ALİ RİYAZİYYATA AİD ÇALIŞMALAR

ƏLİ ƏLİYEV
FİRƏNGİZ ƏLƏKBƏROVA
QİYMƏT CƏFƏROVA

Vəsaitin əlyazmasına Bakı Dövlət Universitetinin professoru M.B.Rəhimov və Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universitetinin professoru R.M.Əliyev rəy vermişlər.

Elmi redaktoru: Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının həqiqi üzvü, prof. A.C.Hacıyev

Əliyev Əli Məhti oğlu, Ələkbərova Firəngiz Məmməd qızı, Cəfərova Qiymət Kamil qızı. **Ali riyaziyyata aid çalışmalar**. «R.N.Novruz-94» nəşriyyatı, Bakı, 2003, səh. 370

Dərs vəsaiti ali texniki institutların tələbələri üçün ali riyaziyyat proqramı əsasında yazılmışdır. Kitabdan universitetlərin təbiət fakultələrinin və kolleclərin tələbələri də istifadə edə bilərlər.

Ə $\frac{1602010000-034}{089-2003}$

ÖN SÖZ

Kitab müəllifin 1999-cu ildə nəşr olunmuş «Ali riyaziyyat» adlı dərs vəsaitində verilən nəzəri materialları tam əhatə edir (xətti cəbrin elementləri, analitik həndəsə, diferensial və inteqral hesabının elementləri, diferensial tənliklər, kompleks dəyişənli funksiyalar, ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri və s.). Bundan başqa kitaba ali texniki universitetlərdə tədris olunan ali riyaziyyatın xüsusi kurslarını da əhatə edən materiallar daxil edilmişdir. Kitabın sonundakı əlavələr bölməsində elementar və ali riyaziyyatın əsas düsturları, teoremləri və bir sıra anlayışları yığcam şəkildə verilmişdir. Bunlar da tələbələrin dərs vəsaitindən istifadə etmək imkanlarını daha da artıra bilər.

Ali riyaziyyat fənni texniki universitetlərin birinci və ikinci kurslarında tədris olunduğu üçün onu uyğun olaraq bir neçə hissəyə bölürlər (xətti cəbr, vektorlar cəbri, analitik həndəsə, riyazi analiz və ali riyaziyyata aid kurslar). Biz bu qaydadan fərqli olaraq ali riyaziyyat kursunun bütün bölmələrini əhatə edən materialları bir kitabda yerləşdirmişik.

Müəllifin fikrincə ali riyaziyyat kursundan mühazirə oxuyan və ya məşğələ aparan müəllim, kollokvium üçün çalışmalar seçəndə, yoxlama yazı işləri üçün məsələlərin variantlarını tərtib edəndə və s. bu kimi hallarda göstərilən dərs vəsaitindən istifadə edə bilərlər.

16 fəsildən ibarət olan bu dərs vəsaitinə onun bütün fəsillərini tam əhatə edən 2650-dən çox yoxlama sualları, nümunəvi həllər və çalışmalar daxil edilmişdir.

Təklif olunan çalışmaların müəyyən hissəsi müəllif tərəfindən tərtib olunmuş, bir sıra çalışmalar isə müxtəlif dərs vəsaitlərindən götürülmüşdür. Belə ki, bəzi fəsillərdə çalışmalar elə seçilmişdir ki, onlardan sonrakı çalışmaların həllində istifadə olunsun.

Bu da kitabın daha da kompakt şəkildə olması üçün vacib amillərdən biridir. Bu dərs vəsaiti ali texniki universitetlərin tələbələri üçün yazılmasına baxmayaraq, ondan digər ali məktəblərin, texnikumların və kolleclərin uyğun fakultələrinin tələbələri də istifadə edə bilərlər.

Kitabın əlyazmasının müzakirəsi zamanı Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının həqiqi üzvü, prof. A.Hacıyev, Bakı Dövlət Universitetinin professorları M.Yaqubov, M.Rəhimov, K. Mansimov, Azərbaycan Texniki Universitetinin professoru M.Dünyamalıyev, Azərbaycan Me'marlıq və İnşaat Universitetinin professoru R.Əliyev, dos. Z.Nuriyev, Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyasının dosenti V.Mehdiyev öz dəyərli məsləhətləri ilə müəllifə yaxından kömək etmişlər. Müəllif həmin yoldaşlara öz səmimi minnətdarlığını bildirir.

Müəllifin fikrincə bu kitab yəqin ki, nöqsansız deyil. Buna görə də kitabın gələcək nəşrinin daha da keyfiyyətli olması üçün arzu, təklif və rəylərini bizə-Azərbaycan Me'marlıq və İnşaat Universitetinin «Ali riyaziyyat» kafedrasına göndərən oxuculara qabaqcadan öz minnətdarlığımı bildirirəm.

Əli Əliyev

İkinci nəşrə ön söz

Birinci nəşrdən sonra aldığımız çox saylı arzu və təkliflər, kitabın yeni nəşrinə bir sıra əlavələr etmək zərürəti yaratdı. Belə ki, bütün tapşırıqların cavabları və 450-dən çox misal və məsələnin izahlı həllini verməyi lazım bildik. Bu arzu və təkliflərə görə oxucularımıza, kitabın ikinci nəşrində müəlliflərə yaxından köməklik göstərdiyinə görə AzMİU-nun kompyuter mərkəzinin riyaziyyatçı-proqramçısı Rafiq Əsədullayevə səmimi təşəkkürümüzü bildiririk.

Müəliflər

I FƏSİL

Xətti cəbr

Çalışma 1. Matrislərin cəmini, fərqini və hasilini tapın.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 4 & 5 & -3\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{4}{3}\\ 5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -2 & 6 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ -\frac{1}{4} & 1 & 2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$,

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$,

4) $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 5 & 9 & 14\\ 2 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 11\\ 2 & -7 & 7\\ 5 & 3 & 10\end{pmatrix}$,

5) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -4\\ \frac{1}{4} & 1 & 5\end{pmatrix}$,

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 10 & 0\\ 9 & -\frac{1}{3} & 5\\ 6 & 8 & 3\end{pmatrix}$,

7) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 6 & -5 & 0\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -\frac{1}{4}\\ 8 & 3 & 6\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$,

8) $A=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 12\\ 4 & 6 & 4\\ 8 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 0\\ -5 & 10 & 7\end{pmatrix}$,

9) $A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 13\\ -5 & 1 & 4\\ 6 & 8 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 12 & -8\\ 5 & 0 & 3\\ 5 & 8 & -5\end{pmatrix}$,

10) $A=\begin{pmatrix}9 & -3 & 9\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & 5 & 12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -5\\ 6 & 6 & 0\\ 4 & -8 & 7\end{pmatrix}$,

11) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 0\\ -3 & 7 & -2\\ -1 & 4 & 6\end{pmatrix}$,

12) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 6 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11 & 12 & 0\\ 17 & 4 & 5\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$,

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 17 & 0 \end{pmatrix}$,

14) $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 5 & -5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 12 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$,

15) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 11 \end{pmatrix}$,

16) $A=\begin{pmatrix} 13 & 14 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

17) $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 4 & \frac{1}{5} \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 3 & 2 & 9 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Çalışma 2. 1-ci çalışmadakı matrislərin determinantlarını hesablayın və tərs matrislərini tapın.

Çalışma 3. Xətti tənliklər sistemini iki üsulla həll edin:
a) Kramer dusturları ilə; b) Matris üsulu ilə;

1) $\begin{cases} 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$,

2) $\begin{cases} 4x+y-3z=-4 \\ 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ x+y+z=2 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$,

4) $\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$,

5) $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0, \\ x+y+z=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-2y+z=4 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} x-y+2z=-5 \\ 4x-6y+z=3 \\ 7x+y-8z=14 \end{cases}$,

8) $\begin{cases} 4x-y+6z=0 \\ 3x-8y+5z=-2, \\ 7x+18y+z=12 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$,

10) $\begin{cases} 6x-y+7z=12 \\ 5x+6y+z=-8, \\ x+7y+5z=6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ 5x-3y+2z=3, \\ 7x+y+3z=20 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 5x-4y-3z=4 \\ 4x-3y+2z=8, \\ 3x+2y+z=14 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5x-4y+z=3 \\ 3x+y-2z=31, \\ 8x-3y-z=1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x-y-z=12 \\ 6x-3y-3z=36, \\ 4x-2y-2z=24 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 10x-8y+6z=8 \\ 4x+2y+21z=27, \\ x+y+z=3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1. \\ x+3y+z=2 \end{cases}$

Çalışma 4. Xətti tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edin.

1) $\begin{cases} 5x+7y-4z-6t=3 \\ 3x-4y+z+3t=5 \\ 3x-5y+2z+4t=2 \end{cases}$,

2) $\begin{cases} x-2y+t=-3 \\ 3x-y-2z=1 \\ 2x+y-2z-t=4 \\ x+3y-2z-2t=7 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ y+2z+3t=20 \\ 3x+z+2t=10 \\ 2x+3y+t=12 \end{cases}$,

4) $\begin{cases} x-3y+5z-7t=12 \\ 3x-5y+7z-t=0 \\ 5x-7y+z-3t=4 \\ 7x-y+3z-5t=16 \end{cases}$,

5) $\begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2x-y+3z-2t=1 \\ y-z+2t=6 \\ 3x-y+z-t=0 \end{cases}$,

6) $\begin{cases} y-3z+4t=-5 \\ x-2z+3t=-4 \\ 3x+2y-5t=-12 \\ 4x+3y-5t=5 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 2x+3y+9z+2t=6 \\ 3x+2y+3z+8t=-7 \end{cases}$,

8) $\begin{cases} 5x+3y+t=12 \\ 3x+z+2t=10 \\ x+2y+3z=14 \\ y+2z+3t=20 \end{cases}$,

9) $\begin{cases} 2x-y+2z-t=0 \\ x+5y+4z+3t=1, \\ 5x+3y+8z+t=1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x-y+5z+t=11 \\ x+y-2z+4t=10, \\ 3x-2y+6z-t=8 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4, \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x-y+3z+14t=-8 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 6x-2y+3z+14t=5 \end{cases}$,

13) $\begin{cases} 5x+y-3z=-6 \\ 2x-5y+7z=9 \\ 4x+2y-4z=-7 \\ 5x-2y+2z=1 \end{cases}$, 14) $\begin{cases} 3x+5y+z+9t=1 \\ 3x+7y+4z+8t=2 \\ x+3y+3z+5t=-1 \\ 2x+6y+5z+6t=1 \end{cases}$,

15) $\begin{cases} 8x-3y+6z+t=12 \\ 4x-12y-z+9t=0 \\ x+15y-2z+4t=18 \\ 21x+16y+z-19t=-13 \end{cases}$, 16) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ x+y+z=6 \\ 3x-6y+5z=6 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$,

17) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \\ 4x+3y-9z=9 \end{cases}$.

Nümunəvi həllər

1) Matrislərin cəmini tapın.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Həlli:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+3 \\ 3+2 & 4+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

2) Matrisləri vurun.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Həlli:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot1\\ 3\cdot4+1\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 13 & 10\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1+3\cdot3 & 4\cdot2+3\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 11\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

3) A^3 - tapın, əgər

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Həlli:

$$A^3=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 20\\ 20 & 15\end{pmatrix}.$$

4) Determinantı hesablayın.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Həlli: Dördtərtibli bu determinantı birinci sətir elementlərinə görə hesablayaq.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(8-2-2)+1\cdot(-4+1) =$$

$$= 8-3 = 5.$$

5) Matrisin tərs matrisini tapın.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Həlli: A matrisinin determinantını hesablayaq.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6+16-30+4 = -4 \neq 0.$$

Bu matrisin elementlərinin cəbri tamamlayıcılarını tapaq.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Onda

$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

6) Matrisin ranqını tə'yin edin.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Həlli: Dördüncü sütun elementlərindən üçüncü sütun elementlərini çıxaq.

$$A\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Dördüncü sütun elementlərini nəzərə almayaq.

$$A\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=24\neq 0$$

olduğundan A matrisinin ranqı 3-ə bərabərdir.

7) Kramer düsturları ilə tənliklər sistemini həll edin.

$$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ x-3y+2z=5\\ x+y+z=3\end{cases}.$$

Həlli: $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarını hesablayaq.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3+4-9-2-2 = 9 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21+15+12+27-10-14 = 9,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5+14+9-15-7-6 = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9+7+10+21-6-5 = 18,$$

Onda $x = \dfrac{9}{9} = 1, \quad y = \dfrac{0}{9} = 0, \quad z = \dfrac{18}{9} = 2.$

8) Matris metodu ilə tənliklər sistemini həll edin.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}.$$

Həlli: Sistemi $AX = B$ şəkilində yazaq, burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Δ determinantını və onun cəbri tamamlayıcılarını hesablayaq.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&3&1\end{vmatrix}=1+6+2-1-3-4=1\neq 0,\quad A_1=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=-2,$$

$$B_1=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad C_1=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,\quad A_2=-\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}=1,$$

$$B_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\quad C_2=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_3=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,$$

$$B_3=-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1,\quad C_3=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3.$$

Buradan

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}$$

olar. Onda

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-1+2\\-1+0+2\\5+1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

və ya

$$x=-1,\quad y=1,\quad z=0.$$

3) Qauss metodu ilə tənliklər sistemini həll edin.

$$\begin{cases}x-y+4z-3t=1\\2x-3y+3z-2t=2\\4x-9y+z-8t=-3\\x+6y-4z+8t=4.\end{cases}$$

Həlli: Sistemin

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 2 & -3 & 3 & -2 & 2\\ 4 & -9 & 1 & -8 & -3\\ 1 & 6 & -4 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

genişlənmiş matrisi üzərində müvafiq çevirmələr aparaq. II matrisin birinci sətrini –2-yə, -4-ə və –1-ə vurub uyğun olan ikinci, üçüncü və dördüncü sətrlə toplayaq.

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -15 & 4 & -7\\ 0 & 8 & -8 & 11 & 3\end{pmatrix}.$$

Alınan matrisin ikinci sətrini –1-ə və 8-ə vurub uyğun olan üçüncü və dördüncü sətrlərlə toplayaq.

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 32 & -21 & 3\end{pmatrix}.$$

Nəhayət bu matrisin üçüncü sətrini $\frac{32}{20}$ ədədinə vurub dördüncü sətrlə toplasaq, alarıq

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{41}{5} & -\frac{41}{5}\end{pmatrix}.$$

Axırıncı üçbucaq matrisinə uyğun tənliklər sistemini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar.

$$\begin{cases} x-2y+4z-1=1 \\ y-5z+4t=0 \\ 20z+8t=-7 \\ -\dfrac{41}{5}t=-\dfrac{41}{5} \end{cases}.$$

Bu sistemi mə'lum qayda ilə həll etsək, onun

$$x=\frac{1}{2},\ \ y=-\frac{1}{4},\ \ z=\frac{3}{4},\ \ t=1.$$

həllərini taparıq.

III) Çalışma 1-in 3-cü misalının həlli:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 5+1 & 0+3 \\ 2+3 & -1+4 & 4+2 \\ 3+0 & 5+5 & 8-1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \qquad AB=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot3+5\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot1+5\cdot4+0\cdot5 & 1\cdot3+5\cdot2+0\cdot(-1) \\ 2\cdot3+(-1)3+4\cdot0 & 2\cdot1+(-1)4+4\cdot5 & 2\cdot3+(-1)\cdot2+4\cdot(-1) \\ 3\cdot3+3\cdot5+0\cdot8 & 3\cdot1+5\cdot4+8\cdot5 & 3\cdot3+5\cdot2+8\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 18 & 21 & 13 \\ 3 & 18 & 0 \\ 24 & 63 & 11 \end{pmatrix}.$$

Eyni qayda ilə BA hesablamaq olar. Nəzərdə alaq ki, AB≠BA ola bilər.

11) Çalışma 2-nin 11-ci misalının həlli:

$$\Delta(B)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}= 210+8+0+40+72=330\neq0$$

$$B_{11}= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=42+8=50 \qquad B_{12}= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-(-18-2)=2$$

$$B_{13}= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-12+7= -5 \qquad B_{21}= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-(24-0)= -24$$

$$B_{22}= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=30 \qquad B_{23}= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}= - (20+4) =-2$$

$$B_{31}= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}= -8 \qquad B_{32}= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}= 10$$

$$B_{33}= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}= 35+12=47$$

Onda

$$B^{-1}=\frac{1}{\Delta(B)}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{330}\begin{pmatrix} 50 & -24 & -8 \\ 20 & 30 & 10 \\ -5 & -24 & 47 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & -\frac{12}{165} & -\frac{4}{165} \\ \frac{2}{33} & \frac{1}{11} & \frac{1}{33} \\ -\frac{1}{66} & -\frac{4}{55} & \frac{47}{330} \end{pmatrix}.$$

I) Çalışma 3-ün 1-ci misalın həlli:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}= 6+36\text{-}4\text{-}6+4\text{-}36=0.$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}= 9+12\text{-}16\text{-}24+6\text{-}12=\text{-}25\neq 0$$

$\Delta x\neq 0$ olduğu üçün bu sistemin həlli yoxdur.

II) Çalışma 3-ün 2-ci misalının həlli:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4\\ 2\\ -5\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

İşarə edək.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\end{vmatrix}=\text{-}2\neq 0,\ A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=9,\quad A_{13}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=13,$$

$$A_{21}=--\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-11,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-19,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

Alınan martisin üçüncü sətrini –3-ə və –4-ə vurub uyğun olaraq ikinci və dördüncü sətrlə toplayaq və ikinci sətrlə üçüncü sətrin yerini dəyişək.

$$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&4\\0&0&5&-7&-13\\0&-1&0&1&2\\0&0&4&-8&-20\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&5&-7&-13\\0&0&4&-8&-20\end{pmatrix}.$$

Axırıncı matrisdə üçüncü sətri $-\frac{4}{5}$-ə vurub dördüncü sət

toplayaq

$$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&5&-7&-13\\0&0&0&-\frac{12}{5}&-\frac{48}{5}\end{pmatrix}.$$

Bu üçbucaq matrisinə uyğun tənliklər sistemini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar.

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z+t=4\\-y+t=2\\5z-7t=-13\\-\frac{12}{5}t=-\frac{48}{5}\end{array}\right\}.$$

Bu sistemi məlum qayda ilə həll etsək, onun

x=1, y=2, z=3, t=4 həllini taparıq.

II FƏSİL

Analitik həndəsə

Çalışma 1. $\bar d$ vektorunun $\bar a,\bar b,\bar c$ vektorları üzrə ayrılışını tapın.

1) $\bar d(3,7,-7)$, $\bar a(2,1,0)$, $\bar b(1,-1,2)$, $\bar c(2,2,-1)$,
2) $\bar d(11,-1,4)$, $\bar a(1,-1,2)$, $\bar b(3,2,0)$, $\bar c(-1,1,1)$,
3) $\bar d(1,20,1)$, $\bar a(-2,3,5)$, $\bar b(1,-3,4)$, $\bar c(7,8,-1)$,
4) $\bar d(3,2,52)$, $\bar a(2,4,-6)$, $\bar b(1,3,5)$, $\bar c(0,-3,7)$,
5) $\bar d(15,-20,-1)$, $\bar a(0,2,1)$, $\bar b(0,1,-1)$, $\bar c(5,-3,2)$,
6) $\bar d(9,14,16)$, $\bar a(2,1,3)$, $\bar b(3,2,4)$, $\bar c(2,-3,1)$,
7) $\bar d(2,7,5)$, $\bar a(1,0,1)$, $\bar b(1,-2,0)$, $\bar c(0,3,1)$,
8) $\bar d(5,15,0)$, $\bar a(1,0,5)$, $\bar b(-1,3,2)$, $\bar c(0,-1,1)$,
9) $\bar d(-5,9,-13)$, $\bar a(0,1,20)$, $\bar b(3,-1,1)$, $\bar c(4,1,0)$,
10) $\bar d(3,4,-3)$, $\bar a(-5,5,0)$, $\bar b(2,1,-4)$, $\bar c(8,-16,17)$,
11) $\bar d(2,1,0)$, $\bar a(4,3,-8)$, $\bar b(-6,5,7)$, $\bar c(34,5,-26)$,
12) $\bar d(1,0,5)$, $\bar a(3,2,7)$, $\bar b(5,0,9)$, $\bar c(-4,2,-12)$,
13) $\bar d(6,11,9)$, $\bar a(1,2,4)$, $\bar b(-2,-1,1)$, $\bar c(4,3,-5)$,
14) $\bar d(2,9,17)$, $\bar a(2,2,6)$, $\bar b(-3,1,-5)$, $\bar c(1,-4,2)$,
15) $\bar d(9,13,-1)$, $\bar a(1,2,3)$, $\bar b(-2,-1,2)$, $\bar c(-1,3,-5)$,
16) $\bar d(11,-6,5)$, $\bar a(3,-2,1)$, $\bar b(-1,1,-2)$, $\bar c(2,1,-3)$,
17) $\bar d(-19,-1,7)$, $\bar a(0,1,1)$, $\bar b(-2,0,1)$, $\bar c(3,1,0)$.

Çalışma 2. $\bar a$ və $\bar b$ vektorlarına görə qurulan $\bar c$ və $\bar d$ vektorlarının kollinearlığını müəyyən edin.

1) $\bar a(5,0,-1)$, $\bar b(7,2,3)$, $\bar c=2\bar a-\bar b$, $\bar d=3\bar b-6\bar a$.
2) $\bar a(3,-2,6)$, $\bar b(-2,1,0)$, $\bar c=\bar b+3\bar a$, $\bar d=3\bar a-3\bar b$,

3) $\overline{a}(3,-6,1)$, $\overline{b}(1,4,-5)$, $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{d} = 4\overline{b} + 2\overline{a}$.

4) $\overline{a}(4,3,-1)$, $\overline{b}(2,1,2)$, $\overline{c} = \frac{1}{3}\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{d} = 3\overline{a} - \overline{b}$.

5) $\overline{a}(3,-7,8)$, $\overline{b}(7,-3,2)$, $\overline{c} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$, $\overline{d} = 10\overline{a} - 6\overline{b}$.

6) $\overline{a}(1,-2,1)$, $\overline{b}(0,3,-2)$, $\overline{c} = 3\overline{a} + 5\overline{b}$, $\overline{d} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$.

7) $\overline{a}(1,0,5)$, $\overline{b}(-1,4,2)$, $\overline{c} = \overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{d} = 3\overline{a} + 9\overline{b}$.

8) $\overline{a}(1,-3,4)$, $\overline{b}(2,0,-4)$, $\overline{c} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{d} = 3\overline{a} - 6\overline{b}$.

9) $\overline{a}(3,-7,-6)$, $\overline{b}(5,-1,-2)$, $\overline{c} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{d} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.

10) $\overline{a}(3,2,3)$, $\overline{b}(0,-2,-3)$, $\overline{c} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{d} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.

11) $\overline{a}(1,1,-1)$, $\overline{b}(1,2,-3)$, $\overline{c} = 4\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{d} = 2\overline{a} + 2\overline{b}$.

12) $\overline{a}(7,-7,0)$, $\overline{b}(3,-2,-1)$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{d} = 3\overline{a} - 7\overline{b}$.

13) $\overline{a}(-3,1,7)$, $\overline{b}(5,0,8)$, $\overline{c} = 12\overline{b} - 9\overline{a}$, $\overline{d} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$.

14) $\overline{a}(4,-6,-1)$, $\overline{b}(3,-7,0)$, $\overline{c} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{d} = 5\overline{a} - 7\overline{b}$.

15) $\overline{a}(3,2,0)$, $\overline{b}(8,7,-3)$, $\overline{c} = 6\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{d} = \overline{b} - 2\overline{a}$.

16) $\overline{a}(-1,3,8)$, $\overline{b}(4,2,9)$, $\overline{c} = 4\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{d} = 2\overline{a} - \overline{b}$.

17) $\overline{a}(5,7,10)$, $\overline{b}(3,-1,6)$, $\overline{c} = \overline{b} - 2\overline{a}$, $\overline{d} = 4\overline{a} - 2\overline{b}$.

Çalışma 3. $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ vektorları arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

1) $A(1,3,-2)$, $B(4,0,5)$, $C(0,1,2)$.

2) $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$.

3) $A(-5,-5,3)$, $B(2,-4,4)$, $C(3,-2,6)$.

4) $A(-1,3,-7)$, $B(2,-1,5)$, $C(0,1,-5)$.

5) $A(6,-3,2)$, $B(4,-2,4)$, $C(1,2,-1)$.

6) $A(1,3,-2)$, $B(4,0,5)$, $C(0,1,2)$.

7) $A(-2,4,-2)$, $B(0,3,1)$, $C(0,3,-4)$.

8) $A(2,3,-1)$, $B(2,-1,-6)$, $C(1,-2,3)$.

9) $A(3,-2,1)$, $B(5,3,-1)$, $C(-4,-2,0)$.
10) $A(2,1,-1)$, $B(6,-1,-4)$, $C(4,2,1)$.
11) $A(0,0,3)$, $B(-2,1,1)$, $C(2,3,-2)$.
12) $A(3,1,4)$, $B(-1,6,5)$, $C(0,4,-1)$.
13) $A(6,6,2)$, $B(5,4,7)$, $C(2,4,7)$.
14) $A(7,0,2)$, $B(7,1,3)$, $C(8,-1,2)$.
15) $A(3,9,8)$, $B(3,8,4)$, $C(5,8,0)$.
16) $A(3,2,-3)$, $B(3,1,-4)$, $C(4,3,-3)$.
17) $A(0,-2,-3)$, $B(3,2,-3)$, $C(-1,0,-1)$.

Çalışma 4. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorlarının komplanarlığını müəyyən edin.

1) $\overline{a}(1,9,-11)$, $\overline{b}(2,3,-1)$, $\overline{c}(1,-1,3)$,
2) $\overline{a}(3,-2,1)$, $\overline{b}(3,-1,-2)$, $\overline{c}(2,1,2)$,
3) $\overline{a}(1,2,-3)$, $\overline{b}(3,-4,7)$, $\overline{c}(2,1,2)$,
4) $\overline{a}(2,-1,1)$, $\overline{b}(5,5,4)$, $\overline{c}(2,2,-1)$,
5) $\overline{a}(2,3,1)$, $\overline{b}(4,1,-2)$, $\overline{c}(6,3,-7)$,
6) $\overline{a}(-5,-4,8)$, $\overline{b}(3,-2,5)$, $\overline{c}(1,6,4)$,
7) $\overline{a}(2,2,2)$, $\overline{b}(-1,0,-1)$, $\overline{c}(2,3,1)$,
8) $\overline{a}(7,3,4)$, $\overline{b}(4,2,4)$, $\overline{c}(-1,-2,-1)$,
9) $\overline{a}(-2,4,-1)$, $\overline{b}(0,-2,-1)$, $\overline{c}(-7,10,-5)$,
10) $\overline{a}(6,7,4)$, $\overline{b}(4,3,1)$, $\overline{c}(-2,-4,-3)$,
11) $\overline{a}(3,2,-3)$, $\overline{b}(3,1,-4)$, $\overline{c}(4,3,-3)$,
12) $\overline{a}(-9,-4,-9)$, $\overline{b}(4,1,1)$, $\overline{c}(6,2,6)$,
13) $\overline{a}(1,1,1)$, $\overline{b}(4,3,2)$, $\overline{c}(2,3,4)$,
14) $\overline{a}(2,5,7)$, $\overline{b}(1,1,-1)$, $\overline{c}(1,2,2)$,
15) $\overline{a}(1,1,4)$, $\overline{b}(1,3,-1)$, $\overline{c}(2,-1,-1)$,

16) $\bar{a}(1,1,1)$, $\bar{b}(1,-2,1)$, $\bar{c}(3,3,1)$,

17) $\bar{a}(5,5,0)$, $\bar{b}(8,1,6)$, $\bar{c}(5,2,-1)$,

Çalışma 5. Təpələri A, B, C, D nöqtələrində yerləşən piram[illegible] danın həcmini hesablayın.

1) $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $C(7,9,5)$, $D(4,5,7)$.
2) $A(2,4,7)$, $B(0,-1,4)$, $C(4,5,5)$, $D(2,1,-1)$.
3) $A(4,6,3)$, $B(4,1,3)$, $C(5,7,8)$, $D(0,-1,-5)$.
4) $A(5,5,6)$, $B(2,2,2)$, $C(4,3,3)$, $D(4,5,4)$.
5) $A(6,3,8)$, $B(-6,0,3)$, $C(0,4,3)$, $D(5,-2,6)$.
6) $A(1,-1,2)$, $B(5,3,2)$, $C(1,-2,1)$, $D(-3,-5,6)$.
7) $A(2,5,-3)$, $B(0,-3,-1)$, $C(8,3,-1)$, $D(-2,3,-1)$.
8) $A(1,2,4)$, $B(3,10,-1)$, $C(-2,0,3)$, $D(-7,2,6)$.
9) $A(-5,0,-2)$, $B(-10,0,9)$, $C(1,9,4)$, $D(-3,2,5)$.
10) $A(1,0,11)$, $B(2,-8,12)$, $C(7,-5,6$, $D(1,-1,-1)$.
11) $A(-2,0,-5)$, $B(9,2,0)$, $C(6,3,-8)$, $D(3,4,-5)$.
12) $A(4,-2,1)$, $B(6,6,-4)$, $C(6,0,6)$, $D(8,-7,9)$.
13) $A(3,-5,4)$, $B(1,-7,2)$, $C(3,-3,-3)$, $D(4,2,-5)$.
14) $A(-7,1,-7)$, $B(3,-2,-9)$, $C(0,-7,9)$, $D(2,2,1)$.
15) $A(1,10,-2)$, $B(2,1,-1)$, $C(9,3,-2)$, $D(3,3,-5)$.
16) $A(12,4,-8)$, $B(0,3,2)$, $C(5,0,-7)$, $D(4,4,-8)$.
17) $A(3,-7,3)$, $B(13,2,2)$, $C(6,-2,-1)$, $D(5,0,-2)$.

Çalışma 6. 5-ci çalışmadakı D nöqtəsinin, A,B,[illegible] nöqtələrindən keçən müstəvidən olan məsafəsini tapın.

Çalışma 7. Müstəvilər arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

1) $x+y+6=0$, $x+2y-1=0$,
2) $x+y+3z-7=0$, $y+z-1=0$,
3) $x+y+2z-3=0$, $11x-7y-2z-21=0$,

4) $3x + y + z - 4 = 0, \quad y + z + 3 = 0,$

5) $2x + 3y - z + 1 = 0, \quad x + y + 5z - 1 = 0,$

6) $x - y - 2z + 3 = 0, \quad x + 3y + 5z - 4 = 0,$

7) $x - 3y + 6 = 0, \quad 2x - y + 5z - 10 = 0,$

8) $3x - 2y - 2z - 6 = 0, \quad x + y - 3z - 5 = 0,$

9) $3x - y + 2z + 15 = 0, \quad 5x + 9y - 3z + 10 = 0,$

10) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0,$

11) $5x + 3y + z - 8 = 0, \quad 2y + z - 3 = 0,$

12) $x + 2y - 2z - 5 = 0, \quad x + y + 15 = 0,$

13) $2x - 3y + 6z - 12 = 0, \quad 2x - y + 2z + 9 = 0,$

14) $2y + z + 7 = 0, \quad x - y + 2z - 1 = 0,$

15) $5x + 3y + z - 16 = 0, \quad 2y + z - 7 = 0,$

16) $2x + 3y - 16z - 7 = 0, \quad 3x + y - 17z = 0,$

17) $2x - y + 3z - 1 = 0, \quad 5x + 4y - z - 7 = 0.$

Çalışma 8. 7-ci çalışmadakı düz xətlərin kanonik tənliklərini yazın.

Çalışma 9. Düz xətt və müstəvinin kəsişmə nöqtəsini tapın.

1) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{5}, \quad x - 2y + z - 5 = 0,$

2) $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{2}, \quad 3x + y - 5z + 3 = 0,$

3) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+3}{2}, \quad 3x + 4y + 7z - 6 = 0,$

4) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z}{2}, \quad 3x + 4y + 3z - 5 = 0,$

5) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-4}{3}, \quad 5x - y + 4z + 1 = 0,$

6) $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-2}{3}$, $\quad 2x+3y+8z-16=0$,

7) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+1}{5}$, $\quad x+2y+5z+10=0$,

8) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$, $\quad 2x+3y-z+5=0$,

9) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{4}$, $\quad x+y+2z+1=0$,

10) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$, $\quad 5x+y+6z-7=0$,

11) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$, $\quad 5x+3y-7z+1=0$,

12) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{5}$, $\quad 4x+3y-z+3=0$,

13) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$, $\quad 3x-3y+2z-3=0$,

14) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$, $\quad x+2y-4z-1=0$,

15) $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{4}$, $\quad 3x-y+2z-5=0$,

16) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $\quad 2x+3y+z-1=0$,

17) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$, $\quad x+2y-2z+6=0$.

Çalışma 10. Tənliklərin hansı xətləri tə'yin etdiyini müəyyən edin.

1) $y^2-6x+14y+49=0$,

2) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$,

3) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0,$

4) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0,$

5) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0,$

6) $9x^2 - 6x - y + 2 = 0,$

7) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0,$

8) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0,$

9) $y = 3 - 4\sqrt{x-1},$

10) $x = -4 + 3\sqrt{y+5},$

11) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0,$

12) $x = 2 - \sqrt{6-2y},$

13) $y = -5 + \sqrt{-3x-21},$

14) $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0,$

15) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0,$

16) $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$ və $3x - 3y + 4z + 2 = 0,$

17) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z$ və $3x - y + 6z - 14 = 0,$

Nümunəvi həllər

1) $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ vektorlarının cəmini tapın.

Həlli: $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ işarə edək.

$\bar{d} = (2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) + (-\bar{i} + 3\bar{k}) + (-\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 4\bar{j}$. $d = 4\bar{j}$ vektoru Oy oxu ilə kollineardır.

2) $\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 2\sqrt{2}\bar{k}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

Həlli:

$$|\overline{a}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{25+16+8} = 7.$$

3) $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$ vektorunun ort vektorunu tapın.

Həlli:

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{9+16+36} = \sqrt{61}.$$

$$\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{3\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}}{\sqrt{61}} = \frac{3}{\sqrt{61}}\overline{i} - \frac{4}{\sqrt{61}}\overline{j} + \frac{6}{\sqrt{61}}\overline{k}.$$

4) $\overline{a} = 20\overline{i} + 30\overline{j} - 60\overline{k}$ vektorunun istiqamətləndirici kosinuslarını tapın.

Həlli:

$$|\overline{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = \sqrt{200+900+3600} = 70$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \quad \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

5) $\overline{a} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ və $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

Həlli:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 1\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-4) = 1 - 3 - 4 = -6.$$

6) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$ və $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{1-2-8}{\sqrt{1+1+6}\sqrt{1+4+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi = 135^0.$$

7) $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$ vektorunun $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ vektoru üzərində proyeksiyasını tapın.

Həlli: Məlumdur ki, $\Pi p_{\bar b}\bar a=|\bar a|\cos(\bar a,\bar b)$. Onda

$$\Pi p_{\bar b}\bar a=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\,\frac{3\cdot1+4\cdot1+(-1)\cdot0}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}}=$$

$$=\sqrt{26}\,\frac{7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt2}{2}.$$

8) $\bar a=2\bar i+3\bar j+5\bar k$ və $\bar b=\bar i+2\bar j+\bar k$ vektorlarının vektorial hasilini tapın.

Həlli:

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\2&3&5\\1&2&1\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}-\bar j\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-7\bar i+3\bar j+\bar k.$$

9) $\bar a=2\bar i-\bar j-\bar k,\ \bar b=\bar i+3\bar j-\bar k,\ \bar c=\bar i+\bar j+4\bar k$ vektorlarının qarışıq hasilini tapın.

Həlli:

$$(\bar a,\bar b,\bar c)=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&3&-1\\1&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=$$

$$=26+5+2=33.$$

10) Təpələri $A(2,2,2), B(4,3,3), C(4,5,4)$ və $D(5,5,6)$ nöqtələri olan piramidanın həcmini tapın.

Həlli: $\bar a=\overline{AB}=2\bar i+\bar j+\bar k,\ \bar b=\overline{AC}=2\bar i+3\bar j+2\bar k$ və $\bar c=\overline{AD}=3\bar i+3\bar j+4\bar k$ olduğundan alarıq:

$$V=\frac16\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=\frac16\left|\left(2\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&3\\3&3\end{vmatrix}\right)\right|=$$

$$=\frac16|(12-2-3)|=\frac76,\quad V=1\frac16.$$

11) $A(2,0)$ və $B(0,1)$ nöqtələrindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrin həndəsi yerinin tənliyini yazın.

Həlli: Tutaq ki, $M(x,y)$ nöqtəsi axtarılan düz xəttin üzərində yerləşir. Onda

$$d(A,M)=d(B,M)$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$$

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-2y+1 \quad \text{və ya} \quad y=2x-1{,}5.$$

12) $A(3,1)$ və $B(5,4)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyinə görə alarıq:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{4-1} \quad \text{və ya} \quad 3x-2y-7=0.$$

13) $A(1,1)$ nöqtəsindən keçən və 0x oxunun müsbət istiqaməti ilə 60^0 bucaq əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: $k=tg60^0=\sqrt{3}$ olduğundan verilən nöqtədən verilən istiqamətdə keçən düz xəttin tənliyinə görə alarıq:

$$y-1=\sqrt{3}(x-1) \quad \text{və ya} \quad y=\sqrt{3}x+1-\sqrt{3}.$$

14) Koordinat oxlarından kəsdiyi parçalar 5 və –3 olan düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: a=5, b=-3 olduğundan düz xəttin parçalarla tənliyini yazaq:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1 \quad \text{və ya} \quad \frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1.$$

15) $y=2x+1$ və $y=-3x+5$ düz xətləri arasındakı bucağı tapın.

Həlli: $k_1=2,\ k_2=-3$ olduğundan iki düz xətt arasındakı bucaq düsturuna görə alarıq:

$$tg\varphi=\frac{-3-2}{1-6}=1, \quad \varphi=45^0.$$

16) Normalının uzunluğu 3 və 0x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq 30^0 olan düz xəttin normal tənliyini yazın.

Həlli: $p = 3,\ \varphi = 30^0$ olduğundan düz xəttin normal tənliyinə görə alarıq:

$$x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 3 = 0.$$

17) $3x - 4y - 10 = 0$ düz xətt tənliyini normal şəkilə gətirin.

Həlli: $C = -10 < 0$ olduğundan normallaşdırıcı M vuruğunu müsbət işarə ilə götürmək lazımdır.

$$M = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$$

Onda

$$\frac{1}{5}(3x - 4y - 10) = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

18) $A(-2,-3)$ nöqtəsindən $8x + 15y + 27 = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

Həlli: Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə düsturuna görə alarıq:

$$d = \frac{|8(-2) + 15(-3) + 27|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{34}{17} = 2.$$

19) A(2,3,5) nöqtəsindən keçən və normal vektoru $\overline{n}(4,3,2)$ olan normal müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli: Müstəvinin vektorial tənliyinə görə:

$4(x-2) + 3(y-3) + 2(z-5) = 0$ və ya $4x + 3y + 2z - 27 = 0$,

20) $A(2,3,0)$, $B(2,0,-5)$, $C(0,3,-5)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli: Üç nöqtədən keçən müstəvinin tənliyinə görə:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad 15x + 10y - 6z - 60 = 0.$$

21) Müstəvinin $2x - y + 2z + 9 = 0$ tənliyini normal şəkilə gətirin.

Həlli: $D = 9 > 0$, olduğundan normallaşdırıcı M vuruğunu mənfi işarə ilə götürmək lazımdır.

$$M=-\frac{1}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{1}{3}.$$

Onda

$$-\frac{1}{3}(2x-y+2z+9=0) \text{ və ya } -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-3=0.$$

22) $x+2y-2z+1=0$ və $x+y-4=0$ müstəviləri arasındakı bucağı tapın.

Həlli: $A_1=1,\ B_1=2,\ C_1=-2,\ A_2=1,\ B_2=1,\ C_2=0$ olduğundan iki müstəvi arasındakı bucaq düsturuna görə:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+2\cdot1+(-2)\cdot0}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \varphi=45^0.$$

23) $A(1,-1,2)$ nöqtəsindən $4x-4y+2z+33=0$ müstəvisinə qədər olan məsafəni tapın.

Həlli: Nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə düsturuna görə:

$$d=\frac{|1\cdot4+(-1)(-4)+2\cdot2+33|}{\sqrt{16+16+4}}=\frac{45}{6}=7\frac{1}{2}.$$

24) $A(2,0,-3)$ nöqtəsindən keçib, $\overline{a}(2,-3,5)$ vektoruna normal olan düz xəttin kanonik tənliyini yazın.

Həlli: $m=2, n=-3, p=5,\ x_0=2,\ y_0=0,\ z_0=-3$ olduğundan fəzada düz xəttin kanonik tənliyinə görə:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-(-3)}{5} \quad \text{və ya} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}.$$

25) $A(1,-2,1)$ və $B(3,1,-1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

$x_1=1,\ y_1=-2,\ z_1=1,\ x_2=3,\ y_2=1,\ z_2=-1$ olduğundan iki nöqtədən keçən düz xəttin kanonik tənliyinə görə:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1} \quad \text{və ya} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

26) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$ düz xətttin kanonik tənliyini yazın.

Həlli: Sistemdən əvvəlcə x-i sonra isə y-i yox edək.

$$y-2z-2=0, \quad x-z-3=0$$

Bu tənliklərin hər birini z-ə nəzərən həll etsək alarıq:

$$z=\frac{y-2}{2}=\frac{x-3}{1} \text{ və ya } \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}.$$

27) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ və $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ düz xətləri arasındakı bucağı tapın.

Həlli: $m_1=1, n_1=-1, p_1=\sqrt{2}, m_2=1, n_2=1, p_2=\sqrt{2}$ olduğundan iki düz xətt arasındakı bucaq düsturuna görə:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 1+1\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2}\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}, \quad \varphi=60^0.$$

28) $A(1,-1,2)$ nöqtəsindən $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

Həlli:

$x_1=1,\ y_1=-1,\ z_1=-2,\ x_0=-3,\ y_0=-2,\ z_0=8, m=3, n=2,$

$p=-2$ olduğundan nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə düsturuna görə:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & -10\\ 2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-10 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{\sqrt{324+484+25}}{\sqrt{17}}=$$

$$=\frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=17.$$

29) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{-1}$ düz xətti ilə $x+2y-z+3=0$ müstəvisi arasındakı bucağı tapın.

Həlli: $m=2, n=-3,\ p=-1,\ A=1,\ B=2,\ C=-1$ olduğundan düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq düsturuna görə:

$$\sin\varphi = \frac{1\cdot 2+2\cdot(-3)+(-1)(-1)}{\sqrt{1+2+1}\sqrt{4+9+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \approx 0{,}3274,$$

$$\varphi = 19^0 7'.$$

30) Radiusu R=5 və mərkəzi C(2,-3) nöqtəsində olan çevrənin tənliyini yazın.

Həlli: $R=5,\ a=2, b=-3$ olduğundan çevrə tənliyinə görə:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

31) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ çevrəsi verilmişdir. Onun mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli: Bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)-4-9-3=0$$

və ya

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16.$$

Deməli, $C(2,-3)$ və $R=4$.

32) $A(3,-2)$ və $B\left(3\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{2}\right)$ nöqtələrindən keçən ellipsin kanonik tənliyini yazın.

Həlli: Ellipsin kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

verilən nöqtələrin koordinatlarını ödəməlidir, yə'ni

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \quad \frac{27}{2a^2}+\frac{2}{b^2}=1.$$

Buradan taparıq ki, $a^2=18,\ b^2=8.$ Beləliklə, ellipsin tənliyi

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$

şəklində olar.

33) $7x^2-9y^2=63$ hiperbolası verilmişdir. Onun yarımoxlarını, fokuslarını, ekssentrisitetlərini hesablayın, asimptotlarının və direktrislərinin tənliklərini yazın.

Həlli: Tənliyin hər tərəfini 63-ə bölək.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$$

Buradan

$$a^2=9,\ b^2=7,\ a=3,\ b=\sqrt{7},\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+7}=4.$$

Onda fokusun koordinatları $F_1(-4{,}0)$, $F_2(4{,}0)$ və ekssentrisitet $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$ olar. Asimptotların tənlikləri

$$y=\frac{b}{a}x=\frac{\sqrt{7}}{3}x,\quad y=-\frac{b}{a}x=-\frac{\sqrt{7}}{3}x$$

və direktrislərin tənlikləri isə

$$x=\frac{a}{\varepsilon}=\frac{9}{4},\quad x=-\frac{a}{\varepsilon}=-\frac{9}{4}$$

olar.

34) $y^2=8x$ parabolasının fokusunu tapın və direktrisinin tənliyini yazın.

Həlli: Parabolanın kanonik tənliyi verilmişdir. Onda $2p=8, p=4$ olduğundan parabolanın fokusu $F(2{,}0)$ və direktrisinin tənliyi $x=-2$ olar.

35) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$ tənliyini kanonik şəkilə gətirin və onun növünü tə'yin edin.

Həlli: Bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$(x^2+2x+1)-9(y^2-4y+4)-1+36-44=0$$

və ya $(x+1)^2-9(y-2)^2=9$ Burada $x=x'-1,\quad y=y'+2$

əvəz etsək alarıq: $x'^2-9y'^2=9$ və ya $\frac{x'^2}{9}-y'^2=1.$

Deməli, əyri hiperboladır.

36) $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6=0$ sferasının mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli: Bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)+z^2-1-9-6=0$$

və ya $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=16$

Deməli, $C(1,-3,0)$ və $R=4$.

37) Çalışma 1-in 1-ci misalının həlli:

Tərifə əsasən elə α, β, γ ədədləri var ki, $\overline{\alpha}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$. Onda

(3,7,-7)= α(2,1,0)+ β(1,-1,2)+ γ(2,2,-1)

$$\text{və ya}\begin{cases}2\alpha+\beta+2\gamma=3\\ \alpha-\beta+2\gamma=7\\ 2\beta-\gamma=-7\end{cases}$$

Buradan, α=2, β=-3, γ=1 olduğundan

$\overline{\alpha}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$ alınar.

38) Çalışma 1-in 14-cü misalının həlli:

Tərifə əsasən elə α, β, γ ədədləri var ki, $\overline{\alpha}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$. Onda

$\overline{\alpha}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$ və ya

$$\begin{cases}2\alpha-3\beta+\gamma=2\\ 2\alpha+\beta-4\gamma=9\\ 6\beta-5\beta+2\gamma=17\end{cases}$$

Buradan, α=5, β=3, γ=1 olduğundan

$\overline{d}=5\overline{a}+3\overline{b}+\overline{c}$ alınar.

39) Çalışma 2-nin 1-ci misalının həlli:

$\overline{c}=2(5\overline{i}-\overline{k})-(7\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k})=3\overline{i}-2\overline{j}+15\overline{k}$

və $\overline{d}=3(7\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k})-6(5\overline{i}-\overline{k})=-9\overline{i}+6\overline{j}+15\overline{k}$

olduğundan tərifə görə alarıq:

$$\frac{3}{-9}=\frac{-2}{6}=\frac{-5}{15} \text{ və ya } -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Deməli $\bar{c}$ və $\bar{d}$ vektorları kollineardır.

40) Çalışma 2-nin 10-cu misalının həlli:

$$\bar{c}=3(3\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})+2(-2\bar{j}-3\bar{k})=9\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k} \text{ və}$$
$$\bar{d}=2(3\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})-3(-2\bar{j}-3\bar{k})=6\bar{i}+10\bar{j}+15\bar{k}$$

olduğundan tərifə görə alarıq:

$$\frac{9}{6}\neq\frac{2}{10}\neq\frac{3}{15}$$

Deməli $\bar{c}$ və $\bar{d}$ vektorları kolliniar deyil.

41) Çalışma 3-ün 1-ci misalının həlli:

$A\bar{B}(3,-3,7)$ və $A\bar{C}(-1,-2,4)$ olduğundan iki vektorun arasındakı bucağın kosinusu düsturuna görə alarıq:

$$\cos(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}})=\frac{(\overline{AB},\overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{-3+6+28}{\sqrt{9+9+49}\sqrt{1+4+16}}=$$
$$=\frac{31}{\sqrt{67}\sqrt{21}}=\frac{31}{\sqrt{1407}}\approx 0{,}83.$$

42) Çalışma 3-ün 9-ci misalının həlli:

$A\bar{B}(2,5,-2)$ və $A\bar{C}(-7,0,-1)$ olduğundan iki vektorun arasındakı bucağın kosinusu düsturuna görə alarıq:

$$\cos(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}})=\frac{(\overline{AB},\overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{-14+0+2}{\sqrt{4+25+4}\sqrt{49+1}}=$$
$$=\frac{-12}{\sqrt{33}\sqrt{50}}=-\frac{12}{\sqrt{1650}}\approx 0{,}31.$$

43) Çalışma 4-ün 5-ci misalının həlli:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & -2\\ 6 & 3 & -7\end{vmatrix}=-14+12-36-6+12+84=52\neq 0$$

olduğdan $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorları komplanar deyil.

44) Çalışma 4-ün 13-cü misalınm həlli;

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=12+2+4-6-6-16=28-28=0$$

olduğdan $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorları komplanardır.

45) Çalışma 5-in 2-ci misalının həlli:

Piramidanın həcmi $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ vektorlarının qarışıq hasilinin $\frac{1}{6}$-nə bərabərdir. $\overline{AB}(-2,-5,-3)$, $\overline{AC}$ (2,1,-2), $\overline{AD}$ (0,-3,-8) olduğuna görə alarıq:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -5 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -8\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\left|16+18+12-80\right|=\frac{1}{6}\left|-32\right|=5\frac{1}{3}.$$

46) Çalışma 5-in 13-cü misalının həlli:

$\overline{AB}(-2,-2,-2)$, $\overline{AC}$ (0,2,-7), $\overline{AD}$ (1,7,-9) olduğuna görə alarıq:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -7\\ 1 & 7 & -9\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}|36+14+4-98|=\frac{1}{6}|-44|=7\frac{1}{3}.$$

47) Çalışma 6-nın 12-ci misalının həlli:
A, B, C nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 2 & 8 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}=40(x\text{-}4)+4(z\text{-}1)\text{-}10(y+2)\text{-}16(z\text{-}1)+10(x\text{-}4)\text{-}$$

$-10(y+2)=40x-160+4z-4-10y-20-16z+16x-40y-20=50x-20y-12z-$
$-228=0.$

D nöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafəni tapaq.

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|50\cdot 8-20(-7)-12\cdot 9-228|}{\sqrt{2500+400+144}}=$$

$$=\frac{|400+140-108-228|}{\sqrt{3044}}=\frac{204}{\sqrt{3044}}.$$

48) Çalışma 6-nın 15-ci misalının həlli: A,B.C nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-10 & z+2 \\ 1 & -9 & 1 \\ 8 & -7 & 0 \end{vmatrix}=-7z-14+8y-80+72z+144+7x-7=$$

$$=7x+8y+65z+43=0.$$

D qöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafəni tapaq.

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|7\cdot 3+8\cdot 3+65(-5)+43|}{\sqrt{49+64+4225}}=$$

$$=\frac{|21+24-325+43|}{\sqrt{4338}}=\frac{237}{\sqrt{4338}}.$$

49) Çalışma 7-nin 2-ci misalının həlli:
$A_1=1$, $B_1=1$, $C_1=3$, $A_2=0$, $B_2=1$, $C_2=1$ olduğundan müstəvilər arasındakı bucaq düsturuna görə alarıq:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{1\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 1}{\sqrt{1+1+9}\sqrt{1+1}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{11}\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{22}}.$$

$$\varphi=\arccos\frac{4}{\sqrt{22}}.$$

50) Çalışma 7-nin 5-ci misalnın həlli:
$A_1=2$, $B_1=3$, $C_1=-1$, $A_2=1$, $B_2=1$, $C_2=5$ olduğundan müstəvilər arasındakı bucaq düsturuna görə alarıq:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 1+3\cdot 1-1\cdot 5}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+25}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}}=0, \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Deməli, müstəvilər perpendikulyardır.

51) Çalışma 8-in 7-ci misalının həlli: verilən tənliyi

$$\frac{x-x_o}{l}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}$$

şəkilinə gətirmək üçün əvvəlcə y-i, sonra z-i yox etsək $4x-z+5=0$ və $7x+y+7=0$ olar. Bu tənliklərin hər birini x-ə görə həll etsək alarıq:

$$x=\frac{z-5}{4}=\frac{-(y+4)}{7} \text{ və ya } \frac{x}{1}=\frac{y+7}{-7}=\frac{z-5}{4}.$$

52) Çalışma 8-in 9-cu misalımn həlli:
Verilən tənliyi kanonik şəkilinə gətirmək üçün əvvəlcə y-i, sonra z-i yox etsək $32x+15z+145=0$ və $19x+15y+65=0$ olar.

Bu tənliklərin hər birini x-ə nəzərən həll etsək alarıq:

$$x=\frac{-(15z+145)}{32}=\frac{z+\frac{29}{3}}{-\frac{32}{15}},\quad x=\frac{-(15y+65)}{19}=\frac{y+\frac{5}{3}}{-\frac{19}{15}} \text{ və ya}$$

$$\frac{x}{-15}=\frac{y+\frac{5}{3}}{19}=\frac{z+\frac{29}{3}}{32}.$$

53) Çalışma 9-un 1-ci misalının həlli:

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{5}=t$ qəbul etcək $x=3t+3$, $y=-t+2$, $z=5t+1$ olar. x, y, z-in bu qiymətlərini müstəvinin tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$3t+3-2(-t+2)+5t+1-5=0$, $10t=5$, $t=\frac{1}{2}$. Deməli, düz xəttlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsi

$$x=\frac{9}{2},\ y=\frac{3}{2}, z=\frac{7}{2} \text{ olar.}$$

54) Çalışma 9-yn 3-cü misalının həlli:

$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}=t$ qəbul etsək $x=2t+3$, $y=3t-1$, $z=2t-3$ olar.

x,y,z-in bu qiymətlərini müstəvinin tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$3(2t+3)+4(3t-1)+7(2t-3)-6=32t-22=0$, $t=\frac{11}{16}$.

Deməli, düz xəttlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsi

$$x=\frac{35}{8},\ y=\frac{17}{16},\ z=-\frac{13}{8} \text{ olar.}$$

55) Çalışma 10-ün 1-ci misalının həlli:

$y^2-6x+14y+49=(y+7)^2-6x=0$ və ya $(y+7)^2=6x$.

Mərkəzi O(0,-7) nöqtəsində olan parabolanın tənliyidir.

56) Çalışma 10-un 5-ci misalının həlli:
$2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ tənliyinin hər tərəfini 2-yə bölək:

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y-2=(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2-\frac{121}{16}=0$ və ya

$$(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2=\frac{121}{16}.$$

Mərkəzi $O(2,-\frac{5}{4})$ nöqtəsində və radiusu $r=\frac{11}{4}$ olan çevrənin tənliyidir.

III FƏSİL

Limitlər

Çalışma 1. Ədədi ardıcıllıqların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-3)^3}{(n+1)^2+(n+1)^3}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2)^3+(n+2)^3}{n^4+2n^2+1}$,
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3+(n+1)^3}{n^3-2n}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-10n^2+1}{10n^3+5n}$,
6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+2)^4+(n-2)^4}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}$,
8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^3}{(n-2)^3+(n+2)^3}$,

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$,
10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n^3}{n^3+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$,

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2-2n}\cdot\frac{n+3}{4n+5}\right)$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$,

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n+1)^4}$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^5+9n+7}{3n^6+n^3+1}$, 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$,

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$.

Çalışma 2. Ədədi ardıcıllıqların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\right)$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n+1)}\right)$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$,

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$, 10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-2}\right)n\sqrt{n}$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$,

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+1}-\sqrt{3n}\right)$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$,

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$, 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)$

Çalışma 3. Ədədi ardıcıllıqların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{n+3}\right)^{n}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{1-n}$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2+2}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+4n-2n^2}{1+4n-2n^2}\right)^{n+1}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n}$,

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-4}\right)^{\frac{n}{3}+1}$, 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-3n}$,

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-2}\right)^{2n+5}$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+1}\right)^{2n+1}$,

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n+1}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-5n}{2n^2-5n+7}\right)^{2n+1}$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{3n+n^3}$, 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+1}\right)^{n}$,

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^{n}$.

Çalışma 4. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$,

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$,

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^4+4x+3}$,

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$,

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^4-4x+3}$,

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$,

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$,

8) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$,

9) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$,

10) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$,

11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$,

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$,

13) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$,

14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$,

15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6-x^3+x^2-5x+4}{(x-1)^2}$,

16) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$,

17) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Çalışma 5. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x^3}{\sqrt{x+2}-7}$,

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$,

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,

4) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

11) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$, 12) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt[3]{4+x}-\sqrt[3]{2x}}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$, 14) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$, 16) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$,

17) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Çalışma 6. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin x}$,

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$, 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$, 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

Çalışma 7. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$, 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$, 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2} arctg\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 3\pi x}$, 9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-tg^3 x}$,

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(x-1)}{x^2-1}$, 11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$, 12) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$,

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tgx-tg2}{\sin\ln(x-1)}$, 14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{tg^2\pi x}$, 15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$,

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$, 17) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

Çalışma 8. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos \pi x}$, 2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$,

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$,

4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-\ln\cos x-1}{\sin x}$,

6) $\lim\limits_{x\to -5}\sin\dfrac{x+5}{3}tg\dfrac{\pi x}{10}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{3^{tgx}-1}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$,

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\pi(x-3)}-1}$,

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{tg\ln\frac{x}{2}}$,

12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$,

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tgx-\sin x}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$,

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{-7x}}{2x-tgx}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{x-\sin 9x}$.

Çalışma 9. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{ctg\pi x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{\frac{1}{2}}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x}$,

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}\right)^2$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$,

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$, 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$,

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$, 12) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $a\neq 0$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$, 14) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$,

15) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$, 16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+ctgx)^{tgx}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

Çalışma 10. Funksiyaların limitini hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{\sin x+x}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{tg\pi x}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$,

11) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\frac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$, 12) $\lim\limits_{x\to 3}\arcsin 3^{\frac{x-3}{3}}\cdot ctg(x-3)$,

13) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{ctg^2 x}$, 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx\cos 2x}{1+tgx\cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Nümunəvi həllər

1) 8, 14, 20, 26, 28,... ardıcıllığının ümumi həddini yazın.
Aydındır ki, $x_n=2+6n$, $n=1,2,\ldots$.

2) $x_n=3^n$, $n=1,2,..$ ardıcıllığı artandır, çünki,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=3>1, \text{ yə'ni } x_{n+1}>x_n.$$

3) $x_n=\frac{n+1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ ardıcıllığı azalandır, çünki,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}<0, \text{ yə'ni } x_{n+1}<x_n.$$

4) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n}{n+1}\cos\pi n,\ n = 1,2,\ldots$ ardıcıllığı məhduddur, çünki,

$$|x_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{2n}{n+1}\cos\pi n\right| = \frac{2n}{n+1}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|\cos\pi n\right| < \frac{2n}{n+1} < 2.$$

5) $x_n = (-1)^{n-1}n,\quad n = 1,2,\ldots$ ardıcıllığı qeyri-məhduddur, çünki, istənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $N = N(M)$ ədədi var ki, $n > N$ şərtində

$$|x_n| = \left|(-1)^{n-1}n\right| = n > M$$

bərabərsizliyi ödənilir.

6) $x_n = -5 + 6n - n^2,\ n = 1,2,\ldots$ ardıcıllığının ən böyük həddini tapın.

Həlli:

$$x_{n+1} - x_n = -5 + 6(n+1) - (n+1)^2 + 5 - 6n + n^2 = -2n + 5.$$

Aydındır ki, $n > 3$ olduqda $x_{n+1} - x_n < 0$, yə'ni ardıcıllıq azalandır. Buna görə də ardıcıllığın ən böyük həddi $x_3 = 4$ olar.

7) $x_n = n + \dfrac{5}{n},\ n = 1,2,\ldots$ ardıcıllığının ən kiçik həddini tapın.

Həlli: $x_{n+1} - x_n = n + 1 + \dfrac{5}{n+1} - n - \dfrac{5}{n} = 1 - \dfrac{5}{n(n+1)}.$

Aydındır ki, $n > 2$ olduqda $x_{n+1} - x_n > 0$, yəni ardıcıllıq artandır. Buna görə də ardıcıllığın ən kiçik həddi $x_2 = 4{,}5$ olar.

8) Limitləri hesablayın.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1},\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$$

Həlli: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{n+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{10}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{10}{\infty}=0,$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}=e\cdot 1=e\,.$$

9) $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiyası $[-1,1]$ parçasında tə'yin olunmuşdur, çünki, istənilən $x\in[-1,1]$ üçün y məhduddur.

10) Tutaq ki, $y=\cos t,\ t=x^3$, onda $y=\cos x^3$ funksiyası x-in mürəkkəb funksiyasıdır.

11) $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ funksiyası bütün ədəd oxunda məhduddur. Çünki, istənilən $x\in(-\infty,\infty)$ üçün $0\le\dfrac{2x^2}{1+x^2}\le 2$ olduğundan onun aşağı sərhəddi 0 yuxarı sərhəddi isə 2 olar.

12) $y=\dfrac{1}{x}$ funksiyası $(0,1)$ intervalında qeyri-məhduddur. Çünki, istənilən $x\in(0,1)$ üçün $\left|\dfrac{1}{x}\right|\le M$ bərabərsizliyini ödəyən heç bir $M>0$ ədədi yoxdur.

13) $f(x)=x^2$ bütün ədəd oxunda cüt, $g(t)=x^3$ funksiyası isə bütün ədəd oxunda tək funksiyadır,

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

$$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$$

14) $(-\infty,\infty)$ intervalında $y=x^3$ funksiyasının tərsi, yenə də $(-\infty,\infty)$ intervalında tə'yin olunmuş $x=\sqrt[3]{y}$ funksiyasıdır.

15) $y=\cos^2 x$ funksiyasının ən kiçik dövrü π ədədinə bərabərdir.

Doğurdan da, istənilən $x \in (-\infty,\infty)$ üçün
$\cos^2(x+\pi) = (\cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi)^2 = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Çünki, $\cos^2 0 = 1$, $\cos^2\pi = 1$ və istənilən $x \in (0,\pi)$ üçün $\cos^2 x < 1$, yə'ni π ədədi verilən funksiyanın ən kiçik dövrüdür.

16) Limitləri hesablayın.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3-x^2-x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

Həlli:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3-x^2-x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}-1} = \frac{2}{-1} = -2,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^3 = e^3.$$

17) $x \to 1$ şərtində $\alpha(x) = x^2-1$ funksiyası $\beta(x) = x+1$ funksiyasına nəzərən yüksək tərtibli sonsuz kiçiləndir. Çünki,

$$\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to1}(x-1) = 0.$$

18) $x \to 0$ şərtində $\alpha(x) = \dfrac{3}{x}$ və $\beta(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ funksiyaları eynitərtibli sonsuz kiçilən funksiyalardır. Çünki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=2\ln e=2\neq 0$$

19) İsbat edin ki, $x\to 0$ şərtində,

$$\sin x\approx x,\quad tgx\approx x,\quad \ln(1+x)\approx x,\ \arcsin x\approx x,$$

$$arctgx\approx x,\quad \sqrt{1+x}-1\approx\frac{x}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ olduğundan $\sin x\approx x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$ olduğundan $tgx\approx x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ olduğundan

$\ln(1+x)\approx x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$ olduğundan $\arcsin x\approx x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{tgy}=1$ olduğundan $arctgx\approx x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1$$

olduğundan $\sqrt{1+x}-1\approx\dfrac{x}{2}$.

20) $f(x)=\dfrac{x+4}{3-2x}$ funksiyası $x=1$ nöqtəsində kəsilməzdir.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{3-2x}=\dfrac{1+4}{3-2}=5$ və $f(1)=\dfrac{1+4}{3-2}=5$ olduğundan

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

21) $f(x) = arctg\dfrac{1}{x-4}$ funksiyasının $x = 4$ nöqtəsində kəsilən olduğunu göstərin.

Həlli:

$$f(4-0) = \lim_{x\to 4-0} arctg\frac{1}{x-4} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(4+0) = \lim_{x\to 4+0} arctg\frac{1}{x+4} = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Deməli, $x = 4$ nöqtəsi bu funksiyanın birinci növ (sonlu sıçrayışlı) kəsilmə nöqtəsidir. $f(4-0) = -\dfrac{\pi}{2}$ və $f(4+0) = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan $x = 4$ nöqtəsində funksiyanın sıçrayışı $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ olar.

22) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ funksiyası üçün $x = -1$ nöqtəsi ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir, çünki,

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty.$$

23) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiyası $(0,1)$ intervalında kəsilməzdir, lakin məhdud deyil.

Doğrudan da, $M > 0$ nə qədər böyük olsa da elə kiçik $x_0 > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $f(x_0) = \dfrac{1}{x_0} > M$ olsun.

24) $f(x) = x^3$ funksiyası $(-1,1)$ intervalında kəsilməzdir, lakin həmin intervalda özünün ən böyük və ən kiçik qiymətini ala bilmir, çünki, $-1 < f(x) < 1$.

25) Tutaq ki, $[1,2]$ parçasında $f(x)=x^3-2$ funksiyası verilmişdir. $f(1)=-1<0$ və $f(2)=6>0$ olduğundan $[1,2]$ parçasında elə nöqtə var ki, həmin nöqtədə $f(x)=x^3-2$ funksiyası sıfıra çevrilir.
$x=\sqrt[3]{2}$ qiymətində $f(\sqrt[3]{2})=0$ olar.

26) $f(x)=x$ funksiyası bütün ədəd oxunda müntəzəm kəsilməzdir.
Doğrudan da, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün $\delta>0$ ədədini $\delta=\varepsilon$ kimi götürsək, $|x_1-x_2|<\delta$ olduqda

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|<\varepsilon \text{ olar.}$$

27) Çalışma 1-in 4-cü misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3+(n+1)^3}{n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}=$$

$$=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

28) Çalışma 1-in 11-ci misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2-2n}\cdot\frac{n+3}{4n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n+3}{-8n^2-2n+10}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{-8-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}=\frac{2+0+0}{-8-0+0}=-\frac{1}{4}.$$

29) Çalışma 2-nin 5-ci misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n+1)}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

30) Çalışma 2-nin 15-ci misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}) = \lim_{n\to\infty} n\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}} = 2.$$

31) Çalışma 3-ün 1-ci misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \quad \text{olduğundan}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}[1+f(x)-1]^{\varphi(x)} == e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)(f(x)-1)} \qquad (*)$$

münasibətinə əsasən alarıq:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n-1}} = e^1 = e.$$

32) Çalışma 3-ün 15-ci misalının həlli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}}=1 \qquad \text{və} \qquad \lim_{n\to\infty}(3n+n^3)=\infty$$

olduğundan (*) münasibətinə əsasən alarıq:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{3n+n^3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(3n+n^3)\ln\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2n^3}{n^3-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n}}{1-\frac{1}{n^3}}}=e^2.$$

33) Çalışma 4-ün 4-cü misalmın həlli

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\frac{1}{3}.$$

34) Çalışma 4-ün 10-cu misalının həlli:

$$\lim_{n\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2-12}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{(x^2-3)(x^2+4)}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{7}.$$

35) Çalışma 5-in 8-ci misalının həlli:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{1}{2}.$$

36) Çalışma 5-in 11-ci misalının həlli:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\frac{1}{56}.$$

37) Çalışma 6-nın 1-ci misalınm həli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(6x-5)}{\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{-5}{3\cdot 1}=-\frac{5}{3}.$$

38) Çalışmanın 6-nın 14-cü misalının həlli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos\frac{13}{2}x\sin x}=-\frac{1}{2}\lim\frac{1}{\cos\frac{13}{2}x}=-\frac{1}{2}.$$

39) Çalışma 7-nın 3-cü misalının həlli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 8x}{\sin 3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 3x}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}/\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}+\right.$$

$$\left.+\lim_{x\to 0}8\frac{\sin 8x}{8x}/\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{5}{3}.$$

40) Çalışma 7-nin 7-ci misalmın həlli:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cos\frac{x+1}{2}\sin\frac{x-1}{2}}{(x-1)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \cos\frac{x+1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\sin\frac{x-1}{2}}{\frac{x-1}{2}} = \cos\frac{1+1}{2} = \cos 1 .$$

41) Çalışma 8-in 5-ci misalının həlli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - \ln\cos x - 1}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(2^x - \ln\cos x - 1)'}{(\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln 2 + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \frac{2^o \ln 2 + 0}{1} = \ln 2 .$$

42) Çalışma 8-in 10-cu misalnın həlli:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\pi(x-3)}-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{(\ln(2x-5))'}{(e^{\pi(x-3)}-1)'} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2}{2x-5}}{\pi e^{\pi(x-3)}} = \frac{2}{\pi} .$$

43) Çalışma 9-un 1-ci misalının həlli:
1^∞ şəklində qeyri-müəyyənlikdir.

$y=\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$ qəbul edək. Onda

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)}{x}\left(\frac{0}{0}\right).$$

Lopital qaydasına əsasən alarıq:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\frac{\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+tgx}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+tgx)\cos^2 x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x}=1-1=0.$$

Buradan $\lim\limits_{x\to 0} y=e^{o}=1$, yəni $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

44) Çalışma 9-un 6-cı misalının həlli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)\sin x}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

45) Çalışma 10-un 1-ci misalının həlli: 1^{∞} şəkilində qeyri-müəyyənlikdir

$y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$ qəbul edək.

Onda $\ln y=\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x\ln(tgx)=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{ctg2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sec^2 x}{tgx}:(-2\operatorname{cosec}^2 2x)\right)=-1.$$

Buradan lny=-1, y=$\frac{1}{e}$ yəni $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\frac{1}{e}$.

46) Çalışma 10-yn 4-cü misalının həlli: 1^{∞} şəkilində qeyri-müəyyənlikdir

$y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$ qəbul edək

Onda $\ln y = \ln \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx \ln(\sin x) =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{ctgx}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (ctgx:(-1)\frac{1}{\sin^2 x}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} ctgx = 0.$$

Budaran lny=0, y=e^0=1, yəni $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx} = 1$.

IV FƏSİL

Törəmə və diferensial

Çalışma 1. Törəməni tapın.

1) $y=(x^2-2x+2)(x^2+x-1)$, 2) $y=(x^3-3x+1)(x^4+x^2-1)$,

3) $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$, 4) $y=\frac{2x}{1-x^2}$,

5) $y=x\sqrt{1+x^2}$, 6) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$,

7) $y=\sqrt[4]{5x^2+6x+1}$, 8) $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$,

9) $y=\frac{(x-2)\sqrt{2x+3}}{x^2}$, 10) $y=3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$,

11) $y=\frac{x^6+x^3-1}{\sqrt{8-x^3}}$, 12) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$,

13) $y=\dfrac{1+x^3}{2\sqrt{1+2x^3}}$,   14) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$,

15) $y=\dfrac{(1+x^6)\sqrt{1+x^6}}{6x^{10}}$,   16) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$,

17) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

Çalışma 2. Törəməni tapın.

1) $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$, 2) $y=(9-x^2)(\sin 2x+\cos^2 x)$,

3) $y=\dfrac{x\sin x}{1+tgx}$,   4) $y=\sin 3x\left(1+\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}\right)$,

5) $y=\sqrt[3]{1+2\sin 2x}$,   6) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$,

7) $y=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}$,   8) $y=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$,

9) $y=\dfrac{tgx-ctgx}{tgx+ctgx}$,   10) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$,

11) $y=tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$,   12) $y=\sin^2 x$,

13) $y=\sqrt{\sin^3 x^2}$,   14) $y=\sqrt{\sin^3 x}$,

15) $y=\sqrt[3]{\sin x}$,   16) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$,

17) $y=\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$.

Çalışma 3. Törəməni tapın.

1) $y=\dfrac{1}{x}\arccos 2x$,   2) $y=arctg^4\dfrac{1}{x+2}$,

3) $y = x\sin x\, arctgx,$

4) $y = arctg(tg^2 x),$

5) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},$

6) $y = \sqrt{1-(\arccos x)^2},$

7) $y = \arcsin(\sin x - \cos x),$

8) $y = \sqrt[3]{xarctgx^2},$

9) $y = arctgx + \dfrac{1}{3}arctgx^3,$

10) $y = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2},$

11) $y = \arccos\dfrac{2x+1}{x\sqrt{8}},$

12) $y = arcsin\sqrt{sin\, x},$

13) $y = x + arctgx + arcctgx,$

14) $y = \dfrac{1}{arccos^2 x^2},$

15) $y = arcctg\dfrac{1}{x},$

16) $y = \arcsin(2\sin x),$

17) $y = arctg\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$

Çalışma 4. Törəməni tapın.

1) $y = \ln\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x},$

2) $y = \ln\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$

3) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}},$

4) $y = \ln^2\cos^3(4x-1),$

5) $y = \ln(\ln(\ln x)),$

6) $y = \log_3\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right),$

7) $y = \log_5\sqrt[3]{7x},$

8) $y = \ln^3(x^3+x+1),$

9) $y = \log_2(\log_3(\log_4 x)),$

10) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),$

11) $y = \ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+15}\right),$

12) $y = \ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right),$

13) $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}.$

14) $y = ln\frac{1+sin\,x}{cos\,x}$, 15) $y = \ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$,

16) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$, 17) $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

Çalışma 5. Törəməni tapın.

1) $y = x^2e^{2x}$, 2) $y = e^x\cos^3 2x$,

3) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$, 4) $y = xe^x(\cos x+\sin x)$,

5) $y = (x^2+1)^{2x}$, 6) $y = e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}$,

7) $y = e^{arctg\sqrt[3]{x+4}}$, 8) $y = 2^{tg\frac{1}{x}} + e^{\sin x^2}$,

9) $y = e^{x\ln(x+2)}$, 10) $y = log_x 2 + log_{x^2} x$,

11) $y = 2^{\log_4(x^2+x+1)}$, 12) $y = x + x^x$,

13) $y = 2^{log_3 x}$, 14) $y = arctge^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,

15) $y = \frac{\ln\sin(x+1)}{\ln\cos(x+1)}$, 16) $y = (\sin x)^{\cos x}$,

17) $y = x^{\sin x}$.

Çalışma 6. Törəməni tapın və verilmiş nöqtədə hesablayın.

1) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}$, $x=1$.

2) $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\,arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$, $x=0$.

3) $y = \sin\sqrt[3]{tgx} - \frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

4) $y=\sqrt[5]{1+xe^{\sqrt{x}}}$, x=0 5) $y=\cos^2\ln(x^2+2)-\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos 6x}$, x=0.

6) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})+\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x}$, x=0.

7) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$, x=1.

8) $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\,ln(x+\sqrt{x^2+1})$, x=0.

9) $y=x^3\arcsin\ln x+\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$, x=0.

10) $y=\ln(e^{3x}+\sqrt{e^{3x}-1})+arctge^{-3x}$, x=0.

11) $y=arctg\sqrt{x^2+1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$, x=1.

12) $y=\dfrac{1}{\sin x}\ln(tgx+ctgx)\sqrt{1+x^2}$, x=$\dfrac{\pi}{4}$.

13) $y=-\dfrac{1}{3\,sin^3 x}-\dfrac{1}{sin\,x}+\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1+x}{1-x}$, x=$\dfrac{\pi}{2}$.

14) $y=5^x\sqrt[3]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^2}+\dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x}$, x=0.

$y=\sqrt{3x^2+1}arctg3x-\ln(3x+\sqrt{3x^2+1})$, x=0.

16) $y=e^x\sin x\cos^3 x$, x=$\dfrac{\pi}{4}$.

17) $y=\dfrac{1+xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}$. x=0.

Çalışma 7. Diferensialı tapın.

1) $y=(\sqrt{x}+x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-x}\right)$, 2) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)(1+\sqrt{x})$,

3) $y = \dfrac{sin\,x}{1+cos\,x}$, 4) $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$,

5) $y = arctg\ln(2x+1)$, 6) $y = \sqrt{\arcsin x} + (arctgx)^2$,

7) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$, 8) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,

9) $y = e^x\, sin\,x\,cos^3\,x$, 10) $y = \ln(e^x \cos + e^{-x}\sin x)$,

11) $y = \sin^2(\cos 3x)$, 12) $y = arctg\dfrac{x+1}{x-1}$,

13) $y = e^{-x^2}\ cos\,e^{-2x}$, 14) $y = cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,

15) $y = x^5\sqrt[3]{x^6-8}$, 16) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$,

17) $y = e^x(x^2+x-1)$.

Çalışma 8. n-tərtibli törəmələri tapın.

1) $y = \sin^2 x$, 2) $y = \dfrac{2x+1}{3x+4}$, 3) $y = x\ln x$,

4) $y = x^2\, sin\,x$, 5) $y = ln(3x+1)$, 6) $y = \sin 5x\cos 2x$,

7) $y = \dfrac{1}{2x+1}$, 8) $y = 5-3\cos^2 x$, 9) $y = 2^x + 2^{-x}$,

10) $y = x^2e^x$, 11) $y = \dfrac{x+1}{x(x-1)}$, 12) $y = sin2x$,

13) $y = \dfrac{1}{1-x}$, 14) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$, 15) $y = e^x\sin x$,

16) $y = xe^x$, 17) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Çalışma 9. y'_x və y''_{xx} törəmələrini tapın.

1) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$, 2) $x = t+\sin t,\ y = 2-\cos t$,

3) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,$ 4) $x = a\cos^2 t, y = a\sin^2 t,$

5) $x = at\cos t,\ y = at\sin t,$ 6) $x = \sqrt{1-t^2},\ y = \dfrac{1}{t},$

7) $x = \ln ctgt,\ \ y = \dfrac{1}{\cos^2 t},$ 8) $x = ctg2e^t, y = \ln tge^t,$

9) $x = \sqrt{1-t^2}, y = \sqrt{1+t},$ 10) $x = \ln tgt,\ \ y = \dfrac{1}{\sin^2 t},$

11) $x = (1+\cos^2 t)^2 \sin t,\ y = \sin^2 t\cos t,$

12) $x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2},$ 13) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,$

14) $x = \ln(1+t^2), y = t - arctgt,$ 15) $x = t^3,\ \ y = t^2,$

16) $x = \ln t, y = t^3 - 1,$ 17) $x = te^t,\ \ y = te^{-t}.$

Çalışma 10. Qeyri-aşkar şəkildə verilən funksiyaların y'_x və y''_x törəmələrini tapın.

1) $y + x + arctgy = 0,$ 2) $x + y - e^{x-y} = 0,$

3) $x^3 + x^2y + y^2 = 0,$ 4) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0,$

5) $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0,$ 6) $e^x - e^y + x - y = 0,$

7) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x,$ 8) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 0,$

9) $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0,$ 10) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},$

11) $e^y - e^{-x} + xy = 0,$ 12) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0,$

13) $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0,$ 14) $x^3 + y^3 - 3xy = 0,$

15) $arctg(x+y) - xy = 0,$ 16) $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2},$

17) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

Çalışma 11. Təqribi hesablayın (0,0001-ə qədər dəqiqliklə).

1) $arctg1{,}04$, 2) $\ln 1{,}12$, 3) $sin 21^o$,

4) $cos 32^o$, 5) $e^{0,15}$, 6) $\sqrt[3]{e}$,

7) $\sqrt[3]{250}$, 8) $\sqrt[3]{30}$, 9) $\lg 11$,

10) $\ln 17$, 11) $\sqrt[3]{200}$, 12) $\sin 39^0$,

13) $\cos 39^0$, 14) $lg10{,}21$ 15) $\arcsin 0{,}8$,

16) $\sqrt[4]{15{,}8}$, 17) $\sqrt[10]{1000}$.

Nümunəvi həllər

1) $M(2;2)$ nöqtəsində $y = x^2 - 3x + 1$ əyrisinə toxunanın meyl bucağını tapın.

Həlli: $y' = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$ olduğundan

$$tg\varphi = y'_{x=2} = 2 \cdot 2 - 3 = 1, \qquad \varphi = 45^0.$$

2) $y - 3x + x^3 e^y = 0$ tənliyi ilə təyin olunan $y = y(x)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: $y' - 3 + 3x^2 e^y + x^3 e^y y' = 0,$

$$y' = \frac{3(1 - x^2 e^y)}{1 + x^3 e^y} = 3\frac{1 - x^2 e^y}{1 + 3x - y}.$$

3) Parametrik şəkildə verilmiş

$$x = t^3 + 3t + 1, \quad y = 3t^5 + 5t^3 + 1$$

funksiyanın törəməsini tapın.

Həlli: $x'_t = 3t^2 + 3$ və $y'_t = 15t^4 + 15t^2$

olduğundan

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$

4) $x = y^3$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: Verilmiş funksiya $y = x^{\frac{1}{3}}$ funksiyasının tərsidir. Onda

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{2}{3}}.$$

5) $y = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ funksiyasının yüksək tərtibli törəmələrini hesablayın.

Həlli:

$y' = 6x^2 + 2x - 2,\quad y'' = 12x + 2,\ y''' = 12,\ y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$

6) $y = \frac{1}{x}$ funksiyasının yüksək tərtibli törəmələrini hesablayın.

Həlli:

$y' = -\frac{1}{x^2},\ y'' = \frac{2}{x^3},\ y''' = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ldots,y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$

7) $y' = a^x,\ 0 < a \neq 1$ funksiyasının yüksək tərtibli törəmələrini hesablayın.

Həlli: $y' = a^x \ln a,\quad y'' = a^x(\ln a)^2,\ldots,y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

Xüsusi halda $a = e$ olarsa, onda

$$y = e^x,\ y' = y'' = \ldots = y^{(n)} = e^x.$$

8) $y = \sin x$ funksiyasının yüksək tərtibli törəmələrini hesablayın.

Həlli:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

....

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Eyni qayda ilə $y = \cos x$ funksiyası üçün alarıq:

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

9) $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}$ funksiyasının diferensialını hesablayın.

$$dy = d\left(x\sqrt{4-x^2}\right) + d\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) = xd(\sqrt{4-x^2}) + \sqrt{4-x^2}\,dx +$$

Həlli:

$$+4\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{4-x^2}\,dx + 4\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{4-x^2}\,dx, \quad -2 < x < 2.$$

10) $y = x^3$ funksiyası verilmişdir. d^3y hesablayın.

Həlli: $dy = 3x^2dx, \quad d^2y = 6xdx^2, \quad d^3y = 6dx^3.$

11) $y = x\cos 2x$ funksiyası verilmişdir. $d^{10}y$ hesablayın.

Həlli: Leybnis düsturuna görə alarıq:

$$d^{10}y = (-x \cdot 2^{10}\cos 2x - C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot \sin 2x)dx =$$

$$= -2^{10}(x\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}.$$

12) $\cos 61^0$ hesablayın.

Həlli:

$$x = 60^0 = \frac{\pi}{3}, \quad \Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$$

$$61^0 = 60^0 + 1^0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \quad \text{olduğundan}$$

$$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x + (\cos x)' \cdot \Delta x$$

düsturuna görə alarıq:

$$\cos 61^0 \approx \cos 60^0 - \sin 60^0 \cdot 0{,}01745 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}4849.$$

13) Çalışma 1-in 1-ci misalının həlli:

$$y' = (x^2-2x+2)'(x^2+x-1) + (x^2-2x+2)(x^2+x-1)' =$$
$$= (2x-2)(x^2+x-1) + (x^2-2x+2)(2x^2+1) = 4x^3-3x^2-2x+4.$$

14) Çalışma 1-in 15-ci misalının həlli:

$$y' = \frac{1}{6}\frac{(\sqrt{(1+x^6)^3})'x^{10} - (x^{10})'\sqrt{(1+x^6)^3}}{x^{20}} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{9x^6\sqrt{1+x^6} - 10\sqrt{(1+x^6)^3}}{x^{11}} = \frac{\sqrt{1+x^6}}{6x^{11}}(9x^6 - 10 - 10x^6) =$$

$$= -\frac{(10+x^6)\sqrt{1+x^6}}{6x^{11}}.$$

15) Çalışma 2-in 8-ci misalının həlli:

$$y' = \frac{(-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{-(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)^2} = -\frac{2}{(\cos x + \sin x)^2}.$$

16) Çalışma 2-nin 11-ci misalının həlli:

$$y' = tg\sqrt{x}\, sec^2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}tg\sqrt{x}(sec^2\sqrt{x} - 1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}tg^3\sqrt{x}.$$

17) Çalışma 3-ün 1-ci misalının həlli:

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'\arccos 2x+\frac{1}{x}(\arccos 2x)'=-\frac{\arccos 2x}{x^2}-$$

$$-\frac{2}{x\sqrt{1-4x^2}}.$$

18) Çalışma 3-ün 10-cu misalının həlli:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{2x}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=-\frac{2}{1+x^2}.$$

19) Çalışma 14-ün 3-cü misalının həlli:

$$y'=\frac{1}{2}(\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x))=\frac{1}{2}\left(\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}-\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\cos x+\sin x\cos x+\cos x-\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos x}.$$

20) Çalışma 4-ün 10-cu misalının həlli:

$$y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

21) Çalışma 5-in 1-ci misalının həlli:

$y' = (x^2)'e^{2x} + x^2(e^{2x})' = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = 2xe^{2x}(x+1)$.

22) Çalışma 5-in 14-cü misalının həlli:

$$y' = (arctge^x)' - \frac{1}{2}(ln\, e^{2x} - ln(e^{2x}+1))' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - 1 +$$

$$+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{2x} - 1 + e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}.$$

23) Çalışma 6-nın 1-ci misalının həlli:

$$y = (ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1})' + (arcsin\, e^{-x})' = \frac{(e^x + \sqrt{e^{2x}-1})'}{e^x + \sqrt{e^{2x}-1}} +$$

$$+\frac{(e^{-x})'}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \frac{e^x + \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}}{e^x + \sqrt{e^{2x}-1}} + \frac{(-e^{-x})e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

$$y'(1) = \frac{e^1}{\sqrt{e^{21}-1}} = \frac{e}{\sqrt{e^2-1}}.$$

24) Çalışma 6-nın 2-ci misalının həlli:

$$y' = \left(\frac{3-x}{2}\right)'\sqrt{1-2x-x^2} + \frac{3-x}{2}(\sqrt{1-2x-x^2})' +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{2} + \frac{(3-x)(-1-x)}{2\sqrt{1-2x-x^2}} +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{1-(1+x)^2}}=\frac{-(1-2x-x^2+(3-x)(-1-x)+4)}{2\sqrt{1-2x-x^2}}=$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}},\quad y'(0)=\frac{0}{1}=0.$$

25) Çalışma 7-nin 1-ci misalının həlli:

$$dy=y'dx=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)' dx=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2 0}dx=$$

$$=\frac{dx}{(1-\sqrt{x})^2\sqrt{x}}.$$

26) Çalışma 7-nin 15-ci misalının həlli:

$$dy=y'dx=(x^5\sqrt[3]{x^6-8})'dx=(5x^4\sqrt[3]{x^6-8}+\frac{1}{3}(x^6-8)^{-\frac{2}{3}}6x^{10})dx=$$

$$=\frac{5x^4(x^6-8)+2x^{10}}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}dx=\frac{7x^{10}-40x^4}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}dx.$$

27) Çalışma 8-in 10-cu misalının həlli:

$U=x^2$ və $v=e^x$ iqarə etsək taparıq:

$$u'=2x, u''=2, u^{(3)}=u^{(4)}=...=u^{(n)}=0.$$

$$v'=e^x, v''=e^x, ..., v^{(n)}=e^x.$$

Leybnis düsturuna görə alarıq:

$$y^{(n)}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)}+\frac{n}{1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2e^x+n2xe^x+x^2e^x=(x^2+2nx+n^2-n)e^x.$$

28) Çalışma 7-nin 12-ci misalının həlli:

$$y' = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -2^2 \sin 2x = -2^2 \sin(2x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = -2^3 \cos 2x = -2^3 \sin(2x + 3\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = 2^4 \sin 2x = 2^4 \sin(2x + 4\frac{\pi}{2}), \ldots$$

$$\ldots, y^{(n)} = 2^n \sin(2x + n\frac{\pi}{2}).$$

29) Çalışma 9-yn 1-ci misalının həlli:

$$x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\cos t + \sin t),$$

$$y'_x = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t},$$

$$y''_{xx} = \frac{(y_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\right)'}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

30) Çalışma 9-un 3-cü misalının həlli:

$$x'_t = -a\sin t, x''_{zz} = -a\cos t,$$

$$y'_t = b\cos t, y''_{tt} = -b\sin t,$$

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt,$$

$$y''_{xx} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} =$$

$$=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{sin^3 t}.$$

31) Çalışma 10-un 3-cü misalının həlli:
y-in x-dən asılı funksiya olduğunu nəzərə alaraq, həmin eyniliyi x-ə nəzərən differensiallasaq alarıq

$3x^2+2xy+x^2y'+2yy'=0$ buradan da

$$y'=-\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}.$$

32) Çalışına 10-un 11-ci misalının həlli:

$y'e^y+e^{-x}+y+xy'=0$ buradan $y'=-\dfrac{e^{-x}+y}{e^y+x}$.

33) Çalışma 11-in 1-ci misalının həlli:

$x=1$, $\Delta x=0{,}04$, $arctg1=\dfrac{\pi}{4}$ olduğundan

$arctg(x+\Delta x)\approx arctgx+(arctgx)'\Delta x$ düsturuna görə alarıq:

$$arctg1{,}04\approx arctg1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{x=1}\cdot 0{,}04=\frac{\pi}{4}+\frac{0{,}04}{2}=0{,}747.$$

34) Çalışma 1-in 2-ci misalının həlli:
$x=1$, $\Delta x=0{,}12$ $\ln 1=0$ olduğundan
$ln(x+\Delta x)\approx ln\,x+(ln\,x)'\Delta x$ düsturuna görə alarıq:

$$ln1{,}12\approx ln1+(ln\,x)'_{x=1}\cdot 0{,}12=0+\frac{0{,}12}{1}=0{,}12.$$

V FƏSİL

Törəmənin tətbiqi

Çalışma 1. Lopital qaydası ilə limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$, 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)tg\dfrac{\pi x}{2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)ctgx$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$,

11) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$, 12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$,

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$, 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$.

Çalışma 2. Funksiyanın monotonluq intervallarını tapın.

1) $y=(x-2)^2x^2$, 2) $y=(x-2)^3(2x+1)^2$,

3) $y=12x^2-8x^3-2$, 4) $y=16x^3-12x^2-4$,

5) $y=2x^2-\ln x$, 6) $y=x^2e^{-x}$,

7) $y = x + \cos x$, 8) $y = \dfrac{x}{\ln x}$,

9) $y = (x-1)^2(x-3)^2$, 10) $y = x^4 - 2x^2 - 5$,

11) $y = \sqrt{2x - x^2}$, 12) $y = arctgx - x$,

13) $y = x^3 + x^2 + 1$, 14) $y = x\sqrt{x - x^2}$,

15) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$, 16) $y = 2 - 3x + x^3$,

17) $y = xe^{-x}$.

Çalışma 3. Funksiyaların ekstremumlarını tapın.

1) $y = 2x^3 - 3x^2$, 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$,

3) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$, 4) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$,

5) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$, 6) $y = (2x+1)^2(2x-1)^2$,

7) $y = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt{6x-7}$, 8) $y = \sqrt[3]{x(x+2)}$,

9) $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$, 10) $y = 6(x-1) - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}$,

11) $y = 6\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$, 12) $y = 8(x-2) - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}$,

13) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, 14) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$,

15) $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$, 16) $y = x^2(x-6)$,

17) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$.

Çalışma 4. Funksiyaların ekstremumlarını tapın.

1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$, 2) $y = x - \ln(1+x)$, 3) $y = sin^3 x$

4) $y = x - \ln(1+x^2)$, 5) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 6) $y = e^x \sin x$,

7) $y = \sqrt{x}\ln x$, 8) $y = 2tgx - tg^2 x$, 9) $y = x + \ln\cos x$,

10) $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$, 11) $y=\sqrt{1-\cos x}$, 12) $y=e^x \cos x$,

13) $y=x+tgx$, 14) $y=\sqrt{1-tgx}$,

15) $y=arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, 16) $y=\frac{x}{\ln x}$,

17) $y=x^2e^{-x}$.

Çalışma 5. Parçada verilən funksiyaların ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

1) $y=x^4-2x^2+5$, $[-2,2]$, 2) $y=-3x^4+6x^2$, $[-2,2]$,

3) $y=2\sqrt{x}-x$, $[0,4]$, 4) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $[0,1]$,

5) $y=4-x-\frac{4}{x^2}$, $[1,4]$, 6) $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$, $[-4,-1]$,

7) $y=8x+\frac{4}{x^2}-15$, $[\frac{1}{2},2]$, 8) $y=x-4\sqrt{x+2}+8$, $[-1,7]$,

9) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0,1]$, 10) $y=\frac{10x}{1+x^2}$, $[0,3]$,

11) $y=x^2+\frac{16}{x}-16$, $[1,4]$,

12) $y=x^2+4x+\frac{16}{x+2}-9$, $[-1,2]$,

13) $y=\frac{4}{x^2}-8x-15$, $[-2,-\frac{1}{2}]$, 14) $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $[1,5]$,

15) $y=2x^2+\frac{108}{x}-59$, $[2,4]$, 16) $y=x+2\sqrt{x}$, $[0,4]$,

17) $y=arctg\frac{1-x}{1+x}$, $[0,1]$.

Çalışma 6. Əyrilərin əyilmə nöqtələrini tapın.

1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$, 2) $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$,

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, 4) $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$,

5) $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$, 6) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$,

7) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$, 8) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$,

9) $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$, 10) $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$,

11) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$, 12) $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$,

13) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, 14) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$,

15) $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$, 16) $y=(x-2)(x+1)^2$,

17) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

Çalışma 7. Əyrilərin əyilmə nöqtələrini tapın.

1) $y=x+\sin x$, 2) $y=\cos x-\ln\cos x$,

3) $y=\sin x\sin 3x$, 4) $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$,

5) $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$, 6) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

7) $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$,

8) $y=xarctgx$,

9) $y=sin\,x+cos\,x$,

10) $y=\sin x-\cos x$,

11) $y=\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$,

12) $y=e^{-2x}\,sin\,2x$,

13) $y=ln\dfrac{x+1}{x-1}$,

14) $y=\dfrac{\sin x}{x}$,

15) $y=x-arctgx$,

16) $y=x-arcctgx$,

17) $y=(x-4)^5+4x+4$.

Çalışma 8. Əyrilərin asimptotlarını tapın.

1) $y=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$,

2) $y=3x-\arccos\dfrac{1}{x}$,

3) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$,

4) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$,

5) $y=\dfrac{1+\sin x}{x}$,

6) $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$,

7) $y=\ln(4-x^2)$,

8) $y=x^2e^{-x}$,

9) $\dfrac{1}{2}x+arcctgx$,

10) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$,

11) $y=xe^{\frac{1}{x}}$,

12) $y=\sqrt{x^2+1}+2x$,

13) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$,

14) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$,

15) $y=\dfrac{\ln x}{x}$,

16) $y=\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3}$,

17) $y=2x-\arccos\dfrac{1}{x}$.

Nümunəvi həllər

1) $f(x) = x^2 - 1$ funksiyasının $[-1,1]$ parçasında Roll teoreminin şərtlərini ödədiyini yoxlayın.

Həlli:

Funksiya $[-1,1]$ parçasında kəsilməzdir, $(-1,1)$ intervalında diferensiallanandır və $f(-1) = f(1) = 0$. Onda elə $c \in (-1,1)$ nöqtəsi var ki, $f'(c) = 0$ olar, yə'ni $f'(x) = 2x = 0$, buradan $c = 0 \in (-1,1)$ alarıq.

2) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 3x$ funksiyası üçün $[0,1]$ parçasında Laqranj düsturunu yazın və $(0,1)$ intervalında həmin düsturdakı c nöqtəsini tapın.

Həlli:

$$f(0) = 0,\ f(1) = \sqrt{3} + 3,\ f'(x) = 2\sqrt{3}x + 3$$

olduğundan Laqranj düsturunu

$\sqrt{3} + 3 - 0 = (1-0)(2\sqrt{3}c + 3)$ və ya $\sqrt{3} + 3 = 2\sqrt{3}c + 3$ kimi

yazırıq, buradan isə taparıq ki, $c = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$.

3) $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ və $g(x) = x^2 + 4$ funksiyaları üçün $[0,2]$ parçasında Koşi düsturunu yazın və $(0,2)$ intervalında həmin düsturdakı c nöqtəsini tapın.

Həlli:

$f(0) = 1,\ f(2) = 19,\ g(0) = 4,\ g(2) = 8,\ f'(x) = 4x + 5$

$g'(x) = 2x$ olduğundan Koşi düsturunu $\dfrac{19-1}{8-4} = \dfrac{4c+5}{2c}$ və ya

$\dfrac{9}{2} = \dfrac{4c+5}{2c}$ kimi yazıb buradan isə taparıq ki, $c = 1 \in (0,2)$.

4) Limitləri hesablayın.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - \sin x},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - tgx\right), \lim_{x\to 0} xctgx,\quad \lim_{x\to 0} x^x$$

Həlli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}xctgx(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1$$

$$\lim_{x\to 0}(0^0)=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}x}=e^0=1.$$

5) $f(x)=x^3-3x+1$ funksiyasının artan və azalan olduğu intervalları tapın.

Həlli:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$$

olmasından aydındır ki, $|x|<1$ olduqda $f'(x)<0$ və $|x|>1$ olduqda isə $f'(x)>0$ olar. Deməli, funksiya $(-1,1)$ intervalında azalır və $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ oblastında isə artır.

6) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+3$ funksiyasının ekstremumlarını tapın.

Həlli: $f'(x)=x^3-4x=x(x-2)(x+2)$

olduğundan funksiyanın $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=2$ böhran nöqtələri olar. Bu nöqtələrdə ikinci törəmənin $f''(x)=3x^2-4$ qiymətlərini tapaq:

$$f''(-2)=8>0,\ f''(0)=-4<0,\ f''(2)=8>0,$$

olduğundan funksiyanın $x_1 = -2$, $x_3 = 2$ nöqtələrində minimumu, $x_2 = 0$ nöqtəsində isə maksimumu var. Bu ekstremal qiymətlər $\min f(x) = f(-2) = f(2) = -1$ və $\max f(x) = f(0) = 3$ ədədləridir.

7) $f(x) = 3x - x^3$ funksiyasınm $[-2,3]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$$

olduğundan funksiyanın böhran nöqtələri $x_1 = -1, x_2 = 1$ olar. Bu nöqtələr $[-2,3]$ parçasına daxildir. $x_1 = -1, x_2 = 1$ nöqtələrində və $[-2,3]$ parçasının uc nöqtələrində funksiyanın qiymətini tapaq:

$$f(-2) = 2,\ f(-1) = -2,\ f(1) = 2,\ f(3) = -18$$

Bu qiymətləri müqayisə edərək alarıq ki, funksiyanın verilmiş parçada ən böyük qiyməti 2-yə və ən kiçik qiyməti -18-ə bərabərdir.

8) $f(x) = x^3$ funksiyasının qabarıq və çökük olduğu intervalları və əyilmə nöqtəsini tapın.

Həlli: $f''(x) = 6x$ ifadəsindən aydındır ki, $x < 0$ olduqda $f''(x) < 0$ və $x > 0$ olduqda isə $f''(x) > 0$ olduğundan $(-\infty,0)$ intervalında funksiyanın qabarıqlığı yuxarıya doğru $(0,\infty)$ intervalında isə qabarıqlığı aşağıya doğru olur. Deməli, əyri $(-\infty,0)$ intervalında qabarıq, $(0,\infty)$ intervalında isə çökükdür və $(0,0)$ əyrinin əyilmə nöqtəsidir.

9) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$ funksiyasının qabarıq və çökük olduğu intervalları və əyilmə nöqtələrini tapın.

Həlli: Funksiyanın iki tərtibli

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$$

törəməsinə nəzərən böhran nöqtələri $x_1 = -1, x_2 = 1$ olar. Aydındır ki, $-\infty < x < -1$ və $1 < x < \infty$ olduqda $f''(x) > 0$ və $-1 < x < 1$ olduqda isə $f''(x) < 0$ olar.

Deməli, əyri $(-1,1)$ intervalında qabarıq, $(-\infty,-1)$ və $(1,\infty)$ intervalında isə çökükdür. $(-1,2)$ və $(1,-10)$ nöqtələri əyrinin əyilmə nöqtələridir.

10) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ əyrisinin asimptotlarını tapın.

Həlli: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}=\infty$ olduğundan $x=-2$ düz xətti əyrinin şaquli asimptotudur. Maili asimptotunu tapaq.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+3x}{x+2}=-4$$

olduğundan $y=x-4$ düz xətti əyrinin maili asimptotu olar.

11) Çalışma 1-in 2-ci misalının həlli:

$\dfrac{0}{0}$ şəkilində qeyri-müəyyənlikdir. Lopital qaydasına görə alarıq:

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to5}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt{x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to5}\frac{2}{3\sqrt[6]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}.$$

12) Çalışma 1-in 11-ci misalının həlli: 1^∞ şəkilində qeyri-müəyyənlikdir.

$y=(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$ işarə edək və onun Loqarifmini alaq:

$ln\,y=tg\dfrac{\pi x}{2}ln(2-x)$ Lopital qaydasına görə alarıq:

$$\lim_{x\to1}ln\,y=\lim_{x\to1}tg\frac{\pi x}{2}ln(2-x)=\lim_{x\to1}\frac{ln(2-x)}{ctg\dfrac{\pi x}{2}}=$$

$$= 2\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = \frac{2}{\pi} \quad \text{və ya} \quad \lim_{x\to 1} y = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

13) Çalışma 2-nin 5-ci misalının həlli: $y' = 4x - \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow (x - (-\frac{1}{2}))(x - \frac{1}{2}) > 0$, x>0. Buradan funksiyanın $(\frac{1}{2}, \infty)$ artan, $(0, \frac{1}{2})$ azalan olması aydındır.

14) Çalışma 2-nin 9-cu misalının həlli:

$y' = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$

Buradan funksiyanın (1,2) və (3,∞) artan, (-∞,1) və (2,3) azalan olması aydındır.

15) Çalışma 3-ün 1-ci misalının həlli:

Burada $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0$, $x_1=0$, $x_2=1$ Onda $x<0$ olduqda $y' = 6(-)(-) > 0$, $x>0$, $x<1$ олдугда $y' = 6(+)(-) < 0$. Deməli $x_1=0$ nöqtəsindən soldan sağa keçəndə törəmənin işarəsini müsbətdən mənfiyə çevrilir. Ona görə x=0 nöqtəsində funksiyanm maksimumu var: $y_{max} = y(0) = 0$, $x<1$ olduqda $y' = 6(+)(-) < 0$, $x>1$ olduqda $y' = 6(+)(+) > 0$.

Deməli, $x_2=1$ nöqtəsindən soldan sağa keçəndə törəmənin işarəsi mənfindən müsbətə çevrilir. Ona görə $x=1$ nöqtəsində funksiyanın minimumu var: $y_{min} = y(1) = -1$.

16) Çalışma 3-ün 6-cı misalının həlli. Burada

$y' = 2(4x^2 - 1)8x = 16x(2x+1)(2x-1) = 0$, $x_1=0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,

$x_3 = \frac{1}{2}$. İkinci törəməsini tapaq:

$y'' = 16(12x^2 - 1)$ $\quad y''_{x_1=0} = -16 < 0$ olduğuna görə $x=0$ nöqtəsində funksiyanın maksimumu var: $y_{max}=y(0)=1$.

$y''_{x=\pm\frac{1}{2}} = 32 > 0$ olduğuna görə $x=\pm\frac{1}{2}$ nöqtəsində funksiyanın minimumu var: $y_{min} = y(\pm\frac{1}{2}) = 0$.

17) Çalışma 4-ün 2-ci misalının həlli: Burada

$$y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = 0, x = 0$$

$y'' = \frac{1}{(1+x)^2}, y''_{x=0} = 1 > 0$ olduğuna görə $x=0$ nöqtəsində funksiyanın minimumu var: $y_{min}=y(0)=0$

18) Çalışma 4-ün 7-ci misalının həlli: Burada

$y' = \frac{ln x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{ln x}{2} + 1\right) = 0$, $\ln x=-2$, $x=\frac{1}{e^2}$

sonra, $x<\frac{1}{e^2}$ olduqda $\ln xe^2 < 0$ və $y' < 0$ olar. $x>\frac{1}{e^2}$ olduqda $\ln xe^2 > 0$ və $y' > 0$ olar. Deməli, $x = \frac{1}{e^2}$ nöqtəsindən soldan sağa keçəndə törəmənin işarəsi mənfidən müsbətə çevrilir. Ona görə $x = \frac{1}{e^2}$ nöqtəsində funksiyanın minimumu var:

$$y_{min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{e}.$$

19) Çalışma 5-in 2-ci misalının həlli. Burada

$y' = -12x^3 + 12x = 12x(1 - x^2) = 0$, $\quad x_1=0$, $\quad x_2=-1$, $\quad x_3=1$ funksiyanın böhran nöqtələridir. Bu nöqtələrin hər biri $[-2,2]$ parçasına daxildir. Onda funksiyanın $[-2,2]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətləri $y(-2)=-24$, $y(-1)=3$, $y(0)=0$, $y(1)=3$, $y(2)=-24$ qiymətləri arasındadır və $M=3$, $m=-24$.

20) Çalışma 5-in 14-cü misalının həlli:

Burada $y' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = 0$, $x=2$ funksiyanın böhran nöqtəsidir və $2\in[1,5]$. Onda funksiyanın $[1,5]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətləri $y(1)=1$, $y(5)=1$, $y(2)=3$ qiymətləri arasındadır və $M=3$, $m=1$.

21) Çalışma 6-nın 3-cü misalının həlli. Birinci və ikinci törəmələri tapaq:

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

İkinci törəməni sıfıra çevirən qiymətləri tapaq:

$1-3x^2 = 0, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda, $y''<0$, $y>-\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda isə $y''>0$. x_1 nöqtəsindən keçəndə y'' işarəsini dəyişdiyinə görə, absisi $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ olan nöqtə əyrinin əyilmə nöqtəsidir. Onun koordinatları: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$.

İkinci nöqtəni araşdıraq:

$x_1<\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda $y''>0$, $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda isə $y''<0$. Deməli, absisi $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olan nöqtə əyrinin əyilmə nöqtəsidir. Onun koordinatları: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$.

22) Çalışma 6-nın 11-ci misalının həlli. Birinci və ikinci törəmələri tapaq:

$$y' = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

$$y'' = -\frac{2x(x^2-4)^2 - 4x(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - 4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

İkinci törəmə ancaq x=0 qiymətində sıfıra çevrilir. $x<0$ olduqda $y''<0$, $x>0$ olduqda isə $y''>0$. $x=0$ nöqtəsindən keçəndə y'' işarəsini dəyişdiyinə görə, absisi $x=0$ olan nöqtə əyrinin əyilmə nöqtəsidir. Onun koordinatları: (0,0).

23) Çalışma 7-nin 1-ci misalının həlli: Birinci və ikinci törəmələri tapaq:

$y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$. İkinci törəmə $x=k\pi$, $k \in Z$ nöqtələrində sıfıra çevrilir. $x=k\pi$, $k \in Z$ nöqtələrindən keçəndə y'' işarəsini dəyişdiyinə görə, absisi $x=k\pi$, $k \in Z$ olan nöqtələr əyrinin əyilmə nöqtələridir.

24) Çalışma 7-nin 9-cu misalının həlli. Birinci və ikinci törəmələri tapaq:

$y' = \cos x - \sin x, y'' = -\sin x - \cos x$, ikinci törəmə $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in z$ nöqtələrində sıfıra çevrilir. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in z$ nöqtələrindən keçəndə y'' işarəsini dəyişdiyinə görə $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, 0\right), k \in Z$ nöqtələri əyrinin əyilmə nöqtələridir.

25) Çalışma 8-ni 11-ci misalının həlli. Şaquli asimptotları axtaraq.

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-0} y=\lim_{x\to-0} xe^{\frac{1}{x}}=0.$$

Deməli, $x=0$ düz xətti şaquli asimptotdur.

Maili asimptotları axtaraq:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{\frac{1}{x}=z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Deməli $y=x+1$ düz xətti əyrinin maili asimptotudur.

26) Çalışma 8-in 12-ci misalının həlli funksiya hər yerdə kəsilməz olduğuna görə şaquli asimptotu yoxdur. Maili asimptotları axtaraq:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2=3,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+2x-3x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Deməli, $y=3x$ maili asimptotdur.

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2x}{x}=1$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+2x-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0.$$

Deməli, $y=x$ maili asimptotdur.

VI FƏSİL

Həqiqi dəyişənli vektor və kompleks funksiyalar

Çalışma 1. İfadələri hesablayın.

1) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$, 2) $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$,

3) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{25}$, 4) $\left(\frac{i^5+1}{i^{19}+1}\right)^{2}$,

5) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$, 6) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{50}$,

7) $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{8}$, 8) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{12}$,

9) $\left(i^8 + i^5\sqrt{3}\right)^5$,

10) $\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}$,

11) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$,

12) $(\sqrt{3} - i)^9$,

13) $(\sqrt{3} + i)^9$,

14) $\left(\dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$,

15) $(1 + i\sqrt{3})^6$,

16) $(1+i)^{10}$,

17) $(1 + i\sqrt{3})(1-i)^4$.

Çalışma 2. Kökün bütün qiymətlərini tapın.

1) $\sqrt[4]{-i}$,
2) $\sqrt[3]{-4 + i\sqrt{48}}$,
3) $\sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}}$,

4) $\sqrt[3]{-i}$,
5) $\sqrt[3]{i}$,
6) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$,

7) $\sqrt[3]{-1+i}$,
8) $\sqrt{-9}$,
9) $\sqrt[3]{-27}$,

10) $\sqrt[3]{-64}$,
11) $\sqrt{-36}$,
12) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$,

13) $\sqrt[3]{-2 + i2\sqrt{3}}$,
14) $\sqrt[3]{1-i}$,
15) $\sqrt{2-2i}$,

16) $\sqrt{i}$,
17) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$.

Çalışma 3. Tənlikləri təqribi həll edin.

1) $x^3 + x^2 - 3 = 0$,
2) $x^4 - 2x - 2 = 0$,

3) $x\,arctgx - 1 = 0$,
4) $x^3 + 3x - 1 = 0$,

5) $x - 10\lg x = 0$,
6) $x - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$,

7) $x^5 - x - 2 = 0$,
8) $x^4 + 3x^3 - 9x - 27 = 0$,

9) $x^3 - 5x + 1 = 0$,
10) $x + e^x - 2 = 0$,

11) $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$,
12) $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$,

13) $x^4 - 4x + 1 = 0$,
14) $x^2 - e^x - 2 = 0$,

15) $x - \cos x = 0$,　　　16) $x^3 - 2x - 2 = 0$,

17) $x \lg x - 1 = 0$.

Nümunəvi həllər

1) $\bar{r}(t) = \frac{1-t}{1+t}\bar{i} + \frac{\sin t}{t}\bar{j} - \frac{\ln(1-t)}{t}\bar{k}$ vektor funksiyasının $t \to 0$ şərtində limitini hesablayın.

Həlli:

$$\lim_{t\to 0}\bar{r}(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-t}{1+t}\bar{i} + \frac{\sin t}{t}\bar{j} - \frac{\ln(1-t)}{t}\bar{k}\right) =$$

$$= \bar{i}\lim_{t\to 0}\frac{1-t}{1+t} + \bar{j}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} - \bar{k}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t} =$$

$$= \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}\lim_{t\to 0}\frac{-1}{1-t} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

2) $\bar{r}'(t) = \bar{i}\sin t + \bar{j}\cos t - \bar{k}$ vektor funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli:

$$\bar{r}'(t) = (\bar{i}\sin t + \bar{j}\cos t - \bar{k})' = \bar{i}\cos t - \bar{j}\sin t$$

3) $y = x^2 - 2x + 5$ parabolasına (2,5) nöqtəsində toxunanın və normalının tənliklərini tapın.

Həlli:

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1), \quad k = y'_{x=2} = 2(2-1) = 2$$

olduğundan toxunanın tənliyi

$$y - 5 = 2(x-2) \quad \text{və ya} \quad 2x - y + 1 = 0$$

normalın tənliyi isə

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x-2) \quad \text{və ya} \quad x + 2y - 12 = 0 \quad \text{olar.}$$

4) $\bar{r}'(t) = \bar{i}\cos t + \bar{j}\sin t + 2t\bar{k}$ Vint əyrisinə $t = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsində toxunanın və normal müstəvinin tənliklərini tapın.

Həlli: $x=\cos t, y=\sin t, z=2t$ olduğundan $x'=-\sin t$, $y'=\cos t, z'=2$ olar və $t=\dfrac{\pi}{2}$ nöqtəsində

$$x=0, y=1, z=\pi, x'=-1, y'=0, z'=2$$

alarıq. Onda toxunanın tənliyi

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\pi}{2} \quad \text{və ya} \quad \frac{x}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-\pi}{2}$$

normal müstəvinin tənliyi isə

$$(x-0)(-1)+(y-1)\cdot 0+(z-\pi)2=0 \text{ və ya } x-2z+2\pi=0$$

olar.

5) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ tsikloid əyrisi qövsünün diferensialını tapın.

Həlli:

$$x'=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t$$

olduğundan

$$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

6) $y=x^3$ əyrisinin $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ nöqtəsində əyriliyini hesablayın.

Həlli:

$$y'=3x^2,\ y''=6x,\ y'_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{4},\ y''_{x=\frac{1}{2}}=3$$

olduğundan

$$K=\frac{3}{\left(1+\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{\dfrac{125}{64}}=\frac{192}{125}.$$

7) $y^2=2(x+1)$ parabolasının evolyutunun tənliyini tapın.

Həlli:

$$2yy' = 2,\ y' = \frac{1}{y};\ (y')^2 + yy' = 0,\ y'' = -\frac{(y')^2}{y} = -\frac{1}{y^3}$$

münasibətlərinə əsasən əyrilik mərkəzinin koordinatlarını tapaq.

$$\alpha = x - \frac{1+(y')^2}{y''}y' = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{2}y^2$$

$$\beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} = -y^3$$

Beləliklə, parabolanın evolyutu

$$\alpha = \frac{3}{2}y^2,\ \beta = -y^3$$

parametrik tənlikləri ilə tə'yin olunur, burada y parametr rolunu oynayır. y parametrini yox etsək evolyutun tənliyini

$$\beta^2 = \frac{8}{27}\alpha^3$$

şəklində alarıq.

8) $z_1 = 3 + 2i$ və $z_2 = 1 - i$ kompleks ədədləri verilmişdir.

$z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ ədədlərini tapın.

Həlli:

$$z_1+z_2=(3+2i)+(1-i)=4+i$$
$$z_1-z_2=(3+2i)-(1-i)=2+3i$$
$$z_1 z_2=(3+2i)(1-i)=3-3i+2i+2=5-i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$$

9) $\sqrt{3}-i$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

Həlli:

$$\rho=\sqrt{3+1}=2,\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi=-\frac{1}{2},$$

Buradan isə $\varphi=\frac{11}{6}\pi$ olduğundan,

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

10) $\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$ kompleks ədədini üstlü şəkildə yazın.

Həlli:

$$\rho=\sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}}=\frac{1}{4},\quad tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi=-\frac{\pi}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

11) $\sqrt[3]{-8}$ ədədinin bütün qiymətlərini hesablayın.

Həlli: $W=-8$ ədədini triqonometrik şəkildə yazaq.

$$W=-8=8(\cos\pi+\sin\pi).$$

Onda

$$z_k=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2,$$

buradan

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

12) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ çoxhədlisini xətti vuruqlarına ayırın.

Həlli:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$

$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

İkinci vuruğun kökləri $x_2 = 2, x_3 = 3$ olduğuna görə:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

13) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 2$ çoxhədlisini xətti vuruqlarına ayırın.

Həlli: $x^2 = y$ əvəz edək. Onda

$$3y^2 - 5y - 2 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = -\frac{1}{3} \text{ və}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \pm\frac{i}{\sqrt{3}} \text{ olduğundan}$$

$$3x^4 - 5x^2 - 2 = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{i}{\sqrt{3}}\right).$$

14) Toxunanlar üsulu ilə $x^3 - 6x + 2 = 0$ tənliyinin köklərinin təqribi qiymətlərini hesablayın.

Həlli: $f(x) = x^3 - 6x + 2$ işarə edək. $f'(x) = 3x^2 - 6$ ifadəsindən aydındır ki, $x < -\sqrt{2}$ və $x > \sqrt{2}$ olduqda $f'(x) > 0$ və $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ intervalında $f'(x) < 0$.

Deməli, $(-\infty, -\sqrt{2})$ və $(\sqrt{2}, \infty)$ intervallarında funksiya artır, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ intervalında isə azalır. Beləliklə, bu intervalların hər birində funksiyanın bir həqiqi kökü var, çünki onların uclarında funksiya müxtəlif işarəli qiymətlər alır. Hesablamaları sadələşdirmək üçün həmin intervalları kiçildək. Bu şərtlə ki, hər intervalda uyğun kök qalsın.

Bunun üçün hər bir monotonluq intervalının daxilində yeni kiçik interval elə seçilir ki, onun uclarında funksiyanın qiymətləri yenə də müxtəlif işarəli olsun.

$$f(-3)=-7<0,\ f(-2)=6>0,\ f(0)=2>0$$

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=-2<0,\ f(3)=11>0$$

olduğundan köklər $(-3,-2),(0,1),\ (2,3)$ intervallarında yerləşər.

İndi $(0,1)$ intervalında kökün təqribi qiymətini tapaq. Toxunanlar düsturuna görə alarıq:

$$x_1=0-\frac{(1-0)\cdot 2}{-3-2}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

$f(0{,}4)=-0{,}336<0$ və $f(0)=2>0$ olduğundan kök 0 ilə 0,4 arasında olar. Bu intervala yenə toxunanlar düsturunu tətbiq etsək aşağıdakı yaxınlaşmanı alarıq:

$$x_2=0-\frac{(0{,}4-0)\cdot 2}{-0{,}336-2}=\frac{0{,}8}{2{,}336}=0{,}342 \quad \text{və s.}$$

Eyni ilə başqa intervallardakı köklərin təqribi qiymətlərini hesablamaq olar.

15) Çalışma 1-in 2-ci misalının həlli: z nöqtəsi üçüncü rübə düşur:

$$r=|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1, tg\varphi=\sqrt{3}, \varphi=arg\,z=\frac{4\pi}{3}.$$

Onda $z=re^{i\varphi}=1e^{i\frac{4\pi}{3}}, \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}=$

$$=1^{10}e^{i\frac{40\pi}{3}}=e^{i(33\pi+\frac{\pi}{3})}=-e^{i\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16) Çalışma 1-ni 7-ci misalının həlli: z nöqtəsi dördüncü rübə düşür:

$$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2, tg\varphi=-1, \varphi=arg\,z=\frac{7\pi}{4},$$

Onda

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}, (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^8 = 2^8 e^{i\frac{7\pi}{4}8} = 2^8 e^{i14\pi} = 2^8 \cdot 1 = 256\,.$$

17) Çalışma 2-nin 3-cü misalının həlli: -1-i$\sqrt{3}$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazaq:

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(cos(-\frac{\pi}{3}) + i\,sin(-\frac{\pi}{3}))\text{. Onda}$$

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\,sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4} \right)$$

k=0,1,2,3 qiymətlərində alarıq:

k=0 olduqda $\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{\pi}{12} - i\,sin\frac{\pi}{12} \right)$,

k=1 olduqda $\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{5\pi}{12} + i\,sin\frac{5\pi}{12} \right)$,

k=2 olduqda $\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{11\pi}{12} + i\,sin\frac{11\pi}{12} \right)$,

k=3 olduqda $-\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{5\pi}{12} + i\,sin\frac{5\pi}{12} \right)$.

18) Çalışma 2-nin 12-ci misalının həlli: $2\sqrt{3} + 2i$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazaq:

$$2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 4\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6} \right)$$

Onda $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right).$

K=0,1,2,3 qiymətlərində alarıq:

K=0 olduqda $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$

K=1 olduqda $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24}+i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$

K=2 olduqda $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$

K=3 olduqda $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24}+i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$

19) Çalışma 3-ün 1-ci misalının həlli:

Tənliyi vətərlər üsulu ilə həll edək. Tutaq ki, $f(x)=x^3+x^2-3$, $y=x^3$ və $y=3-x^2$.

$y=x^3$ və $y=3-x^2$ funksiyalarının qrafiklərini qurmaqla asanlıqla müəyyən etmək olar ki, [1;1,25] parçasında tənliyin bir həqiqi kökü var.

Burada $a=1$, $b=1{,}25$, $f(1)=-1<0$, $f(1{,}25)=0{,}5156>0$ olduqdan

$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$ düsturuna görə alarıq:

$$x_1=1-\frac{1{,}25-1}{0{,}5156+1}(-1)=1{,}1649$$

$f(1{,}1649)=-0{,}0619$ olduqda $x_2=x_1-\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}f(x_1)$

düsturuna görə

$$x_2=1{,}1649-\frac{1{,}25-1{,}1649}{0{,}5156+0{,}0619}(-0{,}0619)=1{,}1740$$

f(1,1740)=-0,0031 olduqdan

$$x_3 = 1{,}1740 - \frac{1{,}25 - 1{,}1740}{0{,}5156 + 0{,}0031}(-0{,}0031) = 1{,}1745$$

Beləliklə, tənliyin $\Delta=10^{-4}$ dəqiqliyi ilə təqribi həlli x=1,1745 olar.

20) Çalışma 3-ün 4-cü misalının həlli: tənliyi vətərlər üsulu ilə həll edək. Tutaq ki, $f(x)=x^3+3x-1$, $y=x^3$ və $y=1-3x$, $y=x^3$ və $y=1-3x$ funksiyaların qrafiklərin qurmaqla asanlıqla müəyyən etmək olar ki, [0;1] parçasında tənliyin bir həqiqi kökü var.

Burada $a=0$, $b=1$, $f(0)=-1<0$, $f(1)=3>0$ olduğundan

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$, düsturuna görə alarıq:

$$x_1 = 0 - \frac{1-0}{3+1}(-1) = 0{,}25$$

f(0,25)=-0,234 olduqdan, $x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1)$

düstunruna görə $x_2 = 0{,}25 - \frac{1-0{,}25}{3+0{,}234}(-0{,}234) = 0{,}304$

f(0,304)=-0,060 olduğundan

$$x_3 = 0{,}304 - \frac{1-0{,}304}{3+0{,}060}(-0{,}060) = 0{,}3176.$$

Nəhayət alarıq ki,

$$x_4 = 0{,}3176 - \frac{1-0{,}3176}{3+0{,}0152}(-0{,}0152) = 0{,}3211.$$

Beləliklə, tənliyin $\Delta=10^{-4}$ dəqiqliyi ilə təqribi həlli x=0,3211 olar.

VII FƏSİL

İnteqrallar

Çalışma 1. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

1) $\int(1-2x)e^{-3x}dx,$ 2) $\int(4-3x)e^{2x}dx,$

3) $\int(5x-1)e^{5x}dx,$ 4) $\int x\cos^2 xdx,$

5) $\int arcsin\sqrt{x}dx,$ 6) $\int\frac{xdx}{sin^2 x},$

7) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x},$ 8) $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x},$

9) $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx,$ 10) $\int(4x+7)arctgxdx,$

11) $\int(3x+4)arcctgxdx,$ 12) $\int\ln(4x^2+1)dx,$

13) $\int xarctgxdx,$ 14) $\int xarcctgxdx,$

15) $\int(5-3x)\cos 5xdx,$ 16) $\int\ln(x^2+x)dx,$

17) $\int arctg\sqrt{x}dx.$

Çalışma 2. Müəyyən inteqralları hesablayın.

1) $\int_{-\pi}^{0}(x^2+3x+2)\,sin\,xdx$ 2) $\int_{-\pi}^{0}(x^2-9)\,sin\,xdx,$

3) $\int_{-\pi}^{0}(x^2+5x+6)\,cos\,xdx,$ 4) $\int_{-\pi}^{0}(x+1)^2\,sin\,xdx,$

5) $\int\limits_0^{2\pi}(1-8x^2)\cos x dx,$ 6) $\int\limits_0^{\pi}(x^2-3x)\sin x dx,$

7) $\int\limits_0^{\pi}(x^2-3x-1)\sin x dx,$ 8) $\int\limits_0^{2\pi}(5-7x^2)\cos x dx,$

9) $\int\limits_0^{\pi}(3x^2+3x+7)\cos x dx,$ 10) $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+1)e^{\frac{x}{2}}dx,$

11) $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx,$ 12) $\int\limits_0^1 x^2e^{3x}dx,$

13) $\int\limits_1^2 x^2\ln x dx,$ 14) $\int\limits_1^2 x\ln^2 x dx,$

15) $\int\limits_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}dx,$ 16) $\int\limits_1^2 x\ln x dx,$

17) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\sin 2x dx.$

Çalışma 3. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}},$ 2) $\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+2)}dx,$

3) $\int\frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ 4) $\int\frac{x^3}{x^2+1}dx,$

5) $\int\frac{x}{x^4+1}dx,$ 6) $\int\frac{(arctgx)^4}{1+x^2}dx,$

7) $\int \frac{(arccos\, x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}},$

9) $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx,$ 10) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx,$

11) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-x-1}},$ 12) $\int \frac{cos\, x}{2\, cos\, x+2\, sin\, x}dx,$

13) $\int \frac{(x^2+\ln x)^2}{x}dx,$ 14) $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx,$

15) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}dx,$ 16) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx,$

17) $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx.$

Çalışma 4. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

1) $\int \frac{2x+5}{x^2-2x-2}dx,$ 2) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-10}{(x+2)(x-2)^2}dx,$

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2},$ 4) $\int \frac{2x^3+x+1}{x^3(x+1)}dx,$

5) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx,$ 6) $\int \frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx,$

7) $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3}dx,$ 8) $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx,$

9) $\int \frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx,$ 10) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{(x-2)^2x^3}dx,$

11) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$,

12) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$,

13) $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$,

14) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$,

15) $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$,

16) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$,

17) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x-2)^2}$.

Çalışma 5. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$,

2) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$,

3) $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx$,

4) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\frac{dx}{x}$,

5) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$,

6) $\int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$,

7) $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

8) $\int \frac{arctgx}{x^4}dx$,

9) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$,

10) $\int \sqrt{tg^2 x+2}dx$,

11) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$,

12) $\int \frac{\arcsin x}{x^3}dx$,

13) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$,

14) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$,

15) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$, 16) $\int \sin^6 x dx$,

17) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$.

Çalışma 6. Müəyyən inteqralları hesablayın.

1) $\int_0^{13} \sqrt{169-x^2} dx$, 2) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$,

3) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$ 4) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$,

5) $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2} dx$, 6) $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2} dx$,

7) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$, 8) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$,

9) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$, 10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$,

11) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$, 12) $\int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{(x^2+4x+1)^5}} dx$,

13) $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx$, 14) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$,

15) $\int\limits_{0}^{4\sqrt{2}} \frac{x^{15}}{\sqrt{(1+x^3)^5}}dx$,

16) $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{x^2-1}dx$,

17) $\int\limits_{0}^{4} x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

Çalışma 7. Müəyyən inteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+tg^2x)\cos^2 x}$,

2) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$,

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$,

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$,

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,

6) $\int\limits_{0}^{1} x^3 arctgx dx$,

7) $\int\limits_{0}^{\pi} x^3 \sin x dx$,

8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^2 x dx$,

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$,

10) $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x dx$,

11) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin 2x dx$,

12) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$,

13) $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x}$, 14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 x - 11 tgx + 12}{4 - tgx} dx$,

15) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$, 16) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$,

17) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

Çalışma 8. Funksiyaların qrafikləri ilə məhdud olan fiqurların sahəsini hesablayın.

1) $y^2 = 2x+1,\ y = x-1,$ 2) $y = x^2,\ y = \sqrt{x},$

3) $y = x^2,\ y = \frac{x^3}{3},$ 4) $y^2 = -8x+16,\ y^2 = 24x+48,$

5) $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2},$ 6) $y = -x^2,\ y+x+2 = 0,$

7) $xy = 4\sqrt{2},\ x^2 - 6x + y^2 = 0, y = 0,\ x = 4,$

8) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,$

9) $y = x + \sin^2 x,\ y = x,\ 0 \le x \le \pi,$

10) $y^2 = x^2(1-x^2),$ 11) $6x = y^3 - 16y,\ 24x = y^3 - 16y,$

12) $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,$ 13) $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1,$

14) $y^2 = x^2 - x^4,$ 15) $y^2 = (1-x^2)^3,$

16) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$

17) $\rho = 2a(2+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi.$

Çalışma 9. Əyrinin uzunluğunu hesablayın.

1) $y = 2 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$, 2) $y = \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$,

3) $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2},\ 1 \le y \le e$, 4) $y = 4 - x^2,\ -2 \le x \le 2$,

5) $y^2 = 4x,\ 0 \le x \le 1$, 6) $y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le x \le 1$,

7) $x = \cos^5 x,\ \ y = \sin^5 t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,

8) $x = \frac{t^3}{3} - t,\ y = t^2 + 2,\ \ 0 \le t \le 3$,

9) $y = e^x + 26,\ 0 \le x \le ln\sqrt{2}$,

10) $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right),\ 0 \le x \le 4$,

11) $y = \arcsin e^{-x},\ 0 \le x \le 1$,

12) $x = t^2,\ y = t + \frac{1}{3}t^3, z = t - \frac{1}{3}t^3,\ 0 \le t \le \sqrt{3}$,

13) $y^2 = (x-1)^3\ \ 2 \le x \le 5$, 14) $y^3 = x^2,\ y = \sqrt{2 - x^2}$,

15) $9y^2 = x(3-x)^2$, 16) $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$,

17) $y = \ln(1 - x^2),\ \ 0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Çalışma 10. Səthlərlə məhdud olan cismlərin həcmini hesablayın.

1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3}x,\ z = 0$,

2) $z = x^2 + 4y^2,\ z = 2$, 3) $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2},\ z = 0$,

4) $z = x^2 + 2y^2,\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 6,$

5) $z = x^2 + 5y^2, z = 5,$

6) $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x = 2, x = 3$

7) $z = 2x^2 + 18y^2,\ z = 5,$ 8) $z = 4 - y^2, x = a$

9) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{100} = 1,\quad z = -1, z = 1$

10) $z = 2x^2 + 8y^2,\ z = 4,$

11) $x^2 + y^2 = x,\ z^2 = 1 - x,$

12) $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + z^2 = 1,$

13) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = x,$

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ 15) $x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2,$

16) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,\ z = -1,\ z = 2,$

17) $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$

Çalışma 11. Əyrilərin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

1) $y = tgx,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4},$ 2) $9y^2 = x(3-x)^2,$

3) $y = (x-2)^3, 2 \le x \le 8,$ 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

5) $y = \sin 2x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$ 6) $y = x,\ -\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3},$

7) $4x^2 + y^2 = 4,$ 8) $y^2 = 4 + x,\ 0 \le x \le 2,$

9) $y = tgx,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$,

10) $y = x\sqrt{x}, 0 \le x \le 1$,

11) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

12) $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$,

13) $y = x^2, x = y^2$,

14) $y = a\sqrt{\cos 2\varphi}$,

15) $y = x^3, 0 \le x \le 1$

16) $y^2 = 4x,\ 0 \le x \le 3$,

17) $y = \frac{1}{3}x^3,\ 0 \le x \le 2$.

Çalışma 12. Əyrilərin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cisimlərin həcmlərini tapın.

1) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$,

2) $y^2 = 4x,\ 0 \le x \le 3$,

3) $y = xe^x,\ y = 0,\ x = 1$,

4) $y = \arcsin x, 0 \le x \le 1$,

5) $y^2 = (x-1)^3, 1 \le x \le 2$,

6) $y^2 = x,\ x^2 = y$,

7) $y = e^x\sqrt{x},\ y = 0,\ 0 \le x \le 1$,

8) $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$,

9) $y = x^2 + 1,\ y = 3x - 1$,

10) $(y-3)^2 + 3x = 0, -3 \le x \le 0$,

11) $y = \sqrt{2x}, y = 2\sqrt{(x-1)^3}, 1 \le x \le 2$,

12) $y = \frac{1}{2}x^2, 2x + 2y - 3 = 0$,

13) $y = e^{-2x} - 1,\ y = e^{-x} + 1,\ x = 0$,

14) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ 0 \le t \le \pi$,

15) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$,

16) $y = 4 - x^2, y = 0$,

17) $xy = 4,\ y = 0,\ 1 \le x \le 4$.

Çalışma 13. Birinci növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}$, 2) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^5}$, 3) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+16}$,

4) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$, 5) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x}}$, 6) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-5x}\cos 4x dx$,

7) $\int\limits_{0}^{\infty}x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$, 8) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$, 9) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$,

10) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}$, 11) $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x}dx$, 12) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$,

13) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$, 14) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$, 15) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\sin xdx$

16) $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx$, 17) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Çalışma 14. Birinci növ qeyri-məxsusi inteqralların yığılıb və ya dağılmasını araşdırın.

1) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^3+x+1}$, 2) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, 3) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$,

4) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\sqrt{x}dx$, 5) $\int\limits_{5}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$, 6) $\int\limits_{0}^{\infty}x^2\cos xdx$,

7) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\ln(x+1)dx$, 8) $\int\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$, 9) $\int\limits_{1}^{\infty}x\cos xdx$,

10) $\int\limits_{1}^{\infty}x^{-2}e^{-x^2}dx$, 11) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$, 12) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$,

13) $\int_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$, 14) $\int_0^{\infty}x\cos xdx$, 15) $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(\ln x)}$,

16) $\int_0^{\infty}x\sin xdx$, 17) $\int_0^{\infty}x^2\cos xdx$.

Çalışma 15. İkinci növ qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın.

1) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$, 2) $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$, 3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,

4) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$, 6) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$,

7) $\int_0^1\frac{dx}{x-\sin x}$, 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$, 9) $\int_1^3\frac{dx}{(x-1)^2}$,

10) $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, 11) $\int_0^1 x\ln xdx$, 12) $\int_{-1}^0 x^{-3}e^{\frac{1}{x}}dx$,

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$, 14) $\int_0^1\sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx$, 15) $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$,

16) $\int_1^2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$, 17) $\int_{-1}^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Nümunəvi həllər

1) $\int(3x^2-2\sin x+\frac{1}{2}\sqrt{x})dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int(3x^2-2\sin x+\frac{1}{2}\sqrt{x})dx=3\int x^2dx-2\int\sin xdx+$$

$$+\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx=x^3+2\cos x+\frac{1}{3}x\sqrt{x}+c.$$

2) $\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $t=\frac{1}{x},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\int t^2e^t\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int e^tdt=-e^t+c=e^{-\frac{1}{x}}+c.$$

3) $\int x\sin xdx$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$u=x,\ du=dx,\ dv=\sin xdx,\ v=-\cos x$ qəbul etsək alarıq:

$$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+c.$$

4) $\int\frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$t=x+2,\ dx=dt$ əvəzləməsini aparsaq alarıq:

$$\int\frac{x+3}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{x+2+1}{(x+2)^2+1}dx=\int\frac{t+1}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+arctgt+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+arctg(x+2)+c.$$

5) $\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ inteqralını hesablayın.

Həlli: İnteqralaltı funksiyanı sadə kəsrlərə ayıraq.

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

sağ tərəfi ortaq məxrəcə gətirək və surətləri bərabərləşdirək:

$$x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

Eyniliyin hər iki tərəfindəki eyni dərəcəli x-lərin əmsallarını bərabərləşdirməklə

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=4 \\ A=4 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alarıq. Buradan taparıq ki,

$$A=4, \quad B=-3, \quad C=9.$$

Beləliklə,

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\right)dx=4\ln|x|-$$

$$-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$$

6) $\int\frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $1+x=t^2$, $dx=2tdt$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\int\frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}=\int\frac{2tdt}{(4+t^2)t}=2\int\frac{dt}{4+t^2}=arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=arctg\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C.$$

7) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $t=tgx$, $dt=dtgx=\frac{dx}{\cos^2 x}$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + tg^2 x) dtgx = \int (1 + t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + t + C = \frac{1}{3} tg^3 x + tgx + C.$$

8) $\int \cos 2x \sin 4x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int \cos 2x \sin 4x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

9) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli: Nyuton-Leybnis düsturuna əsasən, alarıq:

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

10) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $\ln x = t$ əvəzləməsini aparsaq, onda $\frac{dx}{x} = dt$, $x = 1$ olduqda $t = 0$ və $x = e$ olduqda isə $t = 1$ olar.

Beləliklə,

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

11) $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-x} dx,\ v = -e^{-x}$ qəbul etsək, hissə-hissə inteqrallaına düsturuna əsasən, alarıq:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

12) $y = \sin x$ əyrisi və Ox oxunun $0 \le x \le 2\pi$ parçası ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli: $0 \le x \le \pi$ parçasında $\sin x \ge 0$ və $\pi \le x \le 2\pi$ parçasında $\sin x \le 0$ olduğuna görə alarıq:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - \left(-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 2 + 2 = 4.$$

13) $x = a\cos t, y = b\sin t$ ellipsi ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli:

Ellipsin birinci kvadratda sahəsini hesablayıb sonra 4-ə vurmaq lazımdır. Burada x-dəyişəni 0 ilə a arasında dəyişdikdə, t parametri $\frac{\pi}{2}$ ilə 0 arasında dəyişər. Beləliklə,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt =$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

14) $x = R\cos t,\ y = R\sin t$ çevrəsinin uzunluğunu hesablayın.

Həlli:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$R\int_{0}^{2\pi}dt=Rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

15) $y^2=x^3$ yarımkubik parabolasının koordinat başlanğıcından $(1,1)$ nöqtəsinə qədər uzunluğunu hesablayın.

Həlli: $y=x^{\frac{3}{2}}$, $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ olduğuna görə alarıq:

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

16) Mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu R olan kürənin həcmini hesablayın.

Həlli: Belə kürə, tənliyi $y=+\sqrt{R^2-x^2},-R\le x\le R$ olan R radiuslu yarımçevrənin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınır. Beləliklə,

$$V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

17) $y^2=2x$ parabolasının Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan paraboloidin $0\le x\le 4$ parçasına uyğun hissəsinin sahəsini hesablayın.

Həlli: $y=\sqrt{2x}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}$ olduğuna görə alarıq:

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^4\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx=$$

$$=\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx=2\pi\cdot\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2\pi}{3}(27-1)=17\frac{1}{3}\pi.$$

18) $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ çevrəsinin birinci kvadratında yerləşən qövsünün ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Burada

$$l=\frac{\pi a}{2},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ x_t'=-a\sin t,\quad y_t'=a\cos t$$

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a\,dt$$

olduğuna görə alırıq:

$$x_c=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dl=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\,dt=\frac{2a}{\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a}{\pi}$$

$$y_c=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\,dl=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin t\cdot a\,dt=-\frac{2a}{\pi}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a}{\pi}.$$

19) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ ellipsinin birinci kvadratda yerləşən qövsü ilə məhdud olan fiqurun ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Həlli:

$$S=\frac{1}{4}\pi ab,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\quad x_t'=-a\sin t,\ y_t'=b\cos t$$

olduğuna görə alırıq:

$$x_c = \frac{1}{s}\int_a^b xydx = \frac{4}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos t \cdot b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= \frac{4a^2b}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t dt = \frac{4a}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{1}{2S}\int_0^b y^2 dx = \frac{2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)d\cos t = \frac{2b}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4b}{3\pi}.$$

20) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2} = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

21) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ inteqralının yığılmasını araşdırın.

Həlli: $\alpha \neq 1$ olduqda $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$ olduğundan $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$. Beləliklə,

$\alpha > 1$ olduqda $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$, yə'ni inteqral yığılır.

$\alpha < 1$ olduqda $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, yə'ni inteqral dağılır.

$\alpha = 1$ olduqda $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$, inteqral dağılır.

22) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$
$$= -2\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - 1\right) = 2.$$

23) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ inteqralın yığılmasını araşdırın.

Həlli: $\alpha \neq 1$ olduqda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} (b-x)^{1-\alpha}\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{\alpha - 1} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}.$$ Beləliklə,

$\alpha < 1$ olduqda, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$ olduğuna görə

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$$, yə'ni inteqral yığılır. $\alpha > 1$ olduqda

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = \infty$ olduğuna görə $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \infty$, yə'ni inteqral dağılır. $\alpha = 1$ olduqda isə

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon + \ln(b-a) = \infty,$$

inteqral dağılır.

24) Çalışma 1-ni 13-cü misalınm həlli: u=arctgx, $du = \frac{1}{1+x^2}, dV = x, V = \frac{x^2}{2}$ qəbul etsək alarıq:

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{x}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + c = \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{x}{2} + c$$

25) Çalışma 1-in 15-ci misalının həlli:

$$u = 5-3x, du = -3dx, dV = cos\,5x, V = \frac{1}{5}sin\,5x$$

qəbul etsək alarıq:

$$\int(5-3x)cos\,5xdx = \frac{5-3x}{5}sin\,5x + \frac{3}{5}\int sin\,5xdx =$$

$$= \frac{5-3x}{5}sin\,5x - \frac{3}{25}cos\,5x + c$$

26) Çalışma 2-nin 8-ci misalının həlli:

$u = 5 - 7x^2, du = -14x, dV = \cos x dx, V = \sin x$ qəbul etsək alarıq:

$$\int_0^{2\pi} (5-7x^2)\cos x dx = (5-7x^2)\sin x \Big|_0^{2\pi} + 14\int_0^{2\pi} x \sin x dx =$$

$$=-14\int_0^{2\pi} x d\cos x = -14x\cos x \Big|_0^{2\pi} + 14\int_0^{2\pi} \cos x dx = -28\pi +$$

$$+14\sin x \Big|_0^{2\pi} = -28\pi.$$

27) Çalışma 2-nin 15-ci misalının həlli:

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^{e^2} \ln^2 x d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x \Big|_1^{e^2} = \frac{8}{3}$$

28) Çalışma 3-ün 5-ci misalının həlli:

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} arctgx^2 + c$$

29) Çalışma 3-ün 14-cü misalının həlli:

$$\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} = \int \frac{d(2\sin x - 3\cos x)}{(2\sin x - 3\cos x)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2(2\sin x - 3\cos x)^2} + c$$

30) Çalışma 4-ün 11-ci misalının həlli:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{dx}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+c$$

31) Çalışma 4-ün 13-cü misalının həlli:

$$x^2=t, 2xdx=dt, xdx=\frac{1}{2}dt$$

əvəz etsək alarıq:

$$\int\frac{(2x^2+3)xdx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+3)dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}ln(t^2+t+1)+$$

$$+\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}ln(t^2+t+1)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=\frac{1}{2}ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+c$$

32) Çalışma 5-in 1-ci misalının həlli:

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}=\int(x+\sqrt{x^2-1})dx=\frac{x^2}{2}+\int\sqrt{x^2-1}dx=$$

$=\frac{x^2}{2}+y$, burada $y=\int\sqrt{x^2-1}dx$. y-ni hissə-hissə inteqrallasaq alarıq:

$$y=\int\sqrt{x^2-1}dx=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\sqrt{x^2-1}-$$

$$-\int\sqrt{x^2-1}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=x\sqrt{x^2-1}-y+ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Buradan $2y=x\sqrt{x^2-1}+ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

Beləliklə,

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$

33) Çalışma 5-in 15-ci misalının həlli:

$\sqrt{x^2+1}=t$ əvəz etsək alarıq $x^2=t^2-1, xdx=tdt$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{(t^2-1)tdt}{t}=\int(t^2-1)dt=t\left(\frac{t^2}{3}-1\right)+c=$$

$$=\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}+c.$$

34) Çalışma 6-nın 4-cü misalının həlli:

x=sin$t$ əvəz edək. Onda dx=2cos$t$dt, x=0 olduqda, t=0, x=2 olduqda t=$\frac{\pi}{2}$. Beləliklə,

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4sin^2t}\,2cos\,tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2tdt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0)=\pi$$

35) Çalışma 6-nın 11-ci misalının həlli:

x=cost əvəz edək. Onda dx=-sintdt, x=0 olduqda $t=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduqda $t=\frac{\pi}{4}$. Beləliklə,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}(-\sin t)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}ctg\frac{t}{2}(-\sin t)dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos t)dt=(1+\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

36) Çalışma 7-nin 2-ci misalının həlli:

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

əsasən alarıq:

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) + (0-(-1)) = 2\,.$$

37) Çalışma 7-nin 4-cü misalının həlli:
$t=\sin x$ əvəz edək. Onda $dt=\cos x dx$, $x=0$ olduqda $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ olduqda $z=1$. Beləliklə,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = ln\frac{t-3}{t-2}\Big|_0^1 = ln\frac{4}{3}\,.$$

38) Çalışma 8-ni 3-cü misalının həlli:
$x^2 = \frac{x^3}{3}$ tənliyinin həll edərək funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini taparıq: $x_1=0$, $x_2=3$. Onda

$$S = \int_0^3 (x^2 - \frac{x^3}{3})dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 - \frac{x^4}{12}\Big|_0^3 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}\,.$$

39) Çalışma 8-nin 8-ci misalının həlli:
Tsikloidin bir qövsü və Ox oxu ilə hüdüdlanmış sahə

$$S = \int_\alpha^\beta \Psi(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt =$$

$$= a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2 \text{ olar.}$$

40) Çalışma 9-un 1-ci misalının həlli:
$y'=(2+\ln\cos x)'=-tgx$. Onda

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+tg^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=$$

$$=ln\left|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=ln\left|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})\right|-ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=$$

$$=ln\,tg\frac{\pi}{3}-ln1=ln\sqrt{3}.$$

41) Çalışma 9-un 13-cü misalın həlli:

$$y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}},\ y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.\text{ Onda}$$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\approx 7{,}63.$$

42) Çalışma 10-un 6-cı misalının həlli:
Kürənin mərkəzindən x məsafədə olan nöqtədən keçən və Ox oxuna perpendikulyar müstəvi ilə kəsiyin radiusu $r=\sqrt{16-x^2}$ olan dairə olar. Dairənin sahəsi $S(x)=\pi(16-x^2)$ olduğuna görə alırıq:

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_2^3(16-x^2)dx=\pi(16x-\frac{x^3}{3})\Big|_2^3=$$

$$=\pi(39-\frac{88}{3})=\frac{29\pi}{3}.$$

43) Çalışma 10-un 14-cü misalının həlli:
Ellinsoidin mərkəzindən x məsafədə olan nöqtədən keçən və Ox oxuna perpendikulyar müstəvi ilə kəsdiyi yarım oxları.

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ və } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

olan ellinis olar. Kəsiyin sahəsi

$$S(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a}}=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2}),-a\le x\le a$$

olduğuna görə alarıq:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi bc(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

44) Çalışma 11-in 5-ci misalının həlli:
$y'=2\cos 2x$. Onda

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}dx$$

Əvəzləmə aparaq: $2\cos 2x=t,-4\sin 2xdx=dt,$

$\sin 2xdx=-\frac{1}{4}dt, x=0$ olduqda, t=2, x=$\frac{\pi}{2}$ olduqda t=-2.

Beləliklə,

$$S=2\pi\int_{2}^{-2}\sqrt{1+t^2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dt=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}ln(t+\sqrt{1+t^2}\,)\right]\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+ln(\sqrt{5}+2)\right).$$

45) Çalışma 11-in 15-ci misalın həlli:

$y'=3x^2, \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+9x^4}$, beləliklə,

$$S=2\pi\int_{0}^{1}x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx=\frac{\pi}{27}\sqrt{1+9x^4}\,\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

46) Çalışma 12-nin 1-ci misalının həlli:

Burada $y^2=a^2 sin^6 t, dx=-3asintdt, x=0$ olduqda $t=\frac{\pi}{2}, x=a$ olduqda t=0 olduğundan alırıq:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=2\pi\int_{0}^{a}y^2dx=$$

$$=-6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}sin^6 t\,cos^2 t dt=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-cos^2 t)^3 d\,cos\,t=$$

$$=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t-3\cos t^4+3\cos^6 t-\cos^8 t)d\cos t=$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}cos^3 t-\frac{3}{5}cos^5 t+\frac{3}{7}cos^7 t-\frac{1}{9}cos^9 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

47) Çalışma 12-nin 12-ci misalının həlli:

$2x+x^2-3=0, x_1=-3, x_2=1$ olduğuna görə alarıq:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y_1^2dx-\pi\int_{x_1}^{x_2} y_2^2dx=\pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 dx-\frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1}x^4dx=$$

$$=\frac{\pi(x-\frac{3}{2})^3}{3}\Big|_{-3}^{1}-\frac{\pi}{5}x^5\Big|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}\pi-\frac{61}{5}\pi=18\frac{2}{15}\pi.$$

48) Çalışma 13-un 2-ci misalının həlli:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^5}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-5}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)\Big|_2^b=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}b^{-4}-\frac{1}{-4}2^{-4}=\frac{1}{64}$$

49) Çalışma 13-ün 9-cu misalının həlli:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1$$

50) Çalışma 14-ün 2-ci misalının həlli:

İnteqralaltı funksiya (-1,∞) aralığında kəsilməzdir. Onda

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b}-1)=2(\infty-1)=\infty.$$

51) Çalışma 14-ün 14-cü misalının həlli:
$u = x, du = dx, dv = \cos x dx, v = \sin x$ işarə etsək hissə-hissə inteqrallama düsturuna əsasən alarıq:

$$\int_0^{\infty} x\cos x dx = \lim_{b\to\infty} x\int_0^b x\cos x dx = \lim_{b\to\infty}\left(x\sin x \Big|_0^b - \int_0^b \sin x dx \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (x\sin x + \cos x) \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (b\sin b + \cos b + 1).$$

Limit olmadığına görə inteqral dağılır.
52) Çalışma 15-in 1-ci misalının həlli:
İnteqraltı funksiya $x=1$ nöqtəsində kəsilir. Lakin onun ibtidai funksiyası $F(x)=\sqrt{x^2-1}$ (1,2) parçasında kəsilməzdir. Onda Nyuton-Leybnis düsturna əsasən alarıq:

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}.$$

53) Çalışma 15-in 9-cu misalının həlli: Tərifə görə

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^3 =$$

$$=-\left(\frac{1}{2} - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty.$$ İnteqral dağılır.

VIII FƏSİL

Çoxdəyişənli funksiyalar

Çalışma 1. Funksiyaların xüsusi törəmələrini tapın.

1) $z = \frac{y}{x}$, 2) $z = \frac{xy}{x-y}$, 3) $z = arcctg\frac{y}{x}$,

4) $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, 5) $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$, 6) $z = x^y$,

7) $z = ln(x + x^2 + y^2)$, 8) $z = xe^{-yx}$, 9) $z = \ln tg\frac{x}{y}$,

10) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$, 11) $z = xy\ln(x+y)$, 12) $z = (1+xy)^y$,

13) $z = \ln(x + \ln y)$, 14) $z = e^{-\frac{x}{y}}$, 15) $z = \arcsin x\sqrt{y}$,

16) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$, 17) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

***Çalışma* 2.** Funksiyaların tam diferensialını tapın.

1) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$, 2) $z = \frac{x+y}{x-y}$,

3) $z = \arcsin\frac{x}{y}$, 4) $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,

5) $z = arctgxy$, 6) $z = x^2y^3$,

7) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, 8) $z = \sqrt[3]{x+y^2}$,

9) $z = \sqrt{\ln xy}$, 10) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$,

11) $z = \frac{xy}{x-y}$, 12) $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$,

13) $z = xy\ln xy,$ 14) $z = x^2 + xy + y^2,$

15) $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4.$ 16) $z = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right),$

17) $z = \sin xy.$

Çalışma 3. Funksiyaların $\frac{dz}{dt}$ törəmələrini tapın.

1) $z = x^2 + xy + y^2, x = t^2, y = t,$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x = \sin t, y = \cos t,$

3) $z = \frac{y}{x}, x = e^t, y = 1 - e^{2t},$

4) $z = x^2e^y, x = \sin t, y = \cos t,$

5) $z = y\ln 2x, x = t^3, y = 2 - t^2,$

6) $z = \arcsin xy, x = t, y = e^t,$

7) $z = tgy(3t + 2x^2 - y), x = \frac{1}{t}, y = \sqrt{t},$

8) $z = \arccos(x + y), x = 3t, y = 4t^3,$

9) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3\cos t,$

10) $z = \ln(e^x + e^y), x = t^2, y = t^3,$

11) $z = x^2y^3, x = t, y = t^2,$

12) $z = x^2 - y^2, x = t\cos t, y = t^2\sin t,$

13) $z = x^y, x = t^2, y = 2 - t,$

14) $z = \frac{x}{y}, x = 1 - e^t, y = e^t,$

15) $z = xe^y, x = t^2, y = 1 + e^t,$

16) $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3,$

17) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3.$

Çalışma 4. Qeyri-aşkar şəkildə verilən funksiyaların $\frac{dy}{dx}$ törəmələrini tapın.

1) $x^2+y^2-4x+6y=0$, 2) $xe^{2y}-ye^{2x}=0$,

3) $x^2+y^2-10y=0$, 4) $x^3+y^3-2axy=0$,

5) $x^2y^2-x^4-y^4=a^4$, 6) $xy-\ln y=0$,

7) $yx^2=e^y$, 8) $ye^x+e^y=0$,

9) $e^x-xy=0$, 10) $x^2-4y^2-4=0$,

11) $xy+\ln xy=0$, 12) $y+x=e^{\frac{y}{x}}$,

13) $2\cos(x-2y)=2y-x$, 14) $2\sin(x+2y)=x-2y$,

15) $x^4+3x^2y^2-2y^2+5=0$, 16) $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$,

17) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Çalışma 5. Funksiyaların d^2z ikitərtibli diferensialını tapın.

1) $z=x^2y-xy^2+3$, 2) $z=\frac{x}{y}e^{xy}$,

3) $z=xy-\frac{y}{x}$, 4) $z=x-3\sin y$,

5) $z=\frac{x}{x+y}$, 6) $z=\left(\frac{y}{x}\right)^x$,

7) $z=y\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}$, 8) $z=arctg\sqrt{xy}$,

9) $z=arctg\frac{y}{x}$, 10) $z=e^{-\frac{y}{x}}$,

11) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 12) $z=y^{\ln x}$,

13) $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$, 14) $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

15) $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, 16) $z=x\sin^2 y$,

17) $z=e^{xy}$.

Çalışma 6. Təqribi hesablayın.

1) $(0{,}96)^2(1{,}02)^3$, 2) $(0{,}98)^{1{,}05}$, 3) $1{,}03\cdot 9{,}98$,

4) $\sqrt{12+(2{,}02)^2 tg44^0}$, 5) $\sqrt[3]{(2{,}01)^3+117{,}1}$,

6) $(6{,}03)^3\sin 29^0$, 7) $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$,

8) $(1{,}04)^{2{,}02}$, 9) $arctg\left(\frac{1{,}02}{0{,}95}\right)$,

10) $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}}$, 11) $1{,}02^{4{,}05}$,

12) $\ln\left((0{,}09)^3+(0{,}99)^3\right)$, 13) $\sqrt[3]{1{,}02^2+0{,}05^2}$,

14) $\sqrt{5e^{0{,}02}+(2{,}03)^2}$, 15) $\sqrt{(1{,}04)^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$,

16) $(1{,}08)^{3{,}96}$, 17) $\frac{\sin 1{,}49 arctg 0{,}07}{(2)^{2{,}95}}$.

Çalışma 7. Funksiyaların ekstremumlarını tapın.

1) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$, 2) $z=xy^2(1-x-y)$,

3) $z=x^3+y^3-15xy$, 4) $z=4-\sqrt{(x^2+y^2)^3}$,

5) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$, 6) $z=(x+y)e^{-(x+y)}$,

7) $z=2xy-4x-2y$, 8) $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$,

9) $z=x^3+8y^3-6xy-5$, 10) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y+3$,

11) $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$, 12) $z = (x-y)^2 + (y-1)^2$,

13) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$, 14) $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$,

15) $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$,

16) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$, 17) $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

Çalışma 8. Funksiyaların şərti ekstremumlarını tapın.

1) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x + y = 2$ olduqda,

2) $z = x + y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ olduqda,

3) $z = xy$, $2x + 3y - 5 = 0$ olduqda,

4) $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ olduqda,

5) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ olduqda,

6) $z = 2xy$, $x^2 + y^2 \le 1$ olduqda,

7) $z = arctg(x^2 - xy + y), [-2 \le x \le 2, -3 \le y \le 3]$ olduqda,

8) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \left[0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda,

9) $z = \cos x \cos y \cos(x+y)$, $[0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi]$ olduqda,

10) $z = x^2 + y^2$, $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \le 9$ olduqda,

11) $z = x^2 + y^2$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1$ olduqda,

12) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$ olduqda,

13) $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $y^2 \le x \le 2$ olduqda,

14) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$, $x^2+y^2 \le 4$, olduqda,

15) $z = x^2+3y^2-x+18y-4$, $0 \le x \le y \le 4$ olduqda,

16) $z = xy$, $x^2+y^2=8$ olduqda,

17) $z = e^{xy}$, $x+y=1$ olduqda.

Nümunəvi həllər

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyasının tə'yin oblastını tapın.

Həlli:

Bu funksiyanın tə'yin oblastı mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid radiuslu qapalı dairə, yə'ni $x^2+y^2 \le 1$ şərtini ödəyən (x,y) nöqtələri çoxluğudur.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ limitini hesablayın.

Həlli:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{xy+1}+1\right) = 2.$$

3) $z = x^2+y^2$ funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın.

Həlli: Bu funksiya (x,y) dəyişənlərinin bütün qiymətlərində kəsilməzdir. Doğrudan da istənilən x və y, Δx və Δy üçün

$$\Delta z = \left((x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2\right) - \left(x^2+y^2\right) = 2x\Delta x + 2y\Delta y +$$
$$+\Delta x^2 + \Delta y^2.$$

olar. Deməli,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 .$$

4) $z = \dfrac{1}{x-y}$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrini tapın.

Həlli: Bu funksiya $y = x$ düz xətti üzərindəki nöqtələrdən başqa hər yerdə tə'yin olunmuşdur. Buna görə də funksiya $y = x$ düz xətti üzərində kəsilir.

5) $z = arctg\dfrac{y}{x}$ funksiyasının xüsusi törəmələrini tapın.

Həlli:

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

6) $z = e^{x^2+y^2}$ funksiyasının tam diferensialını tapın.

Həlli:

$$z'_x = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$z'_y = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

olduğundan

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 2xe^{x^2+y^2}dx + 2ye^{x^2+y^2}dy =$$
$$= 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$$

7) $z = e^{x-2y}$, burada $x = \sin t$, $y = t^3$. z'_t tapın.

Həlli:

$$z'_x = e^{x-2y}(x-2y)'_x = e^{x-2y},$$

$$z'_y = e^{x-2y}(x-2y)'_y = -2ye^{x-2y}$$

$$x'_t = \cos t,\ y'_t = 3t^2$$

olduğundan

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t = e^{x-2y}\cos t - 2ye^{x-2y}\cdot 3t^2 =$$

$$= e^{x-2y}(\cos t - 6yt^2) = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^5).$$

8) $z = x^2 y$ funksiyasının ikitərtibli diferensialını tapın.

Həlli:

$$z'_x = 2xy,\ z''_{xx} = 2y,\ z'_y = x^2,\ z''_{yy} = 0,\ z''_{xy} = 2x$$

olduğundan

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = 2ydx^2 + 4xdxdy +$$

$$+ 0\cdot dy^2 = 2(ydx^2 + 2xdxdy).$$

9) $1{,}02^{3{,}05}$ ədədini təqribi hesablayın.

Həlli: $z = x^y$ funksiyasına baxaq. Tam diferensialın təqribi hesablamalara tətbiqi düsturuna görə

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + (x^y)'_x\Delta x + (x^y)'_y\Delta y = x^y + yx^{y-1}\Delta x +$$

$$+ x^y \ln x \cdot \Delta y$$

Tutaq ki, $x = 1$, $y = 3$, onda, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}05$ olur. Beləliklə,

$1{,}02^{3{,}05} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}02 + 1^3\cdot \ln 1\cdot 0{,}05 = 1 + 0{,}06 + 0 = 1{,}06$.

10) $M(1{,}1)$ nöqtəsində $z = x^2 - y^2$ funksiyasının qradiyentini tapın.

Həlli:

$$z'_x = 2x,\ z'_y = -2y,\ (z'_x)_M = 2,\ (z'_y)_M = -2$$

olduğundan

$$grad z = 2\bar{i} - 2\bar{j} = 2(\bar{i} - \bar{j}).$$

11) $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ funksiyasının $M(3,1)$ nöqtəsində, həmin nöqtədən $N(6,5)$ nöqtəsinə yönəlmiş istiqamət üzrə törəməni tapın.

Həlli: $\overline{MN}$ vektorunu və onun yönəldici kosinuslarını tapaq:

$$\overline{MN} = (6-3)\bar{i} + (5-1)\bar{j} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}.$$

Xüsusi törəmələrin $M(3,1)$ nöqtəsində qiymətlərini hesablayaq:

$$z'_x = 3x^2 - 6xy + 3y^2, \; z'_y = -3x^2 + 6xy$$

$$(z'_x)_M = 27 - 6\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot 1 = 12,$$

$$(z'_y)_M = -27 + 6\cdot 3\cdot 1 = -9$$

İstiqamətə görə törəmə düsturunda

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (z'_x)_M \cos\alpha + (z'_y)_M \cos\beta$$

bu qiymətləri yerinə yazaq.

$$\frac{\partial z}{\partial e} = 12\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}(-9) = \frac{36-36}{5} = 0.$$

12) $\sin(x+y) + xy = 0$ verilmişdir. y'-i tapın.

Həlli: $F(x,y) = \sin(x+y) + xy$ işarə edək. Onda

$F'_x = \cos(x+y) + y, \quad F'_y = \cos(x+y) + x$ olduğundan

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + \cos(x+y)}{x + \cos(x+y)}.$$

13) $e^z - xyz = 0$ verilmişdir. z'_x, z'_y tapın.

Həlli:

$F(x,y,z) = e^z - xyz$ işarə edək. Onda $F'_x = -yx$, $F'_y = -xz$,

$F'_z = e^z - xy$ olduğundan

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{x(z-1)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

14) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ verilmişdir. y' və y'' tapın.

Həlli: $F(x,y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$ işarə edək. Onda

$$F'_x = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$$

$$F'_y = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$$

olduğundan

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\dfrac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}} = -\frac{y}{x}$$

və

$$y'' = \left(-\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{xy' - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\dfrac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

15) $xyz - x - y - z = 0$ verilmişdir. dz-i tapın.

Həlli: $F(x,y,z) = xyz - x - y - z$ işarə edək. Onda

$$F'_x = yz - 1,\quad F'_y = xz - 1,\quad F'_z = xy - 1$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz-1}{xy-1},\qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz-1}{xy-1}$$

olduğundan

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1}{1-xy}\big((yz-1)dx + (xz-1)dy\big)$$

16) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ verilmişdir. y'_x və z'_x tapın.

Həlli: y'_x və z'_x tapmaq üçün bu sistemi x-ə nəzərən diferensiallayaq:

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x=0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x=0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} y'_x+z'_x=-1 \\ yy'_x+zz'_x=-x \end{cases}$$

Buradan alarıq:

$$y'_x=\frac{z-x}{y-z}, \qquad z'_x=\frac{y-x}{z-y}, \qquad y\neq z.$$

17) $z=x^3+y^3-3xy$ funksiyasının maksimum və minimumunu tapın.

Həlli: Böhran nöqtələrini tapaq.

$$z'_z=3(x^2-y)=0, \quad z'_y=3(y^2-x)=0, \quad z''_{xy}=z''_{yx}=-3$$

$$\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$$

Buradan $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=1$, $y_2=1$ olar.

İndi böhran nöqtələrinin xarakterini araşdıraq:

$M_1(0,0)$ nöqtəsi üçün

$$A=z''_{xx}\big|_{M_1}=0, \; B=z''_{xy}\big|_{M_1}=-3, \; C=z''_{yy}\big|_{M_1}=0,$$

$$\Delta=AC-B^2=-9<0$$

olduğundan həmin nöqtədə funksiyanın ekstremumu yoxdur.

$M_2(1,1)$ nöqtəsi üçün

$$A=z''_{xx}\big|_{M_2}=6, \quad B=z''_{xy}\big|_{M_2}=-3, \; C=z''_{yy}\big|_{M_2}=6,$$

$$\Delta=6\cdot 6-9=27>0$$

olduğundan həmin nöqtədə funksiyanın minimumu var:

$$\min z=z\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=1+1-3=-1.$$

18) $z = x + y$ funksiyasının $x^2 + y^2 = 4$ şərtində ekstremumunu tapın.

Həlli: Laqranj funksiyasını quraq.

$$F(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

və onun böhran nöqtələrini tapaq:

$$F'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \qquad F'_y = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

sistemini həll edərək.

$x_1 = -2,\ y_1 = -2,\ \lambda_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = 2,\ y_2 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{4}$ alarıq.

$F''_{xx} = 2\lambda,\ F''_{xy} = 0, F''_y = 2\lambda$ olduğundan

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

$\lambda_1 = \frac{1}{4}$ olduqda $d^2F > 0$ olar və bu halda $M_1(-2,-2)$ nöqtəsində funksiyanın şərti minimumu var:

$$\min z = z|_{\substack{x_1=-2 \\ y_1=-2}} = -2 - 2 = -4$$

$\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ olduqda $d^2F < 0$ olar və bu halda $M_2(2,2)$ nöqtəsində funksiyanın şərti maksimumu var:

$$\min z = z|_{\substack{x_2=2 \\ y_2=2}} = 2 + 2 = 4$$

19) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ funksiyasının $x^2 + y^2 \le 25$ dairəsində ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapaq.

Həlli: Böhran nöqtələrini tapaq.

$$z'_x = 2x - 12 = 0,\ z'_y = 2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

buradan $x=6,\ y=-8$ alarıq.

(6,–8) böhran nöqtəsi $x^2+y^2\le 25$ dairəsinə daxil deyil. Bu halda funksiya ən böyük və ən kiçik qiymətlərini $x^2+y^2=25$ çevrəsi üzərində alar.

Laqranj funksiyasını quraq.

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

və onun böhran nöqtələrini tapaq.

$$F'_x=2x-12+2\lambda x=0,\qquad F'_y=2y+16+2\lambda y=0$$

$$\begin{cases}2x-12+2x=0\\ 2y+16+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=25\end{cases}$$

sistemini həll edərək

$x_1=3,\ y_1=-4,\ \lambda_1=1;\ x_2=-3,\ y_2=4,\ \lambda_2=-3$ alarıq.

Şərti ekstremum üçün tapdığımız $M_1(3,-4)$ və $M_2(-3,4)$ nöqtələrində funksiyanın qiymətlərini hesablayaq.

$$z\Big|_{\substack{x=3\\ y=-4}}=9+16-36-64=-75$$

$$z\Big|_{\substack{x=-3\\ y=4}}=9+16+36+64=125$$

Deməli, funksiyanın ən böyük qiyməti 125 və ən kiçik qiyməti –75 olar.

20) Çalışma 1-in 6-cü misalının həlli:
Burada

$$z'_x=(x^y)'_x=yx^{y-1},z'_y=(x^y)'_y=x^y\ln x$$

21) Çalışma 1-in 13-ci misalının həlli:
Burada

$$z'_x=\frac{(x\sqrt{y})'}{\sqrt{1-x^2y}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2y}}=\sqrt{\frac{y}{1-x^2y}},$$

$$z'_y = \frac{(x\sqrt{y})'}{\sqrt{1-x^2y}} = \frac{x\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\sqrt{1-x^2y}} = \frac{x}{2\sqrt{y-x^2y^2}},$$

22) Çalışma 2-nin 6-cı misalının həlli:
Burada

$$z'_x = (x^2y^3)' = 2xy^3, z'_y = (x^2y^3)' = 3x^2y^2$$

Onda

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = xy(2y^2 dx + 3x^2y^2 dy)$$

23) Çalışma 2-nin 9-cü misalının həlli:
Burada

$$z'_x = (\sqrt{ln\,xy})'_x = \frac{(ln\,xy)'}{2\sqrt{ln\,xy}} = \frac{1}{2y\sqrt{ln\,xy}},$$

$$z'_y = (\sqrt{ln\,xy})'_y = \frac{(ln\,xy)'}{2\sqrt{ln\,xy}} = \frac{1}{2x\sqrt{ln\,xy}},$$

Onda

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{dx}{2y\sqrt{ln\,xy}} + \frac{dy}{2x\sqrt{ln\,xy}} = \frac{xdy + ydx}{2xy\sqrt{ln\,xy}}.$$

24) Çalışma 3-ün 4-cü misalının həlli:
Burada

$\frac{dz}{dt} = z'_x x'_t + z'_y y'_t$ düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\frac{dz}{dt} = 2xe^y\cos t - x^2e^y\sin t.$$

25) Çalışma 3-ün 12-ci misalının həlli:
Burada

$\frac{dz}{dt} = z'_x x'_t + z'_y y'_t$ düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\frac{dz}{dt} = 2x(\cos t - t\sin t) - 2y(2t\sin t + t^2\cos t) \text{ və ya}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2(x - ty^2)\cos t - 2x(t + 2y)\sin t\,.$$

26) Çalışma 4-ün 11-ci misalının həlli:
Burada

$$F(x,y) = xy + \ln xy, F'_x = y + \frac{y}{xy} = \frac{xy+1}{x},$$

$$F'_y = \frac{xy+1}{y}, \text{ onda } \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{xy+1}{x}}{\frac{xy+1}{y}} = -\frac{y}{x}.$$

27) Çalışma 4-ün 13-cü misalının həlli:
Burada

$$F(x,y) = 2\cos(x-2y) + x - 2y, \quad F'_x = -2\sin(x-2y) + 1,$$

$$F'_y = 4\sin(x-2y) - 2$$

Onda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-2\sin(x-2y)+1}{4\sin(x-2y)-2} = \frac{1}{2}.$$

28) Çalışma 5-ni 3-cü misalının həlli:
Burada

$$z'_x = y + \frac{y}{x^2}, z''_{xx} = -\frac{2y}{x^3},$$

$$z''_{xy} = 1 + \frac{1}{x^2}, z'_y = x - \frac{1}{x}, z''_{yy} = 0\,.$$

Onda

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = -\frac{2y}{x^3}dx^2 + 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dxdy.$$

29) Çalışma 5-in 10-cü misalının həlli:
Burada

$$z'_x = e^{-\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2},\; z''_{xx} = \left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'\frac{y}{x^2} + e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \left(\frac{y^2}{x^4} - \frac{2y}{x^3}\right)e^{-\frac{y}{x}},$$

$$z''_{xy} = \left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'\frac{y}{x^2} + e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^3}\right)e^{-\frac{y}{x}},$$

$$z'_y = -\frac{1}{x}e^{-\frac{y}{x}},\; y''_{xx} = -\frac{1}{x}\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)' = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}.$$ Onda

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 =$$

$$= \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x^4}\left(\left(y^2 - 2xy\right)dx^2 + 2\left(x^2 - xy\right)dxdy + x^2dy^2\right).$$

30) Çalışma 6-nın 9-cü misalının həlli. Burada $x=1$, $y=1$, $\Delta x=-0,05$,
$\Delta y=0,02$, $z = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$. Onda $z = arctg\frac{y}{x}$

$$\Delta z \approx dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 0,02 + 1\cdot 0,05}{1+1} = 0,035.$$ Uyğun olaraq

$$arctg\left(\frac{1,02}{0,95}\right) = z + \Delta z \approx 0,0785 + 0,035 = 0,82$$

31) Çalışma 6-nın 10-cü misalının həlli. Burada

$$x=\frac{\pi}{2}, y=0, \Delta x=0{,}021, \Delta y=0{,}015, z=\sqrt{sin^2\frac{\pi}{2}+8e^o}=3$$

Onda

$$z=\sqrt{sin^2 x+8e^y} \quad \Delta z\approx dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=$$

$$=\frac{sin\,2x\Delta x+8e^y\Delta y}{2\sqrt{sin^2 x+8e^y}}=\frac{8\cdot 0{,}015}{6}=0{,}02$$

Uyğun olaraq

$$\sqrt{sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}}=z+\Delta z=3+0{,}02=3{,}02\,.$$

32) Çalışma 7-nin 9-cü misalının həlli. Burada

$$z'_x=3x^2-6y=0, z'_y=24y^2-6x=0$$

$x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=1$, $y_2=\frac{1}{2}$.

$$z''_{xx}=6x, z''_{xy}=-6, z''_{yy}=48y$$

$$z''_{xx}(0{,}0)=0, z''_{xy}=-6, z''_{yy}=0$$

$$\Delta z''_{xx}(0{,}0)z''_{yy}(0{,}0)-(z''_{xy})^2=0-36<0$$

olduğuna görə (0,0) nöqtəsində funksiyanın ekstremumu yoxdur.

$$\Delta=z''_{xx}(1,\frac{1}{2})=6, z''_{yy}(1,\frac{1}{2})=24$$

$$\Delta=z''_{xx}(1,\frac{1}{2})z''_{yy}(1,\frac{1}{2})-(z''_{xy}(1,\frac{1}{2}))^2=108>0$$

$z''_{xx}(1,\frac{1}{2})=6>0$ olduğuna görə $(1,\frac{1}{2})$ nöqtəsində funksiyanın minimumu var.

$$z_{min}=z(1,\frac{1}{2})=4$$

33) Çalışma 7-nin 11-ci misalının həlli. Burada

$z'_x = 3x^2 - 3 = 0, z'_y = 2y + 2\sqrt{y^3} = 0$

$x_1=1$, $y_1=0$, $x_2=-1$, $y_2=0$

(1,0) və (-1,0) nöqtələri funksiyanın və onun z'_x, z'_y xüsusi törəmələrinin təyin oblastı ($-\infty<x<\infty, 0\leq y<\infty$) daxilində deyil, onun sərhəddi üzərinə düşürlər. Buna görə də (1,0) və (-1,0) böhran nöqtələri ola bilməzlər. Bu halda da funksiyanın ekstremumu ola bilməz.

34) Çalışma 8-in 3-cü misalının həlli.
$u=xy+\lambda(2x+3y-5)$ Laqranj funksiyasına baxaq. Onda
$z'_x y + 21, z'_y = x + 31$ və

$$\begin{cases} x + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

Sistemindən taparıq ki,

$$\lambda = -\frac{5}{12}, x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{6}.$$

Aydındır kı z=xy funksiyası $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ nöqtəsində ən böyük qiymət alar: $z_{max} = \frac{25}{24}$

35) Çalışma 8-in 10-cü misalının həlli
$u=x^2+y^2+\lambda((x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9)$ Laqranj funksiyasına baxaq. Onda
$u'_x = 2x + 2\lambda(x-\sqrt{2}), u'_y = 2y + 2\lambda(y-\sqrt{2})$ və

$$\begin{cases} x+\lambda(x-\sqrt{2})-0 \\ y+\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9 \end{cases}$$

Sistemindən taparıq ki, $x=y=\frac{5}{2}\sqrt{2}, \lambda=-\frac{5}{3}$ və z=25, $x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda=-\frac{1}{3}$ və z=1. Beləliklə funksiya $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ nöqtəsində ən böyük qiymət alar: $z_{max}=25$. Aydındır ki, funksiya (0,0) nöqtəsində ən kiçik qiymət alar: $z_{min}=0$.

IX FƏSİL

Diferensial tənliklər

Çalışma 1. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0,$

2) $(1+2y)xdx+(1+x^2)dy=0$

3) $xy(1+x^2)y'=1+y^2,$ 4) $e^y(y'+1)=1,$

5) $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dy+ydx=0,$ 6) $(1+e^x)yy'=e^x,$

7) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0,$ 8) $(e^x+3)y'=ye^x,$

9) $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx,$ 10) $y(1+\ln y)+xy'=0,$

11) $y\ln y+xy'=0,$

12) $20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx,$

13) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0,$ 14) $xyy'=1-x^2,$

15) $xy' + y = y^2$,

16) $y' = e^{x+y}$,

17) $y'tgx = 1 + y$.

Çalışma 2. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 2$,

2) $y' = \frac{x + y - 1}{x - 1}$,

3) $y' = \frac{x + y}{x - y}$,

4) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$,

5) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$,

6) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$,

7) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$,

8) $y^2 + x^2 y' = xyy'$,

9) $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$,

10) $y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}$,

11) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$,

12) $y' = \frac{y}{x - y}$,

13) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,

14) $(4y - 3x - 5)y' + 7x - 3y + 2 = 0$,

15) $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$,

16) $xy' - y' = \sqrt{x^2 + y^2}$,

17) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Çalışma 3. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $xy' + 2y = x^2$,

2) $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$,

3) $y' + x^2 y = x^2$,

4) $y' - \ln x = \frac{y}{x}$,

5) $y' + \frac{2}{x} y = x^3$,

6) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$,

7) $y' + ytgx = \cos^2 x$,

8) $xy' = 2y - x^3$,

9) $y' - \frac{3y}{x} = x,$ 10) $xy' + y = \ln x + 1,$

11) $y' - y = e^x,$ 12) $xy' + y = 3,$

13) $y' + \frac{y}{1+x} + y^2 = 0,$ 14) $dy + 2ydx = 3xdy,$

15) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x+1}{x},$ 16) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},$

17) $y' + y = \cos x.$

Çalışma 4. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $xy' + y = 2y^2 \ln x,$ 2) $xy' - y = y^2 \ln x,$

3) $3(xy' + y) = y^2 \ln x,$ 4) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0,$

5) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x},$ 6) $y' + \frac{2}{x}y = x^3y^3,$

7) $y' + y\cos x = \sin 2x,$ 8) $y' - 2xy = (x+1)e^{x^2},$

9) $y' = x^3y^3 - xy,$ 10) $xy' + 2y = x^5y^2,$

11) $x^2y' = xy + y^2,$ 12) $y' - ytgx = ctgx,$

13) $y'(x^2y^3 + xy) = 1,$ 14) $y - y'\cos = y^2(1 - \sin x)\cos x,$

15) $2xy + (x^2 + y^2)y' = 0,$ 16) $y' + 2xy = 2x^3y^3,$

17) $y' - ytgx + y^2\cos x = 0.$

Çalışma 5. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $(x^2 + y)dx - xdy = 0,$ 2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx = 2ydy,$

3) $y(1 + xy)dx = xdy,$ 4) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0,$

5) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0,$ 6) $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0,$

7) $2x^3ydy + (3x^2y^2 + 7)dx = 0,$ 8) $(\ln y + 2x - 1)dy - 2ydx = 0,$

9) $(5xy^2 - x^3)dx + 5x^2ydy = 0,$

10) $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0,$

11) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = 0,$

12) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0,$

13) $\left(9 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{3y}{x}dy = 0,$

14) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0,$

15) $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0,$

16) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0,$

17) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$

Çalışma 6. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $x^3y'' + x^2y' = 0,$ 2) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$ 3) $2yy'' = (y')^2,$

1) $y(y')^2 + 2xy' = y,$ 5) $(y')^2 + xy' = x^2,$ 6) $y''y^3 = 1$

7) $y''tgx = y' + 1,$ 8) $y'' + 4y' = 0,$ 9) $y'' + 4y = 0,$

10) $y'' + 3y' - 4x = 0,$ 11) $y'' - 4y' + 4y = 0,$

12) $xy'' - y' = e^x x^2,$ 13) $y\sqrt{1+(y')^2} = y',$

14) $x = y'\sin y',$ 15) $y'' = x\sin x,$

16) $y'' = \dfrac{y}{x} + x,$ 17) $yy'' = (y')^2.$

Çalışma 7. Diferensial tənliklərin ümumi həllini tapın.

1) $y''+7y'+6y=f(x)$, $f(x)=1-x^2$, $f(x)=e^x(5x^2+x+1)$, $f(x)=2\cos 5x+3\sin 5x$ olduqda,

2) $y''-4y'+4y=f(x)$, $f(x)=3-4x^2$, $f(x)=e^{-x}(3-x^2)$, $f(x)=e^{2x}\sin 4x$, olduqda,

3) $y''+2y'+y=f(x)$, $f(x)=2x^2-x+3$, $f(x)=xe^{3x}$, $f(x)=x^2e^{-x}\sin x$, olduqda,

4) $y''-2y'+y=f(x)$, $f(x)=x^3-x+1$, $f(x)=e^x(1-x)$, $f(x)=\sin x+e^{-x}\cos x$ olduqda,

5) $y''+9y'=f(x)$, $f(x)=6x^2+3$, $f(x)=e^x(6x+5)$, $f(x)=\sin x\cos 2x$ olduqda,

6) $y''-3y'+2y=f(x)$, $f(x)=x^2+2x+3$, $f(x)=e^{3x}(x^2+x)$, $f(x)=2\sin 2x+\cos x$ olduqda,

7) $y''+3y'+2y=f(x)$, $f(x)=5-4x^2$, $f(x)=2x^2e^{3x}$, $f(x)=24\sin 2x$ olduqda,

8) $y''-3y'-10y=f(x)$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=e^x(x^3-2x^2)$, $f(x)=\sin x+3\cos x$ olduqda,

9) $y''+7y'+12y=f(x)$, $f(x)=24x^2+16x-15$, $f(x)=e^{3x}(x^2+1)$, $f(x)=x\cos x$ olduqda,

10) $y''-6y'+13y=f(x)$, $f(x)=x^2-x$, $f(x)=e^x(x^2-5x+2)$, $f(x)=e^{-x}\sin x$ olduqda,

11) $y''+4y'+5y=f(x)$, $f(x)=5x^2-32x+5$, $f(x)=e^{-x}+e^{-2x}$, $f(x)=\sin 2x+2\cos 2x$ olduqda,

12) $y''+2y'+5y=f(x)$, $f(x)=4x^2+1$, $f(x)=(20x+14)e^x$, $f(x)=2\cos 7x+3\sin 7x$ olduqda,

13) $y'' - 2y' + 10y = f(x)$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = x^2e^x$,
$f(x) = \sin 2x - 2e^{-x}$ olduqda,

14) $y'' + 4y' + 4y = f(x)$, $f(x) = 2(x^2 - 4)$,
$f(x) = (6 - 6x)e^{-x}$, $f(x) = 6e^x \sin 2x + e^{-x}$ olduqda,

15) $y'' - 7y' + 6y' = f(x)$, $f(x) = 2 - 5x^2$, $f(x) = 5xe^{-2x}$,
$f(x) = e^x(3\sin 2x - 2\cos 2x)$ olduqda,

16) $2y'' + y' - y = f(x)$, $f(x) = (x-1)^2$, $f(x) = 2e^x$,
$f(x) = 3x + 5\sin 2x$ olduqda,

17) $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, $f(x) = 5(x+2)^2$,
$f(x) = 4xe^x$, $f(x) = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$ olduqda.

Nümunəvi həllər

1) $xdx + ydy = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$\int xdx + \int ydy = \frac{c}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{c}{2} \quad \text{və ya} \quad x^2 + y^2 = c.$$

2) $y' = (1 + y^2)\cos x$ tənliyi həll edin.

Həlli:

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\cos x, \frac{dy}{1 + y^2} = \cos xdx, \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \cos xdx$$

$$arctgy = \sin x + c, \quad y = tg(\sin x + c).$$

3) $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$ tənliyini həll edin.

Həlli: $z = x + y$ əvəz edək. Onda

$$dz = dx + dy,\quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx},\quad \frac{dz}{1+z^2} = dx,\quad \int\frac{dz}{1+z^2} = \int dx + c.$$

$$arctgz = x + c,\quad \text{və ya}\quad z = tg(x+c).$$

z - in yerinə $x + y$ yazsaq, tənliyin ümumi həllini alarıq:

$$y = tg(x+c) - x.$$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $y = xz$ əvəz edək. Onda

$$\frac{d}{dx} = z + x\frac{dz}{dx},\quad z + x\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{z},\quad zdz = \frac{dx}{x},$$

$$\int zdz = \int\frac{dx}{x} + \ln|x|$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{və ya}\quad z^2 = \ln|cx^2|.$$

z -in yerinə $\dfrac{y}{x}$ yazsaq, tənliyin ümumi həllini alarıq:

$$y = x\sqrt{\ln|cx^2|}.$$

5) $y' - \dfrac{y}{x} = x^3$ tənliyini həll edin.

Həlli: Əvvəlcə $y' - \dfrac{y}{x} = 0$ bircinsli tənliyini həll edək.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},\quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{və ya}\quad y = cx$$

Tutaq ki, $c = c(x)$. Onda

$$y = c(x)x,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dc(x)x}{dx} = x\frac{dc(x)}{dx} + c(x)$$

$$x\frac{dc(x)}{dx}+c(x)x-\frac{c(x)x}{x}=x^3,\quad x\frac{dc(x)}{dx}=x^3$$

$$dc(x)=x^2,\quad \int dc(x)=\int x^2dx+c_1,\quad c(x)=\frac{x^3}{3}+c_1.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y=\frac{x^4}{4}+c_1x$$

olar.

6) $(2x-3y^2)dx+(3y^2-6x)dy=0$ tənliyini həll edin.

Həlli: $M=2x-3y^2$, $N=3y^2-6xy$, $\frac{\partial M}{\partial y}=-6y=\frac{\partial N}{\partial x}$

olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=2x-3y^2$$

münasibətindən alarıq:

$$u=\int(2x-3y^2)dx+\varphi(y)$$

$$u=x^2-3xy^2+\varphi(y).$$

$\varphi(y)$-i tə'yin etmək üçün axırıncı ifadəni y-ə nəzərən diferensiallayaq.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy+\varphi'(y)=N$$

$$-6xy+\varphi'(y)=3y^2-6x,\quad \varphi'(y)=3y^2$$

$$\varphi(y)=\int 3y^2dy-c=y^3-c.$$

Beləliklə, tənliyin ümumi həlli

$$x^2-3xy^2+y^3=c$$

olar.

7) $(y')^7-(y')^5+y'+2=0$ tənliyini həll edin.

Həlli: $y'=a_k$, $k=1,2,\ldots$, $y=\int a_kdx+c_1=a_k+c$ və ya

$a_k = \dfrac{y-c}{x}$ əsasən bu tənliyin ümumi həlli

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \frac{y-c}{x} + 2 = 0$$

olar.

8) $y\sqrt{y'-1} = 2 - y'$ tənliyini həll edin.

Həlli: Tənliyi y-ə nəzərən həll edək.

$$y = \frac{2-y'}{\sqrt{y'-1}}$$

$y' = p$ qəbul edək. Onda

$$y = \frac{2-p}{\sqrt{p-1}},\ dx = \frac{dy}{y'} = \frac{1}{p} d\frac{2-p}{\sqrt{p-1}} = -\frac{dp}{2(p-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = -\int \frac{dp}{2(p-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{p-1}} + c.$$

Beləliklə, tənliyin parametrik şəkildə həlli

$$x = \frac{1}{\sqrt{P-1}} + c, \quad y = \frac{2-P}{\sqrt{P-1}}$$

olar. Buradan P parametrini yox etsək tənliyin ümumi həllini alarıq:

$$y = x - c - \frac{1}{x-c}.$$

9) $x = (y')^3 - y' - 1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $y' = p$ qəbul edək.

Onda

$$x = p^3 - p - 1,\ dy = y'dx = pd(p^3 - p - 1) = p(3p^2 - 1)dp$$

$$y = \int (3p^3 - p)dp = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c.$$

Beləliklə, tənliyin parametrik şəkildə ümumi həlli

$$x = p^3 - p - 1,\ \ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + c$$

olar.

10) $y'' = x$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$y' = \int x dx + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx + \int c_1 dx = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

11) $y'' = \dfrac{y'^2}{y}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $y'' = p$ əvəz edək. Onda

$$y'' = p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y},\ \ \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},\ \ \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} + \ln|c_1|$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1| \quad \text{və ya} \quad p = c_1 y.$$

Buradan,

$$p = \frac{dy}{dx} = c_1 y,\ \ \frac{dy}{y} = c_1 dx,\ \ \int\frac{dy}{y} = \int c_1 dx + \ln|c_2|.$$

$$\ln|y| = c_1 x + \ln|c_2| \quad \text{və ya} \quad y = c_2 e^{c_1 x}.$$

12) $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: $y'' = \dfrac{1}{x}y',\ \ln y' = \ln x + \ln c_1,\ c_1 > 0$ və ya $y' = c_1 x$

$$y = \int c_1 x dx + c_2 = c_1\frac{x^2}{2} + c_2.$$

13) $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: 12-ci misalda göstərdik ki, uyğun $y'' - \frac{1}{x} y' = 0$ bircinsli tənliyinin ümumi həlli $z = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$ şəklindədir. Verilən tənliyin xüsusi həllini

$$\bar{y} = c_1(x)x^2 + c_2(x)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$\begin{cases} c_1'(x)x^2 + c_2'(x)\cdot 1 = 0 \\ 2c_1'(x) + c_2'(x)\cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Buradan alarıq:

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}, \qquad c_2'(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

və ya

$$c_1(x) = \int \frac{1}{2} dx + \bar{c}_1 = \frac{1}{2}x + \bar{c}_1,$$

$$c_2(x) = -\int \frac{1}{2} x^2 dx + \bar{c}_2 = -\frac{1}{6}x^3 + \bar{c}_2.$$

Beləliklə, tənliyin ümumi həlli

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \bar{c}_1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \bar{c}_2\right),$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \bar{c}_1 x^2 + \bar{c}_2$$

olar.

14) $y'' + y' - 2y = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Xarakteristik $k^2 + k - 2 = 0$ tənliyinin kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = -2$ həqiqi və müxtəlifdir. Onda tənliyin ümumi həlli

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

olar.

15) $y'' - 6y' + 9y = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Xarakteristik $k^2 - 6k + 9 = 0$ tənliyinin kökləri $k_1 = k_2 = 3$ həqiqi və bərabərdir. Onda tənliyin ümumi həlli

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

olar.

16) $y'' - 4y' + 13y = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Xarakteristik $k^2 - 4k + 3 = 0$ tənliyinin kökləri $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$ kompleks ədədlərdir. Onda tənliyin ümumi həlli

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

olar.

17) $y'' + y' = 2x + 3$ tənliyini həll edin.

Həlli: Xarakteristik $k^2 + k = 0$ tənliyinin kökləri $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ həqiqi və müxtəlifdir. Onda bircinsli tənliyin ümumi həlli

$$z = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{-1 \cdot x} = c_1 + c_2 e^{-x}$$

olar. $n = 1, r = 1$ olduğundan verilən tənliyin xüsusi həllini

$$\bar{y} = x(b_0 x + b_1)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$\bar{y}' = b_0 x + b_1 + b_0 x = 2b_0 x + b_1, \quad \bar{y}'' = 2b_0$$

$\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ ifadələrini tənlikdə yerinə yazsaq

$$2b_0 x + 2b_0 + b_1 = 2x + 3 \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} 2b_0 = 2 \\ 2b_0 + b_1 = 3 \end{cases}$$

alarıq, buradan $b_0 = 1$, $b_1 = 1$.

Beləliklə, tənliyin xüsusi həlli $\bar{y} = x^2 + x$ və ümumi həlli

$$y = z + \bar{y} = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2 + x$$

olar.

18) Çalışma 1-in 8-ci misalının həlli:

$$(e^x+3)\frac{dx}{dy}=ye^x,\frac{dy}{y}=\frac{d(e^x+3)}{e^x+3}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{d(e^x+3)}{e^x+3},\ln y=\ln c(e^x+3)$$

$$y=c(e^x+3).$$

19) Çalışma 1-in 10-cu misalının həlli.

$$y(1+\ln y)+\frac{xdy}{dx}=0,\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y(1+\ln y)}=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d(1+\ln y)}{1+\ln y}=0,\ln x+\ln(1+\ln y)=\ln c,$$

$$x(1+\ln y)=c.$$

20) Çalışma 2-nin 1-ci misalının həlli.

$z=\frac{y}{x}$ və ya y=*x*z əvəz edək. Onda $y'=xz'+z$

$$2(xz'+z)=z^2+2z+2,$$

$$2xz'=2z^2+2,\frac{dx}{x}=\frac{dz}{1+z^2},$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{1+z^2},\ln|cx|=arctgz \text{ və ya } \ln|cx|=arctg\frac{y}{x}.$$

21) Çalışma 2-nin 4-cü misalının həlli.

$z=\frac{y}{x}$ və ya y=xz əvəz edək. Onda $y'=xz'+z$

$$xz'+z=\sqrt{1+z^2}+z,\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}},\ \ln|cx|=\ln(z+\sqrt{1+z^2})$$

və ya $y - cx^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

22) Çalışma 3-ün 2-ci misalının həlli. Əvvəlcə uyğun bircinsli tənliyi həll edək, yəni

$y' - ytgy = 0, \frac{dy}{y} = tgxdx, y = \frac{c}{cos\,x}$, burada c-nin x-in funksiyası

hesab edək, yəni $y = \frac{c(x)}{cos\,x}$ (1). Onda

$$\frac{c'(x)cos\,x + c(x)sin\,x}{cos^2 x} - \frac{c(x)sin\,x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos\,x}$$

$c'(x) = 1$ və ya c(x)=x+c.

Bu qiyməti (1)-də yazsaq alarıq:

$$y = \frac{x + c}{cos\,x}.$$

23) Çalışma 3-ün 5-ci misalının həlli. Burada $p(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = x^3$

Onda $y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}(c + \int x^3 e^{\int \frac{2}{x}dx} dx) = e^{-2\ln x}(c + \int x^3 e^{\ln x^2} dx) =$

$= \frac{1}{x^2}(c + \int x^5 dx)$, və ya $y = \frac{c}{x^2} + \frac{x^4}{6}$ olar.

24) Çalışma 4-ün 8-ci misalını həlli. Əvvəlcə uyğun bircinsli tənliyi həll edək, yəni

$$y' - 2xy = 0, \frac{dy}{y} = 2xdx, \ln y = x^2 + \ln c, y = ce^{x^2}$$

Burada c-ni x-in funksiyası hesab edək, yəni

$$y = c(x)e^{x^2} \quad (1)$$

Onda $c'(x)e^{x^2} + 2c(x)xe^{x^2} - 2c(x)xe^{x^2} = (x+1)e^{x^2}$

$$c'(x)=x+1 \text{ və ya } c(x)=\frac{(x+1)^2}{2}+c.$$

Bu qiyməti (1)-də yazsaq alarıq:

$$y=\left(c+\frac{(x+1)^2}{2}\right)e^{x^2}.$$

25) Çalışma 4-ün 15-ci misalının həlli. Burada $M(x,y)=2xy$, $N(x,y)=x^2+y^2$,

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$ olar. Onda $Mx+Ny=c$, $2x^2y+(x^2+y^2)y=c$ və ya

$$3x^2y+y^3=c, \text{ olar.}$$

26) Çalışma 5-in 9-cu misalının həlli.
Burada $M(x,y)=e^y$, $N(x,y)=\cos y+xe^y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=e^y \text{ olar. Onda}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\frac{\partial u}{\partial x}=M=e^y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\cos y+xe^y, u=\int e^y dx=e^y+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos y+xe^y=e^y+\varphi'(y) \text{ və ya}$$

$$\varphi'(y)=\cos y+(x-1)e^y$$

$$\varphi(y)=\int \cos y dy+\int (x-1)e^y dy=\sin y+(x-1)e^y$$

Beləliklə alarıq:

$$U(x,y)=e^y+\varphi(y)=e^y+\sin y+(x-1)e^y=xe^y+\sin y$$

və ya

$$xe^y+\sin x=c.$$

27) Çalışma 5-in 13-cü misalının həlli.

$z=\frac{y}{x}$ və ya y=xz əvəz edək. Onda $y'=xz'+z$

$$(9-z^2)+3z(xz'+z)=0,$$

$$3zx\frac{dz}{dx}=2z^2-9, \frac{dx}{x}=\frac{3z}{2z^2-9},$$

$$ln\frac{(2z^2-9)^3}{x^4}=ln\,c, \frac{(2y^2-9x^2)^3}{x^{10}}=c \text{ və ya}$$

$$(2y^2-9x^2)^3=cx^{10}.$$

28) Çalışma 6-nın 2-ci misalının həlli

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}, y'=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c_1,$$

$$\frac{dy}{dx}=tgx+c, y=\int(tgx+c_1)dx$$

$$y=-\ln|cos\,x|+c_1x+c_2.$$

29) Çalışma 6-nın 10-cu misalının həlli.

$$k^2+3k-4=0, k_1=1, k_2=-4, y_1=e^x, y_2=e^{-4x},$$

$$y=c_1e^x+c_2e^{-4x}.$$

30) Çalışma 7-nın 5-ci misalının həlli. ($e^x(6x+5)$). Uyğun birincisli tənliyin həlli

$\overline{y}=c_1\,cos\,3x+c_2\,sin\,3x$ olur. Üstlü funksiyadakı 1 ədədi xarakteristik tənliyin kökü deyil, ona görə xüsusi həllini $u=(Ax+B)e^x$ şəkilində axtaraq. Bu ifadəni tənlikdə yerinə yazaq:

$$(Ax+2A+B+9Ax+9B)e^x=e^x(6x+5)$$

Eyni dərəcəli x-lərin əmsallarını bərabərləşdirək.

$$10A=6,\ 2A+10B=5.\ \text{Buradan } A=\frac{3}{5}, B=\frac{19}{50}.$$

Deməli, xüsusi həll

$$u=\left(\frac{3}{5}x+\frac{19}{50}\right)e^{x}, \text{ ümumi həll}$$

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\left(\frac{3}{5}x+\frac{19}{50}\right)e^{x}$$

olar.

31) $f(x)=x^2+2x+3$ olduqda çalı 7-nin 6-cı misalının həlli. Uyğun bircinsli tənliyin həlli.

$\bar{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{x}$ olur. Tənliyin xüsusi həllini

$u=Ax^2+Bx+c$ şəkilində axtaraq.

Bu ifadəni tənlikdə yerinə yazaq:

$2Ax^2+(2B-6A)x+2A-3B+2c=x^2+2x+3$ buradan

$$A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{2}, C=\frac{19}{4}.$$

Deməli, xüsusi həll

$$u=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{19}{4} \text{ olur.}$$

ümumi həll isə

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{19}{4} \text{ olar.}$$

32) $f(x)=24\sin 2x$ olduqda çalışma 7-nin 7-ci misalının həlli. Uyğun bircinsli tənliyin həlli.

$\bar{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ olur. Tənliyin xüsusi həllini $u=A\cos 2x+B\sin 2x$ şəklində axtaraq. Bu ifadəni tənlikdə yerinə yazaq.

$(6B-4A)\cos 2x-(6A+2B)\sin 2x=24\sin 2x$, buradan

$$A=-\frac{36}{11}, B=-\frac{24}{11}. \text{ Deməli, xüsusi həll}$$

$$u=-\frac{36}{11}\cos 2x-\frac{24}{11}\sin 2x \text{ ümumi həll isə}$$

$$y=ce^{-x}+c_2e^{-2x}-\frac{36}{11}\cos 2x-\frac{24}{11}\sin 2x \text{ olar.}$$

X FƏSİL

Sıralar

Çalışma 1. Sıraların yığılmasını araşdırın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n^2+n-1}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+14n+1}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-1}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2-12n-2}$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{5n^2+7n-2}$, 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-5}$,

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$, 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n^2+21n+1}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4n^2-3}$, 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+4n-3}$, 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n^2-1}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$, 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+14n+5}$, 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+1}$.

Çalışma 2. Sıraların cəmini tapın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

5) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$,

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$,

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{2n^2}$,

11) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{n(n^2-4)}$,

12) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2-1)}$,

13) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$,

14) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8n-8}{(n-1)(n+1)(n-2)}$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Çalışma 3. Sıraların yığılmasını araşdırın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-ln\,n}{n^2-3}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2^n}{n}\right)^2$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+5}}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$,

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$,

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$, 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$, 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

Çalışma 4. Sıraların yığılmasını araşdırın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$, 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$, 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$,

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$, 8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$, 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$, 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^n$, 12) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$, 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2 2n}$, 15) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n\ln^2(n+7)}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$.

Çalışma 5. Sıraların yığılan, mütləq yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+1)}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{3n}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)ln(n+1)}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n ln 2n}$,

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{\pi}{6n}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$,

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{(n+1)\ln^2 n}$,

12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+3)}$,

14) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$,

15) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$.

Çalışma 6. Funksional sıraların yığılma oblastını tə'yin edin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$,

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^n}{n+1}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+1)^n}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$,

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$,

12) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{x}}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$, 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$, 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.

Çalışma 7. Funksional sıraların verilən intervalda müntəzəm yığılan olduğunu isbat edin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<\infty$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{1-x^{2n}}$, $-1\le x\le 1$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\le x<\infty$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$, $0\le x<\infty$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(1+x^2)^n}$, $-\infty<x<\infty$, 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)\frac{1}{2}\le x\le 2$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$, $-2\le x\le 2$, 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-6}$, $0\le x\le 1$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, $-\infty<x<\infty$, 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty<x<\infty$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $0\le x\le 2\pi$,

12) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $-2\le x\le 2$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $0\le x<\infty$, 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$, $0<x<\infty$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{4n^4}$, $-1\le x\le 0$, 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $-3\le x\le 3$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}$, $-3\le x\le 0$.

Çalışma 8. Funksional sıraların cəmini tapın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty}3nx^{3n-1}$, 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, 8) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}x^2$,

9) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}(3n+1)x^n$, 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$,

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, 14) $\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$, 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

Çalışma 9. Funksiyaları Makloren sırasına ayırın və alınan sıranın yığılma intervallarını tapır.

1) $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, 2) $y=x^2e^x$,

3) $y=e^x\sin x$, 4) $y=\cos^2 x$,

5) $y=(x-tgx)\cos x$, 6) $y=x\ln(1+x)$,

7) $y=\sqrt[3]{8-x^3}$, 8) $y=e^{-x^2}$,

9) $y=e^x\ln(1+x)$, 10) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

11) $y=(1+x)arctgx$, 12) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$,

13) $y=\dfrac{\cos x}{1+x}$, 14) $y=2^x$,

15) $y=xe^{-x^2}$, 16) $y=\sin^2 x$,

17) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Nümunəvi həllər

1) Tə'rifdən istifadə edərək

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

sıranın yığılan olmasını tədqiq edin və onun cəmini tapın.

Həlli: Burada

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Onda

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

Deməli, verilən sıra yığılır və cəmi $S=\dfrac{1}{2}$ olur.

2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{8}+\ldots+\dfrac{n}{3n-1}+\ldots$ sırasını tədqiq edin.

Həlli:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

olduğundan sıra dağılandır.

3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{27}+\ldots+\dfrac{n^2}{3^n}+\ldots$ sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli: Burada

$$a_n=\frac{n^2}{3^n},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}};\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\frac{1}{3}<1,$$

olduğundan sıra yığılandır.

4) $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\ldots+\dfrac{2^n}{n}+\ldots$ sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli: Burada

$$a_n=\frac{2^n}{n},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1};\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n}=2\frac{n}{n+1}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1,$$

olduğundan sıra dağılandır.

5) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$ sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli: Burada

$$a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,\ \sqrt[n]{a_n}=\frac{n}{2n+1}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

olduğundan sıra yığılandır.

6) $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ (1)

sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli: $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ qəbul etsək bu sıranı

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Koşinin inteqral əlamətinə görə (2) sırası və

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (3)$$

qeyri-məxsusi inteqralı eyni zamanda yığılan və ya dağılan olar. Mə'lumdur ki, (3) qeyri-məxsusi inteqralı $\alpha>1$ olduqda yığılan, $\alpha\le 1$ olduqda isə dağılandır. Onda (1) sırası $\alpha>1$ olduqda yığılan, $\alpha\le 1$ olduqda isə dağılan olar. $\alpha=1$ olduqda harmonik sıra adlanan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

sırasının ümumi həddinin limitinin sıfıra bərabər $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ olmasına baxmayaraq dağılandır.

7) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$ sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli:

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$ və $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ olduğundan Leybnis əlamətinə görə sıra yığılandır.

8) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+...$ sırasının yığılan olmasını tədqiq edin.

Həlli: Bu sıranın hədlərinin mütləq qiymətindən düzələn

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$$

sıra ortaq vuruğu $q=\frac{1}{2}<1$ olan həndəsi silsilə olduğundan yığılandır. Onda verilmiş sıra mütləq yığılan olar.

9) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$sırası mütləq yığılan deyildir. Çünki, bu sıranın hədlərinin mütləq qiymətindən düzələn

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

harmonik sıra dağılandır. Onda verilmiş sıra şərti yığılan olar.

10) $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+...+\frac{x^n}{n^2}+...$sırasının yığılma oblastını təyin edin.

Həlli: Burada

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n^2},\ f_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2};\ \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=$$

$$=\frac{x^{n+1}\cdot n^2}{x^n\cdot(n+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x|<1.$$

Onda $|x|<1$ və ya $-1<x<1$ oblastında sıra yığılar. Məlumdur ki, $x=\pm1$ nöqtələrində alınan

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...\text{və}\ -1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+(-1)^n\frac{1}{n^2}+...$$

sıralar yığılandır. Deməli, sıra $-1\le x\le 1$ parçasında mütləq yığılar.

11) $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+...+\frac{\sin nx}{n^2}+...$ sırası bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılır. Doğurdan da, x-in bütün qiymətlərində

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,...$$

bərabərsizliyi ödənildiyindən

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

sırası verilmiş sıranın majorantıdır. Bu sıra yığılan olduğundan Veyerştras əlamətinə görə verilmiş sıra bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılar.

12) $\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+...+\frac{x^n}{n\cdot10^n}+...$ sırasının yığılma intervalını tapın.

Həlli: Burada

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^{n+1}},$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = 10\frac{n+1}{n},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|10\frac{n+1}{n}\right| = 10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 10,$$

olduğundan sıra $(-10,10)$ intervalında yığılar. Məlumdur ki, $x = \pm 10$ nöqtələrində alınan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{və} \; -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$$

sıralarından birincisi dağılır, ikincisi isə yığılır. Deməli, sıra $-10 \le x < 10$ aralığında yığılar.

13) $\ln 1{,}04$ qiymətini 0,0001 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli: $\ln(1+x)$ funksiyasının ayrılışından istifadə edərək alarıq:

$$\ln 1{,}04 = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots =$$

$$= 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ldots$$

$$\ln 1{,}04 \approx 0{,}0392.$$

14) $f(x) = |x|$ funksiyasını $[-\pi, \pi]$ parçasında Furye sırasına ayırın.

Həlli: Bu funksiya $[-\pi, \pi]$ parçasında hissə-hissə monoton və məhduddur. Funksiya cüt olduğundan

$$b_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \{0, \ n \ \text{cüt olduqda}, \quad -\frac{4}{n^2\pi}, \ n \ \text{tək olduqda}\}.$$

Beləliklə,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots \right)$$

sırasını alarıq. Bu sıra bütün ədəd oxunda yığılır və onun cəmi verilmiş funksiyaya bərabərdir. Bu bərabərlikdə $x = 0$ yazsaq alarıq:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

15) $f(x) = x$ funksiyasını $[-1,1]$ parçasında Furye sırasına ayırın.

Həlli: $l = 1$ və funksiya tək olduğundan

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\sin n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x\sin n\pi x dx = -\frac{2x\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1 =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Beləliklə,

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \ldots \right), \quad -1 < x < 1$$

sırasını alarıq. $f(x) = x$ funksiyası kəsilməz və hissə-hissə hamar funksiya olduğundan bu sıra yığılır və onun cəmi verilmiş funksiyaya bərabərdir. Bu bərabərlikdə $x = \frac{1}{2}$ yazsaq alarıq:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

16) Çalışma 1-in 2-ci misalının həlli.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4n^2+14n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{4+\frac{14}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$=\frac{0}{4+0+0}=0$ olduğundan sıra yığılandır.

17) Çalışma 1-in 9-cu misalının həlli.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{4n^2-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n^2}}{4-\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{4-0}=0$$

olduğundan sıra yığılandır.

18) Çalışına 2-nin 4-cü misalının həlli. Burada

$$a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Onda

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1.$$

19) Çalışma 2-nin 10-cu misalının həlli. Burada

$$a_n = arctg\frac{1}{2n^2}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{2n^2} = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} + \ldots +$$

$$+ arctg\frac{1}{2n^2} = arctg\frac{2}{3} + arctg\frac{1}{18} + \ldots + arctg\frac{1}{2n^2} = arctg\frac{n}{n+1}.$$

Onda

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} arctg\frac{n}{n+1} = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

20) Çalışma 3-ün 4-cü misalının həlli.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 = \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}+1}\right)^2 = \left(\frac{0}{1}\right)^2 = 0.$$

olduğundan sıra yığlandır.

21) Çalışma 3-ün 9-cu misalmın həlli.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan sıra yığılandır.

22) Çalışma 4-ün 4-cü misalının həlli.

Burada

$$a_n = \frac{n!}{2^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}},$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = \infty$$

olduğundan sıra dağılandır.

23) Çalışma 4-ün 11-ci misalının həlli. Burada

$$a_n = \left(\frac{n}{10n+5}\right)^n,$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{10n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10+\frac{5}{n}} = \frac{1}{10} < 1$$ olduğundan sıra yığılandır.

24) Çalışma 5-in 5-ci misalının həlli. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \text{ və } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan Leybnis əlamətinə görə $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sırası yığılır.

Lakin bu sıranın hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn

harmonik sıra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dağılan olduğun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sırası və uyğun olaraqda verilən sıra şərti yığılan olar.

25) Çalışma 5-in 12-ci misalının həlli. Burada

$$1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \dots \text{ və } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

olduğundan Leybnis əlamətinə görə sıra yığılır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ sırası yığılan olduğuna görə verilən sıra mütləq yığılar.

26) Çalışma 6-nın 3-cü misalının həlli. Burada

$$f_n(x)=\frac{1}{n(x+1)^n},\ f_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)(x+1)^{n+1}}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x+1)^n}{(n+1)(x+1)^{n+1}}\right|=$$

$$=\frac{1}{|x+1|}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{|x+1|}<1$$

olduğundan alarıq ki, $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ oblastında sıra yığılar.

27) Çalışma 6-nın 11-ci misalının həlli. Burada

$$f_n(x)=\frac{n}{x^n},\ f_{n+1}(x)=\frac{n+1}{x^{n+1}}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n(n+1)}{x^{n+1}\cdot n}\right|=\frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=$$

$=\frac{1}{|x|}<1$, olduğundan $|x|>1$ oblastında sıra yığılar.

28) Çalışma 7-nin 6-cı misalının həlli. Asanlıqla tapmaq olar ki,

$$S_{up}(x^n+x^{-n})=2^n+\frac{1}{2^n}<2^{n+1},\frac{1}{2}\le|x|\le 2$$

Dalamber əlamətinə görə $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$ sırası yığılan olduğundan, verilən sıra müntəzəm yığılar.

29) Çalışma 7-nin 10-cu misalının həlli.

$$Sup|f_n(x)|=Sup\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},|x|<+\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ sırası yığılan olduğundan Veyerştras əlamətinə görə verilən sıra müntəzəm yığılar.

30) Çalışma 7-nin 12-ci misalının həlli.

$$0 \le ln\left(1+\frac{x^2}{n\,ln^2 n}\right) \le \frac{x^2}{n\,ln^2 n} \le \frac{4}{n\,ln^2 n}$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n\,ln^2 n}$ sırası yığılan olduğundan Veyerştras əlamətinə görə verilən sıra müntəzəm yığılar.

31) Çalışma 8-in 1-ci misalının həlli. Sıranın hədləri kəsilməzdir, onun hədlərinin törəmələrindən düzələn $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ sıra (-1,1) oblastında müntəzən yığülır və cəmi $\frac{1}{1-x}$-ə bərabərdir.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

sırasını hədbə-həd diferensiallayaq

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$. Buradan alarıq:

$$\int_0^x f'(x)dt = f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-ln(1-x) \quad \text{və ya}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-ln(1-x), -1<x<1$$

32) Çalışma 8-in 3-cü misalının həlli.

Məlumdur ki, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ sırası (-1,1) oblastında müntəzəm yığılır

və

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Bu sıranı (0,$x$) parçasında inteqrallasaq alarıq:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt \quad \text{və ya}$$

$$ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, -1<x<1$$

33) Çalışma 9-un 4-cü misalının həlli. cos$x$ funksiyasının Makleron sırasını

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots, -\infty<x<\infty$ özünü özünə hədbə-həd vursaq alarıq

$$\cos^2 x=\cos x\cos x=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)^2 \cdot$$

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)^2=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2}{45}x^6+\ldots,(-\infty,\infty).$$

34) Çalışma 9-un 8-ci misalının həlli.

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,(-\infty,\infty)$ ayrılışında x-1, x^2 ilə əvəz etsək alarıq

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots,(-\infty,\infty)$$

35) Çalışma 9-un 14-cü misalının həlli

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, (-\infty, \infty)$ ayrılışında x-i $x\ln 2$ əvəz etsək alarıq.

$$2^x = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + \ldots, (-\infty, \infty).$$

XI FƏSİL

Çoxqat inteqrallar

Çalışma 1. İnteqrallama sırasını dəyişin.

1) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy,$

2) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,y)dy,$

3) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy,$

4) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx,$

5) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy,$

6) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy,$

7) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy,$

8) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy,$

9) $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy,$

10) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx,$

11) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx,$

12) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy,$

13) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)dx,$

14) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx,$

15) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)dx,$

16) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx,$

17) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

Çalışma 2. İkiqat inteqralları hesablayın.

1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ D(1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2),$

2) $\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dxdy,\ D(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1),$

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy,\ D(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1),$

4) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy,\ D(0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}),$

5) $\iint\limits_D x^2 y e^{xy} dxdy,\ D(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2),$

6) $\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y\,dxdy,\ D(0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi),$

7) $\iint\limits_D e^{x+\sin y} \cos y\,dxdy,\ D(0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}),$

8) $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy,\ D(\frac{\pi}{2}\le y\le\pi, 1\le x\le 2),$

9) $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dxdy,\ D(\frac{\pi}{4}\le y\le\pi, 2\le x\le 3),$

10) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dxdy,\ D(0\le x\le 1, 0\le y\le 1),$

11) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x-y)^2},\ D(1\le x\le 2{,}3\le y\le 4),$

12) $\iint\limits_D \sqrt{x-y}\,dxdy,\ D(2\le x\le 3{,}0\le y\le 2),$

13) $\iint\limits_D xy(x-y)\,dxdy,\ D(0\le x\le 2, 0\le y\le 3),$

14) $\iint\limits_D 8ye^{4xy}\,dxdy,\ D(\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}, \ln 3\le y\le\ln 4),$

15) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},\ D(3\le x\le 4{,}1\le y\le 2),$

16) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D(0\le x\le 1, 0\le y\le 2),$

17) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy,\ D(0\le x\le 1, 0\le y\le 1).$

Çalışma 3. İkiqat inteqralları hesablayın.

1) $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D(y=x^3, x+y=2, x=0),$

2) $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy,\ D(y=x^2, x=y^2),$

3) $\iint\limits_D x^2y^3\,dxdy,\ D(y=0, y=1-x^2),$

4) $\iint\limits_D y^2 \cos xy dxdy,\ D(x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x),$

5) $\iint\limits_D y^2 \sin\frac{xy}{2} dxdy,\ D(x=0, y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}),$

6) $\iint\limits_D dxdy,\ D(y=2-x, y^2=4x+4),$

7) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy,\ D(y^2=x, y=x^2),$

8) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D(y=x, y=x^2),$

9) $\iint\limits_D xydxdy,\ D(xy=1, x+y=\frac{5}{2}),$

10) $\iint\limits_D xydxdy,\ D(4x^2+y^2\le 4),$

11) $\iint\limits_D (x-y+1)dxdy,\ D(0\le x\le 1, y=x, y=2x),$

12) $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy,\ D(x=0, y=x, y=-2, y=4),$

13) $\iint\limits_D xydxdy,\ D(x=0, x=2, x^2=y),$

14) $\iint\limits_D x^2y^2dxdy,\ D(x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=x^2),$

15) $\iint\limits_D 24x^3y^3dxdy,\ D(x=1, y=\sqrt{x}, y=x^2),$

16) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\ D(x=0, y=1, y^2=x),$

17) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,\ D(x=2, y=x, xy=1).$

Çalışma 4. Üçqat inteqralları hesablayın.

1) $\iiint\limits_V x^2 dxdydz,\ V(x^2+y^2+z^2) \le R^2),$

2) $\iiint\limits_V xydxdydz,\ V(z=xy, x+y=1, z\ge 0),$

3) $\iiint\limits_V y\cos(z+x)dxdydz,\ V(y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}),$

4) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ V(x^2+y^2=z^2, z=1),$

5) $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,\ V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right),$

6) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz,$ 7) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x}dy\int\limits_{0}^{y}xyzdxdydz,$

8) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y},\ V(x+y+z=1, x=0, y=0, z=0),$

9) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ V(3(x^2+y^2)+z^2=3),$

10) $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz, V(x=0, y=0, z=0, z=3,$
$x+y=2),$

11) $\iiint\limits_V dxdydz,\ V(x+y=1, x+y=2, y=0, y=1, z=0, z=3),$

12) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{x}}ydy\int\limits_{1-x}^{2-2x}dz,$ 13) $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^{2}xdx\int\limits_{0}^{3}z^2dz,$ 14) $\int\limits_{0}^{2}ydy\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{0}^{2-y}dz,$

15) $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V\left(0\le x\le\frac{1}{2}, x\le y\le 2x, 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right),$

16) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, $V(x=0, y=0, z=0, x+y+z=1)$,

17) $\iiint\limits_V dxdydz$, $V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$.

Çalışma 5. Xətlərlə məhdud olan fiqurların sahəsini ikiqat inteqrallama üsulu ilə hesablayın.

1) $D(x=0, y=0, x+y=1)$, 2) $D(x=\sqrt{72-y^2}, 6x=y^2)$,

3) $D(xy=4, x+y=5)$, 4) $D(x^2+y^2=12, x\sqrt{6}=y^2)$,

5) $D(y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, x=4)$, 6) $D\left(y=\frac{1}{2}\sqrt{x}, y=\frac{1}{2x}, x=16\right)$,

7) $D(x=4y-y^2, x+y=6)$, 8) $D(y=2-x, y^2=4x+4)$,

9) $D(3y^2=25x, 5x^2=9y)$, 10) $D(x=4-y^2, x+2y=4)$,

11) $D(y=e^x, y=e^{2x}, x=1)$, 12) $D(y=20-x^2, y=-8x)$,

13) $D(y=\frac{2}{x}, y=\frac{5}{x}, y=2, y=5)$, 14) $D(y^2=x, y=2x)$,

15) $D(y=\sin x, y=\cos x, x\geq 0)$, 16) $D(y=x, y=5x, x=1)$,

17) $D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$.

Çalışma 6. Səthlərlə məhdud olan fiqurların həcmini ikiqat inteqrallama üsulu ilə hesablayın.

1) $V(x+y+z=1,\ x=0, y=0, z=0)$,

2) $V(z=x^2+y^2, x+y=1,\ x=0, y=0, z=0)$,

3) $V\left(z=\frac{1}{2}x^2, y=\frac{1}{2}x, y=2x, x=2\sqrt{2}\right)$,

4) $V(y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, z=0, x+z=6)$,

5) $V\left(\dfrac{x^2}{4}+y^2=1, z=12-3x-4y,\ z=1\right)$,

6) $V\left(z=4-y^2, y=\dfrac{x^2}{2}, x=0, z=0\right)$,

7) $V(x^2+y^2=4, z=2x^3, z=0, x\geq 0)$,

8) $V(z=x^2-y^2,\ z=0, x=3)$,

9) $V(z=xy, y=\sqrt{x}, x+y=2, y=0, z=0)$,

10) $V(y=\ln x, y=\ln^2 x, z=0, y+z=1)$,

11) $V(x^2+y^2=4, z=x+y+10)$,

12) $V(x^2+y^2=2x, 2x-z=0, 4x-z=0)$,

13) $V(x^2+y^2=4, z=xy, z=0)$,

14) $V(x^2+y^2=9,\ z=5x, z=0)$,

15) $V(z=x+y+1, y^2=x, x=1, y=0, z=0)$,

16) $V(z=x^2+y^2+1,\ x=4, y=4)$,

17) $V(z=x^2+y^2, z=0, y=1, y=2x, y=6-x)$.

Çalışma 7. Səthlərlə məhdud olan fiqurların həcmini üçqat inteqrallama üsulu ilə hesablayın.

1) $V(z=4-y^2, z=y^2+2, x=-1, x=2)$,

2) $V(3z=x^2+y^2, x^2+y^2+z^2=4)$,

3) $V(x^2+y^2-z^2=0, z=6-x^2-y^2)$,

4) $V(2z=x^2+y^2, z^2=x^2+y^2)$,

5) $V(z=x^2+y^2, z=x^2+2y^2, y=x, y=2x, x=1)$,

6) $V(z=x^2+y^2, z=x+y)$,

7) $V(2z=x^2+y^2, x+z=4)$,

8) $V(x+y+z=8, x=3, y=2, x=0, y=0, z=0)$,

9) $V(x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=10z)$,

10) $V(z=x^2+y^2, z^2=xy)$,

11) $V(x^2+y^2+z^2=R^2)$,

12) $V(x^2+y^2-z=1, z=0)$,

13) $V(2z=x^2, z=0, y=0, 3x+2y=12)$,

14) $V(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1)$,

15) $V(x^2+y^2+z^2=2, x^2+y^2=z)$,

16) $V(z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x^2, y=x)$,

17) $V(z=\sqrt{x^2+y^2}, z=x^2+y^2)$.

Çalışma 8. Səthin sahəsi.

1) $z^2=x^2+y^2$ səthinin $z^2=2y$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.
2) $x^2=y^2+z^2$ səthinin $x^2+y^2=4$ silindri daxilində yerləşən hissəsinin sahəsini tapın.
3) $x^2=y^2+z^2$ səthinin $x^2-y^2=4$ silindri və $y=-3, y=3$ müstəviləri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın
4) $z^2=4x$ səthinin $y^2=4x$ silindri və $x=1$ müstəvisi ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın
5) $z=xy$ səthinin $x^2+y^2=4$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın
6) $x^2+y^2+z^2=4$ səthinin $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$ səthi ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.
7) $x^2+y^2+z^2=16$ səthinin $x^2+y^2=9$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

8) $x^2+y^2+z^2=9$ səthinin $x^2+z^2=3$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

9) $x=1-y^2-z^2$ səthinin $y^2+z^2=1$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

10) $x^2=2z$ səthinin $x-2y=0, y=2x, x=2\sqrt{2}$ müstəviləri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

11) $z^2=2xy$ səthinin $x=2, y=2, x\geq 0, y\geq 0$ müstəviləri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

12) $x^2+y^2+z^2=36$ sferası və $x^2+y^2=6z$ paraboloidi ilə məhdud olan fiqurun tam səthini tapın.

13) $x^2+z^2=4$ səthinin $x^2+y^2=4$ silindri daxilində yerləşən hissəsinin sahəsini tapın.

14) $x^2+y^2+z^2=9$ səthinin $z^2+y^2=9$ silindri daxilində yerləşən hissəsinin sahəsini tapın.

15) $z^2=2xy$ səthinin $x=0, x=2, y=0, y=4$ müstəviləri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

16) $2z=x^2+y^2$ səthinin $x^2+y^2=1$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

17) $x^2+y^2+z^2=4$ səthinin $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ silindri ilə kəsilən hissəsinin sahəsini tapın.

Çalışma 9. Parametrdən asılı inteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, |\alpha|<1,$ 2) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\alpha+x^2}, \alpha>0,$

3) $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}dx, \alpha > 0,$

4) $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx, \ -1 \le \alpha \le 1,$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(\alpha^2 sin^2 x + \beta^2 sin^2 x)dx,$

6) $\int_1^\infty \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}dx,$

7) $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos \beta x dx,$

8) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} sin \beta x}{x}dx,$

9) $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx,$

10) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos \alpha x}{x^2}dx,$

11) $\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx, \alpha > 0,$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx, -1<\alpha<1,$

13) $\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx, \alpha > 0,$

14) $\int_0^\pi \ln(1+\cos\alpha \sin x)\frac{dx}{\sin x},$

15) $\int_0^1 \frac{ln(1-\alpha^2 x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \alpha^2 < 1,$

16) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2}, \alpha \ne 0,$

17) $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx, \alpha > 0.$

Çalışma 10. Eyler inteqralından istifadə edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3},$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx,$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tgx}\,xdx,$

4) $\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx,$

5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[10]{1-x^{10}}},$

6) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^5 xdx}{\left(1+\frac{1}{2}\cos x\right)^6},$

7) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4}dx,$

8) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx,$

9) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 dx}{(1+x^6)^8},$

10) $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{\sqrt{x}(1+x)}dx,$

11) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}},$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x\cos^{\frac{3}{2}} xdx,$

13) $\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx,$

14) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}},$

15) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4},$

16) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx,$

17) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx.$

Nümunəvi hallər

1) $D(0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2)$ oblastında

$$\iint_D x^2y^3dxdy$$

inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\iint_D x^2y^3dxdy = \int_0^1 x^2dx\int_0^2 y^3dy = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \cdot \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{4} = 1\frac{1}{3}.$$

2) $D(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x)$ oblastında $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left.\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^x dx = \int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 x^3dx = \left.\frac{4}{3}\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3) $D = (\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2)$ oblastında

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$$

polyar koordinatlara keçsək alarıq:

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_\pi^{2\pi}\rho\sin\rho d\rho = 2\pi\int_\pi^{2\pi}\rho\sin\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\rho\cos\rho\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos\rho d\rho\right) = -6\pi^2 + 2\pi\sin\rho\Big|_\pi^{2\pi} = -6\pi^2.$$

4) $y = x^2$ parabolası və $y = 1$ düz xətti ilə əhatə olunmuş D fiqurunun sahəsini hesablayın.

Həlli:

$$S=\iint_D dxdy=2\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}dx=2\int_0^1\sqrt{y}dy=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=1\frac{1}{3}.$$

5) $x=0, y=0, x+y+z=1, z=0$ müstəviləri ilə əhatə olunmuş fiqurun həcmini hesablayın.

Həlli:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D(1-x-y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=$$

$$=\int_0^1\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

6) $x=1-y^2-z^2$ paraboloidindən $y^2+z^2=1$ silindri ilə kəsilmiş səthin hissəsinin sahəsini hesablayın.

Həlli: İnteqrallama oblastı $y^2+z^2=1$ çevrəsidir.

$x'_y=-2y,\ x'_z=-2z$ olduğundan

$$S=\iint_D\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz=\iint_D\sqrt{1+4(y^2+z^2)}dydz.$$

Burada $y=\rho\cos\varphi, z=\rho\sin\varphi$ polyar koordinatlara keçsək alarıq:

$$S=\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\varphi=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

7) $y=x^2$ və $y^2=x$ parabolaları ilə əhatə olunmuş bircinsli lövhənin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Həlli:

$$m=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

$$M_y=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^1 x\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}.$$

$$M_x=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}ydy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{20}.$$

Onda

$$x_0=\frac{M_y}{m}=\frac{3}{20}:\frac{1}{3}=\frac{9}{20},$$

$$y_0=\frac{M_x}{m}=\frac{3}{20}:\frac{1}{3}=\frac{9}{20}.$$

Beləliklə,

$$x_0=y_0=\frac{9}{20}$$

olar.

8) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^2(4+z)dz$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{2} (4+z)dz = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \cdot \frac{(4+z)^2}{2}\Bigg|_0^2 = 10\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy =$$

$$= 10\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 10\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

9) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ kürəsi üzrə götürülmüş

$$\iiint_V x^2 dxdydz$$

inteqralını hesablayın.

Həlli: Sferik koordinatlara

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta, 0 \le \rho \le 1,$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ keçsək alarıq:

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_V \rho^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi \cdot \rho^2\sin\theta \cdot d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \iiint_V \rho^4 \sin^3\theta\cos^2\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \int_0^{1}\rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{10}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} \cdot d\theta = \frac{\pi}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1)d\cos\theta = \frac{\pi}{15}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{5}\cos\theta\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{15}.$$

10) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2)$ paraboloidləri, $y = x^2$ silindri və $y = x$ müstəvisi ilə məhdud olan fiqurun həcmini hesablayın.

Həlli: Aydındır ki, bu cismin inteqrallama oblastı

$V = (0 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2))$ olar. Onda

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^4 \Big|_0^1 - \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 - \frac{1}{21} x^7 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{3}{35}.$$

11) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$, $|\alpha < 1|$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\alpha,\ 1 + \alpha,\ \frac{1}{1 + x^2 + \alpha^2}$$

x və α-nın bütün qiymətlərində kəsilməzdir. Onda

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

12) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $a > 0$, $b > 0$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^\alpha d\alpha$$

münasibətinə əsasən

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^\alpha d\alpha$$

yazmaq olar. $f(x, \alpha) = x^\alpha$ funksiyası $D = (0 \le x \le 1, a \le \alpha \le b)$ düzbucaqlısında kəsilməz olduğuna görə, alarıq:

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^\alpha d\alpha = \int_a^b d\alpha\int_0^1 x^\alpha dx = \int_a^b \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_0^1 d\alpha =$$

$$= \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

13) Puasson

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

inteqralını hesablayın.

Həlli: $x = \alpha t, \alpha > 0, dx = \alpha dt$ əvəzləməsini aparsaq

$$J = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} dt$$

olar. Bu bərabərliyin hər tərəfini $e^{-\alpha^2}$ vurub α-ya nəzərən 0-dan ∞-a qədər inteqrallayaq.

$$J = \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = J^2 = \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\alpha d\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} dt$$

İnteqrallama növbəsini dəyişsək alarıq:

$$J^2 = \int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)\alpha^2}\alpha d\alpha = \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-(1+t^2)\alpha^2}}{2(1+\alpha^2)}\right)\Bigg|_0^\infty dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctg\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

və ya

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

14) Çalışma 1-in 2-ci misalının həlli y-in 0-dan 1-ə qədər dəyişəndə x-in e^y-dən e-yə qədər dəyişməsinə əsasən alarıq:

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx .$$

15) Çalışma 1-in 5-ci misalının həlli

y-in 0-dan 1-ə qədər dəyişiləndə x-in $\sqrt{y}$ -dən 1-ə qədər dəyişməsinə əsasən alarıq:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx .$$

16) Çalışma 2-in 2-ci misalının həlli

$$\iint_D \sqrt{x+y}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x+y}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1) .$$

17) Çalışma 2-nin 14-cü misalının həlli.

$$\iint_D 8ye^{4xy}dxdy = 8\int_{ln3}^{ln4} ydy \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^{4xy}dx = 2\int_{ln3}^{ln4} dye^{4xy} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\int_{ln3}^{ln4} (e^{2y} - e^y)dy = 2\left(\frac{1}{2}e^{2y} - e^y\right) \Big|_{ln3}^{ln4} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 16 - 4 - \frac{1}{2}\cdot 9 + 3\right) = 5.$$

18) Çalışma 3-ün 8-ci misalının həlli

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x} dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

19) Çalışma 3-ün 12-ci misalının həlli

$$\iint_D \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy = \int_{-2}^{4} dy \int_0^{y} \frac{y^3}{x^2+y^2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{4} y^2 arctg \frac{x}{y} \Big|_0^y dy = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{4} y^2 dy = \frac{\pi}{12} y^3 \Big|_{-2}^{4} = 6\pi .$$

20) Çalışma 4-ün 5-ci misalının həlli

$x = a\rho \sin\varphi \cos\theta, y = b\rho \sin\varphi \sin\theta, z = c\rho \cos\varphi,$

$0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$

sferik koordinatlara keçsək alarıq:

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz = abc \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{2\pi abc}{5} \cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} = \frac{4}{5} \pi abc .$$

21) Çalışma 4-ün 6-cı misalının həlli

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^2 (4+z)dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \frac{(4+z)^2}{2} \Big|_0^2 dy =$$

$$=10 \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy = 10 \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = 10\left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{40}{3} .$$

22) Çalışma 5-in 7-ci misalının həlli. x=4y-y^2 və x+y=6 xətləri (4,2) və (3,3) nöqtələrində kəsişirlər. Onda

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int\limits_2^3 dyx\Big|_{6-y}^{4y-y^2}=$$

$$=\int\limits_2^3(-y^2+5y-6)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Big|_2^3=\frac{1}{6}.$$

23) Çalışma 5-in 14-cü misalının həlli. y^2=x və y=2x xətləri (0,0) və $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ nöqtələrində kəsişirlər. Onda

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{y^2}^{\frac{y}{2}}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2}-y^2\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}.$$

24) Çalışma 6-nın 1-ci misalının həlli.

$$V=\iint\limits_d f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left((1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{6}.$$

25) Çalışma 6-nın 4-cü misalının həlli

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=$$

$$= \left(6\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right)\Bigg|_0^6 = \frac{48}{5}\sqrt{6}.$$

26) Çalışma 7-nin 3-cü misalının həlli.

$6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ tənliyini $\sqrt{x^2 + y^2}$ nəzərən həll etsək $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ olar. Deməli konus və paraboloid səthləri xoy müstəvisi üzərində proeksiyası $x^2 + y^2 = 4$ çevrəsi olan əyri boyunca kəsişirlər. Bu halda inteqrallama oblastı.

$V'(x^2 + y^2 \le 4, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2)$ olar. Cismin nöqtələri xoz və yoz müstəvilərinə nəzərən simmetrik olmasını nəzərə alaraq

$V = \iiint\limits_{V'} dxdydz$ düsturunda silindrik koordinatlara keçsək alarıq:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho)d\rho = \frac{32\pi}{3}.$$

27) Çalışma 7-nin 11-ci misalının həlli

Kürə səthinin tənliyi silindrik koordinatlarda $\rho = R$ şəkilini alır. Kürənin birinci oktantda olan hissəsinin həcmini hesablayaq.

$$\frac{V}{8} = \iiint\limits_{V'} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho =$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi R^3}{6} \text{ və ya } V=\frac{4}{3}\pi R^3 .$$

28) Çalışma 8-in 8-ci misalının həlli. Səthin birinci oktantda olan hissəsinin sahəsini hesablayaq.

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ z'_x=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(x^2+y^2=3)}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=3\iint\limits_{(x^2+y^2=3)}\frac{dxdy}{z}$$

düsturunda polyar koordinatlara keçsək alarıq.

$$\frac{S}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{\sqrt{9-\rho^2}}\rho d\rho=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}в\varphi=$$

$$=3(3-\sqrt{6})\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{3}{2}(3-\sqrt{6})\pi \text{ və ya } S=12\pi(3-\sqrt{6})\pi .$$

29) Çalışma 8-in 15-ci misalının həlli

$$z=\sqrt{2xy},\ z'_x=\frac{y}{\sqrt{2xy}},\ z'_y=\frac{x}{\sqrt{2xy}} \text{ və inteqrallama oblastı}$$

$D(0\le x\le 2, 0\le y\le 4)$ düzbucaqlısı olduğuna görə alarıq:

$$S=\iint\limits_D dS=\iint\limits_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dxdy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 dx\int_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Big|_0^4 dx=2\sqrt{2}\int_0^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Big|_0^2=16.$$

30) Çalışma 9-un 1-ci misalının həlli. İnteqralı J(α) ilə işarə edək.

$f(x,\alpha)=\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x},x\neq\frac{\pi}{2}$ olduqda,

$f(x,\alpha)=2\alpha,x=\frac{\pi}{2}$ olduqda, $f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}$

funksiyaları

$D(|\alpha|\leq 1-\varepsilon<1);0\leq x\leq\frac{\pi}{2})$ düzbucaqlısında kəsilməzdir. Onda

$$J'(\alpha)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1-\alpha^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\quad \text{və ya}$$

$J(\alpha)=\pi\arcsin\alpha+c$. Buradan $\varepsilon\to 0\Rightarrow J(0)=0=C$

olduğundan alarıq: $J(\alpha)=\pi\arcsin\alpha$

31) Çalışma 9-un 6-cı misalının həlli. inteqral α parametrinə nəzərən bütün oxda müntəzəm yığılır. Döğrudan da ixtiyarı ε>0 ədədi üçün

elə $\delta(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$ ədədi tapmaq olar ki, istənilən $a>\delta(\varepsilon)$ ədədi üçün

$$\left|\int_a^{\infty}\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx\right|=\left|\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx\right|=$$

$$=\left|\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\Big|_a^b\right)\right|=\left|\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b^2+\alpha^2}-\frac{a}{a^2+\alpha^2}\right|=$$

$$=\frac{a}{a^2+\alpha^2}\leq\frac{1}{a}<\frac{1}{\delta(t)}=\varepsilon$$

32) Çalışma 10-un 2-ci misalının həlli.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin_x^m\, cos_x^n\, dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$ düsturunda m=6 və n=4

yazsaq və

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \Gamma(m+\frac{1}{2}) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \Gamma(n+1) = n!, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

münasibətlərindən istifadə etsək alarıq:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 x\, cos^4 x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(6)}\Gamma(3+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{5!}\frac{5!!}{2^3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{4!}{2!2^4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{45}{64}\pi$$

33) Çalışma 10-un 14-cu misalının həlli.

$t = \sqrt[5]{x^2}, x = \sqrt{t^5}, dx = \frac{5}{2}\sqrt{t^3}dt$ əvəz etsək alarıq:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}} = \frac{5}{2}\int_0^1 \sqrt{t^3}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{5}{2}B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{5}{2\cdot 2!}\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \frac{15}{16}\pi.$$

XII FƏSİL

Əyrixətli və səth inteqralları

***Çalışma* 1.** Birinci növ əyrixətli inteqralları hesablayın (uzunluq üzrə)

1) $\int\limits_{\gamma}\frac{ds}{x-y}, y=\frac{1}{2}x-2$ düz xəttini (0,-2) və (4,0) nöqtələri arasında parça üzrə.

2) $\int\limits_{\gamma}xyds$, təpələri (0,0), (4,0), (4,2) və (0,2) nöqtələrində olan düzbucaqlının konturu üzrə.

3) $\int\limits_{\gamma}(x^2+y^2)^3ds, x=a\cos t, y=a\sin t$ çevrəsi üzrə.

4) $\int\limits_{\gamma}xds$, (0,0) və (1,2) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

5) $\int\limits_{\gamma}(x-y)ds$, (0,0) və (4,3) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

6) $\int\limits_{\gamma}\frac{yds}{\sqrt{x}}, y^2=\frac{4}{9}x^2$ əyrisinin $(3,2\sqrt{3})$ nöqtəsindən $\left(8,\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$ nöqtəsinədək olan qövsü üzrə.

7) $\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}ds, x^2+y^2=ax$ çevrəsi üzrə.

8) $\int\limits_{\gamma}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds, x=cos^3 t, y=sin^3 t, \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$ astroid əyrisi üzrə.

9) $\int\limits_{\gamma}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds,$ (-1,0) və (0,1) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

10) $\int\limits_{\lambda}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}, x-2y=4$ düz xəttinin (0,-2) və (4,2) nöqtələri arasındakı parçası boyunca.

11) $\int\limits_{\gamma}\frac{x^2}{y}ds, y^2=2x$ parabolasının $(1,\sqrt{2})$ nöqtəsindən (2,2) nöqtəsinədək olan qovsü üzrə.

12) $\int\limits_{\gamma}\frac{ds}{x+y}, y=x+2$ düz xəttinin (2,4) və (1,3) nöqtələri arasındakı parçası üzrə.

13) $\int\limits_{\gamma}yds, y=x^3$ əyrisinin (0,0) nöqtəsindən (3,3) nöqtəsinədək olan qövsü üzrə.

14) $\int\limits_{\gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, (0,0) və (1,2) nöqtələrini birləşdirən parça böyunca.

15) $\int \sqrt{x^2+y^2}ds, x=a(cost+t\,sint), y=a(sint-t\,cost), 0 \le t \le 2\pi$

əyrisi üzrə.

16) $\int\limits_{\gamma} xyds, x=0, y=-, x=4, y=2$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi düzbucaqlının konturu üzrə.

17) $\int\limits_{\gamma} xds, y=x^2$ parabolasının (2,4) nöqtəsindən (1,1) nöqtəsinədək olan qovsü üzrə.

***Çalışma* 2.** İkinci növ əyrixətli inteqralları hesablayın (koordinatlar üzrə)

1) $\int\limits_{\gamma} (x^2-y^2)dx, y=x^2$ parabolasının (1,1) nöqtəsindən (2,4) nöqtəsindək olan qovsü üzrə.

2) $\int\limits_{\gamma} xdy, y=x, x=2, y=0$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi üçbucağın konturu üzrə (müsbət istiqamətdə).

3) $\int\limits_{\gamma}(x^2+y^2)dy, x=0, y=0, x+y=2$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi üçbucağın konturu üzrə (müstəb istiqamətdə).

4) $\int\limits_{\gamma} xdy-ydx, y=x^3$ əyrisinin (0,0) nöqtəsindən (2,8) nöqtəsinədək olan qövsü üzrə.

5) $\int\limits_{\gamma} xdy+ydx, x=0, y=0, \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi üçbucağın konturu üzrə (müstəb istiqamətdə).

6) $\int\limits_{\gamma}(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips əyrisinin müsbət istiqaməti üzrə.

7) $\int\limits_{\gamma} 4x\sin^2 ydx+y\cos^2 xdy$, (0,0 və (3,6) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

8) $\int\limits_{\gamma} -x\cos ydx+y\sin xdy$, (0,0) və $(\pi,2\pi)$ nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

9) $\int\limits_{\gamma} xdx+ydy$, (1,1) və (2,4) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

10) $\int\limits_{\gamma} 2xdy - 3ydx,$ təpələri (1,2), (3,1) və (2,5) nöqtələrdə olan üçbucagın konturu üzrə (müsbət istiqamətdə).

11) $\int\limits_{\gamma} x^2dx + y^2dy,$ təpələri (0,0), (2,0), (4,4) və (0,4) nöqtələrində olan düzbucaqlının konturu üzrə (müsbət istiqamətdə).

12) $\int\limits_{\gamma} y(x-y)dx + xdy, y = 2x^2$ parabolasının (0,0) nöqtəsindən (1,2) nöqtəsinədək olan qövsü üzrə.

13) $\int\limits_{\gamma} y(x-y)dx + xdy, y^2 = 4x$ parabolasının (0,0) nöqtəsindən (1,2) nöqtəsinədək olan qövsü üzrə.

14) $\int\limits_{\gamma} (x^2 - y)dx$, (2,3) və (4,5) nöqtələrini birləşdirən parça boyunca.

15) $\int\limits_{\gamma} ydy + xdy$, təpələri (0,0), (1,0), (1,1) və (0,1) nöqtələrində olan düzbucaqlının konturu üzrə (müsbət istiqamətdə).

16) $\int\limits_{\gamma} (x^2 - y)dx$, x=0, y=0, x=1, y=2 düz xətlərinin əmələ gətirdiyi düzbucaqlının konturu üzrə (müsbət istiqamətdə).

17) $\int\limits_{\gamma}(xy-y^2)dx+xdy, y=2x^2$ parabolasının (0,0) nöqtəsindən (1,2) nbqtəsinədək olan qövsü üzrə.

Çalışma 3. Əyrixətli inteqralların köməyi ilə sahələri hesablayın.

1) xOy müstəvisi ilə $x^2+y^2=R^2$ və $z=R+\frac{x^2}{R}$ səthlər arasında yerləşən hisəsinin sahəsini tapın.
2) xOy müstəvisi ilə $y^2=2px$ və $z=\sqrt{2px-4x^2}$ səthlər arasında yerləşən hisəsinin sahəsini tapın.
3) xOy müstəvisi ilə $x^2+y^2=R^2$ və $2Rz=xy$ səthlər arasında yerləşən hisəsinin sahəsini tapın.
4) xOy müstəvisi ilə $y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3$ və $z=2-\sqrt{x}$ səthlər arasında yerləşən hisəsinin sahəsini tapın.
5) xOy müstəvisi ilə $y=\sqrt{2px}, z=y$ və $x=\frac{8}{9}$ səthlər arasında yerləşən hisəsinin sahəsini tapın.
6) $x^2+y^2=Rz$ səthinin $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferası daxilində yerləşən hissəsinin sahəsini tapın.
7) $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le 2\pi$ ellipsin sahəsini tapın.
8) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$ astroidın sahəsini tapın.
9) $y=x^2, x=y^2, 8xy=1$ əyriləri ilə əhatə olan fiqurun sahəsini tapın.
10) $y^2=x, x^2=y$ parabolaları ilə əhatə olan fiqurun sahəsini tapın.

11) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ Bernülli leminiskatı ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

12) $x=2a\cos t-a\cos 2t, y=2a\sin t-a\sin 2t, 0\le t\le 2\pi$ kardioida ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

13) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$ tsikloidinin bir tağının sahəsini tapın.

14) $x^3+x^2-y^2=0$ əyrisi ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.

15) $x^3+y^3-axy=0$ Dekart yarpağının ilgəyinin sahəsini tapın.

16) $y^2=x^2-x^4=0$ əyrisi ilə əhatə olunan sahəni tapın.

17) $9y^2=4x^3-x^4$ əyrisi ilə əhatə olunan sahəni tapın.

***Çalışma* 4.** Tam diferensiallara görə ibtidai funksiyaları tapın.

1) $dz=(y+ln(x+1)dx+(x+1-e^y)dy$,

2) $dz=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$,

3) $dz=(3x^2y+1)dx+(x^3-1)dy$?

4) $dz=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$,

5) $dz=(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3y^2x)dy$,

6) $dz=xy(xy^3dx+\frac{4}{3}x^2y^2dy)$,

7) $dz=4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$,

8) $dz=e^{xy}((1+xy)dx+x^2dy)$,

9) $dz = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$,

10) $dz = (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$

11) $dz = \frac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}$,

12) $dz = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$,

13) $dz = \frac{ydx - xdy}{x^2}$,

14) $dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$,

15) $dz = sin(x+y))dx + dy)$,

16) $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Çalışma **5.** Birinci növ səth inteqrallarını hesablayın (səthin sahəsi üzrə).

1) $\iint\limits_S (6x+4y+3z)ds$ burada S səthi x+2y+3z=6 müstəvisinin birinci oktantda yerləşmiş hissəsidir.

2) $\iint\limits_S xds$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasının birinci oktantda yerləşmiş hissəsidir.

3) $\iint\limits_S yds$, burada S səthi $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ yarımsferasıdır.

4) $\iint\limits_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, ds$, burada S səthi $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ yarımsferasıdır.

5) $\iint\limits_S x^2y^2ds$, $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ yarımsferasıdır.

6) $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})ds$, burada S səthi z=0, z=h müstəviləri ilə məhdud olan $x^2+y^2=a^2$ silindridir.

7) $\iint\limits_S \frac{z}{x^2+y^2}ds$, burada S səthi $z=x^2+y^2$ paraboloidinin $x^2+y^2=R^2$ silindri ilə kəsilmiş hissəsidir.

8) $\iint\limits_S xds$, burada S səthi $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ yarımsferasıdır.

9) $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, burada S səthi z=1 müstəviləri ilə məhdud olan $x^2+y^2=2z$ paraboloididir.

10) $\iint\limits_S (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)ds$, burada S səthi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konusunun $x^2+y^2=2x$ silindri ilə kəsilmiş hissəsidir.

11) $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, burada S səthi z=0, z=1 müstəviləri ilə məhdud olan $z^2=x^2+y^2$ səthidir.

12) $\iint\limits_S xyzds$, burada S səthi z=0 və z=1 müstəviləri ilə məhdud olan $x^2+y^2=z$ paraboloididir.

13) $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$, burada S səthi $x+y+z=1$ müstəvisinin birinci oktantda yerləşmiş hissəsidir.

14) $\iint\limits_S zds$, burada S səthi $x^2+y^2=2z$ səthinin $z=\sqrt{x^2+y^2}$ səthi ilə kəsilmiş hissəsidir.

15) $\iint\limits_S (x+y+z)ds$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasıdır.

16) $\iint\limits_S \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)ds$, burada S səthi $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ müstəvisinin birinci oktantda yerləşmiş hissəsidir.

17) $\iint\limits_S xyzds$, burada S səthi $x+y+z=1$ müstəvisinin birinci oktantda yerləşmiş hissəsidir.

Çalışma **6.** İkinci növ səth inteqrallarını hesablayın (koordinatlar üzrə).

1) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, burada $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ müstəviləri ilə əmələ gələn kubun müsbət tərəfidir.

2) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasının xarici tərəfidir.

3) $\iint\limits_S x^2dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının xarici tərəfidir.

4) $\iint\limits_S ydxdy$, burada S səthi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ müstəviləri ilə əmələ gələn piramidanın xarici tərəfidir.

5) $\iint\limits_S (y^2+z^2)dydz$, burada S səthi y0z müstəviləri ilə məhdud olan $x=a^2-y^2-z^2$ paraboloidinin xarici tərəfidir.

6) $\iint\limits_S z^2 dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+2z^2=2$ ellipsoididir.

7) $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasının xarici tərəfidir.

8) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, burada S səthi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ müstəviləri ilə əmələ gələn piramidanın müsbət tərəfidir.

9) $\iint\limits_S \frac{x^2y^2}{z^2}dxdy$, burada S səthi $z=2$ müstəvisi ilə $z^2=x^2+y^2$ konusunun əmələ gətirdiyi səthin xarici tərəfidir.

10) $\iint\limits_S \frac{y^2}{z}dxdy$ burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferanın aşağıdakı yarsının yuxarı tərəfidir.

11) $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasının xarici tərəfidir.

12) $\iint\limits_S (x^2+y^2)dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının xarici tərəfidir.

14) $\iint\limits_S xzdxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=1$ sferasının xarici tərəfidir.

15) $\iint\limits_S zdxdy$, burada S səthi $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$ ellipsoidinin xarici tərəfidir.

16) $\iint\limits_S x^2y^2dxdy$, burada S səthi $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferasının aşağıdakı yarısının müsbət tərəfidir.

17) $\iint\limits_S zdxdy$, burada S səthi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin xarici tərəfidir.

Nümunəvi həllər

1) $y^2=2x$ parabolasının A(1,1) və B(2,2) nöqtələri ilə məhdud AB hissəsi üzrə $\int\limits_{AB}\frac{x}{y}dl$ inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$y=\sqrt{2x},\, y'=\frac{1}{\sqrt{2x}},\, dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}=\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx$$

olduğuna görə alarıq:

$$\int\limits_{AB}\frac{x}{y}dl=\int\limits_1^2\frac{x}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{1+2x}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}).$$

2) $y=x^2$ parabolasının O(0,0) və A(1,1) nöqtələri ilə məhdud OA hissəsi üzrə

$$\int\limits_{OA}3x^2ydx+(x^3+1)dy$$

inteqralını hesablayın.

Həlli:

$$\int\limits_{OA} 3x^2 ydy + (x^3+1)dy = \int\limits_0^1 (5x^4+2x)dx = (x^5+x^2)\Big|_0^1 = 2$$

3) $x^2+y^2=R^2$ çevrəsi üzrə götürülmüş (müsbət istiqamətdə)

$$J = \oint xy^2 dy - x^2 ydx$$

inteqralını Qrin düsturu ilə hesablayın.

Həlli: Burada

$$P(x,y) = -x^2 y, Q(x,y) = xy^2, \frac{\partial P}{\partial x} = -x^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$$

olduğundan

$$J = \oint\limits_{r} xy^2 dy - x^2 ydx = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

yazmaq olar. Burada

$x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

polyar koordinatlara keçsək, alarıq:

$$J = \iint\limits_D \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} R^4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsin sahəsini hesablayın.

Həlli: Ellipsin

$x = a\cos t, yb\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ parametrik tənliyinə əsasən, alarıq:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos tb\cos t + b\sin tb\sin t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} abdt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

5) $x+y+z=1$ müstəvisinin birinci oktantda yerləşən hissəsinin xarici üzü üzrə götürülmüş $\iint\limits_S xdxdy$ inteqralını hesablayın.

Həlli: S səthinin tənliyi $z=1-x-y$ və onun $x0y$ müstəvisi üzərində proyeksiyası $D=(0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x)$ oblastı olar. Onda

$$\iint\limits_S xzdxdy = \iint\limits_D x(1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)dy =$$

$$= \int_0^1 (xy - x^2y - \frac{1}{2}xy^2)\Big|_0^{1-x} = \int_0^1 (x(1-x) - x^2(1-x) -$$

$$-\frac{1}{2}x(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

6) $z^2=x^2+y^2$ səthinin $z=0$, $z=1$ müstəviləri ilə məhdud olan hissəsi üzrə götürülmüş $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$ inteqralını hesablayın.

Həlli: Burada

$$z = \sqrt{x^2+y^2},\ z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$ds = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

olduğundan

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)ds = \sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Sağ tərəfdəki inteqralın inteqrallama oblastı $x^2+y^2 \le 1$ dairəsidir. Burada $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ polyar koordinatlara keçsək alarıq:

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)ds = \sqrt{2}\int_0^2 d\varphi\int_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\rho^4 d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

7) $x=0$, $y=0$, $z=0$ və $x+y+z=1$ müstəviləri ilə əhatə olunmuş piramidanın xarici üzü üzrə götürülmüş

$\iint\limits_s xdydz + ydxdz + zdxdy$ inteqralını hesablayın.

Həlli: Qauss-Ostroqradski düsturuna əsasən alarıq:

$$\iint\limits_s xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz =$$

$$=3\iiint\limits_V dxdydz = 3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} z\,\Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$=3\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = 3\int_0^1 (1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2)dx =$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)dx = \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

8) $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ vektorial meydanın divergensiyası və rotorunu hesablayın.

Həlli: Burada

$$P = x^2, Q = y^2, R = z^2, \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \frac{\partial R}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

olduğundan alarıq:

$$div\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x+y+z),$$

$$rot\bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} = 0.$$

9) Bərk cisim sabit ω bucaq sürəti ilə 0z oxu ətrafında fırlanır. $\bar{v}(M) = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ sürətlər meydanının divergensiyasını və rotorunu hesablayın.

Həlli: Burada

$$P = -\omega y, Q = \omega x, R = 0, \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = -\omega,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Olduğundan alarıq: $div\bar{v}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

$$rot\bar{v}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} =$$

$$= (\omega - (-\omega))\bar{k} = 2\omega\bar{k}.$$

10) Çalışma 1-in 5-ci misalının həlli: (0,0) və (4,3) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi $y = \frac{3}{4}x$ olar. Onda $y' = \frac{3}{4}$

$$\int_\gamma (x-y)ds = \int_0^4 (x - \frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{2}.$$

11) Çalışma 1-in 8-ci misalının həlli:

$$dx = -3\cos^2 t \sin t dt, dy = 3\sin^2 t \cos t dt,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3\sin t \cos t dt,$$

$$\int_\gamma (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t})$$

$$3\,sin\,t\,cos\,t dt = -12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos^2 t dt - 9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin^{\frac{5}{2}} t d\,sin\,t =$$

$$=-4\,cos^3 t\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{18}{7} sin^{\frac{7}{2}} t\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{46}{8}.$$

12) Çalışma 2-nin 7-ci misalının həlli: (0,0) və (3,6) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi y=2x olar.

Onda

$$\int_\gamma 4x\,sin^2 y dy + y\,cos^2 2x dy = \int_0^3 4x\,sin^2 2x dx +$$

$$+ 2x\,cos^2 2x d2x = 4\int_0^3 x(sin^2 2x + cos^2 2x)dx = 4\int_0^3 x dx = 18$$

13) Çalışma 2-nin 9-cu misalının həlli:

$xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$ əsasən alarıq:

$$\int xdx + ydy = \frac{1}{2}\int_{(1,1)}^{(2,4)} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,\Big|_{(1,1)}^{(2,4)} =$$

$$=\frac{1}{2}(20-2)=9.$$

14) Çalışma 2-nin 14-cu misalının həlli:
(2,3) və (4,5) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi y=x+1 olar. Onda

$$\int_{\gamma}(x^2-y)dx=\int_2^4(x^2-x-1)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_2^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_2^4-x\Big|_2^4=\frac{32}{3}$$

15) Çalışma 3-ün 8-ci misalının həlli:
dx=-3$a$cos^{2}tsintdt, dy=3$a$sin^{2}tcostdt əsasən alarıq:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\gamma}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t3a\cos^2 t\sin t)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t dt=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=$$

$$=\frac{3a^2\pi}{8}.$$

16) Çalışma 3-ün 10-cu misalının həlli:
Bu əyrilərin (0,0) və (1,1) nöqtələrində kəsişməsinə əsasən alarıq:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\gamma}(xdy-ydx)=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{x}dx=$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

17) Çalışma 4-ün 2-ci misalının həlli:

$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, Q=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan

$$z(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,yo)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt \quad (1)$$

düsturunda $x_0=1$, $y_0=1$ götürsək alarıq:

$$z=\int_1^x(\frac{1}{t}+1)dt+\int_1^y\left(\frac{2}{t}-\frac{x}{t^2}\right)dy=\ln x+2\ln y+\frac{x}{y}+c\,.$$

18) Çalışma 4-ün 15-ci misalının həlli:

$$P=x^2+2xy-y^2,Q=x^2-2xy-y^2$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan (1) düsturunda $x_0=0$, $y_0=0$ götürsək alarıq:

$$z(x,y)=\int_0^x t^2dt+\int_0^y(x^2-2xt-t^2)dt+c=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+c$$

19) Çalışına 5-in 1-ci misalının həlli:

$$z=\frac{1}{3}(6-x-2y),ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy$$

və inteqrallama oblastı D($0\le x\le 6-2y$, $0\le y\le 3$) olduğundan alarıq:

$$\iint_s(6x+4y+3z)ds=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint_D(5x+2y+6)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3dy\int_0^{6-2y}(5+2y+6)dx=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\right)\Big|_0^{6-2y}dy=$$

$$=2\sqrt{14}\int_0^3 (y^2-10y+21)dy = 2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y\right)\Big|_0^3 = 54\sqrt{14}.$$

20) Çalışma 5-in 11-ci misalının həlli:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\, ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{2}dxdy$$

və inteqrallama oblastı D($x^2+y^2 \le 1$) olar. Polyar koordinatlara keçsək alarıq:

$$\iint_S (x^2+y^2)ds = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy =$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

21) Çalışma 6-nın 8-ci misalının həlli:
Astroqradski düsturuna əsasən alarıq:

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1+1+1)dxdydz =$$

$$=3\iiint_V dxdydz = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} dy =$$

$$=3\int_0^1 \left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = 3\int_0^1 \left[1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx =$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

22) Çalışma 6-nın 11-ci misalının həlli:
Ostroqradski düsturunu tətbiq edərək sferik koordinatlara keçsək alarıq:

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy = 3\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz =$$

$$=3\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi R^5 .$$

XIII F Ə S İ L

Riyazi fizika tənlikləri

Çalışma 1. Sonlu simin sərbəst rəqs tənliyinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, t \geq 0, \ 0 \leq x \leq l$$

aşağıdakı başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

1) $u(x,0) = 2\sin\frac{n\pi x}{l}$, 2) $u(x,0) = 2\sin\frac{5\pi x}{l}$,

3) $u(x,0) = 3\sin\frac{4\pi x}{l}$, 4) $u(x,0) = 3\sin\frac{n\pi x}{l}$,

5) $u(x,0) = 4\sin\frac{5\pi x}{l}$, 6) $u(x,0) = \sin\frac{n\pi x}{l}$,

7) $u(x,0) = 6\sin\frac{2\pi x}{l}$, 8) $u(x,0) = 5\sin\frac{3\pi x}{l}$,

9) $u(x,0) = \sin\frac{4\pi x}{l}$, 10) $u(x,0) = \frac{x(l-x)}{8l}$,

11) $u(x,0)=4\cos\frac{n\pi x}{l}$, 12) $u(x,0)=\frac{x(l-x)}{10l}$,

13) $u(x,0)=5\sin\frac{5\pi x}{l}$, 14) $u(x,0)=3\sin\frac{3\pi x}{l}$,

15) $u(x,0)=\frac{x(l-x)}{5l}$, 16) $u(x,0)=\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l}$,

17) $u(x,0)=\frac{4x(l-x)}{l^2}$.

Çalışma 2. Çubuqda istiliyin yayılma tənliyinin

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,(0,l)\subset(0,\infty),u(0,t)=u(0,l)=0$$

aşağıdakı şərtləri ödəyən həllini tapın.

1) $u(x,0)=4\sin 3x$, 2) $u(x,0)=2\sin x$,

3) $u(x,0)=3\sin 2x$, 4) $u(x,0)=e^{-2x^2}$,

5) $u(x,0)=2\sin 5x$, 6) $u(x,0)=4e^{-x^2}$,

7) $u(x,0)=3\cos 2x$, 8) $u(x,0)=2\cos x$,

9) $u(x,0)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, 10) $u(x,0)=8e^{-\frac{x^2}{4}}$,

11) $u(x,0)=e^{-4x^2}$, 12) $u(x,0)=3\sin 4x$,

13) $u(x,0)=3\cos 4x$, 14) $u(x,0)=e^{-9x^2}$,

15) $u(x,0)=e^{-\frac{x^2}{9}}$, 16) $u(x,0)=2e^{-x^2}$,

17) $u(x,0)=2e^{-\frac{x^2}{4}}$.

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tənliyinin $u(0,t)=u(l,t)=0$ sərhəd və

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0\le x\le\dfrac{l}{2} \text{ olduqda,}\\ \dfrac{2h(l-x)}{l}, & \dfrac{l}{2}\le x\le l \text{ olduqda,}\end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x)=0$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

Həlli: Aydındır ki, simin başlanğıc andakı vəziyyəti təpələri $(0,0),\left(\dfrac{l}{2},h\right),(l,0)$ nöqtələrində olan üçbucaq şəklindədir.

Məsələni Furye metodu ilə həll edək. a_n və b_n əmsallarını hesablayaq. $F(x)=0$ olduğundan $b_n=0$ olar.

Onda

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+$$

$$+\frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=-\frac{4h}{n\pi l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}+$$

$$+\frac{4h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{4h}{n\pi l}(l-x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-$$

$$-\frac{4h}{n^2\pi^2}sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=-\frac{2h}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+$$

$$+\frac{2h}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Beləliklə,

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}sin\frac{n\pi}{2}sin\frac{n\pi}{l}x\,cos\frac{an\pi}{l}t.$$

2) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tənliyinin

$$u(x,0)=f(x)=u_0,\quad 0<x<\infty$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapın.

Həlli: Puasson düsturuna əsasən alarıq:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=y,\quad d\xi=-2a\sqrt{t}dy$ əvəz edək.

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty}2a\sqrt{t}\,e^{-y^2}dy=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{0}e^{-y^2}dy+\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy$$

olduğundan

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy\right)=\frac{u_0}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy\right)$$

və ya

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z}e^{-y^2}dy\right)$$

olar, burada $z=\frac{x}{2a\sqrt{t}}$.

3) Çalışma 1-in 4-cü misalının həlli. F(x)=0 olduğundan b_n=0 olar. Onda

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{3}\int_0^l 3\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx=$$

$$=\frac{6}{l}\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{6}{l}\int_0^l\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{l}x}{2}dx=\frac{3}{l}\int_0^l dx-$$

$$-\frac{3}{l}\int_0^l\cos\frac{2n\pi}{l}xdx=\frac{3}{l}l-\frac{3l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\Big|_0^l=3-0-3.$$

Beləliklə,

$$u(x,t)=3\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t$$

4) Çalışma 1-in 7-ci misalının həlli. Asanlıqla göstərmək olar ki, $sin\frac{n\pi x}{l}$ məxsusi həlləri [0,l] parçasında ortoqonaldır.

$f(x)=6\,sin\frac{2\pi x}{l}$ əsasən $a_n\neq0$ olması üçün hökmən $\lambda_2=\frac{2\pi}{l}$ olmalıdır.

$F(x)=0$ olduğundan $b_n=0$ olar. Onda $\lambda_2=\dfrac{2\pi}{l}$ qiymətində alarıq:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l 6\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx=$$

= (əvvəlki misala bax) =6.
Beləliklə,

$$u(x,t)=6\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}.$$

5) Çalışma 2-nin 3-cü misalının həlli. İstiliyin yayılma tənliyinin

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{p}{a^2}Y=-\frac{3}{a^2}\sin 2x$$

operator şəkilinin

$$Y(x,p)=c_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_2e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+\frac{3}{p+4a^2}\sin 2x$$

həllindən $u(0,t)=u(0,\frac{1}{2})=0$ sərhəd şərtlərinə əsasən alarıq:

$Y(x,p)=\dfrac{3}{p+4a^2}\sin 2x$. Bu həllin orijinalı

$u(x,t)=3e^{-4a^2t}\sin 2x$ olar.

XIV FƏSİL

Kompleks dəyişənli funksiyalar

Yoxlama işləri üçün çalışmalar

Çalışma 1. Tənlikləri həll edin.

1) $(x+i)^n-(x-i)^n=0,\ x\in R,$

2) $\cos x+i\sin x=\sin x+i\cos x,\ \ x\in R,$

3) $e^z+i=0,$ 4) $4\cos z+5=0,$

5) $e^{2z}+2e^z-3=0,$ 6) $e^{ix}=\cos\pi x,\ x\in R,$

7) $\sin z=\pi i,$ 8) $\sin z=3,$

9) $\ln(z+i)=0,$ 10) $\ln(i-z)=1,$

11) $e^{-iz}=i,$ 12) $shiz=-i,$

13) $chz=i,$ 14) $z^2=3-4i,$

15) $z^2+|z|=0,$ 16) $z^3+3z^2+3z+3=0,$

17) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0.$

Çalışma 2. Funksiyaların analitik olmasını yoxlayın və $f'(z)-$i tapın.

1) $f(z)=\dfrac{1}{z},$ 2) $f(z)=e^{2z},$ 3) $f(z)=ze^z,$

4) $f(z)=sin\dfrac{z}{3},$ 5) $f(z)=shz,$ 6) $f(z)=\ln z^2,$

7) $f(z)=z^2\bar{z},$ 8) $f(z)=\bar{z}e^{z^2},$ 9) $f(z)=\cos z,$

10) $f(z)=chz,$ 11) $f(z)=tgz,$ 12) $f(z)=z^2e^{-z},$

13) $f(z)=\dfrac{e^z}{z},$ 14) $f(z)=\dfrac{z\cos z}{1+z^2},$ 15) $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1},$

16) $f(z)=e^z,$ 17) $f(z)=x^3-3xy^2-i(y^3-3x^2y).$

Çalışma 3. İnteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_{\gamma} z dz$, burada $\gamma, z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır.

2) $\int\limits_{\gamma} e^{z} dz$, burada $\gamma, y = x^3$ əyrisinin $z_1 = 1$ nöqtəsindən $z_2 = 2 + i$ nöqtəsinədək olan qövsüdür.

3) $\int\limits_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$, burada $\gamma, z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır.

4) $\int\limits_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$, burada $\gamma, y = x^2$ əyrisinin $z_1 = 0$ nöqtəsindən $z_2 = 1 + i$ nöqtəsinədək olan qövsüdür.

5) $\int\limits_{\gamma} z dz$, burada $\gamma, y = 1 - x^2$ əyrisinin $z_1 = 0$ nöqtəsindən $z_2 = 2 + i$ nöqtəsinədək olan qövsüdür.

6) $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz$, burada $\gamma, x = \cos t, y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ qapalı əyrisidir.

7) $\int\limits_{0}^{i} z \cos z dz$, 8) $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$, 9) $\int\limits_{0}^{\pi(1-i)} e^{\bar{z}} dz$,

10) $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz$, 11) $\int\limits_{0}^{i} (z - i) e^{-z} dz$, 12) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-1)^n}$, burada $\gamma, |z - 1| = 3,\ 0 \le \arg z \le 2\pi$ çevrəsidir.

13) $\int\limits_{\gamma} \cos z dz$, burada $\gamma, z_1 = \frac{\pi}{2}$ və $z_2 = \pi + i$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır.

14) $\int\limits_{\gamma} |z| dz$, burada $\gamma, z_1 = -1$ və $z_2 = 1$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır.

15) $\int\limits_{0}^{1+i} \bar{z} dz$,

16) $\int\limits_{\gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$, burada $\gamma, |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$ çevrəsidir.

17) $\int\limits_{1}^{i} z \cos z dz$.

Çalışma 4. Koşi düsturundan istifadə edərək inteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_{|z|=4} \frac{ze^z}{z-2i} dz$,

2) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$,

3) $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{e^z dz}{(z-i)^4}$,

4) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$,

5) $\int\limits_{|z|=1} \frac{sh^2 z}{z^3} dz$,

6) $\int\limits_{|z|=2} \frac{zshz}{(z^2-1)^2} dz$,

7) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i} dz$,

8) $\int\limits_{|z|=4} \frac{zchz}{z-2i} dz$,

9) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$,

10) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z \sin z}{z-\pi i} dz$,

11) $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{1+z^3}$,

12) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2+2z}$,

13) $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{z^3+3z}$,

14) $\int\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$,

15) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^4}$,

16) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$,

17) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz$.

Çalışma 5. Funksiyaların məxsusi nöqtələrində çıxıqlarını hesablayın.

1) $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$,

2) $f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^3}$,

3) $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$,

4) $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$,

5) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z-1)}$,

6) $f(z)=\frac{z^2+1}{z-2}$,

7) $f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$,

8) $f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$,

9) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$,

10) $f(z)=\frac{z^2}{5-2z^2}$,

11) $f(z)=\frac{z}{1-3z^2}$,

12) $f(z)=\frac{\cos 2z}{(1-z)^3}$,

13) $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$,

14) $f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$,

15) $f(z)=\frac{\sin^2 z}{\cos z}$,

16) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$,

17) $f(z) = \dfrac{tgz}{z^2 - \dfrac{\pi}{4}z}$.

Çalışma 6. Çıxıqları tətbiq edərək inteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$,

2) $\int\limits_0^\infty \dfrac{1+x^4}{1+x^6} dx$,

3) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$,

4) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{(1+x^2)^5}$,

5) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{1+x}{(1+x^2)^3} dx$,

6) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{xdx}{(x^2+2x+5)^2}$,

7) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{1+x^2}{1+x^4} dx$,

8) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{(x^2+2x+2)^3}$,

9) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{x^4 dx}{(1+x^2)^4}$,

10) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2 \cos x}{(1+x^2)^2} dx$,

11) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin 2x}{x(x^2+4)} dx$,

12) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^3 \sin x}{1+x^2} dx$,

13) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x \sin x}{1+x^2+x^4} dx$,

14) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos x}{x^2+4} dx$,

15) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin 3x}{x^2+9} dx$,

16) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$,

17) $\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{1+x^6}$.

1) $f(z) = iz^2 + \bar{z}$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələrini ayırın.

Həlli: Burada

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = i(x+iy)^2 + (x-iy) =$$
$$= i(x^2 - y^2 + 2xyi) + x - iy = x - 2xy + i(x^2 - y^2 - y)$$

Beləliklə,

$$u(x,y) = x - 2xy, \quad v(x,y) = x^2 - y^2 - y$$

2) $\sin i$ hesablayın.

Həlli:

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = ish1.$$

3) $\ln(\sqrt{3} + i)$ hesablayın.

Həlli: Burada

$$z = \sqrt{3} + i, \quad \rho = |z| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi = \arg z = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)\right)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4) $Ln(1+i)$ hesablayın.

$$Ln(1+i) = \ln|1+i| + i\big(arctg(1+i) + 2k\pi\big) =$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5) i^i hesablayın.

Həlli:

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

6) $f(z) = z^2$ funksiyasının diferensiallanan olmasını yoxlayın.

Həlli:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

Buradan aydındır ki,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Dalamber-Eyler şərtləri ödənilir, yə'ni funksiya diferensiallanandır. Onda

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2yi = 2(x+iy) = 2z.$$

7) $\int\limits_{i}^{1+i} zdz$ hesablayın.

Həlli: İnteqralaltı funksiya analitik olduğundan Nyuton-Leybnis düsturuna əsasən, alarıq:

$$\int\limits_{i}^{1+i} zdz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_{i}^{1+i} = \frac{1}{2}\left((1+i)^2 - i^2\right) = \frac{1}{2} + i.$$

8) $|z| = \frac{1}{2}$ çevrəsi üzrə götürülmüş $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ inteqralını hesablayın.

Həlli: İnteqralaltı funksiya $|z| \le \frac{1}{2}$ dairəsində analitik olduğundan, Koşi teoreminə görə inteqral sıfıra bərabərdir, yə'ni

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

9) $|z-2| = 3$ çevrəsi üzrə götürülmüş $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $|z-2|\le 3$ dairəsində ancaq bir $z=0$ nöqtəsində inteqraltı funksiyanın məxrəci sıfıra çevrilir. İnteqralı

$$\int_{\gamma}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\int_{|z-2|=3}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz$$

şəklində yazaq. $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ funksiyası verilmiş oblastda analitik olduğundan, Koşi düsturuna əsasən $z=0$ nöqtəsində alarıq:

$$\int_{|z-2|=3}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\int_{|z-2|=3}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0}=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\pi i.$$

10) $f(z)=\dfrac{1}{2z-3}$ funksiyasını $z=0$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırasına ayırın.

Həlli: Verilmiş funksiyanı $f(z)=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z}$ şəklində yazaq.

$z=0$ nöqtəsinin ətrafında $\left|\dfrac{2}{3}z\right|<1$ bərabərsizliyi ödənildiyinə görə $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z}$ kəsrinə sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi kimi baxmaq olar. Onda

$$f(z)=-\frac{1}{3}-\frac{2z}{3^2}-\frac{2^2z^2}{3^3}-\frac{2^3z^3}{3^4}-\dots$$

Və ya

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} z^{n-1}$$

olar. $\left|\frac{2}{3}z\right| < 1$ bərabərsizliyindən aydındır ki, sıranın yığılma oblastı $|z| < \frac{3}{2}$ dairəsidir.

11) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2}$ funksiyasının çıxığını hesablayın.

Həlli: $z = 2$ nöqtəsi verilmiş funksiyanın sadə polyusu olduğundan

$$\operatorname{Re} sf(2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^2}{z-2} = \lim_{z\to 2} z^2 = 4.$$

12) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3}$ funksiyasının çıxığını hesablayın.

Həlli: $z = -1$ nöqtəsi verilmiş funksiyanın üçtərtibli polyusu olduğundan

$$\operatorname{Re} sf(-1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z+1)^3\frac{e^z}{(z+1)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}(e^z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1} e^z = \frac{1}{2e}.$$

13) Çalışma 1-in 14-cü misalının həlli:

$z = x + iy, (x+iy)^2 = 3 - 4i, x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i,$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}^2 = 4, x_{3,4}^2 = -1 \\ y_{1,2}^2 = 1, y_{3,4}^2 = -4 \end{cases}$$

Buradan

$$x_{3,4} = \sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = \pm i, y_{3,4} = \sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = \pm 2i$$

Onda

x_1=2, x_2=-2, x_3=i, x_4=-i, y_1=-1, y_2=1, y_3=2i, y_4=-2i.

14) Çalışma 1-in 15-ci misalının həlli:

$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2-y^2+2xyi+\sqrt{x^2+y^2}=0$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

$x=0$ olduqda sistemin birinci tənliyindən alarıq:

$$-y^2+\sqrt{y^2}=0, -y^2+|y|=0, |y|(|y|-1)=0, |y|=0$$

və ya $|y|-1=0, y_1=0, y_2=i, y_3=-i$, y=0 olduqda sistemin birinci tənliyindən $x^2+\sqrt{x^2}=0$ və ya $x^2+|x|=0$ alarıq ki, bu da ancaq x=0 olduqda mümkündür. Beləliklə tənliyin kökləri $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$ olar.

15) Çalışma 2-nin 1-ci misalının həlli: alırıq:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{x}{|z|}-i\frac{y}{|z|},(|z|=\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$u=\frac{x}{|z|}, V=-\frac{y}{|z|}, \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{|z|}, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial V}{\partial x}=0, \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{|z|}, \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial V}{\partial y}$$

Koşi-Riman şərtlərindən biri ödənmir. Deməli funksiya kompleks müstəvidə nə diferensiallanan nə də analitik deyildir.

16) Çalışma 2-nin 2-ci misalının həlli: alarıq:

$$e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y), u=e^{2x}\cos 2y,$$

$$V=e^{2x}\sin 2y, \frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y, \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=2e^{x}\sin 2y, \frac{\partial V}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y, \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

Koşi-Riman şərtləri ödənir. Deməк funksiya bütün müstəvidə analitikdir və diferensialanandır. Onda

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y+ie^{2x}\sin 2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=2e^{2z}$$

17) Çalışma 3-ün 4-cü misalının həlli:

$y=x^2$ parabolası üçün $dy=2xdx(0\le x\le 1)$ olar. Onda,

$$\int_\gamma (1+i-2\bar{z})dz=\int_0^1 (1-2x-(1+2x^2)2x)dx+i\int (1+2x^2+(1-2x)2x)dx=-2+\frac{4}{3}i,$$

18) Çalışma 3-ün 7-ci misalının həlli:

f(z)=z və φ(z)=cosz funksiyaları bütün kompleks müstəvidə analitikdir. Onda hissə-hissə inteqrallama düsturuna əsasən alarıq:

$$\int_0^i z\cos z dz=\int_0^i z(\sin z)'dz=(z\sin z)\Big|_0^i-\int_0^i \sin z dz=$$

$$=i\sin i+\cos z\Big|_0^i=i\sin i+\cos i-1=-sh1+ch1-1=\frac{1-e}{e}.$$

19) Çalışma 4-ün 1-ci misalının həlli:

$f(z)=ze^z$ funksiyası $|z|\le 4$ dairəsində analitik olduğundan Koşi düsturuna görə alarıq:

$$f(2i)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{ze^z}{z-2i}dz$$

$$2\pi i\cdot 2i\cdot e^{2i}=\int_{|z|=4}\frac{ze^z}{z-2i}dz \text{ və ya}$$

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{ze^z}{z-2i}dz = -4\pi e^{2i}.$$

20) Çalışma 4-ün 12-ci misalının həlli:

$|z|=3$ dairəsinin daxilindəki z=0 nöqtəsində $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+2z}$ funksiyasının məxrəçi sıfıra bərabər olur. İnteqralı

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2+2z} = \int\limits_{|z|=3} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z}dz$$ şəklində yazaq. $f(x)=\dfrac{e^z}{z+2}$ funksiyası $|z|\le 3$ dairəsinin daxilində analitik olduğundan Koşi düsturuna görə alarıq:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i\frac{1}{2} = \pi i.$$

21) Çalışma 5-in 2-ci misalının həlli: $f(x)=\dfrac{z^2}{(z-2)}$ funksiyasının üç tərtibli z=2 polyusuna nəzərən alarıq:

$$\operatorname{Re}sf(2) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}((z-2)^3 f(z)) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}z^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

22) Çalışma 5-in 12-ci misalının həlli.

$f(x)=\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^3}$ funksiyasının üç tərtibli z=1 polyusuna nəzərən alarıq:

$$Re\,sf(1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{cos\,2z}{(z-1)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}(-4\cos 2z)=-2\cos 2$$

23) Çalışma 6-nın 1-ci misalının həlli. $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ cüt funksiyanın yuxarı yarımmüstəvidə ikitərtibli x=i polyusuna və

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}sf(z_k) \qquad (1)$$

düsturuna görə alarıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}=2\pi i\operatorname{Re}sf(i)=2\pi i\frac{1}{4!}\lim_{z\to1}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{(z-i)^5}{(z^2+1)^5}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{12}i\lim_{z\to1}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{1}{(z+i)^5}\right)=\frac{\pi}{12}i\cdot\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{(2i)^9}=\frac{35\pi i}{128i}=\frac{35}{128}\pi\,.$$

24) Çalışma 6-nın 4-cü misalının həlli:

$f(x)=\dfrac{1}{(1+z^2)^5}$ funksiyasının yuxarı yarımmüstəvidə yerləşən birtərtibli z=i polyusuna və (1) düsturuna görə alarıq:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}2\pi i\,Re\,sf(i)=$$

$$\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(f(z)(z-i)^2\right)=\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)=\pi i \lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+1)^3}=$$

$$=\pi i\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{4}$$

XV FƏSİL

Operasiya hesabı

Çalışma 1. Aşağıdakı funksiyaların Laplas çevirməsini tapın.

1) $f(t)=te^t$, 2) $f(t)=t^2e^{-t}$,

3) $f(t)=\sin^2 3t$, 4) $f(t)=\sin^2 2t$,

5) $f(t)=\cos^2 \alpha t$, 6) $f(t)=e^{-\alpha t}$,

7) $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\beta t$, 8) $f(t)=e^{-\alpha t}\cos\beta t$,

9) $f(t)=t\sin\alpha t$, 10) $f(t)=t\cos\alpha t$,

11) $f(t)=\sin^3 t$, 12) $f(t)=t^2e^t$,

13) $f(t)=\cos^4 t$, 14) $f(t)=\sin^4 t$,

15) $f(t)=t+\frac{1}{2}e^{-t}$, 16) $f(t)=te^{-\alpha t}$,

17) $f(t)=\cos^3 t$.

Çalışma 2. Laplas çevirməsindən istifadə edərək diferensial tənlikləri həll edin.

1) $y''-3y'+2y=e^{3t}$, $y(0)=y'(0)=0$,

2) $y''+2y'+5y=1+t$, $y(0)=y'(0)=0$,

3) $y''+2y'+y=t^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

4) $y''+2y'+y=e^{-t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

5) $y''+2y'+y=1-t^2$, $y(0)=y'(0)=1$,

6) $y''+2y'+y=\sin t$, $y(0)=0, y'(0)=-1$,

7) $y''+2y'+5y=3t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

8) $y''+y'=\cos t$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$,

9) $y''+2y'=t\sin t$, $y(0)=y'(0)=0$,

10) $y''+3y'=e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$,

11) $y''-2y'+2y=\sin 2t$, $y(0)=y'(0)=1$,

12) $y''+4y=\cos 2t$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$,

13) $y''+3y'=e^{-3t}$, $y(0)=y'(0)=-1$,

14) $y''+y'=1$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$,

15) $y''+2y'=t^2+\sin t$, $y(0)=y'(0)=1$,

16) $y''-y'=2(1-t)$, $y(0)=y'(0)=1$,

17) $y''+2y'=e^t(t^2+t-3)$, $y(0)=y'(0)=2$.

Nümunəvi həllər

1) Aşağıdakı funksiyaların Laplas çevirməsini tapın.

1. $f(t)=t$, 2. $f(t)=\sin t$, 3. $f(t)=e^{\alpha t}$, 4. $f(t)=\sin\alpha t$.

Həlli:

1. $L[t]=\int_0^\infty te^{-pt}dt=\left.\frac{te^{-pt}}{p}\right|_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\left.\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right|_0^\infty=\frac{1}{p^2}$.

2. $L[\sin t]=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt=-\left.\frac{e^{-pt}(p\sin t+\cos t)}{1+p^2}\right|_0^\infty=\frac{1}{1+p^2}$.

3. $L\left[e^{\alpha t}\right]=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt=-\left.\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\right|_0^\infty=\frac{1}{p-\alpha}$.

4) $L[\sin\alpha t] = L\left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}\right)\right] = \frac{1}{2i}L\left[e^{i\alpha t}\right] - \frac{1}{2i}L\left[e^{-i\alpha t}\right] =$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p-\alpha i} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p+\alpha i} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

5) $y'' + 9y = t$ tənliyinin $y(0) = y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

Həlli:

$$L[y(t)] = Y(p) \text{ və } L[f(t)] = F(p)$$

qəbul etsək başlanğıc şərtlərinə görə

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p)$$

$$L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p)$$

$$L([t] = \frac{1}{p^2}$$

olduğundan

$$p^2Y(p) + 9Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

və ya $\quad Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+9}\right)$ olar.

Buradan $\quad L[t] = \frac{1}{p^2}$ və $L[\sin 3t] = \frac{3}{p^2+9}$

bərabərliklərinə əsasən alarıq:

$$y(t) = \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin 3t.$$

6) Çalışma 1-in 1-ci misalının həlli:

$$L\left[te^t\right] = \int_0^\infty te^te^{-pt}dt = \int_0^\infty te^{-(p-1)t}dt = -\frac{t}{p-1}e^{-(p-1)t}\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{p-1}\int_0^\infty e^{-(p-1)t}dt = -\frac{1}{(p-1)^2}e^{-(p-1)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(p-1)^2}$$

4) Çalışma 1-in 11-ci misalının həlli:

Eyler düsturuna $sint = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ əsasən alarıq:

$$L\left[\sin^3 t\right] = L\left[\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3\right] = L\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right] =$$

$$= \frac{3}{4}L[sint] - \frac{1}{4}L[sin3t] = \frac{3}{4}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4}\frac{3}{p^2+9} = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

5) Çalışma 2-nin 1-ci misalının həlli

$$L[y(t)] = Y(p), L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p)$$

$$L\left[e^{3t}\right] = \frac{1}{p-3}$$

$$p^2Y(p) - 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p-3}$$

Buradan,

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 - 3p + 2)(p-3)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)} =$$

$$= \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2(p-3)}$$

olduğundan Laplas çevirmələri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

8) Çalışma 2-nin 8-ci misalının həlli:

$$L[y(t)] = Y(p), L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2,$$

$$L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p,$$

$$L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}$$

$$p^2Y(p) - 2p + pY(p) - 2 = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2+p)Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + 2(p+1)$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} + \frac{2}{p(p^2+1)}$$

Buradan,

$$Y(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1}\right)$$

olduğundan Laplas çevirmələri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$y(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t).$$

XVI FƏSİL

Ehtimal nəzəriyyəsi

Yoxlama işləri üçün çalışmalar

Çalışma 1. Hadisələrin ehtimalını tapın.

1) 20 ağ və 6 qara kürəcik olan qutudan ardıcıl olaraq ixtiyari iki kürəcik çıxarılıb. Çıxarılan kürəciklərin hər ikisinin qara olma ehtimalını tapın.
2) 1-ci məsələnin şərtlərinə əsasən, çıxarılan kürəciklərin hər ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.
3) Üç atıcının hər biri hədəfə bir atəş açır. Hədəfin birinci atıcı tərəfindən vurulması ehtimalı 0,6, ikinci və üçüncü atıcılar üçün isə 0,7 və 0,75 –dir.Hədəfi heç olmasa bir atıcının vurma ehtimalını tapın.
4) 3-cü məsələnin şərtlərinə əsasən, hədəfi hər üç atıcının vurma ehtimalını tapın.
5) 1000 lotereya biletindən 24-ü pul, 10-nu isə əşya udur. 2 biletdən birinin udması ehtimalını tapın.
6) 5-ci məsələnin şərtlərinə əsasən, 2 biletdən birinin pul, digərinin əşya udması ehtimalını tapın.
7) İki atəşdən heç olmasa birinin hədəfə dəymə ehtimalı 0,75-dir. Beş atəşdən üçünün hədəfə dəymə ehtimalını tapın.
8) İki qutudan birincisində 4 qara, 10 ağ, ikincisində isə 6 qara, 12 ağ kürəcik var. Birinci qutudan ixtiyari bir kürəcik götürüb, ikinci qutuya qoyduqdan sonra, ikinci qutudan çıxarılan kürəciyin ağ olması ehtimalını tapın.
9) Üç qutudan birincisində 3 qara, 7 ağ, ikincisində 5 qara 8 ağ, üçüncüsündə 6 qara 10 ağ kürəcik var. Bu qutuların ixtiyari birindən çıxarılan bir kürəcik qara olur. Bu kürəciyin birinci qutudan olması ehtimalını tapın.
10) 9-cü məsələnin şərtlərinə əsasən kürəciyin ikinci qutudan olması ehtimalını tapın.

11) İki atıcı eyni zamanda hədəfə atəş açır. Hədəfin birinci atıcı tərəfindən vurulması ehtimalı 0,6, ikinci atıcınınki isə 0,8-dir. İlk atəş zamanı ancaq atıcılardan birinin hədəfi vurması ehtimalını tapın.
12) Anbardakı məhsulların 20%-i birinci fabrikdə, 46%-i ikinci fabrikdə, 34%-i isə üçüncü fabrikdə hazırlanmışdır. Bu fabriklərin buraxdığı məhsulların uyğun olaraq 3%,2% və 1%-i zay olur. Təsadüfi götürülmüş hər hansı bir məhsulun zay olması ehtimalını tapın.
13) 12-cu məsələnin şərtlərinə əsasən, zay məhsulun birinci fabrikdə hazırlanması ehtimalını tapın.
14) 52 oyun kartını ixtiyarı olaraq iki hissəyə böldükdə, hər bir hissədə 13 qara və 13 qırmızı kartın olması ehtimalı tapın.
15) Üç oyun zərini atdıqda yuxarı düşən üzdə xallar cəminin 11 olması ehtimalını tapın.
16) Tələbə proqramın 25 sualından 20-ni bilir. Tələbənin iki suala cavab verməsi ehtimalını tapın.
17) Qrupda 18 oğlan və 22 qız var. Oğlanların 25% qızların isə 5% idmançıdır. Təsadüfi seçilmiş uşağın idmançı oğlan olması ehtimalını tapın.

Çalışma 2. Asılı olmayan sınaqlarda hadisələrin ehtimalını tapın.

1) 500 səhifədən ibarət kitabda 50 səhv buraxılmışdır. Təsadüfi açılan səhifədə heç olmasa 3 səhv olması ehtimalını tapın.
2) Fabrikdə hazırlanmış məhsulun zay olması ehtimalı 0,6-dır. 2400 məhsuldan 1400-nün zay olması ehtimalını tapın.
3) Asılı olmayan sınaqların hər birində hadisənin baş vermə ehtimalı 0,9-dur. 100 sınaqda hadisənin ən azı 75 və ən çoxu 90 dəfə başverməsi ehtimalını tapın.

4) Asılı olmayan sınaqların hər birində hadisənin başvermə ehtimalı 0,51-dır. 100 sınaqda hadisənin 50 dəfə başvermə ehtimalını tapın.
5) Asılı olmayan sınaqların hər birində hadisənin başverməsi ehtimalı 0,8-dir. 144 sınaqda hadisənin 120 dəfə başvermə ehtimalını tapmalı.
6) Asılı olmayan sınaqların hər birində hadisənin başvermə ehtimalı 0,8-dir. Neçə sınaq aparmaq lazımdır ki, hadisənin başverməsinin nisbi tezliyini onun 0,6826 ehtimalından meylinin 0,02-dən çox olmadığını gözləmək mümkün olsun.
7) Asılı olmayan sınaqların hər birində hadisənin başvermə ehtimalı 0,2-dir. 800 sınaq aparılmışdır. Hadisənin başverməsinin nisbi tezliyinin onun ehtimalından ən çoxu 0,04 qədər fərqlənmə ehtimalını tapın.
8) Atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,3-dür. 30 atəşdən 8-nin hədəfə dəymə ehtimalını tapın.
9) Dəzgahda hazırlanan detalların 40%-i əla növdür. İxtiyari götürülmüş 26 detaldan yarısının əla növ olma ehtimalını tapın.
10) Müəyyən sınaqlar aparılmış və hər sınaqda hadisənin başvermə ehtimalı 0,85-dir. Hadisənin başvermə tezliyi ilə onun ehtimalı fərqinin 0,01 ədədindən kiçik olma ehtimalının 0,99 olması üçün nə qədər sınaq aparmaq lazımdır.
11) Fabrikin istehsal etdiyi məhsulun 70%-i əla növdür. 1000 dəst məhsul içərisindəki əla növ məhsulların 652 ilə, 760 arasına düşmə ehtimalını tapın.
12) Sexdə hazırlanmış detalın zay olma ehtimalı 0,005-dir. 10000 detaldan ibarət partiyada 40 detalın zay olması ehtimalını tapın.
13) Göldən tutulan 1000 balığı nişanlayıb, yenidən gölə buraxdılar. Bu göldə nə qədər balıq olmalıdır ki, tutulan 150 balıqdan 10 dənəsinin nişanı olma ehtimalı ən böyük olsun.

14) 500 nəfərdən 5 nəfərin eyni gündə anadan olma ehtimalını tapın.

15) 300 sınaqdan ibarət olan seriyada A hadisəsinin başvermə tezliyinin, onun $p=\frac{1}{6}$ ehtimalından meylinin 0,01-dən kiçik olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

16) Oyun zəri 10 dəfə atılmışdır. Yuxarı düşən üzündə rəqəmin 3 dəfə 6 düşməsi ehtimalını tapın.

17) Qutuda 6 ağ və 9 qara kürəcik var. Qutudan çıxarılan bir kürəcik nişanlanıb yenidən qutuya qaytarılır. Bu proses üç dəfə təkrar olunur. Çıxarılan üç kürəcikdən ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

Çalışma 3. Təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikalarını hesablayın.

1) Asılı olmayan X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. X dəmir pulu 2 dəfə atdıqda gerb üzünün düş-məsinin sayıdır, Y oyun zərini bir dəfə atdıqda yuxarı düşən xalların sayıdır.
   1. X-Y təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasını tapın.
   2. X+Ytəsadüfi kəmiyyətinin paylanmasını tapın.
   3. XY təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasını tapın.
   4. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi və dispersiyasını tapın.
   5. X+Y təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapın.
   6. XY təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyasını tapın.

2) Eyni vaxtda iki oyun zəri atılır. Zərlərin yuxarı düşən üzündə ki, xallar cəminin paylanmasını tapın.

3) X təsadüfi kəmiyyəti m=0,1,…,N mümkün qiymətlərini $P(x=m)=\dfrac{1}{N+1}$ ehtimalı ilə aldıqda ona $[0,N]$ parçasında müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. X kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

4) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\in[a,b]\end{cases}$$

olduqda ona müntəzəm paylanmış kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyilir $[a,b]$ parçasında müntəzəm paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

5) X təsadüfi kəmiyyəti m=0,1,2,... mümkün qiymətlərini $P(x=m)=(1-p)p^{m}, 0<p<1$ ehtimalı ilə aldıqda ona həndəsi qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. X kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

6) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0<x\le 0\end{cases}$$

olduqda ona üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. X kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

7) X təsadüfi kəmiyyəti $m=0,1,..n$ mümkün qiymətlərini

$$P(X=m)=\frac{\mu^{m}}{m!}e^{-\mu}, \mu>0$$

ehtimalı ilə aldıqda ona Puasson qanunu ilə paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

X kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözəlməsini tapın.2. Dispersiyasını tapın.

8) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty<x<\infty, \sigma>0$$

şəklində olduqda, ona normal qanun ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. X kəmiyyətinin: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

9) X təsadüfi kəmiyyəti a və σ parametrli normal paylanma qanununa malik olduqda $Y=e^X$ funksiyasının riyazi gözləməsini tapın.

10) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0,\ \ x>\pi \ \text{олдугда}, \\ -\dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le \pi \ \text{олдугда}, \end{cases}$$

şəklində verilmişdir. 1. X kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın. 2. X kəmiyyətinin dispersiyasını tapın.

11) Dəmir pulu n dəfə atdıqda gerb üzünün yuxarı düşməsi sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırasını yazın: 1. Riyazi gözləməsini tapın. 2. Dispersiyasını tapın.

12) Qutuda 100 kürə var, onlardan 25-i ağdır. Qutudan ardıcıl olaraq iki kürə çıxarılır, X_1-birinci, X_2-ikinci sınaqda çıxarılan ağ kürələrin sayıdır. X_1,X_2 və $X_1 \cdot X_2$ təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsini tapın.

13) Atıcı 30 güllə ilə hər birində üç güllədən çox sərf etmədən 10 hədəfə atəş açır. Hər atəşdə hədəfin vurulması ehtimalının 0,5-ə bərabər olduğunu fərz edərək güllələrin sayının riyazi gözləməsini (10 hədəfə sərf olunan güllələrin orta sayını) tapın.

14) Qutuda 30 kürə var, onlardan 6-sı ağdır. Qutudan təsadüfi olaraq 8 kürə çıxarılır. Çıxarılan ağ kürələrin X sayının riyazi gözləməsini tapın.

15) Oyun zərini üç və dörd dəfə atdıqda yuxarı düşən üzündəki xallar sayının cəminin paylanma mərkəzinin və orta kvadratik meylini tapın.

16) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $P(x)=|x|e^{-x^2}$ şəklində verildikdə, onun aldığı qiymətin (0,1) intervalına düşmə ehtimalını tapın.

17) Oyun zərini bir dəfə atdıqda yuxarı düşən üzündə xalların X sayının paylanma mərkəzini və orta kvadratik meylini tapın.

Nümunəvi həllər

1) Dəmir pulu iki dəfə atdıqda, heç olmasa birində gerb üzünün düşmə ehtimalını tapın.

Həlli: Aşağıdakı hallar ola bilər 1. Gerb və gerb; 2. Gerb və şəbəkə; 3. Şəbəkə və gerb; 4.şəbəkə və şəbəkə; onda $m=3$ və $n=4$ olduğundan alarıq:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}.$$

2) Eyni formalı üç qutunun birincisində 3 ağ və 7 qara, ikincisində 4 ağ və 16 qara, üçüncüsündə 15 ağ və 15 qara kürə vardır. Bu qutuların biri təsadüfi götürülür və ondan bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: Birinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_1, ikinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_2, üçüncü qutunun götürülməsi hadisəsi A_3 və çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsi B olsun. Qutuların götürülməsi eyni ehtimallı hadisələr olduğundan

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}.$$

olar. A_1, A_2, A_3 hadisələrinin başverməsi şərtində B hadisəsinin şərti ehtimalı uyğun olaraq

$$P_{A_1}(B)=\frac{3}{10}=0{,}3, \quad P_{A_2}(B)=\frac{4}{20}=0{,}2, \quad P_{A_3}(B)=\frac{15}{30}=0{,}5,$$

olar. Onda tam ehtimal düsturuna əsasən, taparıq:

$$P(B)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2+\frac{1}{3}\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}(0{,}3+0{,}2+0{,}5)=\frac{1}{3}\approx 0{,}33.$$

3) Eyni formalı iki qutunun birincisində 4 ağ və 6 qara, ikincisində 6 ağ və 14 qara kürə vardır. Bu qutuların biri təsadüfən götürülür və

...dan bir ağ kürə çıxarılır. Kürənin birinci qutudan çıxarılması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli: Birinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_1, ikinci qutunun götürülməsi hadisəsi A_2, və çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsi B olsun. Qutuların götürülməsi eyni ehtimalli hadisələr olduğundan

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

olar. A_1, A_2 hadisələrinin başverməsi şərtində B hadisəsinin şərti ehtimalı uyğun olaraq

$$P_{A_1}(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4, \qquad P_{A_2}(B) = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

olar. Onda tam ehtimal düsturuna görə:

$$P(B) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}4 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}3 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}7 = 0{,}35$$

Beləliklə, Bayes düsturuna əsasən taparıq:

$$P_B(A) = \frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}4}{0{,}35} = \frac{0{,}2}{0{,}35} = \frac{4}{7}.$$

4) Qutuda 9 ağ və bir qara kürə vardır. Bu qutudan təsadüfən 3 kürə çıxarılır. Çıxarılan kürələrin hamısının ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: A hadisəsi üçün mümkün halların sayı $n = C_{10}^3$ və əlverişli halların sayı $m = C_9^3$ olar. Onda

$$P(A) = \frac{C_9^3}{C_{10}^3} = \frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot\frac{3!\cdot 7!}{10!} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

5) Dəmir pulu 10 dəfə atdıqda gerb üzünün 5 dəfə düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli:

$$p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}\approx 0,25$$

6) $n=100,\ m=500$ və $p=\dfrac{1}{2}$ olduqda $P_2(500)$ ehtimalını hesablayın.

Həlli:

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{500-\frac{1}{2}\cdot 1000}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{4}}}=0$$

olduğundan Laplasın limit teoreminə əsasən, alarıq:

$$P_2(500)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1000\cdot\frac{1}{4}}}e^{0}\approx 0,2523$$

7) $n=100,\ 20\le m\le 1000$ və $p=0,2$ olduqda $P(20\le m\le 100)$ ehtimalını hesablayın.

Həlli:

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}=4$$

$$x_{20}=\frac{20-100\cdot 0,2}{4}=0 \text{ və } x_{100}=\frac{100-100\cdot 0,2}{4}=20$$

olduğundan Laplasın inteqral teoreminə əsasən alarıq:

$$P(20\le m\le 100)\approx\Phi(20)-\Phi(0)=0,500-0=0,5$$

8) Müəyyən sınaqlar aparılmış və hər sınaqda A hadisəsinin başvermə ehtimalı 0,36 bərabərdir. A hadisəsinin başvermə tezliyi ilə onun ehtimalı fərqinin 0,01 ədədindən kiçik olması ehtimalının 0,99 olması üçün nə qədər sınaq aparmaq lazımdır?

Həlli: $p=0,36,\ \varepsilon=0,01,\ P_x=0,99,\ q=1-0,36=0,64$

Olduğundan nisbi tezliyin ehtimaldan meylinin qiymətləndirilməsi düsturuna əsasən

$$2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,36\cdot 0,64}}\right)=0,99$$

olar. Buradan $\Phi(x)$ funksiyasının qiymətləri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}36\cdot 0{,}64}}=2{,}58$$

və ya

$$n=\frac{(2{,}58)^2}{(0{,}01)^2}\cdot 0{,}36\cdot 0{,}64=15335$$

9) $n=200,\ p=0{,}005$ olduqda $P_{200}(2)$ hesablayın.

Həlli: $\mu=np=200\cdot 0{,}005=1$ olduğundan Puasson düsturuna əsasən alarıq:

$$P_{200}(2)\approx\frac{1!}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2}e^{-1}=0{,}184$$

10) Binomial qanunla paylanmış diskret təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyasını tapın.

Həlli: Tə'rifə görə alarıq:

$$MX=\sum_{k=0}^{n}x_k p_k=\sum_{k=0}^{n}kp(X=k)=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np(p+(1-p))^{n-1}$$

$$MX=np$$

$$DX=\sum_{k=1}^{n}DX_k=\sum_{k=1}^{n}(MX_k^2-(MX_k)^2)=\sum_{k=1}^{n}(p-p^2)=\sum_{k=1}^{n}pq$$

$$DX=npq.$$

11) Çalışma 1-in 2-ci məsələnin həlli:
Mümkün olan halların sayı

$$n=C_{26}^2=\frac{26\cdot 25}{1\cdot 2}=13\cdot 25$$

və əlverişli halların sayı

$$m = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 10 \cdot 19$$ olduğuna görə alarıq:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 19}{13 \cdot 25} = 0{,}58\,.$$

12) Çalışma 1-in 17-ci məsələnin həlli:
Uşaqların oğlan, qız və idmançı oğlan olması hadisələrini uyğun olaraq A, B və C ilə işarə edək. Onda

$$P(A) = \frac{18}{40}, P(B) = \frac{22}{40}, P_A(C) = 0{,}25, P_B(C) = 0{,}05$$

Buradan tam ehtimal və Bajes düsturlarına görə alarıq:

$$P(C) = P(A)P_A(C) + P(B)P_B(C) = \frac{18}{40}0{,}25 + \frac{22}{40}0{,}5 = 0{,}14\,.$$

$$P_C(A) = \frac{P(A)P_A(C)}{P(C)} = \frac{18}{40}0{,}25\frac{1}{0{,}14} = \frac{45}{56}.$$

13) Çalışma 2-nin 1-ci məsələsinin həlli:

n=500, P=$\frac{1}{500}$, $\mu = np = 0{,}1$ olduğundan təsadüfi açılan səhifədə buraxılan xətaların sayını m ilə işarə etsək Puasson düsturuna görə alarıq:

$$P_{500}(m) = \frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1},$$

$$P_{500}(m \geq 3) = 1 - P_{500}(m < 3) = 1 - \sum_{m=0}^{2}\frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1} =$$

$$= 1 - (P_{500}(0) = e^{-0{,}1} + P_{500}(1) = 0{,}1e^{-0{,}1} + P_{500}(2) = 0{,}005e^{-0{,}1}) =$$

$$= 1 - (1 + 0{,}1 + 0{,}005)e^{-0{,}1} = 1 - 1{,}105 \cdot 0{,}904837 = 1 - 0{,}999845 =$$

$$= 0{,}000165$$

14) Çalışma 2-nin 9-cu məsələsinin həlli:
P=0,4 n=26, m=13, q=1-0,4=0,6

Olduğundan Laplasın limit teoreminə və φ(x) funksiyasının qiymətləri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{13-26\cdot 0{,}4}{\sqrt{26\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{2{,}6}{2{,}5}=1{,}04,\qquad \varphi(1{,}04)=0{,}2323$$

$$P_{26}(13)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{0{,}2323}{2{,}5}=0{,}093$$

15) Çalışma 2-nin 10-cu məsələsinin həlli:

p=0,85; q=1-0,85=0,15; ε=0,01; P=0,99 olduğundan Laplasın inteqral teoreminə və Φ(x) funksiyasının qiymətləri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx 0{,}99,\qquad 0.01\sqrt{\frac{n}{pq}}=3;(0{,}01)^2\,\frac{n}{0{,}85\cdot 0{,}15}=9,$$

$$n\approx\frac{0{,}85\cdot 0{,}15\cdot 9}{(0{,}01)^2}=\frac{1{,}1475}{0{,}00001}=11475$$

16) Çalışma 2-nin 15-ci məsələsinin həlli:

$$p=\frac{1}{2};\varepsilon=0{,}01;\qquad \left|\frac{m}{300}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01$$

və ya 47≤m≤53 olduğundan Laplasın inteqral teoreminə və Φ(x) funksiyasının qiymətləri cədvəlinə əsasən alarıq:

$$P(47\le m\le 53)\approx\Phi\left(\frac{53-300\frac{1}{6}}{\sqrt{300\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)-\Phi\left(\frac{47-300\frac{1}{6}}{\sqrt{300\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{18}{10\sqrt{15}}\right)-\Phi\left(-\frac{18}{10\sqrt{15}}\right)\approx\Phi(0{,}46)+\Phi(0{,}46)\approx 0{,}35$$

17) Çalışma 3-ün 4-cu məsələsinin həlli: tərifə görə alarıq

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx = \int_a^b x\frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$MX^2 = \int_a^b x^2\frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3(b-a)}x^3 \Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Onda

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 P(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

18) Çalışma 3-ün 6-cı məsələsinin həlli:
Tərifə görə alarıq:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx = \int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx = -\int_0^{\infty} xde^{-\lambda x} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$DX = \lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

19) Çalışma 3-ün 7-ci məsələsinin həlli:

$$MX=\sum_{m=0}^{\infty} mp(X=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^{m-1}}{(m-1)!}=$$

$$=\mu e^{-\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu^m}{m!}=\mu e^{-\mu}\cdot e^{\mu}=\mu.$$

Hesablamada $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu^m}{m!}=e^{\mu}$ bərabərliyindən istifadə olunmuşdur.

$$MX^2=M[X(x-1)+X]=MX(x-1)+MX=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+\mu=\mu^2 e^{-\mu}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\mu^{m-2}}{(m-2)!}+\mu=$$

$$=\mu^2 e^{-\mu}e^{\mu}+\mu=\mu^2+\mu.$$

$$DX=MX^2-(MX)^2=\mu^2+\mu-\mu^2=\mu.$$

20) Çalışma 3-ün 8-ci məsələsinin həlli:
Tərifə görə

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

olar. Burada $\frac{x-a}{\sigma}=t, x=a+\sigma t, dx=\sigma dt$ əvəzləməsini aparsaq alarıq:

$$MX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=a.$$

Hesablamada $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$ bərabərliyindən (Puasson inteqralı) istifadə olunmuşdur.

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-t) de^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-t) e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

ƏLAVƏLƏR

Əsas düsturlar və münasibətlər

Xətti cəbr

1) Üçtərtibli determinant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

2) Tərs matris: Üçtərtibli matrisin tərs matrisi

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta(A) \neq 0$$

düsturu ilə tapılır, burada A_{ij}, $a_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ elementlərinin cəbri tamamlayıcısıdır.

3) Üçməchullu üç xətti tənliklər sistemi:

Belə tənliklər

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

şəklindədir. Bu sistemin həlli $\Delta \neq 0$ olduqda Kramer düsturları

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{z},$$

ilə tapılır, burada

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & q_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & b_1 \\ b_2 & a_{22} & b_2 \\ b_3 & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Verilən sistemi $Ax=B$ matris şəklində yazmaq olar, burada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta(A) \neq 0$ olduqda (1) sisteminin həlli $X=A^{-1}B$ olar ki, burada yenə də Kramer düsturlarını alarıq.

Analitik həndəsə

Vektorlar cəbri

1) $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının cəmi $\bar{a}+\bar{b}$ elə vektora deyilir ki, bu vektor $\bar{a}$ vektorunun başlanğıcından çıxıb $\bar{b}$ vektorunun sonunda qurtarsın: bu şərtlə ki, $\bar{b}$ vektoru $\bar{a}$ vektorunun sonuna tətbiq olunsun (paraleloqram qaydası).

2) $\bar{b}$ və $-\bar{a}$ vektorlarının cəminə $\bar{b}$ və $\bar{a}$ vektorlarının fərqi deyilir və $\bar{b}-\bar{a}$ ilə işarə olunur, burada $-\bar{a}$ vektoru $\bar{a}$ vektorunun əks vektorudur.

3) $\bar{a}$ vektorunun λ ədədinə $\lambda\bar{a}$ hasili elə vektora deyilir ki, onun uzunluğu $|\lambda||\bar{a}|$, istiqaməti isə $\lambda>0$ olduqda $\bar{a}$ ilə eyni, $\lambda<0$ olduqda isə $\bar{a}$ ilə əks olsun.

4) $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, (|\bar{a}_0| = 1)$ vektoruna $\bar{a}$ vektorunun ort (vahid) vektoru deyilir.

5) $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları kollineardır, əgər $\bar{b}=k\bar{a}$ (k-skalyardır)

6) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorları komplanardır, əgər $\bar{c} = k\bar{a} + l\bar{b}$ (k,l-skalyardır).

7) Düzbucaqlı (x,y) və polyar (ρ,φ) koordinatlar arasında əlaqə:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

8) Düzbucaqlı (x,y,z) və silindrik (ρ,φ,z) koordinatlar arasında əlaqə:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z.$$

9) Düzbucaqlı (x,y,z) və sferik (ρ,φ,θ) koordinatlar arasında əlaqə:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta.$$

10) $\bar{a}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyası

$$\Pi p_l\bar{a} = \bar{a}\cos\varphi, \varphi = (\bar{a},\hat{\ }l).$$

11) $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının skalyar hasili

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \varphi = (\bar{a},\hat{\ }\bar{b}).$$

$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları ortonormaldır, əgər $(\bar{a},\bar{b}) = 0$. Əgər $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$ və $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$, onda

$$(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Xüsusi halda $\bar{a} = \bar{b}$ olarsa,

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

12) $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının vektorial hasili

$$\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$$

vektorudur, burada $\bar{c}\perp\bar{a}, \bar{c}\perp\bar{b}, |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$,

$\varphi = (\bar{a},\hat{\ }\bar{b}), \bar{a},\bar{b},\bar{c}$ üçlüyü sağ oriyentasiyalıdır. Əgər $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$ və $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$, onda

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

burada $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ koordinat oxlarının ortlarıdır.

13) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarının qarışıq hasili $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})$ ifadəsin deyilir. $|(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})|$ həmin vektorlar üzərində qurulmuş paral pipedin həcminə bərabərdir.

$$V=|(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})|.$$

Əgər $\bar{a}\,(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}\,(x_2,y_2,z_2)$, $\bar{c}\,(x_3,y_3,z_3)$ onda

$$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Müstəvi üzərində düz xətt

1) (x_1,y_1) və (x_2,y_2) nöqtələri arasındakı məsafə:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2) (x_1,y_1) və (x_2,y_2) nöqtələri arasındakı parçanı λ nisbətində bölən nöqtənin koordinatları:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Xüsusi halda λ=1 olarsa, parçanı yarıya bölən (x,y) nöqtəsinin koordinatları:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3) Təpə nöqtələri (x_1,y_1) , (x_2,y_2) və (x_3,y_3) olan üçbucağın sahəsi:

$$S = \pm\frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)).$$

4) Düz xəttin vektorial tənliyi:

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{a}.$$

5) Düz xəttin parametrik tənliyi:

$$x = x_0 + tm, \quad y = y_0 + tn.$$

6) Düz xəttin kanonik tənliyi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

7) Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi:

$$y = kx + b, \quad k = tg\varphi.$$

8) Verilmiş (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən və bucaq əmsallı k olan düz xəttin tənliyi:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

9) (x_1, y_1) və (x_2, y_2) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

10) Düz xəttin parçalarla tənliyi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

11) Düz xəttin ümumi tənliyi:

$$Ax + By + C = 0, \; A^2 + B^2 \neq 0.$$

12) Düz xətt tənliyinin normallaşdırıcı vuruğu:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, (A^2 + B^2 > 0).$$

13) Bucaq əmsalları k_1 və k_2 olan iki düz xətt arasındakı bucaq:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Düz xətlərin paralellik şərti $k_1=k_2$: düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

14) (x_0,y_0) nöqtəsindən $Ax+By+C=0$ düz xəttinə qədər olan məsafə:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Fəzada düz xətt və müstəvilər

1) (x_0,y_0,z_0) nöqtəsindən keçən və normal vektoru $\bar{n}(A,B,C) \neq 0$ olan müstəvinin tənliyi:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = 0$$

burada $\bar{r}(x,y,z)$ və $\bar{r}_0(x_0,y_0,z_0)$.

2) Müstəvinin ümumi tənliyi:

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (1)$$

3) Müstəvi tənliyinin normallaşdırıcı vuruğu:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, (A^2 + B^2 + C^2 > 0).$$

4) (x_0,y_0,z_0) nöqtəsindən (1) müstəvisinə qədər olan məsafə:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5) Verilmiş üç (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) nöqtələrindən keçən müstəvi tənliyi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Müstəvinin parçalarla tənliyi:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

burada, a,b,c müstəvinin koordinat oxlarından ayırdığı parçalardır.

7) $A_1x+B_1y+C_1+D_1=0$ və $A_2x+B_2y+C_2+D_2=0$ müstəviləri arasındakı bucaq:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Müstəvilərin paralellik şərti:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Müstəvilərin perpendikulyarlıq şərti:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

8) Düz xəttin vektorial tənliyi:

$$\bar{r}-\bar{r}_0=t\bar{S},$$

burada $\bar{r}\,(x,y,z)$ və $\bar{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ və $\bar{S}\,(m,n,p)$ istiqamətləndirici vektordur.

9) Düz xəttin kanonik tənliyi:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

10) $\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}$ və $\frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}$ düz xətləri arasındakı bucaq:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Düz xətlərin paralellik şərti:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

11) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ düz xətti ilə

$Ax+By+Cz+D=0$ müstəvisi arasındakı bucaq:

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Düz xətlə müstəvinin paralellik şərti:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Düz xəttlə müstəvinin perpendikulyarlıq şərti:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

İkitərtibli əyrilər və səthlər

1) Mərkəzi (a,b) nöqtəsində və radiusu R olan çevrənin kanonik tənliyi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2) Yarımoxları a və b olan ellirsin kanonik tənliyi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ellipsin fokusları: $F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$, burada $c^2=a^2-b^2$.
Ellipsin (x,y) nöqtəsinin fokal radiusları:

$$r_1=a-\varepsilon x,\ r_2=a+\varepsilon x,$$

burada $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ ellipsin ekssentrisitetidir.

3) Yarımoxları a və b olan hiperbolanın kanonik tənliyi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hiperbolanın fokusları:

$F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$, burada $c^2=a^2+b^2$.

Hiperbolanın (x,y) nöqtəsinin fokal radiusları:

$$r_1=\pm(\varepsilon x-a),\ r_2=\pm(\varepsilon x-a),$$

burada $\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$ hiperbolanın ekssentrisitetidir.

Hiperbolanın asimptotları:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

4) Parabolanın kanonik tənliyi:

$$y^2=2px$$

Parabolanın fokusu: $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, direktisin tənliyi $x=-\dfrac{p}{2}$,

parabolanın (x,y) nöqtəsinin fokal radiusu: $r=x+\dfrac{p}{2}$.

5) Mərkəzi (a,b,c) nöqtəsində olan R radiuslu sferanın tənliyi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

6) Fırlanma ellipsoidləri:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

7) Fırlanma hiperboloidləri:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

8) Fırlanma paraboloid:

$$y^2+z^2=2px.$$

9) Yarımoxları a,b,c olan ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

10) Elliptik paraboloid:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p>0,\ q>0.$$

11) Biroyuqlu hiperbolrid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

12) İkioyuqlu hiperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

13) Hiperbolik paraboloid:

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q}=2z,\quad p>0,\quad q>0.$$

Limitlər

1) Ardıcıllığın limitinin tərifi:

Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı və a ədədi verilmişdir. İstənilən ε>0 ədədi üçün elə N=N(ε) nömrəsi var ki, n-in N-dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində $|x_n-a|<\varepsilon, n\geq N$ bərabərsizliyi ödənir. Onda a ədədinə $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir və $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ kimi işarə olunur.

2) Yığılan ardıcıllıqlar üzərində hesab əməlləri:

$\lim\limits_{n\to\infty} kx_n=k\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (k-sabit ədəddir),

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n,\ \lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n},(\lim_{n\to\infty}y_n\neq 0).$$

3) e ədədi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828...$$

4) Onluq və natural loqarifmlər arasında əlaqə:
$\lg x = M\ln x$, $x>0$

burada $M=\lg e=0,43429\ldots$

5) Funksiyanın limitinin tərifi:
Tutaq ki, sonlu x_0, A ədədləri və istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ ədədi var ki, x-in X çoxluğundan götürülmüş və $0<|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə x_0 nöqtəsində f(x) funksiyasının limiti deyilir və

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

kimi işarə olunur.

6) Funksiyanın limitinin xassələri:

$$\lim_{x\to x_0} kf(x) = k\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ (k-sabit ədəddir)},$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$$

7) Məşhur limitlər:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Misal həllində aşağıdakı limitlərdən istifadə etmək məqsədə uyğundur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n.$$

8) Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi:

$$\text{Əgər } \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

9) x arqumentinin Δx artımına uyğun y=f(x) funksiyasının artımı:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

10) y=f(x) funksiyasının nöqtədə kəsilməzlik şərti:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

11) Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin əsas xassəsi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Törəmə və diferensial

1) Törəmə:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$y_0'=f'(x_0)$ törəməsi y=f(x) funksiyasının (x_0,f(x_0)) nöqtəsində əyriyə çəkilən toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$k=f'(x_0).$$

2) y=f(x) əyrisinə (x_0,f(x_0)) nöqtəsində çəkilən toxunan və normalın tənlikləri:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\; y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

3) Cəmin, hasilin və nisbətin törəməsi:
Tutaq ki, $y_1=f(x)$ və $y_2=g(x)$ funksiyalarının x nöqtəsində törəmələri var. Onda

$$(y_1 \pm y_2)' = y_1' \pm y_2', (y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', (cy_1)' = cy_1'$$

(c-sabitdir.)

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2}, \; y_2 \neq 0.$$

4) Mürəkkəb funksiyanın törəməsi:
Əgər $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$, yəni $y=f(\varphi(t))$ və $f(x)$ və $\varphi(t)$ funksiyalarının törəmələri varsa, onda:

$$y_t' = y_x' \cdot x_t'.$$

5) Tərs funksiyanın törəməsi:
$Y=f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində $f'(x) \neq 0$ törəməsi varsa, onda $x=\varphi(y)$ tərs funksiyasının törəməsi var və

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

6) Əsas elementar funksiyaların törəmə düsturları:

1. $c'=0$, c=sabitdir, 2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$,

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$, 4. $(a^x)' = a^x \ln a$,

5. $(e^x)' = e^x$, 6. $(\sin x)' = \cos x$, 7. $(\cos x)' = -\sin x$,

8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, 9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 11. $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

12. $(arctg)' = \frac{1}{1+x^2}$, 13. $(arcctg)' = -\frac{1}{1+x^2}$,

14. $(shx)' = chx$, 15. $(chx)' = shx$,

16. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$, 17. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

7) Yüksək tərtibli törəmələr:

y=f(x) funksiyasının $f'(x)$ törəməsinin törəməsinə onun ikitərtibli törəməsi deyilir: $f''(x) = (f'(x))'$. Eyni qayda ilə üçtərtibli törəməyə tərif verilir: $f'''(x) = (f''(x))'$. Ümumiyyətlə, $(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

8) Yüksək tərtibli törəmələri hesablamaq qaydası:

Əgər $y_1=f(x)$ və $y_2=g(x)$ funksiyalarının $f^{(n)}(x)$ və $g^{(n)}(x)$ n-tərtibli törəmələri varsa, onda:

$(cy_1)^{(n)}=cy_1^{(n)}$, c-sabitdir,

$$(y_1 \pm y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}+y_2^{(n)},$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^n y_2 + n y_1^{(n-1)} y_2' + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} y_2'' + \ldots + y_1 y_2^{(n)}.$$

Axırıncı düstur Leybnis düsturu adlanır.

9) Sərbəst x dəyişənin diferensialı: $dx=\Delta x$, y=f(x). Funksiyasının diferensialı: $dy=y'dx$. Funksiyanın Δy artımı ilə dy diferensialı arasında əlaqə:

$\Delta y= dy+\alpha\Delta x$, burada $\alpha \to 0$ ($\Delta x \to 0$).

10) Diferensialın əsas xassələri:

1. dc=0, c-sabitdir, 2. dcy=cdy,
3. $d(y_1 \pm y2)=dy_1 \pm dy_2$, 4. $d(y_1y_2)=y_1dy_2+y_2dy_1$,
5. $d\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = \dfrac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}, y_2 \neq 0$,
6. $df(y) = f'(y)dy$.

11) Funksiyanın qiymətinin təqribi hesablanması:

Əgər Δx arqument artımı çox kiçik olarsa, onda $\Delta y \approx dy$ və $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ münasibətindən istifadə edərək funksiyanın qiymətini təqribi hesablamaq olar.

12) Yüksək tərtibli diferensiallar:

$y=f(x)$ funksiyasının $dy=df(x)$ diferensialının diferensialına onun ikitərtibli diferensialı deyilir: $d^2y=d(dy)$.

Eyni qayda ilə üçtərtibli diferensiala tərif verilir. $d(d^2y)=d^3y$.

Ümumiyyətlə, $d(y^{(n-1)})=d^ny$.

Törəmənin tətbiqi

1) Diferensiallanan $y=f(x)$ funksiyası üçün Laqranj düsturu:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0),\ x_0\in(a,b).$$

2) Diferensiallanan $y_1=f(x)$ və $y_2=g(x)$ funksiyaları üçün Koşi düsturu:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},\quad x_0\in(a,b).$$

3) $\frac{0}{0}$ və ya $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliklər üçün Lopital qaydası:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

əgər sağ tərəfdəki limit varsa.

4) Teylor düsturu:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0((x-x_0)^n).$$

$x_0=0$ olduqda Makloren düsturu alınır.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0(x^n).$$

5) Elementar funksiyaların Makloren düsturuna görə ayrılışı:

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n).$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2})$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$.

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... +$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n).$$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$.

6) (a,b) intervalında $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ olduqda $y=f(x)$ funksiyası həmin intervalda artandır (azalandır).

7) $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində ekstremumunun varlığı üçün zəruri şərt: $f'(x_0) = 0$ və ya $f'(x_0)$ olmadıqda.

$f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində ekstremumunun varlığı üçün kafi şərt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) < 0$ olarsa, funksiyanın x_0 nöqtəsində maksimumu, $f''(x_0) > 0$ olduqda isə həmin nöqtədə minimumu var.

8) y=f(x) funksiyasının qrafiki (a,b) intervalında $f''(x_0) > 0$ olduqda gabarıqdır, $f''(x_0) > 0$ olduqda çökükdür.

9) y=f(x) funksiyasının qrafikinin x_0 nöqtəsində əyilmə nöqtəsi olması üçün zəruri şərt: $f''(x_0) = 0$ və ya $f''(x_0)$ olmadıqda.

Əyilmə nöqtəsi üçün kafi şərt, x_0 nöqtəsindən keçəndə $f''(x)$-in işarəsini dəyişməsidir.

10) Əyrinin asimptotları:

1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

olduqda $x=x_0$ düz xətti $y=f(x)$ əyrisinin şaquli asimptotudur.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ olduqda $y=b$ düz xətti $y=f(x)$ əyrisinin üfüqi asimptotudur.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)=0$ olduqda $y=kx+b$ düz xətti $y=f(x)$ əyrisinin maili asimptotudur.

Həqiqi dəyişənli vektor və kompleks funksiyalar

1) Skalyar arqumentli $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$ vektor funksiyanın törəməsi:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}=\bar{r}'(t)=\frac{d\bar{r}(t)}{dt}.$$

2) $y=f(x)$ əyri qövsünün diferensialı:

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

3) $y=f(x)$ əyrisinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsində əyriliyi:

$$K_M=\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4) $y=f(x)$ əyrisini ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsində əyrilik mərkəzinin $C(\alpha,\beta)$ koordinatları:

$$\alpha=x-\frac{y'+(y')^3}{y''},\ \beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

5) Kompleks ədəd $z=x+iy$, burada $i^2=-1$. Kompleks ədədin modulu və arqumenti:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=arctg\frac{y}{x}.$$

6) $z=x+iy$ klmpleks ədədinin qoşması: $\bar{z}=x-iy$.

7) $z_1=x_1+iy_1$ və $z_2=x_2+iy_2$ komprleks ədədlər üzərində hesab əməlləri:

1. $z_1 \pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$,

2. $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$,

3. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)-i(x_2y_1-x_1y_2)}{x^2+y^2}$, $z_2\neq 0$.

8) Kompleks ədədin triqonometrik şəkli:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

burada $\rho=|z|$ və φ=Argz.

9) Kompleks ədədin üstlü şəkli: $z=\rho e^{i\varphi}$, burada $\rho=|z|$ və

$$\varphi=Argz.$$

10) Kompleks ədədin modulu və arqumentinin xassələri:

1. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$,

2. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $Argz_1z_2=Argz_1+Argz_2$,

3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $Arg\dfrac{z_1}{z_2}=Argz_1-Argz_2, z_2\neq 0$,

4. $|z^n|=|z|^n, Argz^n=nArgz, n-$tam ədəddir.

11) Muavr düsturu:

$$(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

12) Kompleks ədədən kökalma:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

13) Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $f(a)f(b)<0$ olarsa, onda $f(x)=0$ tənliyinin x_1 kökünün təqribi qiymətini aşağıdakı düsturlarla tapmaq olar:

1. $x_1=a-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$ (vətərlər üsulu).

2. $x_1=a-\dfrac{f(a)}{f(b)}$, burada $f'(a)\neq 0, f(a)f''(a)>0$ (toxunanlar üsulu).

İnteqrallar

1) Əgər $dy=f(x)dx$ olarsa, onda

$y=\int f(x)dx+c$, c-sabitdir,

(qeyri-müəyyən inteqral).

2) Qeyri-müəyyən inteqralın əsas xassələri:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$, 2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

3. $\int df(x)=f(x)+c$, 4. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, k -sabitdir.

5. $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

3) İnteqrallar cədvəli:

1. $\int x^a dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+c, (a\neq -1)$, 2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c$,

3. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$, 4. $\int e^x dx=e^x+c$,

5. $\int\sin xdx=-\cos x+c$, 6. $\int\cos xdx=\sin x+c$,

7. $\int tgxdx=-\ln\cos x+c$, 8. $\int ctgxdx=\ln\sin x+c$,

9. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$, 10. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$,

11. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+c\\ -\arccos x+c\end{cases}$ 12. $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}arctgx+c\\ -arcctgx+c\end{cases}$

13. $\int\dfrac{dx}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+c$, 14. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+c$,

15. $\int shxdx=chx+c$. 16. $\int chxdx=shx+c$.

4) Dəyişənin əvəz edilməsi: Əgər $x=\varphi(t)$ olarsa, onda:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

5) Hissə-hissə inteqrallama düsturu:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

6) Sadə kəsrlərin inteqrallanması:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c .$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c, n > 1, n \in N .$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) +$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c ,$$

burada a,A,B,p,q həqiqi ədədlərdir və $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

7) Rasional kəsrin sadə kəsrlərə aylırması:

1. $f(x) = (x-a)^k f_1(x), f_1(a) \neq 0$ olarsa, onda:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{g_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)} .$$

2. $f(x) = (x^2+px+q)^m f_1(x), f_1(a) \neq 0, f_1(\overline{a}) \neq 0$, olarsa, onda:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{g_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} f_1(x)},$$

burada a,A,B,p,q həqiqi ədədlərdir və

$$a = a+ib, \overline{a} = a-ib, p = -2a, q = a^2+b^2 .$$

8) Ostroqradski düsturu:

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \int \frac{g_2(x)}{f_2(x)}dx$$

burada $f_1(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ və $f'(x)$ çoxhədlisinin ən böyük ortaq bölənidir və $f_2(x)=\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$, $g_1(x)$ və $g_2(x)$ qeyri-müəyyən əmsallı çoxhədlilərdir.

9) $\int R\left(x,\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ şəklində inteqrallar:

burada a,b,c,d sabit ədədlərdir, m-natural ədəddir, $ad-bc\neq 0$ və R öz arqumentlərinin rasional funksiyasıdır.

$$t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

əvəzləməsi ilə inteqralı rasionallaşdırmaq olar.

10) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ şəklində inteqrallar:

Eylər əvəzləmələri ilə inteqralı rasionallaşdırmaq olar.

1. $a>0$ olduqda, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$.
2. $c>0$ olduqda, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$
3. $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ olduqda $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$.

11) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ şəklində inteqrallar, burada a,b ixtiyari sabitlərdir, m,n,p-rasional ədədlərdir.

1. p-tam ədəddir, onda $x=t^s$ əvəzləməsi ilə inteqralı rasionallaşdırmaq olar, burada s ədədi m və n kəsrlərinin məxrəclərinin ən kiçik ortaq bölünənidir.
2. $\dfrac{m+1}{n}$ tam ədəddir, bu halda $a+bx^n=t^s$ əvəzləməsi ilə inteqralı rasionallaşdırmaq olar.

3. $\frac{m+1}{n}+p$ tam ədəddir, bu halda $ax^{-n}+b=t^s$ əvəzləməsi ilə inteqralı rasionallaşdırmaq olar, burada s,p-kəsrinin məxrəcidir.

12) Triqonometrik funksiyaların inteqrallanması:

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ şəklində inteqralları $t=tg\frac{x}{2}$ əvəzləməsi ilə rasionallaşdırmaq olar.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ şəklində inteqralları $t=sinx$ və ya $t=cosx$ əvəzləməsi ilə binomial diferensialın inteqralına gətirmək olar.

13) Müəyyən inteqral, inteqral cəminin limiti kimi:

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

burada $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \lambda = \max \Delta x_k$

14) Müəyyən inteqralın əsas xassələri:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$,

4. $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b f(x)dx, k$ – sabitdir.

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

6. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

7. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, 8. $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$,

15) Orta qiymət teoremi: Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0), a < x_0 < b.$$

16) Nyuton-Leybnis düsturu: Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $F'(x) = f(x)$, onda:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

17) Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

burada $a=\varphi(\alpha)$ və $b=\varphi(\beta)$.

18) Müəyyən inteqralın hissə-hissə inteqrallama düsturu:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

19) Əgər $f(x)$, $[-a,a]$ parçasında cüt funksiya, yəni $f(-x)=f(x)$ olarsa, onda:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Əgər $f(x)$, $[-a,a]$ parçasında tək funksiya, yəni $f(-x)=-f(x)$ olarsa, onda:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

20) Müəyyən inteqralın təqribi hesablanması:

1. Düzbucaqlılar düsturu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}),$$ burada $x_0=a$ və

$$x_n = b, y = f(x), x_k = a + k\frac{b-a}{n}, k = 0,1,2,\ldots,n$$

2. Trapeslər düsturu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$ burada,

$$x_0=a \text{ və } x_n=b, y=f(x), x_k=a + k\frac{b-a}{n}, k = 0,1,2,\ldots,n$$

3. Simpson düsturu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}))$$

21) Ox oxunun $[a,b]$ parçası, $x=a$ və $x=b$ düz xətləri, kəsilməz $y=f(x)$ əyrisi ilə məhdud olan əyrixətli tparesin sahəsi düsturu:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

22) $x=a$ və $x=\beta$ $(a<\beta)$ şüaları, kəsilməz $\rho=f(\varphi)$ (ρ, φ -polyar koordinatlardır) əyrisi ilə məhdud olan əyrixətli sektorun sahəsi düsturu:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^\beta f^2(\varphi)d\varphi .$$

23) $x=\varphi(t)$, $y=\Psi(t)$, $a\leq t\leq\beta$ parametrik şəkildə verilmiş hamar əyrinin uzunluğu düsturu:

$$l = \int_{a}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\Psi'(t))^2}\, dt .$$

Əgər əyri $y=f(x)$, $a \le t \le b$ tənliyi ilə verilərsə, onda:

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$

24) Kəsilməz $y=f(x)$, $a \le t \le b$ əyrisinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsi düsturu:

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

25) Kəsilməz $y=f(x)$, $a \le t \le b$ əyrisinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsi düsturu:

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x) dx .$$

26) Kəsilməz $y=f(x)$, $a \le t \le b$ əyrisinin ağırlıq mərkəzinin koordinatları:

$$x_c = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} x dl, \quad y_c = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} y dl ,$$

burada, $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, l$ -əyrinin uzunluğudur.

27) Əyrixətli tparesin ağırlıq mərkəzinin koordinatları:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_{a}^{b} xy dl, \quad y_c = \frac{1}{2S}\int_{a}^{b} y^2 dx$$

burada, S-əyrixətli tparesin sahəsidir.

28) Dəyişən qüvvənin $F=F(x)$, $a \le t \le b$ işi:

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

29) Sonsuz sərhədli inteqral:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

30) Qeyri-məhdud funksiyanın inteqralı:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

31) Qeyri-məhdud funksiyanın inteqralı:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Çoxdəyişənli funksiyalar

1) $z=f(x,y)$ funksiyasının kəsilməzliyi:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)) = 0$$

və ya

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

2) $z=f(x,y)$ funksiyasının xüsusi törəmələri:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

3) $z=f(x,y)$ funksiyasının tam diferensialı:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

4) $z=f(x,y)$ funksiyasının qiymətinin təqribi hesablanması:

Əgər Δx və Δy arqument artımları çox kiçik olarsa, onda:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y,$$

münasibətindən istifadə edərək funksiyanın qiymətini təqribi hesablamaq olar.

5) Mürəkkəb funksiyanın törəməsi:

Əgər $z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, yəni $z=f(x(t),y(t))$ və bu funksiyalar diferensiallanan olarsa, onda:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Əgər $z=f(x,y)$, $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, yəni $z=f(x(s,t),y(s,t))$ və bu funksiyalar diferensiallanan olarsa, onda:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

6) Yüksək tərtibli törəmələr:

$z=f(x,y)$ funksiyasının f'_x və f'_y törəmələrinin törəməsinə onun ikitərtibli xüsusi törəməsi deyilir:

$$(f'_x)'_x = f''_{x^2}, \ (f'_x)'_y = f''_{xy}, \ (f'_y)'_y = f''_{y^2}.$$

Eyni qayda ilə üçüncü, dördüncü və s. tərtibli törəmələri hesablamaq olar.

7) Yüksək tərtibli diferensiallar:

$z=f(x,y)$ funksiyasının $dz=df(x,y)$ diferensialına ikitərtibli diferensial deyilir:

$$d(dz) = d^2 z = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Eyni qayda ilə üçüncü, dördüncü və s. tərtibli diferensialları hesablamaq olar.

8) $z=f(x,y)$ funksiyasının $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta)$ vektoru istiqaməti üzrə törəməsi:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

9) $z=f(x,y)$ skalyar meydanının qradiyenti:

$$grad z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}, \text{ buradan}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

10) İkidəyişənli funksiya üçün Teylor düsturu:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), 0 < \theta < 1$$

$x_0=0$, $y_0=0$ olduqda Makloren düsturu alınır.

$$\Delta f(0,0) = df(0,0) + \frac{1}{2!}d^2 f(0,0) + \ldots +$$

$$\frac{1}{n!}d^n f(0,0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\theta\Delta x, \theta\Delta y), 0 < \theta < 1$$

12) $F(x.y)=0$ tənliyi ilə təyin olunan $y=y(x)$ qeyri-aşkar funksiyanın törəməsi:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

13) $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$ tənliklər sistemindən təyin olunan $y=y(x)$ və $z=z(x)$ qeyri-aşkar funksiyaların törəməsi:

$$y'_x = \frac{F'_z\Phi'_x - F'_x\Phi'_z}{J(y,z)}, \quad z'_x = \frac{F'_x\Phi'_y - F'_y\Phi'_x}{J(y,z)}$$

burada

$$J(y,z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Yakobi determinantıdır.

14) $z=f(x,y)$ funksiyasının (x_0,y_0) nöqtəsində ekstremumunun varlığı üçün zəruri şərt:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$$

və ya $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ olmadıqda.

15) $z=f(x,y)$ funksiyasının (x_0,y_0) nöqtəsində ekstremumunun varlığı üçün kafi şərt:

$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2$$

1. $\Delta>0$ olduqda (x_0,y_0) nöqtəsində funksiyanın ekstremumu var. $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ olduqda (x_0,y_0) nöqtəsində funksiyanın maksimumu, $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ olduqda isə (x_0,y_0) nöqtəsində funksiyanın minimumu olar.
2. $\Delta<0$ olduqda (x_0,y_0) nöqtəsində funksiyanın ekstremumu yoxdur.
3. $\Delta=0$ olduqda (x_0,y_0) nöqtəsində funksiyanın ekstremumu ola da bilər, olmaya da bilər.

16) Şərti ekstremumun varlığı üçün kafi şərt:

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ funksiyasının (x_0,y_0) nöqtəsində $d^2F(x_0,y_0,\lambda)$ ikitərtibli diferensialı varsa, onda:

1. $d^2F(x_0,y_0,\lambda)>0$ olduqda $f(x,y)$ funksiyası (x_0,y_0) nöqtəsində şərti minimum qiymət alır.
2. $d^2F(x_0,y_0,\lambda)<0$ olduqda $f(x,y)$ funksiyası (x_0,y_0) nöqtəsində şərti maksimum qiymət alır.

Diferensial tənliklər

1) Dəyişənlərə ayrıla bilən
$X(x)Y(y)dx+X_1(x)Y_1(y)dy=0$
Tənliyin ümumi inteqralı:

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=c$$

2) $y'=f(x,y), f(tx,ty)=t^0 f(x,y)$ bircinsli tənliyi $y=zx$ əvəzləməsi ilə inteqrallanır.

3) $y'+P(x)y=f(x)$ xətti tənliyini $y=uv$ əvəzləməsi ilə həll etmək olar.

4) $P(x,y)dx+Q(x,y)=0$ tənliyi D oblastında tam diferensiallı tənlik olarsa, onda:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\in D.$$

5) $F(x,y,y')=0$ şəklində tənliklər:

1. Əgər $F(y')=0$ olarsa, onda:

$$F(a_k)=0,\ k=1,2,\ldots \text{ və ya } F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$$

burada $y'=ak, k=1,2...$

2. Əgər $y'=f_k(x), k=1,2...$olarsa, onda:

$$y=\int f_k(x)dx+c.$$

3. Əgər $x=f(y')$ olarsa, onda:

$$x=f(p), y=pf(p)-\int f(p)dp+c$$

4. Əgər $x=\varphi(p), y'=\Psi(p)$ olarsa, onda:

5. Əgər $y'=f_k(y), k=1,2,...$olarsa, onda:

$$\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+c.$$

6. Əgər $y=f(y')$ olarsa, onda:

$$x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p)dp}{p^2} + c, y = f(p)$$

burada $y'=p$.

7. Əgər $y = \varphi(p), y' = \Psi(p)$ olarsa, onda:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{\Psi(p)} + c, y = \varphi(p).$$

8. $x = \varphi(y, y')$ şəklində tənlikləri $y'=p$ əvəzləməsi ilə inteqrallamaq olar.

9. $x = \varphi(x, y')$ şəklində tənlikləri $y'=p$ əvəzləməsi ilə inteqrallamaq olar.

6) İkitərtibli tənliklər:

1. Əgər $y'' = f(x)$ olarsa, onda:

$$y = \int dx \int f(x)dx + c_1 x + c_2 .$$

2. Əgər $y'' = f(x)$ olarsa, onda:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}} = \pm(x + c_2).$$

3. Əgər $y'' = f(x)$ olarsa, onda $y'=p$ əvəzləməsi ilə alarıq:

$$\frac{dp}{dy} = f(x, p).$$

4. Əgər $y'' = f(y, y')$ olarsa, onda $y'=p$, $p=p(y)$ əvəzləməsi ilə alarıq:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

7) İkitərtibli xətti bircinsli tənliyin

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

ümumi həlli $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, şəklindədir, burada y_1 və y_2 xətti asılı olmayan xüsusi həllərdir.

8) Vronski determinantı:

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

9) Ostroqradski-Liuvill düsturu:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

10) İkitərtibli xətti bircinsli olmayan tənliyin

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

ümumi həlli $y = \overline{y} + z$ şəklindədir, burada $\overline{y}$, (1) tənliyinin ümumi həllidir və z, (2) tənliyinin bir xüsusi həllidir.

11) İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircinsli tənliklər:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (3)$$

1. (3) tənliyinin xarakteristik tənliyi:

$$y'' + pk + q = 0 \qquad (4)$$

2. (4) tənliyinin k_1 və k_2 kökləri həqiqi və müxtəlif ($k_1 \neq k_2$) olarsa, onda:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

3. (4) tənliyinin k_1 və k_2 kökləri həqiqi və müxtəlif ($k_1 = k_2$) olarsa, onda:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{k_1 x}.$$

4.(4) tənliyinin k_1 və k_2 kökləri kompleks ədədlər $k = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$ olarsa, onda:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

12) İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircinsli olmayan tənliklər:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c-sabitlərdir.

$q \neq 0$ olarsa, onda: $z = Ax^2 + Bx + C$,

$q=0$, $p\neq0$ olarsa, onda: $z=x(Ax^2+Bx+C)$.

2. $f(x)=ae^{\alpha x}$, a,α-sabitlərdir.

$\alpha^2+p\alpha+q\neq0$ olarsa, onda: $z=Ae^{\alpha x}$

$\alpha^2+p\alpha+q=0$ olarsa, onda: $z=Axe^{\alpha x}$ və ya $z=Ax^2e^{\alpha x}$.

3. $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, M,N, $\beta\neq0$ – sabitlərdir.

$p^2+(q-\beta^2)^2\neq0$ olarsa, onda:

$$z=A\cos\beta x+B\sin\beta x.$$

$P=0$, $q=\beta^2$ olarsa, onda:

$z=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$.

Sıralar

Ədədi sıralar: $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ ədədlər ardıcıllığının hədlərindən düzələn

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

ifadəsinə ədədi sıra deyilir. $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ldots$ sıranın n-ci xüsusi cəmi deyilir. Əgər

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

olarsa, deyilir ki, sıra yığılır və cəmi S-ə bərabərdir.

2) Sıranın yığılan olması üçün zəruri şərt: Əgər $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası yığılandırsa, onda: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

3) Həndəsi silsilə: Əgər, $|q|<1$ olarsa, onda:

$$\frac{a}{1-q}=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}.$$

4) Harmonik sıra adlanan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

sırada $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ olmasına baxmayaraq, dağılandır.

5) Müqayisə əlaməti: Müsbət hədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ sıraları

üçün $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\neq 0$ olduqda, bu sıralar eyni zamanda yığılan və dağılan olar.

6) Dalamber əlaməti: Tutaq ki, müsbət hədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sırasının

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_n}=l$ limiti var. Onda 1. $l<1$ olduqda sıra yığılır;
2. $l>1$ olduqda sıra dağılır.

7) Koşi əlaməti: Tutaq ki, müstəb hədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sırasının üçün

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ limiti var. Onda 1. $l<1$ olduqda sıra yığılır; 2. $l>1$ olduqda sıra dağılır.

8) Koşinin inteqral əlaməti: Tutaq ki, f(x) funksiyası $[1,\infty]$ oblastında kəsilməz, müsbətdir və azalandır. Onda $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ sırası,

$\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx$ inteqralı yığılan olduqda yığılar, dağılan olduqda isə dağılar.

9) Leybnis əlaməti:

Əgər $a_1 \ge a_2 \ge a_3 ...$ və $a_n \to 0 (n \to \infty)$ olarsa, onda işarəsini nöıbə ilə dəyişən

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ..., \ a_n > 0$

sıra yığılar.

10) Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sırası yığılarsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası da mütləq yığılar.

11) Veyerştrasın majorantlıq əlaməti: Tutaq ki, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D$ və $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ sıraları üçün, $|f_n(x)| \le a_n, n = 1,2,...$ bərabərsizliyi ödənilir. Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılarsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sırası D çoxluğunda müntəzəm yığılar.

12) Qüvvət sıralarının yığılma radiusunu

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \text{ və ya } R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Düsturları ilə tapmaq olar.

13) Teylor sırası:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + ...$$

14) Makloren sırası:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + ...$$

15) Eyler düsturları:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, e^{-ix} = \cos x - i\sin x\,.$$

16) 2π periodlu $f(x)$ funksiyasının Furye sırası:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ burada}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\,. \quad \text{(Furye əmsalları)}$$

17) Əgər $f(x)$, $[-\pi,\pi]$ parçasında cüt funksiya olarsa, onda:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ burada}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \; n = 0,1,2,...$$

Əgər $f(x)$, $[-\pi,\pi]$ parçasında tək funksiya olarsa, onda:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \text{ burada } b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 0,1,2...$$

18) $2l$ periodlu $f(x)$ funksiyasının Furye sırası:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

burada

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n = 0,1,2,...$$

19) Furye sırasının kompleks şəkli:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{burada}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

İkiqat, üçqat və parametrdən asılı inteqrallar

1) İkiqat inteqral, inteqral cəminin limiti kimi:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$$

burada $(\xi_k, \eta_k) \in D_k, \lambda = \max d(D_k)$.

2) İkiqat inteqralın əsas xassələri:

1. $\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy, k$ – sabitdir.

2. $\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy \pm \iint_{D_2} g(x,y)dxdy$

3. $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy \pm \iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = 0,$$

4. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy.$

3) Orta qiymət teoremi: Əgər f(x.y) funksiyası D oblastında kəsilməz olarsa, onda:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S, \qquad (x_0,y_0)\in D,$$

burada S,D oblastının sahəsidir.

4) D[a,b,c,α] düzbucaqlı oblasta ikiqat inteqralın hesablanması:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy \quad \text{və ya}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx\,.$$

5) $D[a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)]$ əyrixətli oblastda ikiqat inteqralın hesablanması:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,.$$

6) İkiqat inteqralda dəyişənlərin əvəz edilməsi:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v)|J(u,v)|dudv$$

burada $x=x$(u,v), y=y(u,v), (u,v)∈G, J(u,v) Yakobi determinantıdır.

7) $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ polyar koordinatlarla ikiqat inteqral:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi\,.$$

8) $z=f(x,y)$ səthi ilə yuxarıdan, x0y müstəvisi üzərində yerləşən D oblastı ilə aşağıdan və doğuranları oz oxuna paralel olan silindrik səthlə əhatə olunmuş cismin həcmi düsturu:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy\,.$$

9) D oblastının sahəsi düsturu:

$$S = \iint_D dxdy.$$

10) z=f(x,y), (x,y)∈D tənliyi ilə verilmiş (σ) səthinin sahəsi düsturu:

$$\sigma = \iint \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

11) Səthi sıxlığı ρ=ρ(x,y) olan S lövhəsinin kütləsi:

$$m = \iint_s \rho(x,y)dxdy.$$

12) S lövhəsini ox və oy oxlarına nəzərən statik momentləri:

$$M_x = \iint_s \rho y dxdy, \quad M_y = \iint_s \rho x dxdy.$$

burada, ρ=ρ(x,y), S- lövhəsinin səthi sıxlığıdır.

13) S lövhəsinin ağırlıq mərkəzinin koordinatları:

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m}$$

burada, m lövhənin kütləsidir.

14) Üçqat inteqral, inteqral cəminin limiti kimi

$$\iiint_v f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta V_k$$

burada, $(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\in V_k, \lambda = \max d(V_k)$.

15) $V\{a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ oblastda üçqat inteqralın hesablanması:

$$\iiint_v f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

16) Üçqat inteqralda dəyişənlərin əvəz edilməsi:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(x,(u,v,w),y(u,v,w),z(u.v.w))\cdot$$

$$\times\left|J(u,v,w)\right|dudvdw, \text{ burada}$$

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w), (u,v,w) \in V^*$$

J(u,v,w) – Yakobi determinantıdır.

17) V cisminin həcminin hesablanması:

$$V = \iiint\limits_{V} dxdydz.$$

18) Həcmi sıxlığı ρ=ρ(x,y) olan V cisminin kütləsi:

$$m = \iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)dxdydz.$$

19) Həcmi süxlığı ρ(x,y,z)= ρ=const olan V cisminin ağırlıq mərkəzinin koordinatları:

$$x_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} xdxdydz, \quad y_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} ydxdydz,$$

$$z_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} zdxdydz$$

20) Parametrdən asılı müəyyən inteqral:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,a)dx, \Phi(\alpha) = \int_{a(a)}^{b(a)} f(x,a)dx.$$

21) f(x.α) funksiyası D[$a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$] düzbucaqlısında kəsilməz olarsa, onda:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx, F'(\alpha) = \int_a^b f'_a(x,a)$$

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha$$

22) f(x, α) funksiyası $f'_\alpha(x,\alpha)$ xüsusi törəməsi ilə birlikdə D[$a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$] düzbucaqlısında kəsilməzdirsə və $a(\alpha)$, b(α) funksiyaralı [c,d] parçasında kəsilməz olub, $a \le a(\alpha) \le b$, $a \le b(\alpha) \le b$ bərabərsizliklərini ödəyərsə, onda:

$$\Phi'(\alpha) = f(b(\alpha),\alpha)b'(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)a'(\alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_a(x,a)dx$$

23) Parametrdən asılı qeyri-məxsusi inteqrallar:

$$F(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x,\alpha).$$

24) Beta-funksiya:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Əsas xassələri:

1. α>0, β>0 olduqda B(α,β) inteqralı yığılır.
2. β>1 və ya α>1 olduqda

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1),$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$$

3. $\alpha = m \in N, \beta = n \in N$ olduqda

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

25) Qamma-funksiya:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Əsas xassələri:

1. $\alpha>0$ olduqda $\Gamma(\alpha)$ inteqralı yığılır.

2. $\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}dx$ 3. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

4. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1$.

5. $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

26) Furye inteqralı:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt.$$

27) Furye inteqralının kompleks şəkli:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt.$$

28) Furye çevirməsi:

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda x}dt.$$

29) Tərs Furye çevirməsi:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Əyrixətli və səth inteqralları

1) Birinci növ əyrixətli inteqral, əyrinin uzunluğu üzrə inteqral cəminin limiti kimi:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$$

burada, $(\xi_k,\eta_k)\in M_{k-1}M_k, \lambda=\max \Delta l_k$

2) İkinci növ əyrixətli inteqral, koordinatlar üzrə inteqral cəminin limiti kimi:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right)$$

burada $(\xi_k,\eta_k)\in M_{k-1}M_k, \lambda=\max \Delta l_k$

3) Birinci və ikinci növ əyrixətli inteqrallar arasında əlaqə:

1. AB qövsü $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le 1\le\beta$ parametrik tənlikləri ilə verildikdə:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{a}^{\beta}(P(x,x(t)),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$$

3. AB qövsü $y=f(x)$, $a\le x\le b$ tənliyi ilə verildikdə:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{a}^{b}(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x))dx$$

4) Qrin düsturu (konturu γ olan D oblastında):

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

5) Konturu γ olan D oblastının S sahəsi düsturu:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma} xdy - ydx .$$

6) Əyrixətli inteqral inteqrallanma yolundan asılı olmazsa:

1. D oblastında yerləşən istənilən qapalı γ konturu üzrə əyrixətli inteqral sıfıra bərabərdir:

$$\int_{\gamma} Pdx - Qdy = 0 .$$

2. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ inteqralı inteqrallama yolunun seçilməsindən asılı deyil.

3. $Pdx + Qdy$ ifadəsi D oblastında təyin olmuş müəyyən u(x,y) funksiyasının tam diferensialıdır.

$du = Pdx + Qdy$

4. D oblastında

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

7) Birinci növ səth inteqralı, səth üzrə inteqral cəminin limiti kimi:

$$\iint_{s} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k)\Delta S_k$$

burada $(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \in S, \lambda = \max d(S_k)$

8) Əgər S səthi z=z(x,y), (x,y)∈D tənliyi ilə verilərsə, onda:

$$\iint_{s} f(x,y,z)ds = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$$

9) İkinci növ səth inteqralı, normal $\overline{n}$ vektoru ilə istiqamətlənmiş hamar S səthi üzrə inteqral cəminin limiti kimi:

$$\iint_S (\bar{F},\bar{n})ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}(M_k),\bar{n}(M_k)),$$

burada $M_k(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\in S, \lambda = \max d(S_k)$

10) Qauss-Ostroqradski düsturu:

$$\iint_s Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

11) Stoks düsturu:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz .$$

12) Vektorlar analizi:

1. u=u(x,y,z) skalyar meydanının qradiyenti:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

2. $\bar{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ vektorial meydanın divergensiyası və rotoru.

$$div\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$rot\bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$$

13) Hamilton (nabla) operatoru:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} .$$

14) Hamilton operatoru vasitəsi ilə vektorlar meydanının elementlərinin ifadəsi:

1. $\overline{\nabla}$ operatorunu skalyar u=u(x,y,z) funksiysına tətbiq etdikdə (və ya «formal skalyar vurduqda) skalyar u meydanının qradiyenti alınır:

gradu= $\overline{\nabla}$ u.

2. $\overline{\nabla}$ vektorunu $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ vektoruna skalyar vurduqda vektorial $\overline{F}$ meydanının divergensiyası alınır.

$$\text{div } \overline{F} = (\overline{\nabla}, \overline{F}].$$

3. $\overline{\nabla}$ vektorunun $\overline{F} = \overline{F}(P,Q,R)$ vektoruna vektorial vuruqda vektorial $\overline{F}$ meydanının rotoru alınır.

$$rot\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F} .$$

15) Laplas operatoru:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Riyazi Fizika tənlikləri

1) Riyazi fizikanın əsas tənlikləri (ikidəyişənli funksiya üçün)

1. Dalğa tənliyi (yaxud simin rəqs tənliyi):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. İstilikkeçirmə tənliyi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. Laplas tənliyi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

2) Furye metodu ilə sonlu simin rəqs tənliyinin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad U\big|_{x=0} = U\big|_{x=l} = 0.$$

sərhəd və

$$U\big|_{t=0} = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = F(x).$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{an\pi}{l}t + b_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

funksiyasıdır, burada

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx, \quad b_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$$

3) Furye çevirməsinin tətbiqi ilə sonsuz çubuqda istiliyin yayılma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyinin $u\big|_{t=0} = f(x), -\infty < x < \infty$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{\frac{(x-\xi)}{4a^2 t}} d\xi$$

funksiyanı verir.

4) Dairə üçün Dirixle məsələsinin Furye metodu ilə həlli:
$0<\rho<R$ dairəsində

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0.$$

Laplas tənliyinin

$$u\,\big|_{\rho=R} = f(\varphi)$$

sərhəd şərtini öədəyən həllini

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(t-\varphi)+\rho^2}dt,$$

şəklində göstərmək olar.

Kompleks dəyişənli funksiyalar

1) Kompleks dəyişənli funksianın törəməsi:

$$f'(z) = \frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

2) Dalamber-Eyler şərtləri?
f(z)=u(x,y)+v(x,y) funksiyası D oblastında analitik olarsa, onda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3) Kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralı, əyrinin uzunluğu üzrə inteqral cəminin limiti kimi.

$$\int_l f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \int_l udx - vdy + i\int_l udy + vdx,$$

burada $\xi_k \in z_{k-1}z_k, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \lambda = \max|\Delta z_k|$

4) Koşi düsturu:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi z.$$

5) Loran sırası:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

burada $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) Funksiyanın çıxığı:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m+1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

7) f(t) funksiyasının Laplas çevirməsi:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, p = \alpha + i\beta.$$

8) Laplas çevirməsinin tərsi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Ehtimal nəzəriyyəsi

1) A və B hadisələrinin heç olmasa birinin baş verməsindən ibarət olan hadisəyə onların cəmi deyilir:

$$A+B=A \cup B$$

2) A və B hadisələrinin hər ikisinin eyni zamanda hökmən baş verməsindən ibarət olan hadisəyə onların hasili deyilir:

$$AB=A \cap B$$

3) Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan eyni imkanlı n hadisədən ibarət tam sistemə daxil olan m xüsusi hallara ayrılarsa, onda $\frac{m}{n}$ ədədinə A hadisəsinin ehtimalı deyilir:

$$P(A)=\frac{m}{n}, 0 \le P(A) \le 1.$$

4) Əgər A və B uyuşmayan hadisələr olarsa, onda:

P(A+B)+P(A)+P(B).

5) Əgər A və $\overline{A}$ qarşılıqlı əks hadisələr olarsa, onda:

$P(\overline{A})=1-P(A)$.

6) Əgər A və B uyuşan hadisələr olarsa, onda:

P(A+B)+P(A)+P(B)-P(AB).

7) Ehtimalların vurma teoremi:

$P(AB)=P(A)P_A(B)$.

Burada $P_A(B)$, B hadisəsinin A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində şərti ehtimalıdır.

8) Əgər A və B asılı olmayan hadisələr olarsa, onda:

P(AB)=P(A)P(B).

9) Əgər A və B uyuşmayan (asılı) hadisələr olarsa, onda:

$P_B(A)= P_A(B)=0$.

10) Tam ehtimal düsturu:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B).$$

11) Bayes düsturu:

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

12) Birləşmələr nəzəriyyəsinin əsas düsturları:

1. n elementdən düzələn m elementli aranjemanların sayı:

$$A_n^m = n(n-1)...[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

2. n elementdən düzələn m elementli kombinezonların (birləşmələrin) sayı:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3. n elementdən düzələn permutasionların (yerdəyişmələrin) sayı:

$$P_n = A_n^m = n(n-1)\ldots[n-(n-1)] = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

12) Nyuton binomu düsturu:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q^2 + \ldots + q^n.$$

13) Ehtimalların paylanmasının binomial qanunu:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

14) Laplas lokal düsturu:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

burada $0 < p < 1, q = 1 - p, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

15) Laplasın inteqral düsturu:

$$P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

burada $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

16) Puasson düsturu:

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \text{ burada } \mu = np$$

17) Diskret $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi:

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

burada $p_k = p(X = x_k), k = 1,2,\ldots,n, p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Əsas xassələri:

1. MC=C, C=const,   2. M(X±Y)=MX±MY

3. MCX=CMX,   4. MXY=MXMY

burada X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

18) Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası:

$DX=M(X-MX)^2=MX^2-(MX)^2$.

Əsas xassələri:

1. DC=0, C=const,   2. D(X±Y)=DX+DY

3. $DCX=C^2DX$,   4. $DXY+MX^2MY^2-(MX)^2(MY)^2$.

Burada X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

19) Binomial qanun ilə paylanmış X təsadüfi kəmiyyəti m=0,1,2, …n mümkün qiymətlər üçün alarıq:

1. $P_m = P(X = m) = C_n^m p^m (1-q)^{n-m}, 0 < p < 1$

2. MX=np,   3. DX=npq

20) Kəsilməz X təsadüfi kəmiyyəti üçün alırıq:

1. paylanma funksiyası

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt, -\infty < x < \infty$$

burada P(x) sıxlıq funksiyasıdır.

2. Riyazi gözləmə.

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

3. dispersiya

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (X - MX)^2 P(x)dx.$$

21) X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

şəklində olduqda ona normal qanunu ilə paylanmış kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyilir, burada $a = MX, \sigma = \sqrt{DX}$.

22) $\{x_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} MX_k \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \text{ və ya}$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} MX_k \right| < \varepsilon \right) = 1$$

şərtlərini ödədikdə, deyilir ki, həmin ardıcıllıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Cavablar

I fəsilə dair

Çalışma 1.

16) $$A+B=\begin{pmatrix} 8 & 18 & 17 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix} 18 & 10 & -17 \\ 7 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} -107 & 94 & 207 \\ -26 & 38 & 130 \\ -7 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

17) $$A+B=\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 4 & -\frac{1}{20} \\ 5 & 5 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & 4 & \frac{9}{20} \\ -1 & 1 & -9 \\ 8 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} \frac{133}{68} & \frac{43}{5} & \frac{2177}{60} \\ 23 & 6 & \frac{53}{2} \\ -10 & 3 & -50 \end{pmatrix}.$$

Çalışma 2.

16) $\Delta(A)=-618,\ \ \Delta(B)=-136,$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{13}{309} & \frac{7}{103} & -\frac{56}{309} \\ \frac{10}{309} & -\frac{13}{206} & \frac{14}{103} \\ -\frac{3}{103} & \frac{11}{103} & \frac{5}{103} \end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{13}{68} & \frac{1}{68} & -\frac{55}{136} \\ -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{3}{68} & -\frac{5}{68} & \frac{3}{136} \end{pmatrix}.$$

17) $\Delta(A)=-\dfrac{249}{5}, \quad \Delta B=-\dfrac{717}{4},$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{25}{83} & \dfrac{106}{249} & \dfrac{1}{83} \\ \dfrac{50}{249} & \dfrac{37}{747} & -\dfrac{2}{249} \\ \dfrac{40}{83} & -\dfrac{70}{249} & \dfrac{15}{83} \end{pmatrix}, \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{100}{717} & \dfrac{3}{717} & -\dfrac{2}{717} \\ \dfrac{156}{717} & -\dfrac{32}{717} & \dfrac{255}{717} \\ -\dfrac{68}{717} & \dfrac{84}{717} & -\dfrac{56}{717} \end{pmatrix}.$$

Çalışma 3. 3) həlli yoxdur. 4) x=1, y=2, z=3. 5) x=y=z=0.

6) Həlli yoxdur. 7) $x=-\dfrac{99}{100}$, $y=-\dfrac{163}{100}$, $z=-\dfrac{282}{100}$,

8) $x=\dfrac{149}{115}$, $y=-\dfrac{26}{115}$, $z=-\dfrac{19}{23}$. 9) x=1, y=2, z=3.

10) $x=-\dfrac{414}{365}$, $y=-\dfrac{298}{365}$, $z=\dfrac{938}{365}$. 12) x=3, y=2, z=1.

13) həlli yoxdur. 14) Sonsuz sayda həlli var.

15) x=1, y=1, z=1. 16) $x=2,\ y=-1,\ z=-3$.

17) $x=-1,\ y=1,\ z=0$.

Çalışma 4. $x=-\dfrac{1}{8}$, $y=-\dfrac{115}{8}$, z=0, $t=-\dfrac{139}{8}$. 2) Sonsuz sayda həlli var. 3) $x=-\dfrac{1}{6}$, $y=\dfrac{17}{6}$, $z=\dfrac{17}{6}$, $z=\dfrac{23}{6}$. 4) x=1, y=1, z=0, t=-2.

6) $x=\dfrac{57}{13}$, $y=\dfrac{164}{13}$, $z=\dfrac{251}{13}$, $t=\dfrac{131}{13}$. 7) x=0, y=2, $z=\dfrac{1}{3}$, $t=-\dfrac{3}{2}$.

8) $x=-\dfrac{4}{27}$, $y=\dfrac{80}{27}$, $z=\dfrac{74}{27}$, $t=\dfrac{104}{27}$. 9) Sonsuz sayda həlli var.

10) x=-5, y=1, $z=\dfrac{57}{11}$, $t=\dfrac{67}{11}$. 11) Sonsuz sayda həlli var.

12) Həlli yoxdur. 13) x=$-\frac{1}{3}$, y=$\frac{1}{6}$, z=$\frac{3}{2}$.

14) Sonsuz sayda həlli var. 15) $x=-\frac{229}{11451}$, $y=\frac{4041}{3817}$,

$z=\frac{26075}{11451}$, $t=\frac{19163}{11451}$. 16) $x=1,\ y=2,\ z=3,$

17) $x=3,\quad y=2,\ z=1$

II fəsilə dair

Çalışma 1. 2) $\overline{d}=3\overline{a}+2\overline{b}-2\overline{c}$. 3) $\overline{d}=2\overline{a}-2\overline{b}+\overline{c}$.
4) $\overline{d}=-\overline{a}+5\overline{b}+3\overline{c}$. 5) $\overline{d}=-6\overline{a}+\overline{b}+3\overline{c}$.
6) $\overline{d}=2\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c}$. 7) $\overline{d}=2\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c}$.
8) $\overline{d}=4\overline{a}-2\overline{b}+\overline{c}$. 9) $\overline{d}=-\frac{25}{72}\overline{a}-\frac{109}{18}\overline{b}+\frac{79}{24}\overline{c}$.
10) $\overline{d}=3\overline{a}+5\overline{b}+\overline{c}$. 11) $\overline{d}=-\frac{124}{593}\overline{a}+\frac{122}{593}\overline{b}+\frac{71}{593}\overline{c}$.
12) $\overline{d}=\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{c}$. 13) $\overline{d}=4\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c}$.
15) $\overline{d}=\frac{7}{23}\overline{a}-\frac{75}{23}\overline{b}+\frac{22}{23}\overline{c}$. 16) $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$.
17) $\overline{d}=2\overline{a}+5\overline{b}-3\overline{c}$.

Çalışma 2. 1) Kolinear deyil. 3) Kolinear deyil. 4) Kolinear deyil. 5) Kolinear deyil. 6) Kolinear deyil. 7) Kolinear deyil. 8) Kolinear deyil. 9) Kolinear deyil. 10) Kolinear deyil. 11) Kolinear deyil. 12) Kolinear deyil. 13) Kolinear deyil. 14) Kolinear deyil. 15) Kollinear deyil. 16) Kolinear deyil. 17) Kolinear deyil.

Çalışma 3. 2) ≈0,53. 3) ≈0,97. 4) ≈0,81. 5) ≈0,39. 6) ≈0,83. 7) ≈-0,09. 8) 0. 10) 0. 11) ≈0,55. 12) ≈0,52. 13) ≈0,81. 14) –0,5. 15) ≈0,45. 16) –0,5. 17) 0,(3) *Çalışma 4.* 1) Komplanar deyil. 2) Komplanar deyil. 3) Komplanar deyil. 4) Komplanar deyil. 6) Komplanar deyil. 7) Komplanar deyil. 8) Komplanar deyil. 9) Komplanar deyil. 10) 11) Komplanar deyil. 12) Komplanar deyil. 13) Komplanardır. 14) Komplanardır. 15) Komplanar deyil. 16) Komplanar deyil. 17) Komplanar deyil.

Çalışma 5. 1) $\frac{17}{3}$. 3) 10. 4) $\frac{7}{6}$. 5) $\frac{76}{3}$. 6) $\frac{8}{3}$. 7) 20. 8) $\frac{52}{3}$.

9) $\frac{107}{2}$. 10) $\frac{625}{6}$. 11) $\frac{187}{6}$. 12) 10. 14) $\frac{467}{3}$. 15) $\frac{237}{6}$.

16) $52\frac{2}{3}$. 17) $13\frac{2}{3}$.

Çalışma 6. 1) ≈1,07. 2) ≈ 1,87. 3) ≈2,343. 4) ≈1,186. 5) ≈5,32. 6) ≈ 3,48. 7) ≈ 3,95. 8) ≈5,79. 9) ≈ 2,212. 10) ≈1,535. 11) ≈2,918. 13) ≈7,413. 14) 8,16. 16) ≈3,85. 17) ≈1,533.

Çalışma 7. 1) ≈0,94, 3) 0. 4) ≈0,43. 6) ≈-0,03. 7) ≈0,94. 8) ≈0,55. 9) 0. 10) ≈0,704. 11) ≈0,58. 12) ≈0,71. 13) ≈0,904. 14) ≈0,03. 15) ≈0,53. 16) ≈0,99. 17) ≈0,289.

Çalışma 8. 1) $\frac{x+13}{0}=\frac{y-7}{0}=\frac{z}{1}$ (x+13=0, y-z=0).

3) $\dfrac{x-\frac{7}{3}}{2}=\dfrac{y-\frac{2}{3}}{4}=\dfrac{z}{-3}$. 4) $\dfrac{x-\frac{7}{3}}{0}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z}{3}$ $\left(x-\frac{7}{3}=0\right)$.

5) $\frac{x-4}{16}=\frac{y+3}{-11}=\frac{z}{-1}$. 6) $\dfrac{x+\frac{5}{4}}{1}=\dfrac{y-\frac{7}{4}}{-7}=\dfrac{z}{4}$.

8) $\dfrac{x-\frac{16}{5}}{-4}=\dfrac{y-\frac{9}{5}}{7}=\dfrac{z}{5}$. 10) $\frac{x}{5}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ (y=0, z=0).

11) $\dfrac{x-\frac{7}{10}}{1}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-5}=\dfrac{z}{10}$. 12) $\dfrac{x+35}{2}=\dfrac{y-20}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

13) $\dfrac{x+\frac{39}{4}}{0}=\dfrac{y+\frac{21}{2}}{-10}=\dfrac{z}{4}(x+\frac{39}{4}=0)$.

14) $\dfrac{x+\frac{5}{2}}{5}=\dfrac{y+\frac{7}{2}}{1}=\dfrac{z}{-2}$. 15) $\dfrac{x-\frac{11}{10}}{1}=\dfrac{y-\frac{7}{2}}{5}=\dfrac{z}{10}$.

16) $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$. 17) $\dfrac{x}{-11}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{13}$.

Çalışma 9. 2) $\left(\frac{47}{5},\frac{4}{5},\frac{32}{5}\right)$. 4) $\left(\frac{27}{5},-\frac{47}{5},\frac{44}{5}\right)$.

5) $\left(\frac{49}{12},-\frac{1}{12},204\right)$. 6) $\left(\frac{37}{12},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)$. 7) $\left(-\frac{11}{6},\frac{17}{9},-\frac{43}{18}\right)$.

8) $\left(\frac{4}{3},-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$. 9) $\left(-\frac{8}{5},\frac{11}{5},-\frac{4}{5}\right)$. 10) $\left(\frac{8}{3},-\frac{19}{3},0\right)$.

11) $\left(-\frac{10}{7},\frac{26}{7},\frac{5}{7}\right)$ 12) (13,-9,28) 13) (-1,3,0). 14) (13,1,4).

15) $\left(\frac{47}{11},\frac{60}{11},-\frac{24}{11}\right)$. 16) (2,–3,6). 17)düz xətt müstəvi üzərində yerləşir.

Çalışma 10. 2) Mərkəzi O(1,-1) nöqtəsində yarım oxları $a=5$, b=4 olan ellipis. 3) Mərkəzi O(-1,2) nöqtəsində yarım oxları a=3, b=1 olan hiperbola. 4) Təpəsi A(1,-2) nöqtəsində parametri p=$\frac{1}{5}$ olan parabola. 6) Təpəsi A($\frac{1}{3}$,1) nöqtəsində parametri p=$\frac{1}{18}$ olan parabola. 7) Mərkəzi O(-2,2) nöqtəsində yarım oxları $a=\sqrt{28}, b=\sqrt{7}$ olan ellipis. 8) Mərkəzi O(3,1) nöqtəsində yarım oxları a=3, b=$\sqrt{5}$ olan ellipis. 9) Təpəsi A(1,3) nöqtəsində parametri p=8 olan parabolanın y-3=0 düz xəttindən aşağıda yerləşən hissəsi. 10) Təpəsi A(-4,-5) nöqtəsində parametri p= $\frac{9}{2}$ olan parabolanın x+4=0 düz xəttindən sacda yerləşən hissəsi. 11) Mərkəzi O(2,-1) nöqtəsində yarım oxları a=3, b=4 olan hiperbola. 12) Təpəsi A(2,3) nöqtəsində parametri p=-1 olan parabolanın x-2=0 düz xəttindən solda yerləşən hissəsi. 13) Təpəsi A(-7,-5) nöqtəsində parametri p=-$\frac{3}{2}$ olan parabolanın y+5=0 düz xəttindəq aşağıda yerləşən hissəsi. 14) Mərkəzi O(-3,0) nöqtəsində yarım oxları a=1, b=1 olan hiperbola. 15) Mərkəzi O(5,3) nöqtəsində radiusu r=3 olan çevrə. 16) $O(-1,3,-2)$. 17) $P(-25,16,4)$.

III fəsilə dair

Çalışma 1. 1)-4. 2)1. 3) 0. 5) $\frac{1}{10}$. 6) 0. 7) 0. 8) -$\frac{1}{2}$. 9) 1. 10) 1. 12) 1. 13) $\frac{3}{2}$. 14) $\frac{15}{17}$. 15) 0. 16) 3. 17) 0.

Çalışma 2. 1) ∞. 2) $\frac{3}{2}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) $-\frac{1}{3}$. 6) 1. 7) ∞. 8) 0. 9) 0. 10) ∞. 11) ∞. 12) 0. 13) 0. 14) ∞. 16) $\frac{5}{2}$. 17) $\frac{3}{2}$.

Çalışma 3. 2) e^3. 3) e^6. 4) e^4. 5) e. 6) e. 7) 1. 8) $\frac{1}{e}$. 9) e^2. 10) $e^{-\frac{3}{2}}$. 11) $e^{\frac{8}{3}}$. 12) e^{-16}. 13) $\frac{1}{e}$. 14) 1. 16) e^2. 17) e^8.

Çalışma 4. 1) $\frac{1}{3}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 0. 5) ∞. 6) 0. 7) 0. 8) $-\frac{2}{3}$. 9) –3. 11) 4. 12) $\frac{1}{2}$. 13) 1. 14) $\frac{15}{11}$. 15) 10. 16) 9. 17) 6.

Çalışma 5. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}-7}$. 2) $2\sqrt{2}$. 3) 6. 4) $\frac{12}{5}$. 5) $\frac{1}{3}$. 6) $\frac{1}{24}$. 7) –3. 9) 4. 10) $\frac{2}{3}$, 12) $-\frac{1}{24}$. 13) $\frac{2}{3}$. 14) $\frac{5}{3}$. 15) $\frac{1}{4}$. 16) $-\frac{1}{16}$. 17) $\frac{4}{3}$.

Çalışma 6. 2) 50. 3) 1. 4) 2. 5) –2, 6) –3. 7) $\frac{3}{4}$. 8) $\frac{2}{\pi}$. 9) 5. 10) 2. 11) $\frac{3}{2}$. 12) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 13) 8. 15) $\sqrt{2}$. 16) $\frac{1}{2}$. 17) -1.

Çalışma 7. 1) -2π. 2) π. 4) $\frac{16\ln 2}{\pi}$. 5) –2. 6) $-\frac{\pi}{2}$. 8) $\frac{2}{3}$. 9) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. 10) $\frac{1}{2}$. 11) $\frac{1}{3}$. 12) 0. 13) $\frac{1}{\cos^2 2}$. 14) $\frac{\pi}{2}$. 15) –1. 16) $-\frac{7}{2}$. 17) $\frac{1}{2\pi}$.

Çalışma 8. 1) $\frac{2}{3\pi^2}$. 2) $-15\pi^2$. 3) $-\frac{1}{2\ln^2 3}$. 4) $\frac{8}{\pi}$. 6) 0. 7) $-\frac{1}{\ln 3}$. 8) 0. 9) $\frac{3}{2}$. 11) $64\sqrt{2}$. 12) $\frac{1}{2}$. 13) $\frac{3}{2}$ 14) 2. 15) 1. 16) 12. 17) $-\frac{1}{2}$.

Çalışma 9. 2) $e^{-\frac{5}{2}}$. 3) $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 3) $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 4) $\frac{1}{4}$. 5) $\frac{1}{2}$. 7) $\frac{1}{9}$.

8) $\frac{1}{e}$. 9) 1. 10) e. 11) 1. 12) $e^{ctg\alpha}$. 13) e. 14) $\frac{1}{e}$. 15) 2.16) e.

17) $\sqrt{e}$.

Çalışma 10. 2) $\frac{1}{e^2}$. 3) $e^{-\frac{1}{2}}$. 5) 1. 6) $e^{\frac{1}{2}}$. 7) 0. 8) e^2. 9) 1.

10) 1. 11) $\frac{2}{\pi}$. 12) $\frac{1}{3}$. 13) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 14) 1. 15) 1. 16) e. 17) $\frac{1}{e}$.

IV fəsilə dair

Çalışma 1. 2) $7x^6-10x^4+4x^3-12x^2+2x+3$. 3) $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2$ $(1+6x+15x^2+14x^3)$. 4) $\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$ 5) $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

6) $\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+5)^2}}$. 7) $\frac{5x+3}{2\sqrt[4]{(x^2+6x+1)^3}}$.

8) $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$. 9) $\frac{-x^2+2x+12}{x^3\sqrt{2x+3}}$.

10) $\frac{x^2+2}{(x+1)^2\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ 11) $\frac{-9x^8+93x^5-45x^2}{2(8-x^3)\sqrt{8-x^3}}$.

12) $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$ 13) $\frac{9x^5+6x^2}{2\sqrt{(1+2x^3)^3}}$

14) $\frac{-4x^3+2x^2+6x-1}{3\sqrt{(2+4x)^3}}$. 16) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$. 17) $\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$.

Çalışma 2. 1) $x^2\sin x$. 2) $(18-2x^2)\cos 2x+(x^2-2x-9)\sin 2x-2x\cos^2 x$.

3) $\frac{(1+tgx)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+ctgx)^2}$.

4) $\frac{3\cos 3x}{\cos^2 6x}-\frac{3}{2}\sin 3x tg6x$. 5) $\frac{4\cos 2x}{3\sqrt{(1+2\sin 2x)^2}}$. 6) $-\sin^3 x$.

7) $2tgx\sec^2 x$. 9) $2\sin 2x$. 10) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$. 12) $\sin 2x$.

13) $\frac{3x\sin 2x^2}{4\sqrt{\sin x^2}}$. 14) $\frac{3\sin 2x}{4\sqrt{\sin x}}$. 15) $\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 16) $\frac{1}{1+\cos x}$.

17) $\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$.

Çalışma 3. 2) $-\frac{4arctg^3\frac{1}{x+2}}{x^2+4x+5}$. 3) $\sin x\, arstgx+x\cos x\, arctgx+\frac{x\sin x}{1+x^2}$

4) $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. 5) $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

6) $\frac{1}{\sqrt{(1-\arccos x)^2(1-x^2)}}$. 7) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

8) $\frac{1}{3\sqrt{(xarctgx^2)^2}}\left(arc\,ctgx^2-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)$. 9) $\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

11) $-\frac{1}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$. 12) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$ 13) 1.

14) $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}\; arccos^3(x^2)}$. 15) $\dfrac{1}{1+x^2}$. 16) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1-4\sin^2 x.}}$.

17) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

Çalışma 4. 1) $-\dfrac{2}{x(1-ln^2 x)}$. 2) $\dfrac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}$.

4) $-72\ln\cos(4x-1)\,tg(4x-1)$. 5) $\dfrac{1}{x\,ln\,x\,ln(ln\,x)}$. 6) $\dfrac{2x}{3ln3(x^2-1)}$.

7) $\dfrac{1}{3x\,ln7}$. 8) $\dfrac{3(3x^2+1)ln^2(x^3+x+1)}{x^3+x+1}$.

9) $\dfrac{1}{x\,log_4^x\, log_3(log_4 x)\,ln2\,ln3\,ln4}$. 11) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$.

12) $\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)(4+x)}}$. 13) $\dfrac{1}{x^2-1}$. 14) sec$x$. 15) $\dfrac{2}{3(x^2-1)}$.

16) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x.}}$. 17) $\dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$.

Çalışma 5. 2) $e^x\, cos^2 2x(cos\,2x-6\,sin\,2x)$.

3) $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\sin^3 3x\cos 3x$. 4) $e^x(cos\,x+sin\,x+2x\,cos\,x)$.

5) $2(x^2-1)^{2x}\left(ln(x^2-1)+\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$. 6) $\dfrac{xe^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{(2-x^2)(x^2-1)}}$.

7) $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{e^{arctg^3\sqrt{x+4}}\,arctg^2\sqrt{x+4}}{2(5+x)\sqrt{x+4}}$. 8) $-\dfrac{\ln 2}{1+x^2}\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}+2xe^{\sin x^2}\cos x^2$.

9) $e^{x\ln(x+2)}\left(\ln(x+2)+\dfrac{x}{x+2}\right)$. 10) $-\dfrac{\log x^2}{x\ln x}$. 11) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

12) $x^x(1+\ln x)$. 13) $\frac{\ln 2}{x}\cdot 2^{\log_3 x}\cdot\log_3 e$.

15) $\frac{ctg(x+1)\ln\cos(x+1)+tg(x+1)\ln\sin(x+1)}{\ln^2\cos(x+1)}$.

16) $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$.

17) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

Çalışma6. 3) $\frac{1+4\cos\sqrt[6]{3}}{3\sqrt[3]{3}}$. 4) $\frac{2}{5}$. 5) 0. 6) 1. 7) $\frac{9}{16}$. 8) 8. 9) 0.

10) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}$. 11) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 12) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2e^2\sqrt{16+\pi^2}+\frac{\pi\ln 2}{\sqrt{32+2\pi^2}}$.

13) -1. 14) $\frac{11}{8}+\ln 5$. 15) 0. 16) $e^x\sin x\cos^3 x(1+ctgx-3tgx)$.

17) $\frac{arctgx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Çalışma 7. 2) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$. 3) $\frac{dx}{1+\cos x}$. 4) $-\frac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$.

5) $\frac{2dx}{(2x+1)(1+\ln^2(2x+1))}$. 6) $\left(\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}\arcsin x}+\frac{2arctgx}{1+x^2}\right)dx$.

7) $-\frac{2xdx}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. 8) $\frac{(3-x)dx}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. 9) $e^x\sin x\cos^3 x(1+ctgx-3tgx)dx$

10) $\frac{(e^x+e^{-x})(\cos x-\sin x)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}dx$. 11) $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)dx$

12) $-\frac{dx}{1+x^2}$. 13) $2e^{-x^2}(e^{-2x}\sin e^{-2x}-x\cos e^{-2x})dx$.

14) $\dfrac{\sin^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$. 16) $2\cos\ln x dx$..17) $xe^x(x+3)dx$.

Çalışma 8. 1) $2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2})$. 2) $(-1)^{n+1}\dfrac{5\cdot 3^{n-1}n!}{(3x+4)^{n+1}}$.

3) $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$. 4) $(x^2-n(n-1)\sin(x+n\dfrac{\pi}{2})-2n\cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$.

5) $(-1)^{n-1}\dfrac{3^n(n-1)!}{(3x+1)^n}$. 6) $\dfrac{1}{2}\left(7^n\sin(7x+n\dfrac{\pi}{2})+3^n\sin(3x+n\dfrac{\pi}{2})\right)$.

7) $(-1)^n\dfrac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$. 8) $-3\cdot 2^{n-1}\cos(2x+n\dfrac{\pi}{2})$.

9) $(2^x+(-1)^n2^{-x})\ln^n 2$. 11) $(-1)^n n!\left(\dfrac{2}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$.

13) $n!\left(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$. 14) $\dfrac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^n+\dfrac{1}{3}}$.

15) $e^x\sin(x+n\dfrac{\pi}{4})2^{\frac{n}{2}}$. 16) $e^x(x+n)$. 17) $4^{n-1}\cos(4x+n\dfrac{\pi}{2})$..

Çalışma9. 2) $tg\dfrac{t}{2},-\dfrac{\sin\dfrac{t}{2}}{4\cos^5\dfrac{t}{2}}$. 4) $-1;0$

5) $\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t},\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$. 6) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3},\dfrac{3-2t^2}{t^5}$.

7) $-2tg^2t$, $4tg^2t$. 8) $-\sin2e^t$, $\cos2e^t\sin^2 2e^t$.

9) $-\frac{\sqrt{1-t}}{2t}, \frac{t-2}{4t^3}\sqrt{1+t}$. 10) $-2ctg^2t, 4ctg^2t$.

11) $\frac{\sin 2t\cos t-\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)-\sin t\sin 2t}, \frac{1}{cos^3 t(3cos^3 t-1)}$.

12) $-t$, $-\sqrt{1-t^2}$. 13) $-tgt$, $-\frac{1}{3a\,cos^4 t\,sin\,t}$. 14) $\frac{t}{2}, \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+t\right)$.

15) $\frac{2}{3t}, -\frac{2}{9t^4}$. 16) $\frac{1-t}{1+t}e^{-2t}$, $\frac{2t^2-4}{(1+t)^3}e^{-3t}$. 17) $3t^3$, $9e^{3x}$.

Çalışma10. 1) $-\frac{1+y^2}{2+y^2}$. 2) $\frac{e^{x-y}-1}{e^{x+y}+1}$. 4) $\frac{x-2}{5-y}$.

5) $\frac{2-2x-5y}{5x+2y+1}$. 6) $\frac{1+e^x}{1+e^y}$. 7) $\frac{1-x-y}{x-y}$. 8) $\frac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}}$.

9) $\frac{3x^2-4xy^2+5}{4x^2y-1}$. 10) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 12) $\frac{e^x\,sin\,y-e^y\,sin\,x}{e^y\,cos\,x-e^x\,cos\,y}$.

13) $\frac{2x-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$. 14) $\frac{x^2-y}{x-y^2}$. 15) $\frac{y(1+(x+y)^2)-1}{1-x(1+(x+y)^2)}$.

16) $\frac{x+y}{x-y}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 17) $-tgx, \frac{1}{3a\sin t\cos^4 x}$.

Çalışma11. 3) ≈0,3572. 4) ≈0,8471. 5) ≈0,1618. 6) ≈1,396. 7) ≈3,0171. 8) ≈3,1072. 9) ≈1,0414. 10) ≈2,8336. 11) ≈5,85. 12) ≈0,6287. 13) ≈0,7766. 14) ≈ 1,009. 15) ≈0,9253. 16) ≈1,9938. 17) ≈1,9955.

Çalışma 1. 1) $\frac{4}{7}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) $-\frac{2}{\pi}$. 5) 0. 6) $\frac{1}{2}$. 7) e. 8) e^2. 9) $\frac{1}{128}$.

10) 1. 12) $+\infty$. 13) 0. 14) $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 15) $\frac{1}{3}$. 16) $\frac{1}{2}$. 17) 0.

Çalışma 2. 1) (0,1) və (2,∞) artır, (-∞,0) və (1,2) azalır. 2) $(-\infty,-\frac{1}{2})$ və $(\frac{1}{2},\infty)$ artır, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ azalır. 3) (0,1) artır, (-∞,0) və (1, ∞) azalır. 4) (-∞,0) və $(\frac{1}{2},\infty)$ artır, $(0, \frac{1}{2})$ azalır. 6) (0,2) artır, (-∞,0) və (2, ∞) azalır. 7) Monaton artır. 8) (e, ∞) artır, (0,1) və (1,e) azalır. 10) (-1,0) və (1,∞) artır, (-∞,-1) və (0,1) azalır. 11) (0,1) artır (1,2) azalır. 12) Monoton azalır. 13) (-∞,-2) və (0, ∞) artır, (-2,0) azalır. 14) $(0,\frac{3}{4})$ artır, $(\frac{3}{4},1)$ azalır, 15) (-∞,-1) və (3, ∞) artır, (-1,3) azalır. 16) (-∞,-1) və (1, ∞) artır, (-1,1) azalır. 17) (-∞,1) artır, (1, ∞) azalır.

Çalışma3. 2) Ekstremumu yoxdur. 3) $y_{max}=y(0)=4$, $y_{min}=y(-2)=\frac{8}{3}$. 4) $y_{max}=y(0)=-4$, $y_{min}=y(1)=-5$. 5) $y_{max}=y(0)=2$, $y_{min}=y(2)=\sqrt[3]{4}$. 7) $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(1)=-\frac{2}{3}$. 8) $y_{min}=y(-1)=1$. 9) $y_{max}=y(\frac{1}{2})=\frac{81}{8}\sqrt{18}$, $y_{min}=y(-1)=0$, $y_{min}=y(5)=0$. 10) $y_{min}=y(2)=-3$. 11) $y_{min}=y(-2)=6\sqrt[3]{4}$, 12) $y_{min}=y(3)=-4$. 13) $y_{max}=y(0)=1$, $y_{min}=y(\pm 1)=0$. 14) $y_{max}=y(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{min}=y(1)=0$. 15) $y_{max}=y(2)=3$, $y_{min}=y(3)=0$.

16) $y_{max} = y(0) = 0,\ y_{min} = y(4) = -32$. 17) $y_{max} = y(0) = 3$.

Çalışma 4. 1) $y_{max}=y(2)=\frac{2}{e}$. 3) $y_{max}=y(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=1$, $y_{min}=y(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)=-1$, $k\in z$. 4) Monoton artır.

5) $y_{max}=y\left(\frac{k\pi}{2}\right)=1$, $y_{min}=y\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $k\in z$.

6) $y_{max}=y\left(\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$, $y_{min}=y\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $k\in z$. 8) $y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=1$, $k\in z$. 9) $y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=$ $=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in z$. 10) $y_{max}=y(k\pi)=10$, $y_{min}=y\left(\frac{\pi}{2}k+\pi k\right)=5$, $k\in z$. 11) $y_{max}=y(k\pi)=\sqrt{2}$, $k\in z$. 12) $y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{min}=y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\approx -1{,}55e^{2k\pi}$, $k\in z$. 13) Ekstremum yoxdur.

14) Ekstremumu yoxdur. 15) $y_{max}=y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln2$.

16) $y_{min} = y(e) = e$. 17) $y_{max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$, $y_{min} = y(0) = 0$.

Çalışma 5. 1) M=13, m=4. 3) M=1, m=0. 4) M=2, m=$\sqrt[3]{2}$. 5) M=$-\frac{1}{16}$, m=$-\frac{25}{2}$. 6) M=2, m=-2. 7) M=1, m=-6. 8) M=3, m=2. 9) M=1, m=$\frac{3}{5}$. 10) M=5, m=0. 11) M=4, m=-4. 12) M=8, m=4. 13) M=5, m=-3. 15) M=8, m=-5. 16) M=8, m=0.
17) M=$\frac{\pi}{4}$, m=0.

Çalışma 6. 1) Çöküklüyü aşağıyadır. 2) Çöküklüyü aşağıyadır. 4) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 5) (0,0), $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2},\frac{1}{3}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 6) Əyilmə nöqtəsi yoxdur, 7) Əyilmə nöqtəsinin absisləri: $x_1=\sqrt{3}-2, x_2=-2-\sqrt{3}$. 8) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 9) (0,0). 10) $\left(\sqrt[3]{2},\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. 12) (0,0). 13) əyilmə nöqtəsinin absisləri: $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}, x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}$. 14) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 15) (0,0). 16)(0,-2). 17)(0,0).

Çalışma 7. 2) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 3) Əyilmə nöqtələrinin absisləri:

$x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}, x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}$. 4) (0,0), (-π,0) (π,0). 5) $\left(\frac{\pi}{2},0.\right)$. 6) Çöküklüyü aşağıyadır. 7) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 8) Əyilmə nöqtəsi yoxdur. 10) $\left(\frac{\pi}{4},0\right),\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$.

11) $x\leq 0,4$ olduqda çöküklyü aşağıyadır, $x\geq\frac{2}{3}$ olduqda çöküklüyü yuxarıyadır. 12) Əyilmə nöqtələrinin absisləri. $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, k∈z. 13) (0,0). 14) Əyilmə nöqtələrinin absisləri: $x_k=k\pi$, k∈z. 15) (0,0). 16) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 17)(4,20).

Çalışma 8. 1) y=0, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$. 2) y=3x-$\frac{\pi}{2}$. 3) y=x+$\frac{1}{3}$. 4) y=x+$\frac{1}{e}$, $x=-\frac{1}{e}$. 5) y=x. 6) y=2x-$\frac{\pi}{2}$. 7) $x=\pm 2$. 8) y=0.

9) $y=\frac{x}{2}+\pi$. 10) $x=0$. 13) $x=0$, $y=x+3$. 14) $y=0$. 15) $x=0$, $y=0$.

16) $y=2x+1$. 17) $y=2x-\frac{\pi}{2}$.

VI fəsilə dair

Çalışma1. 1) 1. 3) $2^{24}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$. 4) 1. 5) 1. 6) $2^{-26}(-\sqrt{3}+i)$.
8) 1. 9) $16(1-i\sqrt{3})$. 10) –2. 11) 2. 12) $512i$. 13) $-512i$.

14) $\frac{1-i}{4(1-i\sqrt{3})}$. 15) 64. 16) $32i$, 17) $8-i8\sqrt{3}$.

Çalışma 2. 1) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right), \pm\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

2) $\pm 4\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right), -4\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$. 4) $\pm i, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

5) $i, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$. 6) $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right), \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24}+i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$

7) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i), \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

8) $\pm 3i$. 9) -3, $\frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})$. 10) -4, $2\pm 2i\sqrt{3}$. 11) $\pm 6i$.

13) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right), -\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right), \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$

14) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right), -\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

15) $\pm\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$. 16) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. 17) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$, $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Çalışma 3. 2) –0, 7976; 1,4945. 3) ±1,1623. 5) 1,3713. 6) 3,3532. 7) 1,2672. 8) –3; 2,08. 9) –2,33. 10) 0,44. 11) 0,39

1,25. 12) –0,6; 0,9. 13) 0,2510; 1,4934. 14) –1,4916. 15) 0,7391. 16)1,7692. 17)2,5062.

VII fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $\frac{6x-1}{9}e^{-3x}+c$. 2) $\frac{11-6x}{4}e^{2x}+c$. 3) $\frac{5x-2}{5}e^{5x}+c$.

4) $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$. 5) $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+(x-\frac{1}{2})\arcsin\sqrt{x}+c$.

6) $-ctgx+ln|\sin x|+c$. 7) $x tgx+\ln|\cos x|+c$.

8) $c-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx\right)$. 9) $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}tgx+c$.

10) $(2x^2+7x+1)arctgx-2x-\frac{7}{2}ln(1+x^2)+c$.

11) $\left(\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{3}{2}\right)arctgx+2ln(1+x^2)+c$.

12) $x\,ln(4x^2+1)-2x+arctg2x+c$. 14) $\frac{x^2+1}{2}arcctgx+\frac{x}{2}+c$

16) $x\ln(x^2+x)+\ln|x+1|-x+c$.

17) $(x-1)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$.

Çalışma 2. 1) $\pi^2+3\pi-4$. 2) π^2+18. 3) $10-\pi$. 4) $\pi^2+2\pi-2$.

5) -32π. 6) $\pi^2-3\pi-4$. 7) $\pi^2-3\pi-6$. 9) 12π. 10) $18-\frac{42}{e}$.

11) $10e-\frac{26}{e}$. 12) $\frac{5e^9-2}{27}$. 13) $\frac{8}{3}ln2-\frac{7}{9}$.

14) $2ln^2 2-2ln2-\frac{3}{4}$. 16) $2\ln 2-\frac{3}{4}$. 17) $\frac{2}{5}$.

Çalışma 3. 1) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}+c$.

2) $\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}-\ln(x+2)+c$. 3) $-\frac{1}{2}(arccos\,x)^2+c$.

4) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c$. 6) $\frac{1}{5}(arctgx)^5+c$.

7) $-\frac{1}{4}(arccos\,x)^4+c$. 8) $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}ln(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1)+c$.

9) $\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c$. 10) $\frac{1}{4}ln(x^4+1)+\frac{1}{2}arctgx^2+c$.

11) $\sqrt{x^2-x-1}+\frac{1}{2}ln\left|\sqrt{x^2-x-1}+2x-1\right|+c$.

12) $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}ln|sin\,x+cos\,x|+c$. 13) $\frac{x^4}{4}+(x^2-1)\,ln\,x+\frac{1}{3}ln^3x+c$.

15) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-6\sqrt{x+1}+c$. 16) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$.

17) $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+c$.

Çalışma 4. 1) $\ln\left|x^2-2x-2\right|+\frac{1}{\sqrt{12}}\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{12}}{2x-2+\sqrt{12}}\right|+c$.

2) $x+\frac{9}{4}ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+2ln\left|x^2-4\right|+c$. 3) $\frac{1}{2}ln|x+1|-\frac{1}{4}ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+c$

4) $2ln|x+1|-\frac{1}{2x^2}+c$. 5) $c-\frac{x}{(x^2-1)^2}+c$.

6) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|(x+2)^{32}+c$.

7) $-\frac{x^4}{4}+6x^2-6\ln(x^2+3)+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$.

8) $-\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c$. 9) $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+c$.

10) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+c$.

12) $\frac{x-x^2}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}arctgx+c$.

14) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c$. 15) $x^2+\ln\frac{x^2-1}{x}+c$.

16) $\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}arctgx+c.$

17) $-\frac{x+5}{9(x^2+x-2)}-\frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c.$

Çalışma 5.

2) $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{25}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+c$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+c$. 4) $3(\ln\sqrt[3]{x}-\ln(1+\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}-\arcsin\sqrt[3]{x})+c$.

5) $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+c$.

6) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+c$. 7) $(2x-4)\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+c$.

8) $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{arctgx}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+c$.

9) $x-\frac{1}{7}ctg^7x+\frac{1}{5}ctg^5x-\frac{1}{3}ctg^3x+ctgx+c$.

10) $arctg\frac{tgx}{\sqrt{2+tg^2x}}+\ln(\sqrt{2+tg^2x}+tgx)+c$.

11) $\frac{1}{x}\sqrt{2x^x-2x+1}+c$. 12) $-\frac{1}{2x^2}\arcsin x-\frac{1}{2x}\sqrt{1-x^2}+c$.

13) $\frac{\sqrt{x-1}}{4x^2}(3x+2)+\frac{3}{4}arctg\sqrt{x-1}+c$.

14) $-\frac{1}{\sqrt{2}}arc(\sqrt{2}ctg2x)+c$.

16) $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$

17) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+c.$

Çalışma 6. 1) $\frac{169}{16}\pi$. 2) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. 3) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 5) π. 6) $\frac{25}{16}\pi$.

7) 2-ln2. 8) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 9) $\frac{\pi}{6}$. 10) 2ln2-1.

12) $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{5}}$. 13) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 14) $\frac{1}{2}ln\frac{8}{5}$.

15) $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{125})$. 16) $464\frac{\sqrt{2}}{5}$. 17) $282\frac{2}{5}$.

Çalışma 7. 1) $\pi\sqrt{2}$. 3) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 5) $\frac{\pi^2}{4}$. 6) $\frac{1}{6}$. 7) $\pi^3-6\pi$.

8) $\frac{\pi}{32}$. 9) $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$. 10) $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. 11) $\frac{2}{5}$.

12) $\frac{1-ln2}{2}$. 13) $\frac{\pi^2}{4}$. 14) $\frac{3\pi}{4}-ln\sqrt{2}$. 15) $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

16) $\ln 2$. 17) $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Çalışma 8. 1) $\dfrac{16}{3}$. 2) $\dfrac{1}{3}$. 4) $\dfrac{32}{3}\sqrt{6}$. 5) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$. 6) 4,5

7) $\dfrac{9\pi}{4}-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,ln2-\dfrac{9}{2}arcsin\dfrac{1}{3}$. 9) $\dfrac{\pi}{2}$. 10) $\dfrac{4}{3}$. 11) 16.

12) $\dfrac{72}{5}\sqrt{3}$. 13) $e+\dfrac{1}{e}-2$. 14) $\dfrac{4}{3}$. 15) 0,75π. 16) $\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

17) $18\pi a^2$.

Çalışma 9. 2) ln3. 3) $\dfrac{e^2+1}{4}$. 4) $2\sqrt{17}+\dfrac{1}{2}ln(4+\sqrt{17})$.

5) $\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2})$. 6) $\dfrac{\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2})}{2}$. 7) $\dfrac{5}{8}\left(2-\dfrac{ln(2-\sqrt{9}}{\sqrt{3}}\right)$.

8) 12. 9) $\sqrt{3}-\sqrt{2}+ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. 10) $2(e-e^{-1})$. 11) $ln(e+\sqrt{e^2-1})$.

12) $2\sqrt{6}$. 14) $\dfrac{26\sqrt{13}-8}{27}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. 15) $4\sqrt{3}$. 16) $1+\dfrac{1}{2}\ln 3$.

17) $\ln 3-\dfrac{1}{2}$.

Çalışma 10. 1) $4\sqrt{2}$. 2) π. 3) $\dfrac{8\sqrt{6}\pi}{3}$.

4) $V_1=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}-\dfrac{11}{3}), V_2=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}+\dfrac{11}{3})$. 5) $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{2}$.

7) $\dfrac{25\pi}{12}$. 8) $\dfrac{16a}{3}$. 9) 301π. 10) 2π. 11) $\dfrac{16}{15}$. 12) $\dfrac{16}{3}$.

13) $\dfrac{2}{3}\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$. 15) $\dfrac{16a^3}{3}$. 16) 36π.. 17) 8π.

Çalışma 11. 1) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right)$. 2) 3π.

3) $\frac{\pi}{27}(11665\sqrt{11665}-1)$. 4) $2\pi b^2+\frac{2\pi ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

6) $\frac{\pi(353\sqrt{706}-41\sqrt{82})}{19683}$. 7) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}ln(2+\sqrt{3})$. 8) $\frac{62\pi}{3}$.

9) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$. 10) $\frac{4\pi}{243}\left(21\sqrt{13}+2ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

11) $\frac{12}{5}\pi a^2$. 12) $2\pi(\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2}))$. 13) $\frac{67}{48}\sqrt{5}\pi-\frac{\pi}{32}ln(2+\sqrt{5})-\frac{\pi}{6}$.

14) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. 16) $\frac{56}{3}\pi$. 17) $\frac{\pi}{9}(17\sqrt{17}-1)$.

Çalışma 12. 2) 18π. 3) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. 4) $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. 5) $\frac{\pi}{4}$.

6) $\frac{3\pi}{10}$. 7) $\frac{\pi(e^2+1)}{4}$. 8) $\frac{\pi^2}{2}$. 9) $\frac{17}{15}\pi$. 10) 72π. 11) 3π.

13) $\frac{11}{4}\pi$. 14) $\frac{1}{3}(1-e^{3\pi})$. 15) $5\pi^2$ 16) 64π. 17) 12π.

Çalışma 13. 1) $\frac{1}{2}ln2$. 3) $\frac{\pi}{8}$. 4) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. 6) $\frac{5}{41}$.

7) 16. 8) dağılır. 10) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 11) yığılır. 12) 2. 13) $\frac{1}{2}$. 14) dağılır.

15) $\frac{1}{2}$. 16) $\frac{1}{2}$. 17) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Çalıvşma 14. 1) dağılır. 3) dağılır. 4) yığılır. 5) dağılır. 6) dağılır. 7) dağılır. 8) dağılır. 9) dağılır. 10) yığılır.

11) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 12) dağılır. 13) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}ln2$. 15) dağılır. 16)dağılır. 17)dağılır.

Çalışma 15. 2) dağılır. 3) π. 4) $2\sqrt{2}$. 5) $-\frac{\pi}{2}ln2$. 6) dağılır.

7) dağılır. 8) yığılır. 10)) yığılır. 11) $-\frac{1}{4}$. 12) dağılır.

13) yığılır. 14) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 15) yığılır. 16) $-\frac{4}{3}$. 17) $14\frac{4}{7}$.

VIII fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $z'_x=-\frac{y}{x^2}, z'_y=\frac{1}{x}$. 2) $z'_x=-\frac{y^2}{(x-y)^2}$,

$z'_y=\frac{x^2}{(x-y)^2}$. 3) $z'_x=\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

4) $z'_x=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

5) $z'_x=\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}$, $z'_y=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{y}}$. 7) $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$z'_y=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. 8) $z'_x=e^{-xy}(1-xy), z'_y=-x^2e^{-xy}$.

9) $z'_x=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $z'_y=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

10) $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.,

$z'_y = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$. 11) $z'_x = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$,

$z'_y = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$. 12) $z'_x = y^2(1+xy)^{y-1}$,

$z'_y = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \ln(1+xy)$. 13) $z'_x = \frac{1}{x+\ln y}$,

$z'_y = \frac{1}{y(x+\ln y)}$. 14) $z'_x = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}, z'_y = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$.

16) $z'_x = 3x^2 + 5y^2,\ z'_y = 10xy - 3y^2$. 17) $z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2},\ z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

Çalışma 2. 1) $xy((2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y)dx + (4y^2x - 3yx^2 + 2x^3)dy$.

2) $\frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2}$. 3) $\frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$. 4) $\frac{4xy(xdy - ydx)}{(x^2-y^2)^2}$.

5) $\frac{xdy + ydx}{1 + x^2y^2}$. 7) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 8) $\frac{dx + 2ydy}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$.

10) $\frac{y(y^2 - x^2)dx + x(x^2 - y^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$. 15) $y(y^2 - 6xy)dx + x(x^2 - y^2)dy$.

16) $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$. 17) $(ydx + xdy)\cos xy$.

Çalışma 3. 1) $(t^2 + t)(2t+1)$. 2) $\frac{x\cos t - y\sin t}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 3) –2cht.

5) $3\frac{yt^2}{x} - 2t\ln 2x$. 6) $\frac{y + xe^t}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$. 7) $\left(3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)$

10) $\dfrac{2te^{x}+3t^{2}e^{y}}{e^{x}+e^{y}}$. 11) $2xy^{2}(y^{2}+3xt)$. 15) $4xte^{y}+x^{2}e^{y+t}$.

16) $\dfrac{3-12t^{2}}{\sqrt{1-(3t-4t^{3})^{2}}}$. 17) $e^{\sin t-2t^{3}}(\cos t-6t^{2})$.

Çalışma 4. 1) $\dfrac{2-x}{y+3}$. 2) $\dfrac{2ye^{2x}-e^{2y}}{2xe^{2y}-e^{2x}}$. 3) $\dfrac{x}{5-y}$. 4) $\dfrac{y-x^{2}}{x-y^{2}}$.

5) $\dfrac{x(y^{2}-2x^{2})}{y(2y^{2}-x^{2})}$. 6) $\dfrac{y}{1-xy}$. 7) $\dfrac{2y}{x(y-1)}$. 8) $-\dfrac{ye^{x}}{e^{x}+e^{y}}$.

9) $\dfrac{e^{x}}{y}-1$. 10) $\dfrac{x}{4y}$. 12) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1$. 16) $\dfrac{ye^{xy}-ye^{x}-e^{y}}{xe^{y}+e^{x}-xe^{xy}}$.

17) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

Çalışma 5. 1) $2ydx^{2}+4(x-y)dxdy-2xdy^{2}$.

2) $e^{xy}\left((1+xy)dx^{2}+2\left(\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y^{2}}\right)dxdy+\left(x^{2}-\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2}{y^{2}}\right)\dfrac{x}{y}dy^{2}\right)$.

4) $3\sin ydy^{2}$. 5) $\dfrac{2}{(x+y)^{3}}(xdy^{2}+2(x-y)dxdy-ydx^{2})$.

6) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x}\left(ln\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\right)^{2}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{2}}\right)dx^{2}+2\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(ln\dfrac{y}{x}-\dfrac{x-1}{x}\right)dxdy+$

$+\dfrac{x-1}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-2}dy^{2}$. 7) $-\dfrac{y}{4x\sqrt{x}}dx^{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{y\sqrt{y}}\right)dxdy+$

$+\dfrac{3x}{4y^{2}\sqrt{y}}dy^{2}$. 8) $\dfrac{-1}{4(1+xy)\sqrt{xy}}\left(\dfrac{3xy+1}{xy(1+xy)}(y^{2}+x^{2}dy^{2})-\dfrac{3xy-1}{1+xy}dxdy\right)$.

9) $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(-2xydx^2+2(x^2-y^2)dxdy+2xydy^2)$.

11) $-\frac{xdx^2+2ydxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}+\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}dy^2$.

12) $\frac{\ln x(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}dx^2+2\frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}dxdy+$

$+\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}dy^2$. 13) $\frac{(2x^2+y^2)dx^2+xydxdy+(x^2+2y^2)dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14) $\frac{1}{(x^2+y^2)}((x^2-y^2)(dy^2-dx^2)+4xydxdy)$.

15) $\frac{1}{(x^2+y^2)^2\sqrt{(x^2-y^2)^3}}(y\sqrt{2}(x^4+2x^3-y^4)dx^2+$

$+x(x^4-2x^3-y^4)dxdy-2x^2y^2dy^2)$.

16) $2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$. 17) $e^{xy}((ydx+xdy)^2+2dxdy)$.

Çalışma 6. 1) 0,98. 2) 0, 98. 3) 10,28. 4) 3,874. 5) 5,003. 6) 104,686. 7) 0,005. 8) 1,08. 11) 1,08. 12) –0,03. 13) 1,013. 14) 3,037. 15) 1,05. 16) 1,32 17) 0,01.

Çalışma 7. 1) Böhran nöqtələri: (0,0), $\left(-\frac{5}{3},0\right)$, (-1,2), (-1,-2).

2) $z_{max}=\frac{1}{64}$. 3) $z_{min}=-125$. 4) $z_{max}=4$. 5) Böhran nöqtəsi $\left(\frac{1}{2},-1\right)$. 6) $z_{min}=0$, $z_{max}=\frac{1}{e}$, x+y=1 olduqda. 7) Ekstremumu yoxdur. 8) $z_{min}=-\frac{1}{2e}$. 10) $z_{max}=15$. 12) Ekstremumu yoxdur. 13) $z_{max}=6\sqrt{3}, z_{min}=-6\sqrt{3}$. 14) $z_{min}=-\frac{2}{e}$.

15) $z_{max}=5\ln 2$. 16)(0,0).17)(2,-2).

Çalışma 8. 1) $z_{min}=2$. 2) $z_{max}=4$, $z_{min}=-4$. 4) $z_{min}=\frac{144}{25}$.

5) $z_{max}=\sqrt{2}$, $z_{min}=-\sqrt{2}$. 6) ən böyük z=1, ən kiçik z=-1.

7) z_{max}=arctğ7, z_{min}=arctğ(-5). 8) ən böyük $z=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, ən kiçik

z=0. 9) ən böyük z=1, ən kiçik $z=-\frac{1}{8}$. 11) ən böyük z=16, ən kiçik z=9.

12) $z_{max}=1$. 13) ən böyük z=2, ən kiçik z=0. 14) $z_{max}=\frac{3}{e}$, $z_{min}=0$.

15) ən böyük z=128, ən kiçik z=-4. 16) $z_{max}=4$, $z_{min}=-4$.

17) $z_{max}=\sqrt[4]{e}$.

IX fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $1+y^2=c(1-x^2)$. 2) $y=\frac{c}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}$.

3) $(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$. 4) $e^y-1=ce^{-x}$. 5) $2\sqrt{y}-\ln x+2\sqrt{x}=c$.

6) $y^2=2\ln c(1+e^x)$. 7) $y^2=c(1+e^{2x})$. 9) $y^2+2=c(1+x^2)$.

11) $x\ln y=c$. 12) $y^2+4=c(1+x^2)^5$. 13) $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+c$.

14) $x^2+y^2=\ln cx^2$. 15) $cx=\frac{y-1}{y}$. 16) $y=-\ln(c-e^x)$.

17) $y=c\sin x-1$.

Çalışma 2. 2) $y=c(x-1)\ln(x-1)$. 3) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln c\sqrt{x^2+y^2}$.

5) $xy+\sqrt{x^2+y^2}=cx^4$. 6) $y=2x+cx^3(y+x)$. 7) $y=xe^{1+cx}$.

8) $x\,ln|cy| = y$. 9) $(x-y)\,ln\,c(x-y) = 3(x-1)$.

10) $(y+1)^2=c(x-y-2)$. 11) $y=2x\,\mathrm{arctg}\,cx$. 12) $x=y(c-\ln|y|)$.

13) $y = \pm x\sqrt{2\,ln|x| + c}$. 14) $2y^2 - 3xy + \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5y = c$.

15) $(x+y-1)^3=c(x-y+3)$. 16) $x^2 = c^2 + 2cy$. 17) $x^2 + y^2 = cy$.

Çalışma 3. 1) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}$. 3) $y = 1 + ce^{-\frac{x^3}{3}}$. 4) $y = \frac{1}{2}x\,ln^2 x + cx$.

6) $y=x(c-\cos x)$. 7) $y=(c+\sin x)\cos x$. 8) $y=(c-x)x^2$. 9) $y=cx^3-x^2$.

10) $y = ln\,x + \frac{c}{x}$. 11) $y=(x+c)e^x$. 12) $y = 3 + \frac{c}{x}$.

13) $y(1+x)(c + \ln|1+x|) = 1$. 14) $y^3 - c(3x-1)^2 = 0$.

15) $y = -x - \frac{1}{2} + c\sqrt{x}$. 16) $y = e^{-x^2}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)$.

17) $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Çalışma 4. 1) $y(1+cx+2\ln x)=1$. 2) $y = \frac{cx-1}{x^2}$.

3) $y(1+cx+\frac{1}{3}\ln x)=1$. 4) $y = \frac{x^4}{4}ln^2\,cx$. 5) $y = \frac{c + ln\cos x}{x} + tgx$.

6) $y^2x^4\,ln\frac{c}{x^2} = 1$. 7) $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$. 9) $y^2(x^2 + 1 + ce^{x^2}) = 1$.

10) $= -\frac{1}{\frac{1}{3}x^5 + cx^2}$. 11) $y=cx^3-x^2$. 12) $y = 1 + \frac{ln\,ctg\frac{x}{2}}{\cos x}$.

13) $x((2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + c) = e^{\frac{1}{2}y^2}$. 14) $y = \frac{tgx + \sec x}{c + \sin x}$.

16) $\frac{1}{y^2}=ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. 17) $(x+c)y\cos x=1$.

Çalışma 5. 1) $x-\frac{y}{x}=c$. 2) $(x^2+y^2)e^x=c$. 3) $x^2+\frac{2x}{y}=c$.

4) $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=c$. 5) $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$. 6) $x-\frac{y^2}{x}=c$.

7) $x^3y^2+7x=c$. 8) $2x+ln\,y=cy$. 9) $x^4+10x^2y^2=c$.

11) $x+arctg\frac{y}{x}=c$, $x=0$. 12) $x^2+y^2=cx^3$. 14) $x^3e^y-y=c$.

15) $x^2\cos^2 y+y^2=c$. 16) $xe^y-y^2=c$. 17) $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=c$.

Çalışma 6. 1) $y=c_1\,ln\,x+c_2$, $x=0$. 3) $y=(c_1x+c_2)^2$.

4) $x^2+y^2=(x+c)^2$. 5) $y=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}x^2+c$.

6) $c_1y^2=1+(c_1x+c_2)^2$. 7) $y=-c_1\cos x+c_2-x$.

8) $y=c_1+c_2e^{-4x}$. 9) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

11) $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$. 12) $y=e^x(x-1)+c_1x^2+c_2$.

13) $y=\frac{p}{4}, x=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{\sqrt{1+p^2}+1}+c$. 14) $x=p\sin p$, $y=p^2\sin p+p\cos p-\sin p+c$. 15) $y=c_1x+c_2-x\sin x-2\cos x$.

16) $y=\frac{1}{3}x^3+c_1x^2+c_2$. 17) $y=c_1e^{c_2x}$.

Çalışma 7. 1) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-6x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{18}x-\frac{25}{108}$, $f(x)=1-x^2$ olduqda. 2) $y=(c_1+c_2x)e^{2x}-x^2-2x-\frac{3}{2}$, $f(x)=3-4x^2$ olduqda.

3) $y=e^{-x}(c_1+c_2x)+e^{-x}(4x\cos x-x^2\sin x+6\sin x)$, $f(x)=x^2e^{-x}\sin x$ olduqda. 4) $y=(c_1+c_2x)e^x+x^3+6x^2+19x+27$, $f(x)=x^3-x+1$ olduqda. 8) $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{50}x-\frac{51}{500}$, $f(x)=x^2+1$ olduqda. 9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}+2x^2-x-1$, $f(x)=24x^2+$ $+16x-15$ olduqda. 10) $y=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+e^x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\right)$, $f(x)=$ $=e^x(x^2-5x+2)$ olduqda. 11) $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+x^2-8x+7$, $f(x)=5x^2-32x+5$ olduqda. 12) $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)-$ $-e^{-x}\left(\frac{745}{11726}\cos 7x+\frac{26}{533}\sin 7x\right)$, $f(x)=2\cos 7x+3\sin 7x$ olduqda. 13) $y=e^{-x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)+3x^2+12x-36$, $f(x)=3x^2$ olduqda. 14) $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+(18-6x)e^{-x}$, $f(x)=(6-6x)e^{-x}$ olduqda. 15) $y=c_1e^{6x}+c_2e^x+e^x\left(-\frac{17}{54}\cos 2x+\frac{2}{27}\sin 2x\right)$, $f(x)=$ $=e^x(3\sin 2x-2\cos 2x)$ olduqda. 16) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+e^x$, $f(x)=2e^x$ olduqda. 17) $y=-\frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x$, $f(x)=e^{\frac{3}{5}x}\cos x$ olduqda.

X fəsilə dair

Çalışma1. 1) yığılır. 3) yığılır.4) yığılır. 5) yığılır. 6) yığılır. 7) yığılır. 8) yığılır. 10) yığılır. 11) yığılır. 12) yığılır. 13) yığılır. 14) yığılır. 15) yığılır. 16)yığılır.17)yığılır.

Çalışma2. 1) 2. 2) 1. 3) $\frac{23}{90}$. 5) $\frac{11}{96}$. 6) $\frac{1}{8}$. 7) 1. 8) $\frac{5}{16}$.

9) $\frac{43}{1080}$. 11) $\frac{3}{8}$. 12) $\frac{17}{8}$. 13) $\frac{5}{4}$. 14) $\frac{44}{9}$. 15) $\frac{59}{24}$. 16) 1.

17) $\frac{1}{4}$.

Çalışma 3. 1) dağılır. 2) dağılır. 3) dağılır. 5) yığılır. 6) yığılır. 7) dağılır. 8) yığılır. 10) dağılır. 11) yığılır. 12) dağılır. 13) dağılır. 14) yığılır. 15) yığılır. 16)yığılır.17)yığılır.

Çalışma 4. 1) yığılır. 2) dağılır. 3) yığılır. 5) yığılır. 6) yığılır. 7) dağılır.8) dağılır. 9) yığılır. 10) yığılır. 12) yığılır. 13) dağılır. 14) yığılır. 15) yığılır. 16) yığılır. 17)dağılır.

Çalışma 5. 1) Şərti yığılır. 2) Şərti yığılır. 3) mütləq yığılır. 4) mütləq yığılır. 6) Şərti yığılır. 7) Şərti yığılır. 8) dağılır. 9) Şərti yığılır. 10)) mütləq yığılır. 11) yığılır. 13) yığılır. 14) mütləq yığılır. 15) mütləq yığılır. 16) .yığılır, lakin mütləq yığılmır. 17)mütləq yığılır.

Çalışma 6. 1) $-1 \le x < 1$. 2) $|x| < \frac{e}{2}$. 4) (-∞,∞). 5) (-∞,∞). 6) [0, ∞). 7) $|x| < 1$. 8) (0, ∞). 9) $|x| < 1$. 10) (-∞,∞). 12) $x>1$, 13) $x>1$.

14) $|x - \pi k| \le \frac{\pi}{6}$, k∈z. 15) $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k∈z.

16) $-1 \le x \le 1$ .17) $x < -1$ və $x > 1$.

Çalışma 8. 2) $\frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$. 4) $\frac{2}{(1-x)^3}, |x| < 1$.

5) $\frac{3x^2}{(1-x^3)^2}, |x| < 1$. 6) $\frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - x, |x| < 1$.

7) $\frac{1}{4} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2} arctgx, |x| < 1$. 8) $\frac{x^2}{e^x - 1}, x > 0$.

9) $\dfrac{1-2x}{(1+x)^2}, |x|<1$. 10) $\dfrac{1}{(1-x)^3}, |x|<1$. 11) $\dfrac{x}{(1-x)^2}, |x|<1$.

12) $\dfrac{1}{2}(1-2x)ln(1-2x)+x, |x|<1$. 13) arctgx. 14) $\dfrac{1}{(1-x)^2}, |x|<1$.

15) $x+(1-x)\ln(1-x)$, $|x|<1$ 16) $(x+1)\ln(x+1)-x$.

17) $\dfrac{1}{2}arctgx+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

Çalışma 9. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, (-\infty,\infty)$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n-1)!}, (-\infty,\infty)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}\, sin\dfrac{n\pi}{4}\dfrac{x^n}{n!}, (-\infty,\infty)$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}, (-\infty,\infty)$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n}, [-1,1]$. 7) $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\cdot 5...(3n-4)}{3^n n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{3n}, (-1,1)$.

9) $x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+..., (-1,1)$. 10) $x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{40}x^5+..., (-1,1)$.

11) $x+x^2-\dfrac{x^3}{3}+..., [-1,1]$. 12) $1-x^3+x^6-...$, $(-1,1)$. 13) $1-x+$ $+\dfrac{1}{2}x^2+..., (-1,1)$. 15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{n!}, (-\infty,\infty)$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $-\infty<x<\infty$. 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x^{2n-1}}{2n-1}, -1<x<1$.

XI fəsilə dair

Çalışma 1. 1) Sadəlik üçün ancaq inteqrallma sırasının dəyişməsini yazaq. 1) $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}dx+\int\limits_{0}^{8}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}dx$. 3) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{1-y}}^{1}dx$.

5) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy$. 6) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} dx$. 7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 dx$. 8) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} dx$.

9) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} dx$. 10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy$. 11) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy$.

12) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} dx$. 13) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_o^{3-x} dy$. 14) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 dx$.

15) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x^3} dy$. 16) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy$. 17) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx$.

Çalışma 2. 1) $\frac{7}{6}$. 3) $\frac{\pi}{12}$. 4) π-2. 5) 2. 6) $\frac{\pi^2}{4}$.

7) $(e-1)(e^{\pi}-1)$. 8) –2. 9) $\frac{1}{12}$. 10) $\frac{1}{3}$. 11) $ln\frac{4}{3}$.

12) $\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-4\sqrt{2}-\frac{1}{2})$. 13) –6. 15) $ln\frac{25}{24}$. 16)1.17)$(e-1)^2$.

Çalışma 3. 1) $\frac{7}{15}$. 2) -$\frac{1}{504}$. 3) $\frac{64}{3465}$. 4) –1. 5) π. 6) $\frac{64}{3}$.

7) $\frac{33}{140}$. 9) $\frac{145}{128}-ln2$. 10) 0. 11) $\frac{1}{3}$. 13) $\frac{16}{3}$. 14) $\frac{5}{108}$.

15) $\frac{1}{2}$. 16)$\frac{1}{2}$. 17)$\frac{9}{4}$.

Çalışma 4. 1) $\frac{4}{15}\pi R^5$. 2) $\frac{1}{180}$. 3) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$. 4) $\frac{\pi}{6}$. 7) $\frac{1}{48}$.

8) $\frac{1}{2}$. 9) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. 10) 11. 11) 3. 12) $\frac{1}{12}$. 13) 30. 14) 4. 15) $\frac{7}{192}$.

16) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. 17) $\frac{4}{3}\pi abc$.

Çalışma 5. 1) $\frac{1}{2}$. 2) 24. 3) $\frac{15}{2} - 4ln4$. 4) 4. 5) $\frac{16}{3}$. 6) $\frac{1}{3} + 2ln2$.

8) $\frac{64}{3}$. 9) 5. 10) $\frac{4}{3}$. 11) $\frac{1}{2}(e-1)^2$. 12) $\frac{800}{3}$. 13) $3ln\frac{5}{2}$.

15) $2-\sqrt{2}$. 16)2. 17) πab.

Çalışma 6. 2) $\frac{1}{6}$. 3) 12. 5) 22π. 6) $12\frac{4}{21}$. 7) $\frac{256}{15}$. 8) 27.

9) $\frac{3}{8}$. 10) 3e-9. 11) 40π. 12) 2π. 13) 4. 14) 90. 15) $\frac{79}{60}$.

16) $186\frac{2}{3}$. 17) $78\frac{15}{32}$.

Çalışma 7. 1) 8. 2) $\frac{19}{6}\pi$ və $\frac{15}{2}\pi$. 4) $\frac{4}{3}\pi$. 5) $\frac{7}{12}$. 6) $\frac{\pi}{8}$.

7) $\frac{81}{4}\pi$. 8) $\frac{163}{6}$. 9) $133\frac{1}{3}\pi$. 10) $\frac{\pi}{96}$. 12) $\frac{\pi}{2}$. 13) 16.

14) $\frac{4}{3}\pi abc$. 15) $\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$. 16) $\frac{3}{35}$. 17) $\frac{\pi}{6}$.

Çalışma 8. 1) $2\sqrt{2}\pi$. 2) 8π. 3) $48\sqrt{2}$. 4) $\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

5) $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$. 6) $8(\pi+4-4\sqrt{2})$. 7) $16\pi(4-\sqrt{7})$. 9) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi$.

10) 13. 11) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$. 12) $72(\pi-2)$. 13) 32. 14) 36π.

16) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. 17) $\frac{16\pi}{3}$.

Çalışma 9. 2) $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. 3) $\frac{\pi(|\alpha|+1)}{4}e^{-|\alpha|}$. 4) 0. 5) $\pi\, ln\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}$.

7) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. 8) arctg$\frac{\beta}{\alpha}$. 9) α<0 olduqda -$\frac{\pi}{2}$, α=0 olduqda 0, α>0 olduqda $\frac{\pi}{2}$. 10) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. 11) $\frac{1}{2}arctg\alpha\, ln(1+\alpha^2)$.

12) πarcsinα. 13) $\frac{\pi}{2}ln(1+\sqrt{2})$. 14) πα. 15) $\pi\, ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

16) $\frac{arctg\alpha}{\alpha}$. 17) $\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$.

Çalışma 10. 1) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 4) $\frac{2}{27}\pi^2$. 5) $\frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{10}}$.

6) $\frac{128\Gamma^2(3)}{\Gamma(6)}$. 7) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. 8) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. 9) $\frac{\Gamma(1)\Gamma(7)}{6\Gamma(8)}$. 10) $ln\frac{tg\frac{\alpha\pi}{2}}{tg\frac{\beta\pi}{2}}$.

11) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 12) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$. 13) $\sqrt{\pi}$. 15) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 16) $\frac{\pi}{16}$. 17) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

XII fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $\sqrt{5}\,ln2$. 2) 24. 3) $2\pi a^7$. 4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 6) $\frac{2152}{45}$.

7) $2a^2$. 9) -5$\sqrt{2}$. 10) $ln\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$. 11) $\frac{3}{4}$. 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}ln2$.

13) $\frac{1}{54}(730\sqrt{730}-1)$. 14) $ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 15) $\frac{a^2}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3}-1\right)$

16) 2. 17) $\frac{31}{30}$.

Çalışma 2. 1) $-\frac{58}{15}$. 2)2. 3) $\frac{16}{3}$. 4) 8. 5) 0. 6) 0. 8) 4π. 10) 17,5. 11) 0. 12) $\frac{31}{30}$. 13) $-\frac{8}{15}$. 15) 0. 16)24. 17) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$.

Çalışma 3. 1) $3\pi R^2$. 2) $\frac{\pi p^2}{4}$. 3) R^2. 4) $\frac{11}{3}$. 5) $\frac{98P^2}{81}$. 6) $4R^2$. 7) πab. 9) $\frac{1+3\ln 2}{24}$. 11) $2a^2$. 12) $6\pi a^2$. 13) $3\pi a^2$. 14) $\frac{8}{15}$. 15) $\frac{3}{2}a^2$. 16) $\frac{4}{3}$. 17) $\frac{8\pi}{3}$.

Çalışma 4 1) $z=(x+1)\ln(x+1)-x+xy+y-e^y+c$. 3) $z=\frac{1}{3}(x^3+y^3)+c$. 4) $z=x^3y+x-y+c$. 5) $z=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+c$. 6) $z=x^3y-y^3x+c$. 7) $z=\frac{1}{3}x^3y^4+c$. 8) $z=(x^2-y^2)^2+c$. 9) $z=xe^{xy}+c$. 10) $z=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+c$. 11) $z=x^2\cos y+y^2\cos x+c$. 12) $z=\frac{x-y}{(x+y)^2}+c$. 13) $z=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5+c$. 14) $z=-\frac{y}{x}+c$. 16) $z=c-\cos(x+y)$. 17) $z=arctg\frac{y}{x}+c$.

Çalışma 5. 2) $\frac{\pi R^3}{4}$. 3) 0. 4) πR^3. 5) $\frac{2\pi R^6}{15}$. 6) $ah(4a+\pi h)$. 7) $\frac{\pi}{6}((1+4R^2)^{\frac{3}{2}}-1)$. 8) 0. 9) $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$. 10) $\frac{29\sqrt{2}}{8}\pi$.

12) $\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1)$. 13) $\frac{1}{2}$. 14) $\frac{7}{\sqrt{2}}\pi$. 15) πR^3.

16) $4\sqrt{61}$. 17) $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

Çalışma 6. 1) –3. 2) $4\pi R^3$. 3) $\frac{1}{3}\pi a^4$. 4) $-\frac{1}{6}$. 5) $\frac{1}{2}\pi a^4$. 6) 0.

7) $\frac{4}{3}\pi R^3$. 9) π. 10) $-\frac{2}{3}\pi R^3$. 12) $\frac{8}{3}\pi a^4$. 13) $\frac{1}{3}\pi a^4$. 14) $\frac{1}{3}\pi a^4$.

15) $\frac{8\sqrt{15}}{3}\pi$. 16) $\frac{2\pi R^7}{105}$. 17) $\frac{4}{3}\pi abc$.

XIII fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $2\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$. 3) $3\sin\frac{4\pi x}{l}\cos\frac{4\pi at}{l}$.

5) $4\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi at}{l}$. 8) $5\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi at}{l}$. 11) $4\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$.

15) $\frac{160l}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}$.

16) $\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{a\pi t}{2l}$. 17) $\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left(\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right)$.

Çalışma 2. 1) $4e^{-4a^2t}\sin 3x$. 2) $2e^{-a^2t}\sin x$. 3) $3e^{-4a^2t}\sin 2x$.

5) $2e^{-25a^2t}\sin 5x$. 7) $3e^{-4a^2t}\cos 2x$. 9) $\frac{1}{\sqrt{1+2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{2+4a^2t}}$.

11) $\frac{1}{\sqrt{1+16a^2t}}e^{-\frac{4x^2}{1+16a^2t}}$. 13) $3e^{-16a^2t}\sin 4x$.

14) $\frac{1}{\sqrt{1+36a^2t}}e^{-\frac{9x^2}{1+36a^2t}}$. 16) $\frac{2}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}$.

17) $\frac{2}{\sqrt{a^2t+1}}e^{-\frac{x^2}{4(a^2t+1)}}$.

XIV fəsilə dair

Çalışma 1. 1) $x_k = ctg\frac{k\pi}{n}, k \in z$. 2) $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in z$.

3) $z_k = (2k - \frac{1}{2})\pi i, k \in z$. 4) $z_k = (2k+1)\pi \pm i\ln 2, k \in z$.

5) $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3, k \in z$. 6) x=0.

7) $z_{2k} = 2k\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1} - \pi), z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1} + \pi), k \in z$.

8) $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm \sqrt{8}), k \in z$. 9) z=1-i. 10) z=i-e.

11) $z_k = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, k∈z. 12) $zk = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, k \in z$.

13) $z_k = ln(1+\sqrt{2}) + (2k+\frac{1}{2})\pi i, z_k = ln(\sqrt{2}-1) + (2k-\frac{1}{2})\pi i, k \in z$.

16) $-(1+\sqrt[3]{2}), -1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$. 17) $5, -3, 1 \pm 4i$.

Çalışma 2. 3) (1+z)e^z. 4) $\frac{1}{3}cos\frac{z}{3}$. 5) chz. 6) $\frac{2}{z}$. 7) analitik deyil. 8) analitik deyil. 9) –sinz. 10) thz.11) $\frac{1}{\cos^2 z}, z(k+\frac{1}{2})\pi, k \in z$.

12) $e^{z}(1-z)$. 13) $\frac{e^z(z-1)}{z^2}, z\neq 0$. 14) $\frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}$, $z_{1,2}\neq\pm i$. 15) $-\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}, z_k = 2\pi ki, k\in z$. 16) $f'(z)=e^z$ (bütün müstəvidə analitikdir). 17) $f'(z)=3x^2-3y^2+6xyi$ (bütün müstəvidə analitikdir) .

Çalışma 3. 1) i. 2) e(ecos8-cos1)+ie(esin8-sin1). 3) 2(i-1). 5) –2(1+3i). 6) $2\pi i$. 8) 7+19i. 9) $(e^{\pi}+1)i$. 10) $-7e^{-2}+(3-2i)e^{i}$.

11) $-\frac{1}{2}+\sin 1+i(-1+\cos 1)$. 12) n=1 olduqda 0, n=1 olduqda 2πi. 13) –1+ch1. 14) 1. 15) 1. 16) $-\frac{8}{3}$. 17) $\frac{1-e}{e}$.

Çalışma 4. 2) $-\frac{\pi^2}{2}i$. 3) $\frac{\pi}{3}(-\sin 1+i\cos 1)$. 4) $-\pi$i. 5) 2πi. 6) 0. 7) 0. 8) $-4\pi \mathrm{ch}2i$. 9) $2\pi i$ sh1. 10) $2\pi \mathrm{sh}\pi$. 11) 0. 13) 0. 14) $-\pi$. 15) $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. 16) $-\frac{\pi i}{4}$. 17) πi.

Çalışma 5. 1) Resf(1)=1. 3) Resf(-1)=$-\frac{17}{54}e$, Resf(2)=$\frac{e^2}{27}$.

4) Resf(i)=$-\frac{i}{2}$, Resf(-i)=$\frac{i}{2}$ .5) Resf(0)=-5, Resf(1)=e.

6) Resf(2)=5. 7) Resf(i)=$\frac{1}{4}$, Resf(-i)= $\frac{1}{4}$. 8) Resf(0)=1, Resf(1)=$\frac{1}{2}$, Resf(-1)= $\frac{1}{2}$. 9) Resf(0)=0.

10) Resf($\sqrt{2,5}$) = $\frac{1}{2}\sqrt{2,5}$, Resf (-$\sqrt{2,5}$)=$-\frac{1}{2}\sqrt{2,5}$.

11) $\operatorname{Resf}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Resf}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}$. 13) $\operatorname{Resf}\,(i\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$,

$\operatorname{Resf}\left(i\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$, $\operatorname{Resf}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}e^{i\frac{9\pi}{4}}$,

$\operatorname{Resf}\left(-i\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 14) Resf(0)=0, $\operatorname{Resf}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16}{\pi^2}sin\frac{\pi^2}{16}$,

15) $\operatorname{Resf}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. 16) $\operatorname{Re}sf(0)=0$. 17) $\operatorname{Re}sf(0)=0$,

$\operatorname{Re}sf\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}$.

Çalışma 6. 2) $\frac{4}{3}\pi$. 3) $\frac{\pi}{30}$. 5) $\frac{3\pi}{8}$. 6) $-\frac{\pi}{16}$. 7) $\pi\sqrt{2}$. 8) $-\frac{3\pi}{8}$.

9) $\frac{\pi}{16}$. 10) 0. 11) $\frac{\pi}{8}(1-e^{-4})$. 12) $\frac{\pi}{4}e^{-1}$. 13) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}$.

14) $\frac{\pi}{4}e^{-2}$. 15) $\frac{\pi}{2}e^{-9}$. 16) $\frac{3\pi}{8}$. 17) $\frac{2\pi}{3}$.

XV fəsilə dair

Çalışma 1. 2) $\frac{2}{(p+1)^3}$. 3) $\frac{18}{p(p^2+36)}$. 4) $\frac{8}{p(p^2+16)}$.

5) $\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$. 6) $\frac{1}{p+\alpha}$. 7) $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}6$.

8) $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$. 9) $\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}6$. 10) $\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$.

12) $\dfrac{2}{(p-1)^3}$. 13) $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. 14) $\dfrac{4}{p^2+16}$.

15) $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. 16) $\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$. 17) $\dfrac{p^3+7p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

Çalışma 2. 2) $\dfrac{3}{25}+\dfrac{t}{5}-\dfrac{3}{25}e^{-t}co2t+\dfrac{4}{25}e^{-t}\sin 2t$.

3) $(1+t)e^{-t}+t^2-4t+6$. 4) $(1+t+\dfrac{t^2}{2})e^{-t}$.

5) $(1+2t)e^{-t}-t^2+4t-5$. 6) $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$.

7) $-\dfrac{6}{25}+\dfrac{3}{5}t+\dfrac{3}{25}e^{-t}\cos 2t+\dfrac{8}{25}e^{-t}\sin 2t$.

9) $\dfrac{2}{25}e^{-2t}-\dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{14}{25}\sin t-\dfrac{1}{5}t\sin t-\dfrac{2}{5}t\cos t$.

10) $\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$. 11) $e^{t}\cos t-\dfrac{1}{3}\cos 2t+\dfrac{1}{6}\sin 2t$.

12) $\cos 2t-\sin 2t+\dfrac{1}{4}xin2t$. 13) $\dfrac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\dfrac{1}{3}e^{-3t}$.

14) $1-2\cos t$. 15) $1+\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{2}e^{-2t}-\dfrac{2}{5}\cos t-\dfrac{1}{5}\sin t$.

16) $y=e^x+x^2$. 17) $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

XVI fəsilə dair

Çalışma 1. 1) 0,046. 3) 0,97. 4) 0,32. 5) 0,064. 6) 0,00024. 7) 0,77. 8) 0,66. 9) 0,28. 10) 0,37. 11) 0,92. 12) 0,0186. 13) 0,32. 14) 0,218. 15) 0,028. 16) 0,633. 17) 0,97.
Çalışma 2. 2) 0,0041. 3) 0,8882. 4) 0,0782. 5) 0,242. 6) 400. 7) 0,9948. 8) 0,147. 11) 0,99905. 12) 0,0206. 13) 15100.

14) 0,0101. 16) 0,117. 17) 0,288.
Çalışma 3. 1) 4.MX=1; DX=0,5; MY=3,5; DY=2,917.

3) MX=$\frac{N}{2}$, DX=$\frac{N}{6}+\frac{N^2}{12}$. 5) MX=$\frac{p}{1-p}$, DX=$\frac{p+p^3}{(1-p)^3}$.

9) MX=$e^{a+\frac{1}{2}\sigma^2}$. 10) MX=$\frac{\pi}{2}$, DX=$\frac{\pi^2}{4}-2$. 11) MX=$\frac{n}{2}$, DX=$\frac{n}{4}$. 12) $MX_1=\frac{1}{4}$, $MX_2=\frac{1}{4}$, $MX_1X_2=\frac{2}{33}$. 13) MX=1,75.

14) $MX_i=\frac{1}{5}$, $i=\overline{1,8}$; MX=1,6. 15) $M(X_1+X_2)=7$, $M(X_1+X_2+X_3)=10,5$; $\sigma(X_1+X_2)=2,42$; $\sigma(X_1+X_2+X_3)=2,96$.
16) $P(0<X<1)=0,316$. 17) $MX=3,5$, $\sigma(X)=1,71$.

Ə.Əliyev
F.Ələkbərova
Q.Cəfərova

Ali riyaziyyata aid çalışmalar

İxtisas redaktoru: Rafiq Əsədullayev

Yığılmağa verilmiş 10.04.2003
Çapa imzalanmış 12.05.2003
Ç.v. 23,125. Format 60x84$^1/_{16}$.
Ofset kağızı №1. Tiraj: 500

"R.N.NOVRUZ-94" nəşriyyatı
"R.N.NOVRUZ-94" mətbəəsi
Bakı ş., Tolstoy küçəsi 175.