasının (3) sıxlıq funksiyası cüt olduğundan, $\left|\frac{\bar{x}-a}{\bar{s}/\sqrt{n}}\right| < \delta$ bərabərsizliyinin başverməsi ehtimalı

$$P(|T| < \delta) = P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{\bar{s}/\sqrt{n}}\right| < \delta\right) = 2 \int_0^{\delta} s_n(t) dt$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Buradan

$$P\left(|\bar{x} - a| < \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \delta\right) = 2 \int_0^{\delta} S_n(t) dt$$

və ya

$$P\left(\bar{x} - \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \delta < a < \bar{x} + \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \delta\right) = 2 \int_0^{\delta} S_n(t) dt$$

münasibəti alınır. Onu

$$2 \int_0^{t_\alpha} S_n(t) dt = \alpha \quad (4)$$

bərabərliyindən təyin olunan t_α ədədi vasitəsilə

$$P\left(|\bar{x} - a| < \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha\right) = \alpha$$

və ya

$$P\left(\bar{x} - \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha\right) = \alpha$$

kimi yazmaq olar.

Deməli, $\left(\bar{x} - \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha < \bar{a} < \bar{x} + \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha\right)$ intervalının naməlum $a = M[X]$ parametrini öz daxilinə almasının ehtimalı α ədədinə bərabərdir. Burada t_α ədədi (4) bərabərliyi vasitəsilə təyin edilir və $\left(\bar{x} - \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_\alpha\right)$ intervalı α parametrinin etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq α parametrinin intervalıdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, α ədədi verildikdə t_α ədədi Styudent paylanmasının məlum qiymətləri cədvəlindən tapılır.

Beləliklə, naməlum a parametrinin etibarlılıq intervalını tapmaq üçün məlum $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə əsasən

$\bar{x}$ və $\bar{s}$ kəmiyyətləri, (4) bərabərliyindən isə t_α kəmiyyəti təyin edilməlidir. Sonra isə bu qiymətlərdən istifadə etməklə axtarılan intervalın ucları olan

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha \text{ və } \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha \text{ etibarlılıq sərhədləri tapılır.}$$

Misal 1. Tutaq ki, a kəmiyyətini təyin etmək üçün 10 dəfə ölçmə aparılmışdır.

$\sigma = \sqrt{D(X)} = 0,28$ olduqda a kəmiyyətinin əsil qiymətinin $\alpha = 0,99$ ehtimalı ilə yerləşdiyi etibarlılıq intervalını tapmalı

κ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_κ	35,6	35,9	35,1	35,9	36,1	36,2	36,6	36,1	35,9	36,2

Həlli. Ölçmə nəticələrinin orta qiymətini tapmaq:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^n x_k = 36,06.$$

$\alpha = 0,99$ olduğundan $\Phi(t_\alpha) = 0,495$ olur və Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $t_\alpha = 2,576$ tapılır. Bu halda, ölçmənin dəqiqliyi

$$\delta = \frac{0,28}{\sqrt{10}} \cdot 2,576 = 0,23$$

ədədi ilə ifadə olunur. Deməli, $\alpha = 0,99$ ehtimalı ilə etibar etmək olar ki, a – nın əsil qiyməti ($\bar{x} - 0,23$; $\bar{x} + 0,23$) və ya (35,83; 36,29) etibarlılıq intervalında yerləşir.

Əvvəllər qeyd etdiyimiz kimi, a – nın daha münasib təqribi qiyməti olaraq çox vaxt ölçmə nəticələrinin orta qiyməti götürülür:

$$a \approx \bar{x} = 36,06$$

41.2.4. Statistik fərziyyələrin yoxlanması

Baxılan baş yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) paylanma funksiyası bəzən məlum olmur. Lakin aparılan mühakimələrə və başqa məlumatlara əsasən çox vaxt onun paylanma funksiyasının hansı şəkildə (normal paylanma funksiyası, Puasson paylanma funksiyası və s.) olması haqqında müəyyən fərziyyələr söyləmək mümkün olur: “baş yığımın paylanma funksiyası F şəklindədir”. Ola da bilər ki, baş yığımın paylanma funksiyası məlumdur, lakin onun parametrləri məlum deyildir. Bu halda, paylanmanın θ parametrinin müəyyən θ_0 qiymətinə bərabər olması, θ_0 – *dan* böyük və ya kiçik qiymətlər alması və s. haqqında müəyyən fərziyyələr söylənir. Bütün belə fərziyyələrə **statistik fərziyyələr** deyilir. Məsələn, “baxılan baş yığım normal qanunla paylanmışdır”, “paylanmanın θ parametri θ_0 qiymətinə bərabərdir: $\theta = \theta_0$ ” və s. statistik fərziyyələrdir. Statistik fərziyyələrin düzgün olub – olmaması empirik nəticələr və ya seçmə yığım vasitəsilə yoxlanılır (statistik yoxlanma). Bu məqsədlə, müəyyən bir qayda ilə sınaq nəticəsində alınan $x_1, x_2, \dots, x_n$ nəticələrinin (seçmənin) baş yığımın (və ya baxılan X təsadüfi kəmiyyətinin) paylanma funksiyası haqqındakı fərziyyələrə uyğun olub – olmadığı (müşahidənin nəticələri ilə uzlaşdığı) yoxlanılır. Həmin qaydaya, yəni irəli sürülən fərziyyənin qəbul və ya rədd edilməsini göstərən qaydaya **uzlaşma kriterisi** deyilir.

İrəli sürülən hər bir fərziyyəyə **əsas (və ya sıfırıncı) fərziyyə** deyilir və H_0 ilə işarə edilir. Əsas fərziyyəyə zidd olan hər bir fərziyyə isə **alternativ fərziyyə** adlanır və H_1 ilə işarə edilir. Fərziyyələr sadə və mürəkkəb olur.

Seçmə yığımın paylanmasını birqiymətli təyin edən fərziyyə **sadə fərziyyə** adlanır. Sadə fərziyyə, adətən, bir hökmdən ibarət olur. Məsələn, normal paylanmanın riyazi gözləməsi 2 – yə bərabərdir (σ parametri məlum olduqda) təklifi sadə fərziyyədir.

Sadə olmayan fərziyyələr **mürəkkəb fərziyyə** adlanır. Seçmənin bir neçə məlum olmayan parametrdən asılı olan paylanması haqqındakı fərziyyələr mürəkkəb fərziyyədir. Mürəkkəb fərziyyələr sonlu və ya sonsuz sayda sadə fərziyyələrdən ibarət olur. Məsələn, üstlü paylanmanın λ parametrinin 4 – dən böyük olmasından ($\lambda > 4$) ibarət olan mürəkkəb fərziyyə, sonsuz sayda sadə $\lambda = ak$ (ak ilə 4 – dən böyük olan istənilən ədəd işarə edilmişdir) fərziyyələrindən ibarətdir.

Hər bir əsas fərziyyənin doğruluğunu yoxlamaq üçün paylanma qanunu dəqiq və ya təqribi olaraq məlum olan bir təsadüfi T kəmiyyəti götürülür. Hər bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seçmə yığımına bu təsadüfi kəmiyyətin müəyyən bir qiyməti uyğun olur.

Əsas fərziyyəni yoxlamaq üçün götürülən təsadüfi T kəmiyyətini müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məsələn, tutaq ki, baxılan X təsadüfi kəmiyyətinin axtarılan paylanma funksiyasının müəyyən $F(x)$ funksiyasına bərabər olmasından ibarət olan əsas fərziyyəni yoxlamaq lazımdır. X kəmiyyətinin sınaq nəticəsində tapılmış qiymətləri (seçmə yığım) $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Bu seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası ilə göstərilən $F(x)$ nəzəri

paylanma funksiyasının meylini xarakterizə edən $d = d(F_n^*, F) \geq 0$ kəmiyyəti müxtəlif şəkillərdə təyin edilir. Məsələn,

$$d(F_n^*, F) = \sup_{(x)} |F_n^*(x) - F(x)|,$$

$$d(F_n^*, F) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^*(x) - F(x)]^{2k} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \geq 0$$

və s. Belə təyin olunan təsadüfi $d=T(x)$ kəmiyyətləri vasitəsilə müxtəlif uzlaşma kriteriləri alınır.

Seçilən uzlaşma kriterisinə uyğun olaraq baxılan təsadüfi T kəmiyyətinin qiymətləri çoxluğu kəsişməyən iki altçoxluğa ayrılır: böhran oblastına (s) və fərziyyənin qəbul olunma oblastına (Q).

Sınaq nəticəsində alınan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seçməsinə uyğun olan $T(x)$ kəmiyyəti hesablanır. Bu qiymət s böhran oblastına daxil ($T(x) \in s$) olduqda əsas H_0 fərziyyəsi rədd edilir (qəbul olunmur), tapılmış qiymət Q qəbul olunma oblastına daxil ($T(x) \in Q$) olduqda isə əsas H_0 fərziyyəsi qəbul olunur.

Statistik fərziyyəni yoxlaryakən iki növ səhv buraxıla bilər.

Birinci növ səhv, H_0 fərziyyəsi doğru olduğu halda, onun rədd edilməsidir. Belə səhvlər, doğru olan H_0 fərziyyəsinin rədd edimə ehtimalı, yəni $\alpha = p_{H_0}(x \in s)$ ehtimalı ilə xarakterizə edilir.

İkinci növ səhv isə, əsas H_0 fərziyyəsi doğru olmadığı halda, onun qəbul edilməsidir. Bu halda, alternativ H_1 fərziyyəsi doğru olur, lakin doğru olmayan H_0 fərziyyəsi qəbul edilir. Belə səhvlər $\beta = p_{H_1}(x \in Q)$ ehtimalı ilə,

yəni alternativ fərziyyə doğru olduğu halda, düz olmayan H_0 fərziyyəsinin qəbul edilmə ehtimalı ilə xarakterizə edilir.

$1 - \beta$ ədədi baxılan **kriterinin gücü** adlanır. Birinci növ səhvi xarakterizə edən α ehtimalı verildikdə, β ədədini ən kiçik, yəni bütün kriterilər içərisindən ən böyük gücü olanını seçməyə çalışırlar.

Əsas fərziyyəni yoxlamaq üçün kriteriya seçilmə qaydasını bir məsələ üzərində izah edək. Tutaq ki, təsadüfi X kəmiyyətinin paylanma funksiyasının müəyyən $F(x)$ funksiyası olması fərziyyəsinə, sınaq nəticəsində X kəmiyyətinin alınmış $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərinin seçmə yığını vasitəsilə yoxlamaq lazımdır. Bu məqsədlə, ədəd oxunu $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ nöqtələri vasitəsilə $m+1$ sayda kəşşməyən

$(-\infty, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_{m-1}, a_m), [a_m, \infty)$ (1) yarımintervallarına ayıraq. X kəmiyyəti qiymətlərinin (1) intervallarına düşməsi ehtimalını fərz olunan $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyası vasitəsilə tapmaq olar:

$$p_1 = P(x \in (-\infty, a_1)) = P(x < a_1) = F(a_1),$$

$$p_k = P(x \in [a_{k-1}, a_k)) = F(a_k) - F(a_{k-1}),$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

$$p_{m+1} = P(x \in [a_m, \infty)) = 1 - F(a_m),$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} p_k = 1$$

(1) intervallarında yerləşən $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərinin sayı uyğun olaraq $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$ olsun. Onda X kəmiyyəti qiymətlərinin n sınaq nəticəsində (1) intervallarına düşməsinin tezliyi uyğun olaraq $\frac{v_k}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, m + 1$) olaq:

$$\sum_{k=1}^{m+1} v_k = n, \quad \sum_{k=1}^{m+1} \frac{v_k}{n} = 1$$

Beləliklə, fərz olunan $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının (1) intervallarında artımları p_k ədədləri, seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyasının həmin intervallarda artımları isə $\frac{v_k}{n}$ ədədləri olar. Bu halda, $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü olaraq

$$d = \eta_{n,m} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(v_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{n}{p_k} \left(\frac{v_k}{n} - p_k \right)^2 \quad (2)$$

kəmiyyəti götürülür. (2) ifadəsi təsadüfi kəmiyyətdir və baxılan əsas fərziyyənin doğruluğunu qəbul etməklə onun paylanmasını tapmaq olar. Lakin $\eta_{n,m}$ kəmiyyətinin hər bir n üçün paylanmasını tapmağa ehtiyac yoxdur. Çünki uzlaşma kriterisini həmin kəmiyyətin $n \rightarrow \infty$ şərtində limit paylanmasından istifadə etməklə tapmaq mümkün olur.

Pirson göstərmişdir ki, ixtiyari x və *sabit* $pk > 0$

($k = 1, 2, \dots, m + 1$) ədədləridir üçün $n \rightarrow \infty$ şərtində

$$P(\eta_{n,m} < x) \rightarrow P(x_m^2 < x) \quad (3)$$

münasibəti ödənilir. Burada x_m^2 ilə paylanması məlum olan (və cədvəl şəklində verilən konkret təsadüfi kəmiyyət işarə edilmişdir).

(3) münasibətindən istifadə etməklə yuxarıda dediyimiz əsas fərziyyəni yoxlamaq üçün müəyyən kriteriya almaq olar. Bu məqsədlə elə sabit $\varepsilon > 0$ ədədi götürək ki, əsas fərziyyənin doğruluğu şərtində

$$\eta_{n,m} > \varepsilon \quad (4)$$

hadisəsinin ehtimalı çox kiçik olsun, yəni (4) hadisəsi praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə olsun. Bu o deməkdir ki, əsas fərziyyə doğru olduqda (yəni X kəmiyyətinin funksiyası $F(x)$ olduqda) sınaq nəticəsində alınmış seçməsi üçün (4) bərabərsizliyinin ödənilməsi praktiki olaraq mümkün deyildir. Buradan aşağıdakı uzlaşma kriterisi alınır: **sınaq nəticəsində alınan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi üçün $\eta_{n,m} > \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənildikdə əsas fərziyyə rədd edilməli, $\eta_{n,m} \leq \varepsilon$ ödənildikdə isə əsas fərziyyə qəbul edilməlidir (sınağın nəticələri fərziyyə ilə uzlaşır).**

Bu halda, doğru olan əsas fərziyyənin rədd edilmə ehtimalı $\alpha = P(\eta_{n,m} > \varepsilon)$ kəmiyyəti olar. α ədədi verildikdə (3) münasibətinə əsasən ε ədədini ("böhran oblastını") $\alpha = P(\mathbf{x}_m^2 > \varepsilon)$ bərabərsizliyinə əsasən təqribi olaraq tapmaq olar. Bu məqsədlə, riyazi statistikaya aid kitablarda verilən məlum cədvəldən $\alpha = P(\mathbf{x}_m^2 > \varepsilon)$ bərabərsizliyini ödəyən ε ədədi dəqiq və ya təqribi olaraq tapılır. Praktiki məsələlərin həllində α ədədi çox kiçik götürülür: $\alpha=0,01$, $\alpha=0,05, \dots$, $\alpha=0,01$ götürüldükdə doğru olan fərziyyələrin təqribən 1% -i rədd edilir.

ƏDƏBİYYAT

1. А.Кудрявцев, Б.П. Демидович- Краткий курс высшей математики.Москва «Наука»1989г.
2. П.Ф.Фильчаков.Справочник по высшей математики «Наукова Думка» Киев 1974г.
3. У.В.Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И.Соркин, Н.Г. Федин. Математика в понятиях, определениях и терминах.I часть Москва «Просвещение» 1978г.
4. M. Nəsimov. Mütləq qiymət və onun tədbiqi. “Maarif” Nəşriyyatı-1981 il.
5. Q.M.Namazov.Funksiyalar və Qrafiklər.“Bakı Biznes Universiteti Nəşriyyatı” Bakı- 2011 il
6. C. Nurəddinoğlu. Ali riyaziyyat kursu üzrə məsələ və misallar. I hissə. Çarşıoğlu. Bakı -2000
7. R. Məmmədov. Ali riyaziyyat kursu I hissə “Maarif”- 1978 il
8. R.Məmmədov. Ali riyaziyyat kursu II hissə.“Maarif”-1981 il
9. R.Məmmədov.Ali riyaziyyat kursu III hissə.“Maarif”-1984 il
10. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər. III hissə. Bakı-1998
11. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər I hissə.Bakı-2004
12. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər II hissə.Bakı-2005
13. U.U.O. Qaydukov. Mütləq qiymət . “Maarif”-1970
14. Ə.Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və Riyazi statistika.“Maarif”-1973

15. О.С.Ивашев-Мусатов. Начало математического анализа. Москва «Наука» 1988 г.
16. Ə.S. Səfərov, C. N. Suleymanov. Birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı. Bakı -1986
17. С.В. Фрохов. Курс высшей математики. Москва «Высшая школа»-1973
18. N.S.Piskunov. Differensial və integral hesabı I hissə. “Maarif”-1966
19. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В.П. Иваницкая. Аналитическая Геометрия Просвещения -1970
20. N.S. Əfəndiyev. Ədəbi və funksional sıraların əsasları. Bakı- Azərnəşir1959
21. М.Ə.Əzimov, F.N.Səlimov, Ş.F.Məmmədov Diferensial Tənliklər.
22. Н.М.Гюнтер и Р.О.Кузмин. Сборник задач по высшей математики II часть. Москва- 1959
23. Г. И. Кручкович, Г.М.Мордасова, В.А.Подольский, Б.С. Римский-Корсоков, Х.Р. Сулейманова, М. А. Чегис. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Издательство « Высшая школа» Москва- 1970
24. В.Р. Demidoviç. Riyazi Analizdən Məsələ və Misallar. Tərcümə edənlər.Əliyev A.R. Bakı-2004
25. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления I том. Физматгиз. Москва1962
26. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. II том. Физматгиз. Москва1962

27. У.В.Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И.Соркин, Н.Г. Федин. Математика в понятиях, определениях и терминах. II часть Москва «Просвещение» 1982г.

MÜNDƏRİCAT

Giriş.....	3
XXIV FƏSİL. Matrisin elementləri. Skalyar	
 matris. Vahid matris.....	4
24.1.1. Matris m sayda sətir və n sayda sütunu olan düzbucaqlı cədvəl kimi.....	4
24.1.2. Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılması.....	5
24.2. Matrisin növləri. Matrislər üzərində əməllər. Skalyar və vahid matris.....	6
24.3. Matrisin ədədə hasili. Matrislərin vurulması. (Vurulan matrisin sütunlarının sayı vuran matrisin sətirlərinin sayına bərabər olduqda)	7
24.4.1. Vurma əməlinə nəzərən kommutativ olmayan matrislər.....	8
24.4.2. Matrislər üzərində aparılan sadə çevirmələr.....	9
XXV FƏSİL. Determinant. Determinantın xassələri. Üçtərtibli determinant.....	14
25.1.1. İkitərtibli determinant sol və sağ diaqonal elementlərinin hasilinin fərqi kimi. Üçtərtibli determinant.....	14
25.1.2. Üçtərtibli determinantın hesablan-	15

	ması üçün üçbucaq və Sarrius üsulu..	
25.1.3.	Minor və cəbri tamamlayıcı. Üçtərtibli determinantların cəbri tamamlayıcılar vasitəsilə ayrılması. Yüksək tərtibli determinantın hesablanması.....	17
25.1.4.	Determinantın xassələri.....	21
25.2.	Determinantın sıfıra bərabər olması şərtləri.....	27
XXVI FƏSİL	Tərs matris və onun varlığı.	
	Genişlənmiş matrislər.....	28
26.1.1.	Tərs matris və onun varlığı. Məxsusi cırlaşan və qeyri-məxsusi matris.....	28
26.1.2.	Əsas və genişləndirilmiş matris.....	29
26.1.3.	Matrisin rəngi. Bazis minoru.....	29
26.2.1.	Matris tərsinin olması üçün zəruri və kafi şərt.....	33
26.2.2.	Matrislə onun tərsinin hasilinin vahid matris olması.....	34
XXVII FƏSİL	Kramer qaydası. Qauss üsulu.....	36
27.1.	Xətti tənliklər sisteminin həlli ,bir neçə xətti tənliyin birgə həllinin tapılması kimi.....	36
27.2.	Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olan Kramer qaydası və Kramer düsturları.....	37
27.3.	İxtiyari xətti tənliklər sistemi üçün Qauss (ardıcıl yoxetmə) üsulu və bu üsulun ümumi sxemi.....	41

XXVIII FƏSİL	Bircinsli xətti tənliklər sistemi. xətti tənliklər sisteminin matris yazılışı və həlli.....	46
28.1.	Xətti bircinsli tənliklər sistemi və onun trivial həlli haqqında.....	46
28.2.	Xətti tənliklər sisteminin matris yazılışı və həlli.....	48
XXIX FƏSİL.	Xətti tənliklər sisteminin birgəlik əlaməti. Kroneker-kapelli teoremi.....	53
29.1.	Xətti tənliklər sisteminin uyğun (birgə) və ya uyğunmayan (birgə olmayan) olması haqqında Kroneker-kapelli teoremi. Bu teoremin bəzi tətbiqləri.....	53
29.2.	Matrisin rənginin tənliklərin sayına bərabər, kiçik və böyük olan halda tənliklər sisteminin həlli.....	55
XXX FƏSİL.	Vektorlar və onlar üzərində xətti əməllər.....	59
30.1.	Vektorların ayrılışı.....	59
30.2.	Vektorların skalyar hasilı.....	65
30.3.	Vektorların vektorial hasilı.....	68
30.4.	Vektorların qarışıq hasilı.....	70
XXXI FƏSİL.	Müstəvi üzərində analitik həndəsə.....	73
31.1.	Müstəvi üzərində koordinatlar üsulu.....	73

31.2.	Müstəvi üzərində düz xətt.....	77
31.3.	İki tərtibli əyrilər.....	82
XXXII FƏSİL.	Fəzada analitik həndəsə.....	89
32.1.	Fəzada müstəvi tənlikləri.....	89
32.2.	Fəzada düz xətt tənlikləri.....	94
32.3.	Fəzada düz xətt və müstəvi.....	99
XXXIII FƏSİL.	Xətti fəzalar.Xətti çevirmələr.....	102
33.1.	Xətti fəzalar.....	102
33.1.1.	Xətti operatorun tərfi.....	129
33.1.2.	Xətti operatorların növləri.....	130
33.1.3.	Xətti çevirmənin matris vasitəsilə verilməsi.....	131
33.2.1.	Qeyri məxsusi çevirmə.....	134
33.2.2.	Qarşılıqlı birqismətli uyğunluq və afin çevirməsi.....	136
33.3.1.	Xətti çevirmələr üzərində əməllər...	138
33.3.2.	Tərs çevirmə və onun varlığı.....	140
XXXIV FƏSİL.	Xətti çevirmənin matris şəkli. Ortoqonal matrislər.....	142
34.1.	Xətti çevirmənin matris şəkli.Bazis dəyişdikdə xətti çevirmə matrisinin dəyişməsi.....	142
34.2.	Xətti çevirmənin məxsusi qiyməti və məxsusi vektoru.....	144
34.3.	Ortonormal bazisin əvəz edilməsi və ortoqonal matrislər.....	146
XXXV FƏSİL.	Qabarıq çoxbucaqlar və xətti	149

	bərabərsizliklər sistemi.....	
35.1.	Qabarıq çoxluqlar və xətti bərabərsizliklər sistemi.....	149
35.2.	İki dəyişənli xətti bərabərsizliklər sisteminin qrafik üsulla həlli.....	153
35.3.	Qabarıq çoxluq. Təpə nöqtəsi, daxili nöqtə və kənar nöqtə.....	155
XXXVI FƏSİL.	Təsadüfi hadisələr və sınaqlar. Ha- disənin nəticəsi. Hadisələr cəbri.....	158
36.1.1.	Ehtimal nəzəriyyəsinin elementlə- ri. Təsadüfi hadisələr və sınaqlar və onların təsnifatı.....	158
36.1.2.	Sınaqlar seriyası və hadisələrin baş-vermə tezliyi.....	161
36.2.1.	Elementar hadisələr fəzası.....	164
36.2.2.	Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər.....	168
36.3.1.	Hadisələr cəbri.....	173
36.3.2.	Hadisələrin ehtimalı və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları.....	175
XXXVII FƏSİL	Ehtimalın sadə xassələri. Ehtimalın klassik tərif. Şərti ehtimal.....	180
37.1.1.	Ehtimalın sadə xassələri.....	180
37.1.2.	Ehtimalın klassik tərif.....	182
37.1.3	Birləşmələr nəzəriyyəsinin element- ləri və ehtimalın klassik tərifə əsa- sən hesablanmasına aid mi- sallar.....	185

37.2.1	Permutasyon.....	186
37.2.2.	Aranjeman.....	187
37.2.3.	Kombinezon.....	189
37.3.1.	Ehtimalın toplama teoremi.....	192
37.3.2.	Ehtimalın statistik tərifı.....	194
37.4.1.	Həndəsi ehtimal.....	195
37.4.2.	Şərti Ehtimal.....	198
37.5.	Hadisələrin hasilinin ehtimalı.....	201
XXXVIII FƏSİL	Asılı olmayan hadisələr. Ehtimal- lar poliqonu.....	204
38.1.1.	Asılı olmayan hadisələr.....	204
38.1.2.	Tam ehtimal və Bayes düsturu.....	207
38.2.1.	Asılı olmayan sınaqlar ardıcılı- ğı. Təkrarlanan sınaqlar. Bernulli düsturu. Ən böyük ehtimallı qiymət və onların tapılması.....	211
38.2.2.	Puassonun və Muavr – Laplasın asimptotik düsturları.....	217
XXXIX FƏSİL	Təsadüfi kəmiyyət. Paylanma funksiyasının xassələri.....	235
39.1.	Təsadüfi kəmiyyət və onun paylan- ma funksiyası.....	235
39.2.	Paylanma funksiyasının xassələri...	240
39.3.1.	Diskret paylanmalar. a) Binomial paylanması, b) Puasson paylanma-	244

	sı. c) Həndəsi paylanma.	
	d) Hiperhəndəsi paylanma.....	
39.3.2.	Kəsilməz paylanmalar ; a) Normal paylanma. b) Üstlü paylanma.	
	c) Müntəzəm paylanma.....	247
XXXX FƏSİL	Çoxölçülü funksiyanın xassələri. Riyazi gözləmənin xassələri. Böyük ədədlər qanunu. Korrelyasiya və reqressiya analizi.....	253
40.1.	Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər və onların paylanma funksiyası.....	253
40.2.1.	Çoxölçülü funksiyanın xassələri....	255
40.2.2.	Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.....	259
40.3.1.	Təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyası.....	262
40.3.2.	Riyazi gözləmə.....	267
40.4.	Riyazi gözləmənin xassələri.....	272
40.5.1.	Median, Kvantil və Moda.....	276
40.5.2.	Dispersiya.....	279
40.5.3.	Dispersiyanın xassələri.....	283
40.5.4.	Təsadüfi kəmiyyətin momentləri...	287
40.5.5.	Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı.....	290
40.5.6.	Korrelyasion asılılıq və xətti reqressiya. Korrelyasiya və reqressiya analizi	295
XXXXI FƏSİL.	Baş yığım və seçmə anlayışı. Riyazi	

statistikanın elementləri.....	299
41.1.1. Riyazi statistikanın məsələləri haqqında.....	299
41.1.2. Baş yığım və seçmə anlayışı.....	299
41.1.3. Empirik paylanma funksiyası.....	302
41.2.1. Seçmənin ədədi xarakteristikaları..	305
41.2.2. Paylanma parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi.....	309
41.2.3. Qiymətləndirmənin dəqiqliyi və etibarlılıq intervalı.....	315
41.2.4 Statistik fərziyələrin yoxlanması....	323
Ədəbiyyat.....	329

NAMAZOV QABİL MƏHƏMMƏD OĞLU

ALİ RİYAZİYYAT

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti. Bakı, 2012, səh 339

Redaktor: f.r.e.d., prof. H.İ.Aslanov

Texniki redaktor: T.B.Məmmədov

Kompüter tərtibatçısı: Ş.N.Abdullayeva

Kompüter operatorları: M.Ə.Sadıqov, A.Y.Babayeva

Yığılmaga verilmişdir: 11.10.2012

Çapa imzalanıb: 14.12.2012

Kağız formatı: 60x80

Həcmi: 21,20 ç.v.

Tiraj: 500

«Bakı Biznes Universiteti nəşriyyatı»

Bakı, H.Zərdabi küç. 88^a